PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

J. PELLAUMAIL

Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 2
« Séminaire de probabilités et statistiques », , exp. n^{o} 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___2_A1_0>

INTEGRALE DE DANIELL A VALEURS DANS UN GROUPE

par J. PELLAUMAIL, Maître-Assistant à l'I.N.S.A.

1 - Introduction

La construction d'une intégrale par la méthode du prolongement de Daniell est bien connue. Le but essentiel du travail exposé ici est de prouver le théorème indiqué en 4.5., théorème généralisant le prolongement de Daniell au cas où l'intégrale considérée est à valeurs dans un groupe topologique abélien.

Rappelons, d'abord, quelques résultats antérieurs :

Dans [16] , SION a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une mesure à valeurs dans un groupe topologique abélien et définie sur une algèbre se prolonge à la tribu engendrée. Les résultats essentiels concernant le cas où la mesure est à valeurs dans un espace vectoriel topologique sont indiqués dans [1], [6], [7], [8], [9], [10], [11] et [13].

Dans [12] , KLUVANEK a montré que la méthode de Daniell se généralise au cas où les fonctions prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel topologique (voir aussi [17]).

La méthode que nous utilisons généralise celle utilisée par KLUVANEK qui a repris l'algorithme lebesguien indiqué dans [14] . Par contre, mis à part le lemme élémentaire indiqué en 3.1.C., cette méthode est techniquement assez différente de celle de SION qui a repris la méthode de CARATHEODORY (cf [4]). Ceci nous semble plus naturel et montre mieux comment s'effectue le prolongement.

Le théorème de prolongement énoncé en 4.5. montre que les résultats de [12] , prouvés si E est un espace de Banach, restent valables si E est un groupe topologique abélien complet : notons que l'extension des résultats de [12] au cas où E est un espace vectoriel topologique localement convexe peut s'effectuer directement en considérant séparément chaque famille de semi-normes ; par contre l'extension au cas où E est un groupe nécessitait une réétude complète du problème.

La proposition 2.5. concerne le cas où E est un espace vectoriel localement convexe, proposition qui donne quelques exemples d'application du théorème 4.5.

2 - Espace de Daniell généralisé :

2.1. Définition

On appellera espace de Daniell généralisé la donnée :

- d'un ensemble Ω
- d'un ensemble $\mathcal{L}$ de fonctions réelles définies sur Ω tel que, si f et g appartiennent à $\mathcal{L}$, alors $(f \wedge g)$ et $(f - g)$ appartiennent à $\mathcal{L}$.
- d'un groupe topologique abélien E séparé et complet
- d'une application I de $\mathcal{L}$ dans E telle que :
  - (i) si f et g appartiennent à $\mathcal{L}$, $I(f-g) = I(f) - I(g)$
  - (ii) si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ telle que $f_n \downarrow 0$, alors, $\lim\limits_{n \to \infty} I(f_n) = 0$

2.2. Définition

On dira qu'un espace de Daniell généralisé $(\Omega, \mathcal{L}, E, I)$ est saturable s'il satisfait à la condition suivante :

si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments positifs de $\mathcal{L}$ telle que

$\sum\limits_{n>0} u_n \leq u_0$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} I(u_n) = 0$

(le théorème 4.5. justifiera l'utilisation de cet adjectif "saturable".

2.3. Remarque

Les définitions 1 et 2 qui précèdent généralisent très exactement les définitions énoncées au paragraphe 2-2 de [12] : notons que la définition de "saturable" énoncée au paragraphe 2-2 de [12] sous-entend, évidemment, que la série considérée est faiblement convergente vers un point de E comme le montre le lemme 2-5 de [12] .

2.4. Cas où E est un espace vectoriel localement convexe :

Les résultats de la proposition ci-dessous sont connus : toutefois, il nous a semblé intéressant de les rappeler, en différenciant :

- d'une part la condition (ii) (I est une application "continue") qui découle de l'hypothèse "bornée" quand les fonctions considérées sont des fonctions continues à support compact.
- d'autre part, la condition (iii) qui, elle aussi, est étroitement liée à l'hypothèse "bornée" et qui est plus faible que la condition $(v)^{\mathcal{G}}$ fréquemment utilisée (cf. par exemple, la condition 3 du théorème 6 p. 160 de [10] .

L'intérêt de cette proposition est évidemment de donner des conditions suffisantes pour que les définitions 2-1 ou 2-2 soient satisfaites.

2.5. Proposition

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de fonctions réelles définies sur Ω tel que, si f et g appartiennent à $\mathcal{L}$, alors $(f \wedge g)$ et $(f + \lambda g)$ appartiennent à $\mathcal{L}$. Soit E un espace vectoriel localement convexe et séparé. Soit I une application linéaire de $\mathcal{L}$ dans E.

On désignera par topologie initiale la topologie donnée sur E, par E' le dual de E et par topologie faible la topologie $\sigma(E, E')$.

On considère les conditions suivantes :

(ii) si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ telle que $f_n \downarrow 0$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} I(f_n)=0$

(iii) si $(u_n)_{n \geq o}$ est une suite d'éléments positifs de $\mathcal{L}$ telle que

$\sum\limits_{n > o} u_n \leq u_o$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} I(u_n) = 0$

(iv) pour tout élément positif de $\mathcal{L}$, $\hat{I}(f)$ est borné dans E (cf. définition de $\hat{I}(f)$ en 3.2.)

(v) si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}$ dominée par g élément de $\mathcal{L}$, alors $I(f_n)$ converge vers un élément de E.

Soit E^c le complété de E pour la topologie initiale.

Rappelons que (Ω , $\mathcal{L}$, E^c, I) est un espace de Daniell généralisé (resp. saturable) si la condition (ii) est satisfaite (resp. si les conditions (ii) et (iii) sont satisfaites).

On désignera pas $(ii)^{\mathcal{E}}$, $(iii)^{\mathcal{E}}$, $(iv)^{\mathcal{E}}$, $(v)^{\mathcal{E}}$ (resp. $(ii)^{\mathcal{F}}$, $(iii)^{\mathcal{F}}$, $(iv)^{\mathcal{F}}$, $(v)^{\mathcal{F}}$) les conditions (ii), (iii), (iv), (v) où la topologie considérée est la topologie initiale (resp. la topologie σ (E, E').).

On a alors :

$$(v)^{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow (v)^{\mathcal{E}} \Longrightarrow (iii)^{\mathcal{E}} \Longrightarrow (iii)^{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow (iv)^{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow (iv)^{\mathcal{E}}$$

De plus, si I ($\mathcal{L}$) est contenu dans une partie faiblement séquentiellement complète de E, alors $(iv)^{\mathcal{F}} \Longrightarrow (v)^{\mathcal{F}}$

Enfin, si Ω est un espace topologique, si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact et si, pour tout compact K, il existe un élément f de $\mathcal{L}$ tel que

$$1_K \leq f, \quad \text{alors} \quad (iv)^{\mathcal{E}} \Longrightarrow (ii)^{\mathcal{E}}$$

<u>PREUVE</u>

1°) $(v)^{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow (v)^{\mathcal{E}}$ d'après le théorème d'Orlicz-Banach : dans [15] p. 282, ce théorème est prouvé si E est un espace de Banach mais le résultat reste exact si E est localement convexe puisque, dans ce cas, la topologie de E peut être définie par une famille de semi-normes (cf. [3]).

2°) On a, évidemment, $(v)^{\mathcal{E}} \Longrightarrow (iii)^{\mathcal{E}} \Longrightarrow (iii)^{\mathcal{F}}$

3°) $(iv)^{\mathcal{F}} \Longrightarrow (iii)^{\mathcal{F}}$

En effet, soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments positifs de $\mathcal{L}$ telle que $\sum_{n > 0} u_n \leq u_0$. Soit x' un élément de E'. On pose

$v_n = u_n$ si $\langle x', I(u_n)\rangle \geq 0$ et $v_n = 0$ si $\langle x', I(u_n)\rangle < 0$

$w_n = u_n$ si $\langle x', I(u_n)\rangle < 0$ et $w_n = 0$ si $\langle x', I(u_n)\rangle \geq 0$

On a $u_n = v_n + w_n$. D'après $(iv)^{\mathcal{G}}$, la série de terme général $\langle x', I(v_n)\rangle$ (resp. $\langle x', I(w_n)\rangle$) est majorée et donc convergente. La série de terme général $I(u_n)$ est donc faiblement de Cauchy.

4°) (non $(iv)^{\mathcal{G}}$) $\Longrightarrow$ (non $(iii)^{\mathcal{G}}$).

En effet, supposons qu'il existe un élément f de $\mathcal{L}^+$ tel que $\hat{I}(f)$ ne soit pas faiblement borné. Soit un élément x' de E' tel que $\langle x', \hat{I}(f)\rangle$ ne soit pas borné.

On va construire, par récurrence, une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{L}^+$ telle que, pour tout n, $f_{n+1} \leq f_n \leq f$, $|\langle x', I(f_n)\rangle| \geq n$ et $\langle x', \hat{I}(f_n)\rangle$ non borné. On pose $f_o = f$. Supposons f_n déterminée. Puisque $\langle x', \hat{I}(f_n)\rangle$ n'est pas borné, il existe un élément g_n de $\mathcal{L}^+$ tel que $g_n \leq f_n$ et $|\langle x', I(g_n)\rangle| \geq n + |\langle x', I(f_n)\rangle|$ ce qui implique $|\langle x', I(f_n - g_n)\rangle| \geq n$. Soit $f_{n+1} = g_n$ ou $f_n - g_n$ en sorte que $\langle x', \hat{I}(f_{n+1})\rangle$ ne soit pas borné (si $\langle x', \hat{I}(f_n - g_n)\rangle$ et $\langle x', \hat{I}(g_n)\rangle$ étaient bornés, il en serait de même de $\langle x', \hat{I}(f_n)\rangle$). Ceci achève la construction de la suite (f_n) par récurrence.

On pose $u_n = f_n - f_{n+1}$: pour tout n, on a $u_n \in \mathcal{L}^+$ et $|\langle x', I(u_n)\rangle| \geq n$ ce qui contredit $(iii)^{\mathcal{G}}$.

5°) $(iv)^{\mathcal{G}} \Longleftrightarrow (iv)^{\mathcal{E}}$ puisque les parties bornées pour la topologie faible et pour la topologie initiale sont les mêmes.

6°) $I(\mathcal{L})$ contenu dans une partie faiblement séquentiellement complète de E et $(iv)^{\mathcal{G}}$ implique (v).

En effet, soit $(f_n)_{n > o}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^+$ dominée par g élément de $\mathcal{L}$. On pose $f_o = 0$ et $u_n = f_n - f_{n-1}$. On a $\sum_{n > o} u_n \leq g$. D'après $(iv)^{\mathcal{G}}$ et le 3°) ci-dessus, la série de terme général $I(u_n)$ est faiblement de Cauchy. Puisque $I(\mathcal{L})$ est contenu dans une partie faiblement séquentiellement complète de E, cette série converge faiblement vers un point de E.

7°) Montrons la dernière propriété de la proposition.

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ telle que $f_n \downarrow 0$. Soit K le support de f_1 (donc K contient le support de chaque fonction f_n). D'après le lemme de Dini, la suite (f_n) converge uniformément vers 0.

Soit V un voisinage équilibré de 0 dans E (voisinage pour la topologie initiale). Soit g un élément de $\mathcal{L}$ tel que $1_K \leq g$. D'après $(iv)^{\mathcal{C}}$, il existe $\lambda > o$ tel que $I(g) \subset \lambda V$ ce qui implique $I(\varepsilon . g) \subset V$ si $\varepsilon = 1/\lambda$. Or, il existe p tel que $n > p$ implique $f_n \leq \varepsilon . 1_K \leq \varepsilon . g$ ce qui implique $I(f_n) \in V$ ce qui prouve $(ii)^{\mathcal{C}}$.

3 - Construction analogue à celle de l'intégrale supérieure

3.1. Structure sur $\hat{E}$.

Soit E un groupe topologique abélien

a) on désignera par $\hat{E}$ l'ensemble des parties de E qui contiennent o.

b) étant donnée une suite $(U_n)_{n > o}$ d'éléments de $\hat{E}$, on pose :

$(-U)$ = ensemble des éléments u de E tels que $u = -x$ avec x élément de U.

$U_1 + U_2$ = ensemble des éléments u de E tels que $u = u_1 + u_2$ avec u_1 (resp. u_2) élément de U_1 (resp. U_2)

$\sum\limits_{n > o} U_n$ = ensemble des éléments u de E tels que $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ avec pour tout n, u_n élément de $\sum\limits_{k \leq n} U_k$

c) lemme : pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe une suite $(U_n)_{n > o}$ de voisinages de 0 dans E telle que : $\left(\sum\limits_{n > o} U_n\right) \subset V$

PREUVE : soit V un voisinage de 0 dans E ; E est régulier (au sens topologique) donc il existe un voisinage fermé U_o de 0 dans E tel que $U_o \subset V$ (cf. [2]). Ensuite, pour tout $n > o$, il existe un voisinage U_n de 0 dans E tel que $(U_n + U_n) \subset U_{n-1}$, d'où le résultat.

3.2. Lemme

Soit $(\Omega, \mathcal{L}, E, I)$ un espace de Daniell généralisé. On pose :

$\hat{\mathcal{L}}$ = ensemble des fonctions f définies sur Ω, à valeurs dans $\bar{R}^+$ et telles que il existe une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{L}$ avec $f_n \uparrow f$.

$\hat{I}$ = fonction à valeurs dans $\hat{E}$ et définie sur $\hat{\mathcal{L}}$ par :

$\hat{I}(f)$ = ensemble des x tels que $x = I(g)$ avec $|g| \leq f$ et g élément de $\mathcal{L}$.

Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite d'éléments de $\hat{\mathcal{L}}$; alors on a :

a) $\hat{I}(u_1 + u_2) \subset \left(\overline{\hat{I}(u_1) + \hat{I}(u_2)}\right)$

b) $\hat{I}(\sum_{n>0} u_n) \subset \overline{\sum_{n>0} \hat{I}(u_n)}$

c) Si l'espace de Daniell considéré est saturable et s'il existe un élément h de $\mathcal{L}$ tel que $\sum_{n>0} u_n \leq h$, alors, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un entier n tel que $\hat{I}(\sum_{k>n} u_k) \subset V$.

d) Si l'espace de Daniell considéré est saturable, si g est un élément de $\mathcal{L}$ et si (f_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{L}$ telle que $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$) et pour tout n, $|f_n| \leq g$, alors, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un entier n tel que $\hat{I}(f - f_n) \subset V$ $\left(\text{resp. } \hat{I}(f_n - f) \subset V\right)$.

PREUVE

a) Soit $f \in \mathcal{L}$ tel que $|f| \leq u_1 + u_2$

On sait qu'il existe (u^n_1) et (u^n_2) suites d'éléments de $\mathcal{L}^+$ telles que $u^n_1 \uparrow u_1$ et $u^n_2 \uparrow u_2$ (on peut supposer u^n_1 et u^n_2 positifs).

On pose $f_n = f^+ \wedge (u^n_1 + u^n_2)$ et $g_n = f^- \wedge (u^n_1 + u^n_2)$.

On a $f_n \uparrow f^+$, $g_n \uparrow f^-$, f_n et g_n appartiennent à $\mathcal{L}^+$.

Pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un entier n tel que $I(f^+ - f_n) \in V$ et $I(f^- - g_n) \in V$ ce qui implique $I\big(f - (f_n - g_n)\big) \in 2V$.

On pose : $f'_n = f_n \wedge u^n_1$, $f''_n = f_n - f'_n$

$g'_n = g_n \wedge u^n_1$, $g''_n = g_n - g'_n$

On a donc : $f_n - g_n = (f'_n - g'_n) + (f''_n - g''_n)$ avec

$|f'_n - g'_n| \leq u^n_1$ et $|f''_n - g''_n| \leq u^n_2$

donc $I(f_n - g_n) \in \hat{I}(u_1) + \hat{I}(u_2)$ donc $I(f) \in \hat{I}(u_1) + \hat{I}(u_2) + 2V$

Ceci étant vrai pour tout voisinage V de 0 dans E, on a :

$$I(f) \in \overline{\left(\hat{I}(u_1) + \hat{I}(u_2)\right)} \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

b) Soit $f \in \mathcal{L}$ avec $|f| \leq \sum_{n > o} u_n$

On sait que, pour tout n, il existe une suite $(u^k_n)_{k > o}$ d'éléments de $\mathcal{L}^+$ telle que $u^k_n \uparrow u_n$. On pose $v_n = \sum_{1 \leq k \leq n} u^k_n$ puis $f'_n = f^+ \wedge v_n$

et $f''_n = f^- \wedge v_n$;

On a : f'_n et f''_n appartiennent à $\mathcal{L}^+$, $f'_n \uparrow f^+$ et $f''_n \uparrow f^-$

Par conséquent, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un entier n tel que $I(f^+ - f'_n) \in V$ et $I(f^- - f''_n) \in V$

mais $I(f'_n - f''_n) \in \overline{\left(\sum_{k > o} \hat{I}(u_k)\right)}$ (d'après le a))

donc $I(f) = I(f^+ - f^-) \in \overline{\left(\sum_{k > o} \hat{I}(u_k)\right)} + 2V$

Ceci étant vrai pour tout V, on a $I(f) \in \overline{\left(\sum_{k > o} \hat{I}(u_k)\right)}$ (c.q.f.d.)

c) On décompose la démonstration en deux étapes

1°/ On va prouver que, pour tout voisinage V de O dans E, il existe un entier n tel que, quel que soit k, on ait :

$$\hat{I}\left(\sum_{i=n}^{n+k} u_i\right) \subset V.$$

pour cela, on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un voisinage V de O dans E et une suite a (n) croissante d'entiers telle que, pour tout n,

$$\hat{I}\left(\sum_{i=a(n)+1}^{a(n+1)} u_i\right) \not\subset V$$

Soit W un voisinage de O dans E tel que 2 W $\subset$ V. Pour tout entier n, il existe un élément h_n de $\mathcal{L}$ tel que

$$|h_n| \leq \sum_{i=a(n)+1}^{a(n+1)} u_i \text{ et } I\ (h_n) \notin V$$

donc, il existe g_n élément de $\mathcal{L}^+$ tel que $I\ (g_n) \notin W$ et $g_n \leq |h_n|$ (on prend $g_n = h_n^+$ ou $g_n = h_n^-$). On a alors :

$$\sum_{n > o} g_n \leq h \quad \text{et} \quad I\ (g_n) \notin W$$

ce qui contredit le fait que l'espace de Daniell considéré est supposé prolongeable.

2°/ Soit V un voisinage de O dans E. Soit $(V_n)_{n > o}$ une suite de voisinages de O dans E telle que

$$\overline{\left(\sum_{n > o} V_n\right)} \subset V$$

D'après le 1°/, pour tout n, il existe un entier a (n) tel que a (n + 1) > a(n)

et $\hat{I}\left(\sum_{i=a(n)+1}^{a(n+1)} u_i\right) \subset V_n$

On a donc :

$$\hat{I}\left(\sum_{n > a(1)} u_n\right) = \hat{I}\left(\sum_{n \geq o}\left(\sum_{i = a(n)+1}^{a(n+1)} u_i\right)\right)$$

$$\subset \overline{\left(\sum_{n > o} \hat{I}\left(\sum_{i = a(n)+1}^{a(n+1)} u_i\right)\right)} \quad \text{(cf b))}$$

$$\subset \left(\overline{\sum_{n > o} V_n}\right) \subset V$$

on a donc trouvé un entier a (1) tel que $\hat{I}\left(\sum_{n>a(1)} u_n\right) \subset V$ c.q.f.d

d) on pose $u_n = f_n - f_{n-1}$ (resp. $u_n = f_{n-1} - f_n$)

Pour tout n, u_n appartient à $\mathcal{L}^+$ et $\sum_{n > o} u_n \leq g$, donc (d'après le c) ci-dessus) il existe un entier n tel que

$$\hat{I}\left(\sum_{i > n} u_i\right) \subset V \qquad \text{c.q.f.d}$$

4 - Prolongement

4.1. Soit $(\Omega, \mathcal{L}, E, I)$ un espace de Daniell généralisé.

On désigne par $\hat{\Omega}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur Ω . On définit $\hat{\mathcal{L}}$ et $\hat{I}$ comme indiqué au lemme 3.2. Enfin, à tout voisinage V de O dans E, on associe $\hat{V}$ défini par :

f appartient à $\hat{V}$ si et seulement si f appartient à $\hat{\Omega}$ et s'il existe un élément g de $\hat{\mathcal{L}}$ tel que $|f| \leq g$ et $\hat{I}(g) \subset V$

4.2. Topologie sur l'ensemble des fonctions

Quand V parcourt l'ensemble des voisinages de O dans E, la famille des ensembles $\hat{V}$ constitue, dans $\hat{\Omega}$, une base de filtre de l'élément neutre et ce filtre définit, sur $\hat{\Omega}$, une topologie compatible avec la structure de groupe de $\hat{\Omega}$.

PREUVE :

On vérifie immédiatement que les axiomes (cf. [2]) d'une base de filtre de l'élément neutre sont satisfaits en utilisant le lemme 3.2.

4.3. Dans la suite des démonstrations, nous utiliserons souvent le résultat élémentaire suivant ;

Si a, b, c et d sont des fonctions réelles, on a :

$$|(a \wedge b) - (c \wedge d)| \leq |a - c| + |b - d|$$

$$|(a \vee b) - (c \vee d)| \leq |a - c| + |b - d|$$

4.4. Prolongement de I :

Désignons par $\bar{\mathcal{L}}$ l'adhérence de $\mathcal{L}$ pour la topologie définie ci-dessus (on dira qu'une fonction est intégrable si elle appartient à $\bar{\mathcal{L}}$). Si on munit $\mathcal{L}$ de la topologie induite par celle définie ci-dessus, l'application I est une représentation continue de $\mathcal{L}$ dans E. Par conséquent, elle admet un prolongement unique qui soit une représentation continue de $\bar{\mathcal{L}}$ dans E. On désignera par I (f) l'image, par ce prolongement, de la fonction intégrable f. Autrement dit, un élément f de $\hat{\Omega}$ est une fonction intégrable si, et seulement si, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un élément g de $\mathcal{L}$ tel que (f - g) appartienne à $\hat{V}$ et, dans ce cas, I (f - g) appartient à $\bar{V}$.

PREUVE :

La continuité de la fonction I découle de ce que, si f appartient à $\hat{V}$ et à $\mathcal{L}$, alors I (f) appartient à V. Pour la suite, cf. [2] .

4.5. Théorème de prolongement

Soit $(\Omega, \mathcal{L}, E, I)$ un espace de Daniell généralisé (cf. 2.1.). Cet espace est saturable (cf. 2.2.) si, et seulement si, il peut être plongé dans un espace de Daniell généralisé qui satisfait au théorème de convergence dominée, c'est-à-dire s'il existe un espace de Daniell généralisé $(\Omega, \tilde{\mathcal{L}}, E, \tilde{I})$ tel que $\mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$, la restriction de $\tilde{I}$ à $\mathcal{L}$ coïncide avec I et, si $(f_n)_{n > 0}$

est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathcal{L}}$ qui converge simplement vers f et si, pour tout n, $|f_n| \leq h$ avec h élément de $\widetilde{\mathcal{L}}$, alors f appartient à $\widetilde{\mathcal{L}}$ et $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$

PREUVE :

1°/ L'hypothèse saturable est évidemment nécessaire.

Réciproquement, nous allons prouver que l'espace $(\Omega, \bar{\mathcal{L}}, E, I)$ construit en 4.4. satisfait au théorème de convergence dominée si l'espace initial est saturable.

2°/ Si f et g appartiennent à $\bar{\mathcal{L}}$, on vérifie immédiatement que $(f - g)$ et $(f \wedge g)$ (cf. 4.3.) appartiennent à $\bar{\mathcal{L}}$ et que $I(f - g) = I(f) - I(g)$.

3°/ On va d'abord prouver le théroème de convergence dominée dans le cas où (f_n) est une suite de fonctions positives. Plus précisément, soit h un élément positif de $\bar{\mathcal{L}}$, soit $(f_n)_{n>o}$ une suite d'éléments de $\bar{\mathcal{L}}$ qui converge simplement vers f et telle que, pour tout n, $0 \leq f_n \leq h$; on se propose de prouver que, pour tout voisinage V de 0 dans E, il existe un entier p et un élément w de $\hat{\mathcal{L}}$ tels que $|f_n - f| \leq w$ et $\hat{I}(w) \subset V$.

En effet, soit $(W_n)_{n \geq o}$ une suite de voisinages de 0 dans E telle que

$$6 \left(\sum_{n \geq o} W_n \right) \subset V$$

Soient $d \in \mathcal{L}^+$ et $t \in \hat{\mathcal{L}}$ avec $|h - d| \leq t$ et $\hat{I}(t) \subset W_o$. De même, $\forall$ n, soit $h_n \in \mathcal{L}^+$ et $u_n \in \hat{\mathcal{L}}$ tels que $|h_n - f_n| \leq u_n$ et $\hat{I}(u_n) \subset W_n$.

On pose $u = \sum_{n>o} u_n$ $(u \in \hat{\mathcal{L}})$. On pose $g_n = d \wedge h_n$ $(g_n \in \mathcal{L}^+)$

puis $g' = \lim.\inf._{n>o} g_n$ et $g'' = \lim.\sup._{n>o} g_n$

On a : $|f_n - g_n| = |(f_n \wedge h) - (h_n \wedge d)| \leq |f_n - h_n| + |h - d|$ (cf 4.3.)

donc, par passage à la limite, $|f - g'| \leq + \operatorname{Sup}_{n>o} u_n \leq t + u$

et de même, $|f - g''| \leq t + u$

On pose $g'_{n,k} = \operatorname{Inf.}_{n \leq i \leq n+k} g_i$ et $g''_{n,k} = \operatorname{Sup.}_{n \leq i \leq n+k} g_i$

Si on pose $g'_n = \operatorname{Inf.}_{i > n} g_i$ et $g''_n = \operatorname{Sup.}_{i > n} g_i$, on a, pour n fixé et k tendant vers l'infini, $g'_{n,k} \downarrow g'_n$ et $g''_{n,k} \uparrow g''_n$

$g'_{n,k}$ et $g''_{n,k}$ sont des éléments de $\mathcal{L}^+$ dominés par d : donc (cf. lemme 3.2.d) $\forall$ n, il existe un entier a (n) tel que, si on pose $v'_n = g'_{n,a(n)} - g'_n$ et $v''_n = g''_n - g''_{n,a(n)}$, on a :

$$v'_n \in \hat{\mathcal{L}} \text{ et } \hat{I}\,(v'_n) \subset W_n \quad , \quad v''_n \in \hat{\mathcal{L}} \text{ et } \hat{I}\,(v''_n) \subset W_n$$

On pose $v' = \sum_{n > o} v'_n$ et $v'' = \sum_{n > o} v''_n$

On pose $s'_n = \operatorname{Sup.}_{k \leq n} g'_{k,a(k)}$ et $s''_n = \operatorname{Inf.}_{k \leq n} g''_{k,a(k)}$

puis $s' = \operatorname{Sup.}_{n>o} s'_n$ et $s'' = \operatorname{Inf.}_{n>o} s''_n$

On a $s'_n \uparrow s'$ et $s''_n \downarrow s''$ et toutes ces fonctions sont dominées par d, donc, d'après le lemme 3.2.d, il existe un entier p tel que

$$\hat{I}\,(s' - s'_p) \subset W_o \quad \text{et} \quad \hat{I}\,(s''_p - s'') \subset W_o$$

On a : $|s'_{n+1} - g'_{n+1}| = |(s'_n \vee g'_{n+1,a(n+1)}) - (g'_n \vee g'_{n+1})|$

$$\leq |s'_n - g'_n| + |g'_{n+1} - g'_{n+1,a\,(n+1)}| \qquad \text{(cf.4.3.)}$$

On en déduit : $|s'_n - g'_n| \leq \sum_{k \leq n} v'_k$ ce qui implique, par passage à la limite, $|s' - g'| \leq v'$

On prouverait, de même, $|s''_n - g''_n| \leq v''$ et $|s'' - g''| \leq v''$

On a donc :

$$|f - g_p| \leq |f - g'_p| + |f - g''_p| \qquad \text{(puisque } g'_p \leq g_p \leq g''_p\text{)}$$

$$\leq |f - g'| + |g' - s'| + |s' - s'_p| + |s'_p - g'_p|$$

$$+ |f - g''| + |g'' - s''| + |s'' - s''_p| + |s''_p - g''_p|$$

$$\leq w = |s' - s'_p| + |s''_p - s''| + 2\,(u + t + v' + v'')$$

Mais w appartient à $\hat{\mathcal{L}}$ et $\hat{I}\,(w) \subset V$ ce qui achève la démonstration du 3°).

4°/ Il ne reste plus qu'à démontrer le théorème de convergence dominée dans le cas général. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\bar{\mathcal{L}}$ convergeant simplement vers f et dominée par h élément de $\bar{\mathcal{L}}^+$. La suite (f^+_n) (resp. (f^-_n)) converge simplement vers f^+ (resp. f^-) et est dominée par h : on peut donc lui appliquer le 3°/ et on a :

f^+ et f^- appartiennent à $\bar{\mathcal{L}}$ et $I\,(f^+) = \lim.\, I\,(f^+_n)$ et $I\,(f^-) = \lim.\, I\,(f^-_n)$
On en déduit (cf. 1°/) : f appartient à $\bar{\mathcal{L}}$ et $I\,(f) = \lim.\, I\,(f_n)$.

B I B L I O G R A P H I E

(1) ARSENE G., STRATILA S.

Prolongement des mesures vectorielles, Revue Roumaine Math pures et appl. 10, 333-338 (1965)

BOURBAKI

(2) Topologie générale, 3ème édition, Hermann, Paris (1960-1961)
(3) Espaces vectoriels topologiques, chapitre IV. Edition initiale (1965).

(4) CARATHEODORY

Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin (1927).

(5) DANIELL

A general form of integral, Ann. Math (2) 19, 279-294 (1917-18).

DINCULEANU N.

(6) Vector measures - Pergamon Press - (1967)
(7) On the regular vector measures, Acta. Sci. Math. Szeged 24, 236-243 (1963).

(8) DINCULEANU N, KLUVANEK I

On vector measures, Proc. London Math. Soc (3) 17 (1967) 505-12

(9) GAINA S.

Extension of vector measures, Revue Math. Pures et appl. 8, 151-154 (1963)

(10) GROTHENDIECK

Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), Canad. J. Math. 5 - 129-173 (1953).

KLUVANEK I

(11) Completion of vector measure spaces, Revue Roumaine, Math. Pures Appl. (1967) ; tome XII, n° 10, 1483-1488.
(12) Integrale vectorielle de Daniell. Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad. Vied 15 (1965), 146-161.

(13) METIVIER M

Limites projectives de mesures. Ann. Mat. Pura appl. IV. Vol XIII 225-352 - Chap. V - (1963)

(14) PAUC C C R Acad. Sc Paris - t 223 - 709-711 (1946)

(15) PETTIS B.J.

On integration in vector spaces - Trans. Amer, Math. Soc. Vol 44 (1938) 277-304

(16) SION M Outer measures with values in a topological group. Proc. London Math. Soc (3) 19 (1969) 89-106.

(17) THOMAS E L'espace $\mathcal{L}^1$ associé à une mesure de Radon vectorielle. C.R. Acad. Sc. Paris Sér. A.B. 266 (1968) A 1039-A 1042.