PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN PELLAUMAIL

Une preuve de l'existence d'un relèvement

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1970-1971, fascicule 1
« Probabilités », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1970-1971___1_1_0>

UNE PREUVE DE L'EXISTENCE D'UN RELEVEMENT *

A - 1 : Introduction :

Le but essentiel de cette première partie est de prouver le théorème A - 7, c'est-à-dire l'existence d'un relèvement (lifting) dans le cas où la mesure considérée est σ-finie et complète.

La méthode générale utilisée est celle des "densités", méthode introduite par von NEUMANN dans [8] et reprise, dans le cadre général, par MAHARAM dans [5] . Cette méthode n'utilise pas le théorème de Krein-Milmann (contrairement à la méthode proposée dans [3] par A.et C. IONESCU-TULCEA). Par contre, pour alléger la démonstration, nous utiliserons un cas particulier du théorème de convergence des martingales (cf., par exemple, [7] - V - T17 - a)).

De façon plus précise, nous utiliserons les techniques proposées dans [7] - VIII - 11 et dans [10] - théorème 5. Dans [7] - VIII - 11, on ne prouve pas la "multiplicativité" du relèvement : en particulier, on ne prouve pas que le relèvement d'une fonction indicatrice est une fonction indicatrice. Dans [10] on n'utilise pas le théorème de convergence des martingales et on prouve un théorème plus général que celui énoncé ici : par contre, la démonstration complète est nettement plus longue que celle proposée ici.

* Par Jean PELLAUMAIL, Maître-Assistant, à l' I. N. S. A. de Rennes.
Novembre 1970.

Nous utiliserons le plan suivant :

2 - Définition d'un relèvement.

3 - Définition d'une algèbre de relèvement associée à un relèvement.

5 - Equivalence entre l'existence d'un relèvement et d'une algèbre de relèvement.

4 - On peut toujours prolonger une algèbre de relèvement qui n'est pas "maximale".

6 - L'existence d'une "densité inférieure" implique l'existence d'une algèbre de relèvement.

7 - Existence d'un relèvement (théorème fondamental).

~~A~~ - 2 : Définition d'un relèvement (lifting).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré. On appelle relèvement une application ρ de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\rho(1_\Omega) = 1_\Omega$

(ii) $\rho(f)$ appartient à la classe d'équivalence de f pour l'égalité presque sûre.

(iii) $\rho(f + \lambda g) = \rho(f) + \lambda\, \rho(g)$

(iv) $\rho(f.g) = \rho(f) . \rho(g)$

(v) $f \geqslant 0 \Rightarrow \rho(f) \geqslant 0$

~~A~~ - 3 : Algèbre de relèvement (lemme et définition).

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré et ρ un relèvement défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$. Alors, pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $\rho(1_A)$ est une fonction indicatrice : de plus, si on pose $1_{\rho'(A)} = \rho(1_A)$, $\rho'(\mathcal{F})$ est une algèbre satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $A \in \rho'(\mathcal{F})$ et $m(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists B \in \rho'(\mathcal{F})$ avec $m(A \,\Delta\, B) = 0$

Si une algèbre satisfait à ces deux conditions, on dira que c'est une <u>algèbre de relèvement</u> relativement à $(\Omega, \mathcal{F}, m)$.

Preuve :

Soit A élément de $\mathcal{F}$. On a $\rho(1_A) + \rho(1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_\Omega) = 1_\Omega$

et $\rho(1_A) . \rho(1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_A . 1_{\Omega \setminus A}) = \rho(1_\emptyset) = 1_\emptyset$

Donc $[\rho(1_A)](\omega) \neq 0 \Longrightarrow [\rho(1_{\Omega \setminus A})](\omega) = 0 \Rightarrow [\rho(1_A)](\omega) = 1$

Donc $\rho(1_A)$ est une fonction indicatrice.

De plus, $1_B = \rho(1_A)$ et $m(B) = 0 \Rightarrow m(A) = 0 \Rightarrow \rho(1_A) = 1_\emptyset$

ce qui prouve (i). Enfin, soit A élément de $\mathcal{F}$ et

$1_B = \rho(1_A) \Rightarrow m(A \Delta B) = 0$ ce qui prouve (ii).

A - 4 . Proposition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré, la mesure m étant supposée positive et finie. Soit $\mathcal{N}$ la famille des ensembles de mesure nulle. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre contenue dans $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{A} \cap \mathcal{N} = \{\emptyset\}$ et telle que la tribu $\mathcal{G}$ engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est une algèbre de relèvement relativement à $(\Omega, \mathcal{G}, m)$. Si $\mathcal{G}$ est distincte de $\mathcal{F}$, il existe une algèbre $\mathcal{B}$ contenue dans $\mathcal{F}$, contenant $\mathcal{A}$ et distincte de $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \{\emptyset\}$ et telle que la tribu $\mathcal{H}$ engendrée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est une algèbre de relèvement relativement à $(\Omega, \mathcal{H}, m)$).

Preuve : Soit B un élément de $(\mathcal{F} \setminus \mathcal{G})$. Soit c (resp d) la borne supérieure (resp inférieure) des m(A) pour A élément de $\mathcal{G}$ et A contenu (resp. contenant) presque sûrement B. Puisque $\mathcal{G}$ est une tribu, il existe C' et D' éléments de $\mathcal{G}$ tels que ces bornes c et d soient atteintes, donc il existe C et D éléments de $\mathcal{A}$ tels que $m(C) = c$, $m(D) = d$ et C (resp. D) est contenu (resp. contient) presque sûrement B.

Soit $B' = [(B \cup C) \cap D]$. On a $m(B \Delta B') = 0$. Soit $\mathcal{A}'$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et B'. On a $\mathcal{A}' \cap \mathcal{N} = \{\emptyset\}$: en effet, H appartient à $\mathcal{A}'$ si et seulement si $H = (E \cap B') \cup (F \setminus B')$ avec E et F éléments de $\mathcal{A}$; si $m(H) = 0$, on a $m(E \cap B') = 0$ et donc $E \cap B' = \emptyset$ (par définition de d) ; de même $m(F \setminus B') = 0$ implique $F \subset B'$ (par définition de c) donc $H = \emptyset$.

Par ailleurs, la tribu engendrée par $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{N}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, $\mathcal{N}$ et B'. Enfin $\mathcal{A}'$ contient $\mathcal{A}$ (il suffit de prendre E = F dans la définition de H précédente) et $\mathcal{A}'$ est distincte de $\mathcal{A}$ car $\mathcal{A}'$ contient B' et B' n'appartient pas à $\mathcal{A}$ puisque B n'appartient pas à $\mathcal{C}$ et que $m(B \,\Delta\, B') = 0$

C. Q. F. D.

5 : Proposition (cf. [4] définition 3 page 36).

Soit (Ω , $\mathcal{F}$, m) un espace mesuré et $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de Ω , contenue dans $\mathcal{F}$ et telle que :

(i) A $\in$ $\mathcal{A}$ et m(A) = 0 implique A = $\emptyset$

(ii) A $\in$ $\mathcal{F}$ implique qu'il existe B $\in$ $\mathcal{A}$ tel que m(A Δ B) = 0.

Alors il existe un relèvement (unique) ρ défini sur L^∞ (Ω , $\mathcal{F}$, m) et tel que $\rho(1_A) = 1_A$ si A appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve :

Soit $\mathcal{E}$ la famille des fonctions étagées appartenant à L^∞ (Ω , $\mathcal{F}$,m). $\mathcal{E}$ est dense dans L^∞ (Ω, $\mathcal{F}$, m) pour la norme $||\cdot||_\infty$. Etant donné $f = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{A_i}$ élément de $\mathcal{E}$, soit $\rho(f) = \sum_{i=1}^{k} a_i 1_{B_i}$ avec, pour tout i, B_i élément de $\mathcal{A}$ et $m(B_i \, \Delta \, A_i) = 0$. On vérifie immédiatement que $\rho(f)$ ne dépend pas de l'écriture de f. De plus $||\rho(f)||_\infty = ||f||_\infty$ donc l'application ρ est continue, donc elle se prolonge, de façon unique, en une application ρ définie sur L^∞ (Ω , $\mathcal{F}$, m). Ce prolongement est linéaire et multiplicatif puisqu'il est linéaire et multiplicatif sur $\mathcal{E}$ (vérification immédiate).

6 : Proposition (cf. [10] théorème 5).

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une algèbre de parties de Ω . Soit $\mathcal{N}$ une famille de parties de Ω, contenue dans $\mathcal{F}$, stable pour la réunion finie et héréditaire (c'est-à-dire que {A $\in$ $\mathcal{N}$ et B $\subset$ A $\Rightarrow$ B $\in$ $\mathcal{N}$). Soit d une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que, quels que soient A et B éléments de $\mathcal{F}$

(i) $[\, d(A) \ \Delta \ A \,] \in \mathcal{N}$

(ii) $[\, A \ \Delta \ B \,] \in \mathcal{N} \Rightarrow d(A) = d(B)$

(iii) $d(A \cap B) = d(A) \cap d(B)$

(iv) $d(\emptyset) = \emptyset$

(v) $\{\Omega \setminus [\, d(A) \cup d(\Omega \setminus A) \,]\} \in \mathcal{N}$

Cette condition (v) est satisfaite si $\mathcal{N}$ est la famille des ensembles de mesure nulle pour une mesure m.

Alors il existe une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de $\mathcal{F}$ telle que :

(i)' $A \in \mathcal{A} \Rightarrow d(A) \subset A$

(ii)' $\forall A \in \mathcal{F} \quad \exists A' \in \mathcal{A}$ avec $(A \Delta A') \in \mathcal{N}$

De plus, si $d(\Omega) = \Omega$, on a :

(iii)' $\mathcal{N} \cap \mathcal{A} = \{ \emptyset \}$

Preuve :

Notons d'abord que (i)' et $d(\Omega) = \Omega$ implique (iii)'.

En effet, $A \in \mathcal{N} \Rightarrow \Omega \Delta (\Omega \setminus A) \in \mathcal{N} \Rightarrow d(\Omega \setminus A) = d(\Omega) = \Omega$

donc, $A \in \mathcal{A} \Rightarrow (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega = d(\Omega \setminus A) \subset (\Omega \setminus A) \subset \Omega$

soit $\Omega \setminus A = \Omega$ soit $A = \emptyset$.

Notons à ce sujet, que le théorème 5 de [10] est inexact

puisqu'on ne suppose pas $d(\Omega) = \Omega$.

Par ailleurs, soit X la famille des algèbres $\mathcal{B}$ satisfaisant à la condition (i)'. X n'est pas vide puisque $\{\emptyset, \Omega\} \in X$. Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une chaîne maximale dans X pour la relation d'inclusion; alors, $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ est un élément maximal donc (lemme de Zorn) X possède un élément maximal soit $\mathcal{C}$. On veut prouver que $\mathcal{C}$ satisfait à (ii)'. Soit donc $A \in \mathcal{F}$. On pose $A' = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} [d(C \cup A) \setminus C]$. On veut prouver $A' \in \mathcal{C}$ et $(A \Delta A') \in \mathcal{N}$ (ce qui prouvera (ii)').

Pour cela, nous allons raisonner en plusieurs étapes : Soit $A^c = \Omega \setminus A$

1°) Si on pose $(A^c)' = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} [d(C \cup A^c) \setminus C]$ on a $(A^c)' \cap A' = \emptyset$

En effet, si H et K appartiennent à $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
[d(H \cup A) \setminus H] \cap [d(K \cup A^c) \setminus K] &= d(H \cup A) \cap d(K \cup A^c) \cap H^c \cap K^c \\
\text{soit, d'après (iii),} \quad &= d[(H \cup A) \cap (K \cup A^c)] \cap (H \cup K)^c \\
&\subset d(H \cup K) \cap (H \cup K)^c \\
\text{soit, d'après (ii)',} \quad &= \emptyset
\end{aligned}$$

2°) $d(A) \subset A'$ puisque $\emptyset \in \mathcal{C}$ et par définition de A'. De même $d(A^c) \subset (A^c)'$. Donc $[A' \setminus d(A)] \in \mathcal{N}$ d'après (v) et d'après

$[A' \setminus d(A)] \subset \Omega \setminus [d(A) \cup d(A^c)]$ (cf. 1°)

On a donc $(A \Delta A') \in \mathcal{N}$ (cf.(I)).

3°) Si F appartient à $\mathcal{C}$. $d(F \cup A) \subset (F \cup A')$ (par définition de A'). De même, $d(F \cup A^c) \subset [F \cup (A^c)']$.

4°) Soit $\mathcal{C}'$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ et A', c'est-à-dire la famille des $H = (A' \cap E) \cup (F \setminus A')$ avec E et F éléments de $\mathcal{C}$. On a

$$\begin{aligned}
d(H) &= d\,[(A \cap E) \cup (F \setminus A)] && \text{d'après (ii) et } (A \,\Delta\, A') \in \mathcal{N} \text{ cf } 2°) \\
&= d\,[(E \cup A^c) \cap (F \cup A)] \\
&= d(E \cup A^c) \cap d(F \cup A) && \text{d'après (iii)} \\
&\subset [E \cup (A^c)'] \cap (F \cup A') && \text{d'après le } 3°) \\
&\subset [E \cup (A')^c] \cap (F \cup A') && \text{d'après le } 1°) \\
&= (E \cap A') \cup (F \setminus A') = H && \text{ce qui prouve (I)'}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{C}'$ appartient à X et $\mathcal{C}'$ contient $\mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ (puisque $\mathcal{C}$ est un élément maximal) donc A' appartient à $\mathcal{C}$ ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème</u> (cf [7] théorème VIII - 11 page 195)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré dont la mesure est supposée positive, σ-finie et complète. Alors il existe un relèvement défini sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$.

<u>Preuve</u> :

Soit $(A_n)_{n>0}$ une partition $\mathcal{F}$-mesurable et dénombrable de Ω telle que, pour tout n, $m(A_n) < +\infty$. Soit $\mathcal{F}_n$ la famille des éléments de $\mathcal{F}$ qui sont contenus dans A_n. Supposons que, pour tout n, on sache construire un relèvement ρ_n défini sur $L^\infty(A_n, \mathcal{F}_n, m)$. Etant donné f élément de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$, on pose :

$$\rho(f) = \sum_{n>0} \rho_n(f.\,1_{A_n})$$

Alors, on vérifie immédiatement que ceci définit un lifting sur $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, m)$. Autrement dit, il suffit de prouver l'existence d'un lifting dans le cas où la mesure m est finie <u>ce que nous supposerons désormais</u>.

Soit $\mathcal{N}$ la famille des éléments de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Soit Y la famille des algèbres $\mathcal{A}$ contenues dans $\mathcal{F}$, telles que

$\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^{\rho} = \{\emptyset\}$, et telles que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ soit contenue dans l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^{\rho}$. Cette famille Y n'est pas vide puisqu'elle contient $\{\emptyset, \Omega\}$. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une "chaine" (chaîne pour la relation d'inclusion) maximale dans Y. On veut, d'abord, prouver que cette chaine admet un élément maximal.

<u>1er cas</u> :

Supposons que I n'admette pas de suite cofinale. Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Si A appartient à la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, il appartient à la tribu engendrée par l'un des $\mathcal{A}_i$ et donc à l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^{\rho}$. Donc $\mathcal{A}$ est un élément maximal.

<u>2ème cas</u> :

Supposons que I admette une suite cofinale et soit $(\mathcal{A}_n)_{n > 0}$ la suite déléments de Y associée. Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{n > 0} \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{G}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}^{\rho}$. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{N}^{\rho}$: par définition de Y, $\mathcal{F}_n$ coïncide avec l'algèbre engendrée par $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{N}^{\rho}$: on peut donc appliquer la proposition A - 5 c'est-à-dire qu'il existe un lifting ρ_n défini sur $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}_n, m)$ tel que, $\rho_n(1_A) = 1_A$ si $A \in \mathcal{F}_n$ Pour tout élément A de $\mathcal{G}$, soit :

$g_n(A) = \rho_n \left[E(1_A \mid \mathcal{F}_n) \right]$. Alors g_n est une martingale, ([7] - V - 17) par conséquent $g_n(A)$ converge presque surement vers 1_A. Posons :

$d(A)$ = domaine où "$\liminf g_n(A) = 1$" = domaine où $[\lim_{n\to\infty} g_n(A) = 1]$

Compte tenu de $0 \leqslant g_n(A) = 1 - g_n(\Omega \setminus A) \leqslant 1$, on vérifie immédiatement que d satisfait, relativement à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{N}^{\rho}$, aux conditions (i) à (v) de la proposition A-6 : en particulier, la condition (iii) découle de ce que $1_{A \cap B} \leqslant 1_A$ donc $d(A \cap B) \subset d(A) \cap d(B)$ réciproquement $1_{A \cap B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cup B}$; si ω appartient à $d(A) \cap d(B)$ cela implique que $\lim[g_n(A)](\omega) = 1$ et $\lim[g_n(B)](\omega) = 1$ donc $\lim g_n(A \cup B)(\omega) = 1$ donc $\lim g_n(A \cap B)(\omega) = 1$ donc ω appartient à $d(A \cap B)$. On a donc bien $d(A \cap B) = d(A) \cap d(B)$.

D'après la proposition A - 6, on sait donc qu'il existe une algèbre $\mathcal{A}'$ satisfaisant aux conditions (I)',(II)' et (III)' de cette proposition A - 6. Cette algèbre contient toutes les algèbres $\mathcal{A}_n$ puisque, si A appartient à $\mathcal{A}_n$, d(A) = A. On a donc prouvé l'existence d'un élément maximal $\mathcal{A}'$ dans le 2ème cas.

Il résulte alors de la proposition A - 4 que la tribu engendrée par cet élément maximal et par $\mathcal{N}^{\partial}$ coïncide avec $\mathcal{F}$. C. Q. F. D.

B I B L I O G R A P H I E

(1) BOURBAKI — Espaces vectoriels topologiques - Edition initiale Hermann - Paris (1955).

(1)bis BOURBAKI — Intégration. Chapitre IX (1969)

(2) DUNFORD-SCHWARTZ — Linear Operators - Part 1 John Wiley Sons - (1967)

(3) IONESCU-TULCEA — On the lifting property - I - J. Math. Anal. Appl. 3, 537-546 (1961).

(4) IONESCU-TULCEA — Topics in the theory of lifting. Springer - Verlag. (1969).

(5) MAHARAM D. — On a theorem of Von Neumann Proc. Am. Math. soc 9 - N° 6 - 987-994 (1958).

(6) METIVIER — Martingales à valeurs vectorielles - Applications à la dérivation des mesures vectorielles. Ann. Inst. Fourier, Grenoble - 17, 2 (1967) 175-208.

(6 bis) — Voir ci-Dessous

(7) MEYER — Probabilités et potentiel - Hermann (1966).

(8) J. von NEUMANN — Algebraische Represantanten der Funktionen bis auf eine Menge vom Masse Null, J. Reine Angew. Math. vol. 165 (1931) p 109-115.

(9) PELLAUMAIL — Sur la dérivation des mesures vectorielles. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 904-907 (1969)

(10) SION — A proof of the lifting theorem. Department of Mathematics - The University of British Columbia (1970).

(6)bis METIVIER — Notions fondamentales de la théorie des Probabilités DUNOD (1968).