C. BAIOCCHI

Régularité des solutions d'une équation différentielle abstraite

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 7, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A7_0>

REGULARITE DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ABSTRAITE

par

C. BAIOCCHI

PRELIMINAIRES.

On va exposer plusieurs méthodes pour étudier les problèmes d'existence, d'unicité, de régularité, pour le problème de Cauchy pour une équation différentielle abstraite, du type :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) = f(t) & 0 < t < T. \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, la méthode est plus intéressante que les résultats obtenus relativement à (I) ; à savoir, il est plus intéressant d'étudier la technique qui permet d'arriver au résultat (technique qui peut se généraliser à plusieurs autres types de problèmes) plutôt que le résultat relatif à (I) en lui-même.

Dans chaque cas, le procédé demandera toujours deux étapes : l'obtention d'estimations a priori, et l'utilisation de ces estimations. On se bornera, dans la plupart des cas, à montrer de quelle façon on peut obtenir les estimations, et on indiquera seulement le procédé, standard dans la plupart des cas, par lequel on peut déduire de ces estimations les théorèmes relatifs. Ces procédés standard sont en général :

- le théorème de Riesz et ses variantes, telles que le lemme de Lax-Milgram ou la variante du lemme des projections de Lions (cf. [1], chap. III).

- la méthode de Faedo-Galerkine

- la méthode de Transposition et interpolation
- la méthode de l'image dense et l'inverse borné.

Pour ce qui concerne les trois premières méthodes, on est forcé de travailler dans des espaces où les bornés sont, dans une topologie convenable, relativement compacts ; on ne pourra donc pas obtenir (du moins de façon directe), des résultats dans des espaces du type : fonctions continues à valeurs dans un espace quelconque. La quatrième méthode, au contraire, est valable dans n'importe quel espace. Elle peut être schématisée de la façon suivante : on se donne deux espaces de Banach, Y et Z, et une application $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(Y,Z)$; si l'on montre que :

(II) $\quad \forall\, y \in Y\,, \quad \|y\|_Y \leq k \;\|\mathcal{T} y\|_Z$

(III) $\quad \mathcal{T}(Y)$ est dense dans Z,

on a nécessairement, que $\mathcal{T}$ est un isomorphisme surjectif de Y sur Z.

Il y a là une difficulté supplémentaire, la propriété (III) n'étant pas nécessaire dans les autres méthodes ; toutefois, comme on verra dans des exemples, l'obtention de (III) peut être ramenée à des "estimations duales" des estimations (II) ; et donc, elle peut s'obtenir avec peu d'effort en plus.

A cet effet, il peut souvent être utile de travailler avec la méthode de prolongement par rapport au paramètre, qu'on va schématiser. Précisément, avec les hypothèses précédentes (Y,Z espaces de Banach, $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(Y,Z)$), soit $\Xi \in \mathcal{L}(Y,Z)$, Ξ "petit par rapport à $\mathcal{T}$" ; précisément, on veut, au lieu de (II), l'estimation :

(IV) $\quad \forall\, y \in Y,\ \forall\, \xi \in [0,1],\quad \|y\|_Y \leq k\;\|\mathcal{T} y + \xi\,\Xi\, y\|_Z$

Alors, la validité de la relation :

(V) $\quad (\mathcal{T} + \Xi)\,(Y)$ est dense dans Z

donne que $\mathcal{T} + \xi\,\Xi$ est un isomorphisme surjectif de Y sur Z pour tout $\xi \in [0,1]$.

On a donc, d'une part, une petite difficulté supplémentaire (on doit obtenir (IV) au lieu de (II)) ; mais d'autre part, on peut se borner à chercher une densité ((V) au lieu de (III)) pour une modification de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} + \Xi$; cela peut souvent être bien plus agréable, étant donné qu'on peut se borner, par un choix convenable de Ξ, à travailler sur un opérateur plus maniable que l'opérateur $\mathcal{C}$ de départ (pour une exposition plus détaillée de ce procédé, on renvoie à [2], à compléter par [3], [4], [5] où l'on applique le procédé à des problèmes du type (I)).

I. POSITION DU PROBLEME. PREMIERS THEOREMES D'EXISTENCE, UNICITE ET REGULARITE.

On se donne deux espaces de Hilbert, V et H, avec $V \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} H$; on identifie H à son antidual H^* et on plonge H dans l'antidual V^* de V. Pour simplifier on suppose aussi que H est séparable (ce qui implique que V et V^* sont séparables aussi).

On se donne un nombre $T \in]0, +\infty[$ et, pour presque tout $t \in [0,T]$, un opérateur $A(t)$ linéaire de V dans V^* ; et on veut étudier le problème de Cauchy :

(1.1) $\quad u'(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \qquad t \in]0,T[$

(1.2) $\quad u(0) = u_0$

Remarque 1.1.

Quelquefois, on va supposer $A(t)$ donné pour presque tout $t \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et on va étudier le problème :

(1.3) $\quad u'(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \qquad t \in \mathbb{R}$

la condition de Cauchy (1.2) étant remplacée par une condition de décroissance en $-\infty$.

Il est commode d'introduire les hypothèses sur $A(t)$ au moyen de la forme sesquilinéaire $a(t,u,v)$ associée ; précisément, on pose :

(1.4) $\langle A(t)\, u,v \rangle = a(t,u,v) \quad \forall\, u,v \in V$, p.p. en t

(où le crochet désigne l'antidualité entre V^* et V) et on suppose que la forme (sesquilinéaire sur V) $\{u,v\} \longrightarrow a(t,u,v)$ est telle que :

(1.5) $t \longrightarrow a(t,u,v) \in L^\infty \qquad \forall\, u,v \in V$ (1)

(1.6) $\begin{cases} \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que, } \forall\, v \in V \text{, on ait} \\ \text{Ré } a(t,v,v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2 \qquad \text{p.p. en } t \end{cases}$ (2)

On a le théorème :

Théorème 1.1.

Sous les hypothèses et notations (1.4), (1.5), (1.6), l'application $u \to \{u' + Au,\, u(o)\}$ *est un isomorphisme surjectif de* $L^2(0,T\,;\,V) \cap H^1(0,T\,;\,V^*)$ *sur* $L^2(0,T\,;\,V^*) \times H$. *En particulier, quels que soient* $f \in L^2(0,T\,;\,V^*)$, $u_0 \in H$, *le problème (1.1), (1.2) admet une seule solution* $u \in L^2(0,T\,;\,V)$ (3).

Ce théorème peut être démontré de plusieurs façons ; dans [1], on donne quatre démonstrations différentes basées respectivement sur :

- la variante du lemme des projections,
- la méthode des différences finies,
- la méthode de Faedo-Galerkine,
- la méthode de prolongement par rapport au paramètre,

---

(1) On remarquera que de (1.5) et du théorème de Banach-Steinhaus, on tire :

$$\exists\, M\ ;\ |a(t,u,v)| \leq M\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \forall\, u,v \in V, \text{ p.p. en } t.$$

(2) L'hypothèse : $\exists\, \alpha > 0,\ \exists\, \lambda \quad \forall\, v \in V$: $\text{Ré } a(t,v,v) + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2$ p.p. n'est pas plus générale que (1.6), pour ce qui concerne (1.1), (1.2), il suffit de changer l'inconnue dans (1.1), (1.2), en posant $u(t) = e^{\lambda t}\, v(t)$.

(3) Cf. la remarque 1.4. suivante pour ce dernier point.

une autre démonstration, par régularisation elliptique, est donnée dans [6] ; on va ici montrer de quelle façon on peut démontrer le théorème par la méthode de l'inverse continu et de l'image dense.

D'abord, quelques remarques.

Dès que $L^2(0,T\ ;\ V)$ et $H^1(0,T\ ;\ V^*)$ sont contenus dans $L^1(0,T\ ;\ V^*)$, on peut considérer l'intersection de ces espaces ; d'après les résultats de [7], on sait que, si u est dans cette intersection, u est (p.p. égale à) une fonction continue de $[0,T]$ à valeurs dans H, l'application $u \to u(0)$ étant continue de $L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*)$ dans H.

L'application $u \to u'$ étant évidemment continue de $L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;V^*)$ dans $L^2(0,T;V^*)$, il suffit de montrer que $u \to Au$ est continue de $L^2(0,T\ ;\ V)$ dans $L^2(0,T\ ;V^*)$ pour avoir que, si l'on pose :

(1.7) $\quad \forall\ u \in L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*),\ \mathcal{T} u = \{u' + Au,\ u(0)\}$

on ait $\quad \mathcal{T} \in \mathcal{L}(L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*),\ L^2(0,T\ ;\ V^*) \times H)$.

Or, pour $u(t) \in L^2(0,T\ ;\ V)$, $A(t)\ u(t)$ est (scalairement, donc fortement, V^* étant séparable) mesurable à valeurs dans V^* grâce à (1.5) ; toujours (1.5) (cf. aussi ([1]) assure que $A(t)\ u(t) \in L^2(0,T\ ;\ V^*)$, et la continuité de l'application.

On va donc contrôler la validité des (II), (III), des préliminaires, avec $Y = L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*)$, $Z = L^2(0,T\ ;\ V^*) \times H$, $\mathcal{T}$ étant donné par (1.7).

Les estimations du type (II) se déduisent en prenant $u \in Y$ quelconque ; en prenant (1.1), (1.2) comme <u>définition</u> de $f(t)$, u_0 ; puis en multipliant (scalairement entre V^* et V, p.p. en t) les deux membres de **(1.1)** par $u(t)$; en prenant 2 Ré des deux membres, on tire (on applique **(1.6)**) :

$$\frac{d}{dt}\ \|u(t)\|_H^2 + 2\ \alpha\ \|u(t)\|_V^2 \leq 2\ |<f(t),\ u(t)>| \leq \frac{1}{\alpha}\ \|f(t)\|_{V^*}^2 + \alpha\ \|u(t)\|_V^2$$

d'où, en simplifiant et en intégrant :

$$\|u(T)\|_H^2 + \alpha \int_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|f(t)\|_{V^*}^2 \, dt + \|u_0\|_H^2 \quad \text{, d'où}$$

(1.8) $$\|u\|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(V^*)} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|u_0\|_H$$

De (1.1), on tire aussi (cf. toujours ([1])) :

$$\|u'\|_{L^2(V^*)} = \|f - Au\|_{L^2(V^*)} \leq \|f\|_{L^2(V^*)} + \|Au\|_{L^2(V^*)} \leq \|f\|_{L^2(V^*)} +$$

$$+ M \|u\|_{L^2(V)} \leq C_{\alpha,M} \left\{ \|f\|_{L^2(V^*)} + \|u_0\|_H \right\}$$

(la dernière inégalité est obtenue grâce à (1.8)), avec $C_{\alpha,M}$ dépendant de α, M mais non de u. De cette relation et de (1.8), on tire exactement (II) dans le cas considéré.

Pour avoir (III), il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach pour se ramener à la situation suivante :

(1.9) $$\begin{cases} \text{Si } v \in L^2(0,T\,;V),\ v_0 \in H \text{ sont tels que :} \\ \displaystyle\int_0^T < u' + Au, v > dt + (v_0\ ,\ u(o))_H = 0, \quad \forall u \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;H) \\ \text{on a nécessairement } v \equiv 0,\ v_0 = 0 \end{cases}$$

En effet, on contrôle aisément que ($A^*(t)$ désignant l'adjoint de $A(t)$ au sens de $\mathcal{L}(V,V^*)$), on doit avoir :

(1.10) $-v' + A^*v = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(0,T\,;V^*)$ donc $v' = A^* v \in L^2(0,T\,;V^*)$ (dès que A^* a les mêmes propriétés que $A(t)$) ; de (1.9), on tire (avec des intégrations par parties loisibles dès que $v \in L^2(0,T\,;V) \cap H^1(0,T\,;V^*)$),

(1.11) $v(T) = 0\ ;\ v_0 = v(0)$

<u>Les estimations déjà obtenues</u> pour le problème (1.1), (1.2) (il suffit de renverser le sens de t, et de changer A par A^*), nous assurent que, v satisfaisant (1.10) et la première des égalités (1.11), on a $v(t) \equiv 0$; donc, grâce à la seconde des égalités (1.11), $v_0 = 0$, et (1.9) en suit.

Remarque 1.2.

On a voulu montrer dans un cas simple que l'obtention de (III) est liée à l'obtention de (II) et ne comporte pas un grand effort de plus.

Remarque 1.3.

Par une quelconque des méthodes générales, les bonnes estimations étant toujours liées à la multiplication par $u(t)$, on peut résoudre (au lieu de (1.1), (1.2)) : (1.3). L'énoncé exact du théorème que l'on a dans ce cas est contenu dans le théorème 1.2. ci-après.

Remarque 1.4.

Dans l'énoncé du théorème 1.1., on a en fait énoncé une propriété d'unicité plus forte que celle ici contrôlée (à savoir unicité dans $L^2(0,T\ ;\ V)$ de la solution de (1.1), (1.2). En effet, si on a $u \in L^2(0,T\ ;\ V)$, on a $A\,u \in L^2(0,T\ ;\ V^*)$ $u' \in \mathcal{D}'(0,T\ ;\ V^*)$; et on peut encore donner un sens à l'équation

$$u' + Au = f \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{D}'\,(0,T\ ;\ V^*).$$

Mais si $f \in L^2(0,T\ ;\ V^*)$, on en tire $u' \in L^2(0,T\ ;\ V^*)$, donc $u \in L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*)$; donc, on a d'une part (1.1) (au sens de V^*, p.p. en t) et d'autre part, on peut imposer (1.2) ; finalement, étant donné que $u \in L^2(0,T\ ;\ V) \cap H^1(0,T\ ;\ V^*)$, on a l'unicité pour ce qu'on a déjà vu.

Il est naturel de s'attendre que, sous des hypothèses convenables sur $a(t,u,v)$, en prenant dans (1.1), (1.2) f et u_0 "plus réguliers", la solution u doit être "plus régulière". On va préciser cela dans le cadre de l'équation (1.3).

Théorème 1.2.

On suppose $A(t)$ *donné pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$ *avec (1.5) p.p. sur* $\mathbb{R}$ *(notations (1.4)).*

Soit k *un entier non négatif tel que :*

$$(1.12) \qquad t \to a(t,u,v) \in W^{k,\infty} \qquad \forall\ u,v \in V$$

L'application $u \to u' + Au$ *est un isomorphisme surjectif de*

$H^k(-\infty, +\infty; V) \cap H^{k+1}(-\infty, +\infty; V^*)$ *sur* $H^k(-\infty, +\infty; V^*)$.

Démonstration.

Pour k=0, cf. la remarque 1.3. On va donner une idée d'une démonstration formelle et une idée d'une démonstration rigoureuse pour k=1 ; en général, on itère le procédé.

Démonstration formelle.

On part de (1.3) et on dérive les deux membres par rapport à t. On a, en posant :

$v(t) = u'(t)$:

(1.13) $$v'(t) + A(t)\, v(t) = f'(t) - A'(t)\, u(t)$$

Dès que $f'(t) - A'(t)\, u(t) \in L^2(-\infty, +\infty; V^*)$ (grâce aussi au théorème pour k=0), on en tire (toujours grâce au théorème pour k=0),

$v \in L^2(-\infty, +\infty; V) \cap H^1(-\infty, +\infty; V^*)$;

d'où $(v=u')$ $u \in H^1(-\infty, +\infty; V) \cap H^2(-\infty, +\infty; V^*)$.

Démonstration rigoureuse.

La démonstration précédente est formelle dès qu'on ne sait pas si $v=u' \in V$ p.p. ; donc, on n'a pas le droit d'écrire $A(t)\, v(t)$ ni de dériver (1.3) non plus ; toutefois, on peut procéder par la méthode des quotients différentiels.

Précisément, pour tout $h > 0$, on pose :

$$u_h(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \; ; \; f_h(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \; ;$$

et de (1.3), on déduit :

(1.14) $$u_h'(t) + A(t)\, u_h(t) = f_h(t) - \frac{A(t+h) - A(t)}{h}\, u(t+h)$$

grâce au théorème pour k=0, et aux hypothèses sur A(t), le deuxième membre de (1.14) est borné indépendamment de h dans $L^2(-\infty, +\infty; V^*)$; le théorème pour

$k=0$ appliqué à $u_h(t)$ donne donc que $u_h(t)$ est borné indépendamment de h dans $L^2(-\infty, +\infty ; V) \cap H^1(-\infty, +\infty ; V^*)$; la limite faible d'une suite extraite $\{u_{h_n}\}_{n=1,2,..}$ avec $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est donc un élément de $L^2(-\infty, +\infty ; V) \cap H^1(-\infty, +\infty ; V^*)$; mais cette limite vaut u' au sens de $\mathcal{D}'(-\infty, +\infty ; V^*)$, donc $u' \in L^2(-\infty, +\infty ; V) \cap$ $\cap H(-\infty, +\infty ; V^*)$, à savoir $u \in H(-\infty, +\infty ; V) \cap H^2(-\infty, +\infty ; V^*)$.

On obtient ainsi les bonnes estimations, d'où, par un quelconque procédé d'utilisation des estimations, le théorème.

<u>Remarque 1.5.</u>

Un théorème analogue reste valable pour (1.1), (1.2) si l'on se borne à $u_0 = 0$; cf. [1], où l'on emploie une "méthode de domination" ; et [3] où, par la méthode de prolongement par rapport au paramètre, on affaiblit (1.12) en supposant que :

$$(1.15) \quad \begin{cases} t \to a(t,u,v) \in W^{k,2} & \forall u,v \in V \\ \exists \varphi \in L^2 \text{ tel que } |a^{(k)}(t,u,v)| \leq \varphi(t) \|u\|_V \|v\|_V \end{cases}$$

<u>Remarque 1.6.</u>

On va expliciter la relation suivante, qui va être utile dans la suite :

$$(1.16) \quad \begin{cases} \text{Sous les hypothèses (1.5) et (1.12) avec } k=1\text{, l'application } f \to Au \\ \text{(f et u étant liés par (1.3)) est linéaire continue de} \\ L^2(-\infty, +\infty ; V) \cap H^1(-\infty, +\infty ; V^*) \text{ dans } L^2(-\infty, +\infty ; V) \end{cases}$$

La propriété est immédiate, compte-tenu du fait que $Au = f-u' \in L^2(-\infty, +\infty ; V)$ dès que $f \in L^2(-\infty, +\infty ; V)$ et que $u \in H^1(-\infty, +\infty ; V)$ (grâce au théorème 1.2. avec $k=1$).

2. EXEMPLE.

Il est bien connu que le théorème 1.1. s'adapte très bien à la résolution des problèmes aux limites pour une vaste classe d'opérateurs paraboliques ; on va montrer ça dans un exemple, chcisi de la façon la plus simple possible (cf. pour d'autres exemples, [1]).

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$; soit Q le cylindre $\Omega \times \left]0,T\right[$; les fonctions $u : (x,t) \to u(x,t)$ $(x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega$, $t \in \left]0,T\right[)$ définies sur Q qu'on va considérer, seront supposées réelles.

On se donne, pour $i,j = 1,\ldots,n$, des fonctions $a_{ij}(x,t)$ avec :

$$(2.1)\quad \begin{cases} a_{ij}(x,t) \in L^\infty(Q) \ ; \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ , \text{ p.p. dans } Q, \\ \qquad\qquad \forall\, \xi \equiv (\xi_1,\ \xi_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

On choisit $V = H_0^1(\Omega)$; $H = L^2(\Omega)$;

$$a(t,u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx \qquad \forall\, u,v \in V, \text{ p.p. en } t$$

Le théorème 1.1. est applicable (cf. ([2])) ; et il donne :

Théorème 2.1.

Sous l'hypothèse (2.1), soient f, u_0 *donnés avec :*

(2.2) $\quad f \in L^2(0,T\ ;\ H^{-1}(\Omega))$; $u_0 \in L^2(\Omega)$

Il existe une seule u *avec :*

(2.3) $\quad u \in L^2(0,T\ ;\ H_0^1(\Omega))$ ([4])

telle que

$$(2.4)\quad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x,t) \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \text{ p.p. en } t \qquad ([5])$$

(2.5) $\quad u(x,0) = u_0(x)$ *au sens de* $C^\circ([0,T]\ ;\ L^2(\Omega))$.

([4]) donc, en particulier, $u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0$ p.p. en t

([5]) relation qui, avec (2.1), (2.2), (2.3) entraîne $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T\ ;\ H^{-1}(\Omega))$; donc $u \in C^\circ([0,T]\ ;\ H^{-1}(\Omega))$ et donne un sens à (2.5).

Il s'agit donc (cf. ([4])) d'un problème mixte Cauchy-Dirichlet avec donnée de Dirichlet nulle pour l'équation (du type de la chaleur) (2.4).

L'opérateur intervenant dans (2.4) étant formellement hypoelliptique, il est naturel de s'attendre que, sous des hypothèses convenables sur Ω et sur les $a_{ij}(x,t)$, pour f et u_o "plus réguliers", la solution u doit être "plus régulière" ; le résultat "le plus naturel" dans ce sens est le suivant :

(2.6) $\left\{\begin{array}{l} \text{Si l'on a } f(x,t) \in L^2(Q) \text{ et } u_o(x) \in H^1_o(\Omega), \text{ la solution } u(x,t) \text{ de} \\ (2.3),\ (2.4),\ (2.5), \text{ vérifie :} \\ \qquad u,\ \dfrac{\partial u}{\partial t},\ \dfrac{\partial u}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \in L^2(Q) \end{array}\right.$

On remarquera que, à cet effet, les théorèmes du type 1.2. ne donnent pas une réponse satisfaisante : en effet, on demande sur f "trop" par rapport à t, et "peu" par rapport à x ; et on obtient "trop" de régularité pour u'_t par rapport à x. De façon abstraite, le problème de la validité de (2.6) se traduit dans la forme suivante : donner des conditions sur $a(t,u,v)$ telles que l'on ait :

(2.7) $\left\{\begin{array}{l} \text{Si dans (1.1), (1.2) on a } f \in L^2(0,T\ ;\ H),\ u_o \in V, \text{ la solution } u \\ \text{vérifie } u' \in L^2(0,T\ ;\ H). \end{array}\right.$

(ce qui correspond, dans le cas concret, à $u'_t \in L^2(Q)$; de (2.4) et l'hypothèse sur f, on déduit :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(Q),$$ ce qui, par des résultats de régularisation elliptique, donnera aussi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \in L^2(Q)$ si les a_{ij} et Ω sont réguliers).

Remarque 2.1.

On peut évidemment remplacer dans (2.7) la condition $u' \in L^2(0,T\ ;\ H)$ par la condition $A(t)\, u(t) \in L^2(0,T\ ;\ H)$; en effet, dès que $u' + Au = f \in L^2(0,T\ ;\ H)$ on aura $u' \in L^2(0,T\ ;\ H)$ si et seulement si $Au \in L^2(0,T\ ;\ H)$. En particulier, si l'on pose le problème pour l'équation (1.3) on devra chercher des conditions sur $a(t,u,v)$ telles qu'on ait :

$$(2.8)\quad \begin{cases} \text{Si dans (1.3) on a } f \in L^2(-\infty, +\infty ; H), \text{ la solution } u \text{ de (1.3)} \\ \text{vérifie } Au \in L^2(-\infty, +\infty ; H) \end{cases}$$

Le problème de la validité de (2.6) ([6]) a été étudié, sous des hypothèses très générales, par de nombreux auteurs ; on renvoie à [8] et à la bibliographie de ce livre pour des références exactes. Outre cela, on doit signaler les travaux [9] et [10], et le tout récent travail [11] où les hypothèses de régularité sur les a_{ij} sont les meilleures hypothèses que je connais.

Le problème a été très étudié aussi sous forme abstraite (à savoir le problème de la validité de (2.7) ou de (2.8)) ; toutefois, les méthodes abstraites jusqu'ici proposées (et dont on va donner un résumé aux numéros suivants) semblent demander des hypothèses qui, dans le cas concret de (2.6), sont plus restrictives que les hypothèses demandées par des méthodes directes (liées au fait que l'opérateur $A(t)$ est un opérateur différentiel en x), telles que, par exemple, dans le travail [11].

On expose ici quelques unes des méthodes abstraites connues, et une nouvelle méthode qui, dans le cas concret de (2.6), redonne les résultats de [11].

([6]) entre autres ; naturellement se posent aussi des problèmes de régularité ultérieure dans les espaces du type Sobolev, et des problèmes de régularité Höldérienne, etc...

3. THEOREMES DE REGULARITE.

Méthode de Transposition et interpolation (d'après Lions et Magènes).

(Ce type de résultat n'est écrit nulle part).

On va se placer dans le cadre du théorème 1.2 ; on transpose le résultat de ce théorème, après avoir changé le sens de t (ce qui change u' dans -u') et remplacé A par A^* (ce qui change $a(t,u,v)$ en $a^*(t,u,v) = \overline{a(t,u,v)}$; les hypothèses (1.5), (1.12) restant inchangées). Après ces changements, le théorème 1.2 avec k=0 peut s'énoncer sous la forme :

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{Sous les hypothèses (1.5), (1.6), l'application } v \longrightarrow -v' + A^*v \text{ est} \\ \text{un isomorphisme surjectif de } L^2(-\infty, +\infty\,;V) \cap H^1(-\infty, +\infty\,;V^*) \\ \text{sur } L^2(-\infty, +\infty\,;V^*). \end{cases}$$

Par transposition, on déduit de (3.1) :

Sous les hypothèses (1.5), (1.6), quelle que soit

$f \in L^2(-\infty, +\infty\,;V) \cap H^1(-\infty, +\infty\,;V^*))^*$, il existe u unique

avec $u \in (L^2(-\infty, +\infty\,;V^*))^*$ avec :

(3.2) $u' + Au = f$ au sens de $\mathcal{D}'(-\infty, +\infty\,;V^*)$ et u dépend continûment de f.

En particulier, (l'application $u \longrightarrow Au$ étant linéaire continue de $L^2(-\infty, +\infty\,;V)$ dans $L^2(-\infty, +\infty\,;V^*)$, et grâce au fait que les espaces $(L^2(-\infty, +\infty\,;V^*))^*$ et $(L^2(-\infty, +\infty\,;V) \cap H^1(-\infty, +\infty\,;V^*))^*$ coïncident respectivement avec les espaces $L^2(-\infty, +\infty\,;V)$ et $L^2(-\infty, +\infty\,;V^*) + H^{-1}(-\infty, +\infty\,;V))$ on déduit de ce résultat que :

$$(3.3)\quad \begin{cases} \text{Sous les hypothèses (1.5), (1.6), l'application } f \to Au \text{ (f et u étant} \\ \text{liées par (3.2)) est linéaire continue de :} \\ L^2(-\infty, +\infty\,;V^*) + H^1(-\infty, +\infty\,;V) \text{ dans } L^2(-\infty, +\infty\,;V^*) \end{cases}$$

On va maintenant interpoler entre (3.3) et (1.16), par exemple, avec la méthode holomorphe, avec paramètre $\theta = \frac{1}{2}$. Compte tenu que les espaces $L^2(-\infty, +\infty ; V^*)$ et $L^2(-\infty, +\infty ; V)$ d'une part et $L^2(-\infty, +\infty ; V^*) + H^{-1}(-\infty, +\infty ; V)$ et $L^2(-\infty, +\infty ; V) \cap H^1(-\infty, +\infty ; V^*)$ d'autre part, sont en dualité par rapport à $L^2(-\infty, +\infty ; H)$, on déduit :

Théorème 3.1.

Sous les hypothèses (1.5) et (1.12) avec $k=1$, *l'application* $f \longrightarrow Au$ *(f et u étant liés par (3.2)) est linéaire continue de* $L^2(-\infty, +\infty ; H)$ $L^2(-\infty, +\infty ; H)$.

Remarque 3.1.

On a donc obtenu un renseignement du type (2.8) ; le procédé employé étant un procédé d'interpolation, les hypothèses sur $a(t,u,v)$ sont sûrement non optimales. Pour ce qui concerne (1.12) avec $k=1$, on pourrait un peu l'affaiblir, en supposant (1.15) avec $k=1$; cf. Remarque 1.5.

Cas des formes $a(t,u,v)$ hermitiennes ; estimations obtenues en multipliant par $u'(t)$.

Dans le cas où la forme $a(t,u,v)$ est hermitienne, à savoir :

(3.4) $$a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)} \qquad \forall\, u,v \in V, \quad \text{p.p. en } t$$

on peut obtenir un résultat du type (2.7) par un procédé plus direct. Précisément, on a :

Théorème 3.2.

Sous les hypothèses (1.5), (3.4) et si :

(3.5) $$\begin{cases} \forall\, u,v \in V,\ t \to a(t,u,v) \textit{ est } W^{1,1}(0,T) \textit{ ; et il existe } \varphi \in L^1(0,T) \\ \textit{avec } |a'(t,u,v)| \leq \varphi(t)\, \|u\|_V\, \|v\|_V \end{cases}$$

si dans (1.1), (1.2) on a $f \in L^2(0,T ; H)$ *et* $u_0 \in V$, *la solution* u *vérifie*

$$u \in C^\circ([0,T] ; V) \ ; \ u' \in L^2(0,T ; H).$$

Démonstration :

Dès qu'on veut obtenir une solution dans $C^\circ([0,T]\ ; V)$, on doit travailler avec la méthode de l'inverse continue et de l'image dense. Les bonnes estimations s'obtiennent cette fois en multipliant les deux membres de (1.1) par $u'(t)$; on obtient, en prenant 2Ré des deux membres (pour les détails et l'utilisation finale des démonstrations, cf. [3]) :

$$\frac{d}{dt}\, a(t,u(t),\, u(t)) + 2\,\|u'(t)\|_H^2 = a'(t,u(t),\, u(t)) + a(t,u'(t),\, u(t)) +$$

$$+ a(t,u(t),\, u'(t)) + 2\,(u'(t),\, u'(t))_H \underset{\substack{\uparrow\\ \text{grâce à (3.4)}}}{=} a'(t,u(t),\, u(t)) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\, a(t,u(t),\, u'(t)) + 2\,\mathrm{Re}\,(u'(t),\, u'(t))_H = a'(t,u(t),\, u(t)) +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re} < A(t)\, u(t) + u'(t),\, u'(t) > = a'(t,u(t),\, u(t)) + 2\,\mathrm{Re}\,(f(t),\, u'(t))_H \underset{\substack{\uparrow\\ \text{grâce à (3.}}}{\leq}$$

$$\leq \varphi(t)\,\|u(t)\|_V^2 + \|f(t)\|_H^2 + \|u'(t)\|_H^2$$

En simplifiant, en intégrant sur $[0,t]$, et en utilisant (1.5), on en déduit (cf. aussi ([1])) :

$$\alpha\,\|u(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u'(\tau)\|_H^2\, d\tau \leq a(0,u_0,\, u_0) + \int_0^t \|f(\tau)\|_H^2\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \varphi(\tau)\,\|u(\tau)\|_V^2\, d\tau \leq M\,\|u_0\|_V^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T\,;\,H)} + \int_0^t \varphi(\tau)\,\|u(\tau)\|_V^2\, d\tau$$

d'où, grâce au lemme de Gronwall, on tire :

$$\|u\|_{C^\circ([0,T]\ ;\ V)} + \|u'\|_{L^2(0,T\ ;\ H)} \leq C\,\{\|u' + Au\|_{L^2(0,T\ ;\ H)} + \|u(0)\|_V\}$$

qui est l'estimation désirée.

Remarque 3.2.

On a des théorèmes de régularité ultérieure analogues au théorème 1,2, à savoir :

si $|a^{(k)}(t,u,v)| \leq \varphi(t) \|u\|_V \|v\|_V$ avec $\varphi(t) \in L^1(0,T)$, si $f \in H^{k-1}(0,T ; H)$ avec des conditions initiales convenables, la solution $u \in H^k(0,T ; H)$; cf [3].

Remarque 3.3.

Le théorème 3.2 (et les analogues à la remarque 3.2) sont obtenus par des procédés un peu différents dans [1], sous une hypothèse un peu plus restrictive que (3.5), à savoir hypothèses du type (1.12) (avec k=1 pour le théor. 3.2).

Remarque 3.4.

L'hypothèse (3.4) n'est pas une restriction pour ce qui concerne les applications au problème (2.6), étant donné que, quitte à ajouter dans le premier membre de (2.4) des termes du type $\Sigma\, b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ (qui sont des "termes petits" et donc éliminables par la méthode du prolongement par rapport au paramètre) on peut toujours supposer $a_{ij} = a_{ji}$. L'hypothèse (3.5) est toutefois gênante, en effet dans ce procédé, on ne tient pas compte du fait que, a posteriori, la solution u vérifie $A(t)\, u(t) \in L^2(0,T ; H)$; donc, en concret, on a $u(x,t) \in L^2(0,T ; H^2(\Omega)) \subset L^2(0,T ; W^{1,\rho}(\Omega))$ (grâce aux inclusions de Sobolev) avec un ρ convenable > 2 ; il devrait donc suffire de supposer

$(a_{ij})'_t \in L^{\frac{\rho}{\rho-2}}(\Omega)$ p.p. en t, au lieu que (comme demande (3.5))

$(a_{ij})'_t \in L^\infty(\Omega)$ p.p. en t.

On verra plus loin de quelle façon tenir compte de $A(t)\, u(t) \in L^2(0,T ; H)$

METHODE DES PUISSANCES FRACTIONNAIRES.

On revient au cas général (à savoir sans supposer remplie (3.4)). On cherche à obtenir les bonnes estimations en multipliant (formellement) les deux membres de (1.1) par $A^{*\,1/2}(t)$. $A^{1/2}(t)\, u$ (grâce à (1.5), on peut définir un opérateur fermé non borné :

(3.6) $\quad A(t) : H \longrightarrow H$; $D(A(t)) = \{v \in V ; A(t)\, v \in H\}$

qui est maximal accrétif ; on peut donc définir $A^{1/2}(t)$ par exemple par des intégrales de Dunford ; de même pour $A^{*1/2}(t)$).

Toujours formellement, on déduit donc de (1.1), après multiplication par $A^{*1/2}(t)\, A^{1/2}(t)\, u$, et prenant 2 Ré des deux membres :

$$2\,\text{Ré}\,(A^{1/2}(t)u', A^{1/2}(t)u)_H + 2\text{Ré}\; a(A^{1/2}(t)u, A^{1/2}(t)u) = 2\text{Ré}\,(f, A^{*1/2}(t)\, A^{1/2}(t)u)_H$$

$$(\|A^{1/2}(t)u\|_H^2)' + 2\,\alpha\,\|A^{1/2}(t)u\|_V^2 \leq 2\,|(f, A^{*1/2}\, A^{1/2}u)_H| + ([\tfrac{d}{dt}, A^{1/2}]\, u, A^{1/2}u)_H$$

Si le commutateur $[\frac{d}{dt}, A^{1/2}]$ est "petit", on a l'espoir d'obtenir des bonnes estimations, étant donné que (après intégration), l'on a au premier membre les termes

$$\|(A^{1/2}u)(t)\|_H^2 \text{ et } \|A^{1/2}(t)\; u(t)\|_V^2$$

qui,"moralement", ont même poids que respectivement

$$\|u(t)\|_V^2 \quad \text{et} \quad \|A^{*1/2}\, A^{1/2}u\|_H^2 .$$

A part la difficulté de préciser ces considérations intuitives (que l'on peut préciser par exemple en supposant que l'on ait

$$D(A^{1/2}(t)) = D(A^{*1/2}(t)) = H$$

avec des normes uniformément en t équivalentes), on a une difficulté analogue à celle signalée pour ce qui concerne la démonstration formelle du théorème 1.2 : là, on n'avait pas le droit d'écrire $A(t)\, u'(t)$, et ici, on n'a pas le droit d'écrire $a(A^{1/2}\, u, A^{1/2}u)$. On peut s'en sortir de la façon suivante (analogue à ce qu'on a fait avec les quotients différentiels) : sous des hypothèses convenables sur $A(t)$, on peut approcher :

$$A^{1/2}(t)\; u(t) \text{ par } u_n(t) = A^{1/2}(t)\; \Big[(A(t) + \tfrac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\; u(t)\;\Big] ;$$

et sur u_n , on peut bien répéter les opérations précédentes, de façon rigoureuse et non formelle. Toutefois, l'hypothèse sur le commutateur $[\frac{d}{dt}, A^{1/2}(t)]$ fait ici intervenir une hypothèse de dérivabilité de $A^{-1/2}(t)$, l'hypothèse très peu maniable dans les cas concrets.

Remarque 3.5.

Pour plus de détails sur ce procédé, et pour un énoncé précis, cf. [12].

METHODE DE TRANSFORMATION DE LAPLACE ET DE RESOLUTION "PAR MORCEAUX".

On va maintenant exposer un procédé un peu différent de tous ceux qu'on a vu jusqu'à maintenant : la différence essentielle est dans le fait qu'on ne passe pas par l'intermédiaire du théorème 1.1, et que, avec les notations (3.6), on suppose $D(A(t))$ indépendant de t (cet exposé étant noté ici W).

On part donc des données suivantes :

W, H sont deux espaces de Hilbert, avec $W \hookrightarrow H$; et

$A : W \longrightarrow H$ est un opérateur (pour l'instant indépendant de t) tel que $\rho = \xi + i\eta$ désignant la variable complexe, on ait

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \exists\, \xi_0 \; ; \; \forall\, \rho = \xi + i\eta \quad \text{avec } \xi > \xi_0 \\ A + \rho I : W \longrightarrow H \text{ est un isomorphisme surjectif} \end{cases}$$

$$(3.8) \qquad \|(A + \rho I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,W)} \leq C^{te} \quad \text{ind.}^{te} \text{ de } \rho$$

On démontre alors, à l'aide de la transformée de Laplace (au sens de $\mathcal{D}'(H)$) que l'application $u \longrightarrow \{u' + au, u(o)\}$ est un isomorphisme surjectif de $L^2(0,T\,;\,W) \cap H^1(0,T\,;\,H)$ sur $L^2(0,T\,;\,H) \times V$ où $V = D(A^{1/2}) = [W,H]_{1/2}$.

Ceci posé, on passe au cas où $A = A(t)$ dépend de t ; précisément, on suppose que, pour tout $t \in [0,T]$, $A(t) \in \mathcal{L}(W,H)$; et on suppose (3.7), (3.8) remplies avec ξ_0 et C^{te} indépendant de t. On suppose encore :

$$(3.9) \qquad t \longrightarrow A(t) \text{ est uniformément continue de } [0,T] \longrightarrow \mathcal{L}(W,H)$$

Dans ces conditions, quel que soit $t_0 \in [0,T[$, on peut poser un problème du type suivant :

$$(3.10)\quad \begin{cases} \text{ayant fixé } f \in L^2(t_o , T ; H) ; v_o \in V ; \\ w \in L^2(t_o , T ; W) \cap H^1(t_o , T ; H), \text{ trouver} \\ v \in L^2(t_o , T ; W) \cap H^1(t_o , T ; H), \text{ avec} \\ v'(t) + A(t_o) v(t) = f(t) + A(t_o) w(t) - A(t) w(t) \qquad t \in]t_o , T[\\ v(t_o) = v_o \end{cases}$$

et le problème (ayant fixé $A(t_o)$) est résoluble univoquement grâce aux résultats relatifs au problème à coefficients constants.

Maintenant, on fixe dans (3.10) f et v_o ; et on va considérer la transformation $w \longrightarrow v$; si elle admet un point fixe u_{t_o} (dans l'espace $L^2(t_o,t_o + \delta ; W) \cap H^1(t_o,t_o + \delta ; H)$, $\delta > 0$ étant à choisir) ce point fixe u_{t_o} satisfait :

$$(3.11)\quad \begin{cases} u'_{t_o}(t) + A(t)\, u_{t_o}(t) = f(t) \qquad t \in]t_o , t_o + \delta [\\ u_{t_o}(t) = v_o \end{cases}$$

grâce aux hypothèses (3.7), 3.8), (3.9), on peut en effet montrer que <u>pour</u> δ <u>suffisamment petit</u>, <u>indépendamment de</u> t_o , v_o , f, on peut appliquer à la transformation $w \longrightarrow v$ le théorème des contractions ; et on trouve donc un point fixe.

Maintenant, si l'on veut résoudre :

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \in L^2(0,T ; H) \\ u(0) = u_o \in V \\ u \in L^2(0,T ; W) \cap H^1(0,T ; H) \end{cases}$$

il suffit d'appliquer (3.11) avec $t_o = 0$, $v_o = u_o$, en obtenant $u_o(t)$ pour $t \in [0, \delta_o]$;

puis, on repart avec $t_o = \delta$, $v_o = u_o(\delta)$, en obtenant $u_1(t)$ pour $t \in [\delta, 2\delta]$; et ainsi de suite jusqu'à atteindre T.

Remarque 3.6.

Pour les détails et pour un énoncé précis, on renvoie à [13] ; pour ce qui concerne les applications concrètes, c'est l'hypothèse (3.9) qui est gênante.

Cas des formes hermitiennes ; estimations obtenues en multipliant par u' + Au.

On va maintenant exposer une dernière méthode, relative au cas où on a (3.4), et qui tient compte des considérations développées à la remarque 3.4.

La méthode est essentiellement donnée dans [1] chapitre VIII ; quelques précisions étant apportées par [14] ; on va l'exposer en suivant [14]. On revient au cas du théorème 1.1, et on va exposer la méthode dans le cas où, avec les notations (3.6), on a $D(A(t)) = W$ indépendant de t (uniformément en t pour ce qui concerne les normes), cette hypothèse n'ayant d'ailleurs rien d'essentiel ; toutefois, d'une part, elle est vérifiée dans l'exemple du n° 2 (on a $W = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ si Ω et les a_{ij} sont réguliers) et d'autre part, elle simplifie beaucoup les hypothèses de dérivabilité qu'on devra introduire ; (les hypothèses (3.14) ci-après devraient se traduire, si l'on n'avait pas $D(A(t)) = W$, sous la forme :

$$\begin{cases} \forall\ f,g \quad H,\ t \longrightarrow ((A(t) + \xi)^{-1} f,g)_H \text{ est dérivable ; et on a une} \\ \text{majoration du type (3.14) avec } u(t) \text{ remplacée par } (A(t) + \xi)^{-1} f.) \end{cases}$$

On remarquera que $D(A(t)) = W$ indépendant de t implique

$V = D(A(t)^{1/2}) = [W,H]_{1/2}$; donc on a :

$L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H) \subset C^\circ([0,T]\ ;\ V)$.

Le théorème qu'on veut démontrer est que, sous des hypothèses convenables sur $a(t,u,v)$, on a :

$$(3.12)\quad \begin{cases} \text{l'application } u \to \{u' + Au,\ u(0)\} \text{ est un isomorphisme surjectif} \\ \text{de } L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H) \text{ sur } L^2(0,T\ ;\ H) \times V. \end{cases}$$

On va supposer (outre à (1.5), (1.6) et (3.4)) :

(3.13) $\forall\ u,v \in W$ la fonction $t \longrightarrow a(t,u,v)$ est dérivable

(3.14)
$$\begin{cases} \forall\ u(t) \in L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H) \text{ on a} \\ |a'(t,u(t),\ u(t))| \leq C\ \|A(t)\ u(t)\|_H + \varphi(t)\ \|u(t)\|_V \\ \text{où } C < 1 \text{ et } \varphi(t) \in L^1(0,T) \ (^7). \end{cases}$$

Ceci posé, on va donner la méthode pour obtenir les bonnes estimations ; on part de $u \in L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H)$ et, f,u_0 étant définies par (1.1), (1.2), on multiplie les deux membres de (1.1) par $u'(t) + A(t)\ u(t)$, ou, ce qui revient au même, on prend le carré de la norme dans H des deux membres de (1.1). On trouve :

$$\|f(t)\|_H^2 = (u'(t) + A(t)\ u(t),\ u'(t) + A(t)\ u(t))_H = \|u'(t)\|_H^2 + \|A(t)\ u'(t)\|_H^2 +$$
$$+ 2 \operatorname{Re}\ (A(t)\ u(t),\ u'(t))_H = \|u'(t)\|_H^2 + \|A(t)\ u(t)\|_H^2 +$$
$$+ (a(t,u(t),\ u(t))\ )' - a'(t,u(t),\ u(t))$$

d'où, par intégration, avec les techniques usuelles :

$$\alpha\ \|u(t)\|_V^2 + (1-C) \int_0^t \|A(\tau)\ u(\tau)\|_H^2\, d\tau + \int_0^t \|u'(\tau)\|_H^2\, d\tau \leq M\ \|u_0\|_V^2 +$$
$$+ \int_0^T \|f(\tau)\|_H^2\, dt + \int_0^t \varphi(\tau)\ \|u(\tau)\|_V^2\, d\tau$$

et, grâce au lemme de Gronwall et à la relation $D(A(t)) = W$, l'estimation :

$$\|u'\|_{L^2(0,T\ ;\ H)} + \|u\|_{L^2(0,T\ ;\ W)} \leq C\ \{\ \|u' + Au\|_{L^2(0,T\ ;\ H)} + \|u(0)\|_V\ \}$$

qui est la bonne estimation.

(^{7}) Par une modification simple des calculs qui suivent, on peut arriver à prendre $C < 2$; cf. la remarque 3.7 suivante. Pour des exemples où on a (3.14), cf. la remarque 3.8 suivante.

Les calculs précédents montrent en particulier que, si l'on pose $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$, la forme sesquilinéaire sur $L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H)$:

$$\{u,v\} \longrightarrow ((u,v)) = \int_0^T (u' + Au, v' + Av)_H\, e^{-2\Phi(t)}\, dt + a(o,u(o)\, v(o))$$

est équivalente au produit sclaire dans $L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H)$; le théorème de Riesz donne alors évidemment :

$$(3.15)\quad \begin{cases} \forall\ f \in L^2(0,T\ ;\ H),\ \ \forall\ u_o \in V,\ \ \exists\ u \text{ unique dans} \\ L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H) \text{ telle que} \\ ((u,v)) = \int_0^T (f, v' + Av)_H\ e^{-2\Phi(t)}\, dt + a(o,u_o\ ,\ v(o)) \\ \forall\ V \in L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ;\ H). \end{cases}$$

Il faut toutefois se méfier de résultats tels que (3.15) ; en effet (3.15) équivaut à $\{u' + Au = f,\ u(0) = u_o\}$ seulement si le seul couple $\{f,u_o\}$ tel que

$$(3.16)\quad \int_0^T (f, v' + Av)\ e^{-2\Phi}\, dt + a(0,u_o,v(0)) = 0\ \forall\ V \in L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ,\ H)$$

est le couple $\{0,0\}$; il faut donc encore un résultat de densité.

De (3.16), on déduit formellement, en posant $g = e^{-2\Phi} f$:

$$(3.17)\quad -g' + Ag = 0\ ;\ g(T) = 0\ ;\ u_o = g(0)$$

(on écrit A au lieu de A^*, dès que, grâce à (3.4), A^* prolonge A) ; mais ici, sachant seulement que $g \in L^2(0,T\ ;\ H)$, on ne sait pas conclure que $g \equiv 0$ (et donc $f \equiv 0$, $u_o = 0$).

On peut s'en tirer de la façon suivante (qui rentre dans le cadre de la méthode du prolongement par rapport au paramètre ; cf. (IV), (V) des préliminaires) : grâce aux hypothèses (3.13), (3.14), on peut obtenir les estimations qui ont porté à (3.15), pour l'opérateur $D_t + A + \xi\, A^{-1}A'$ ($\xi \in [0,1]$, estimations uniformes en ξ ; il suffit de porter le terme $\xi\, A^{-1}A'u$ ou deuxième membre, et de le majorer, compte-tenu de (3.13), (3.14)) ; la propriété de densité correspondante à (V) est alors (au lieu que (3.17)) la suivante :

$$\begin{cases} \text{On a } g \in L^2(0,T\ ;\ H)\ ;\ u_0 \in H\ ; \\ -g' + Ag + A'A^{-1}g = 0\ ;\quad g(T) = 0\ ;\quad u_0 = g(0)\ ; \\ \text{et on veut en tirer que } g \equiv 0. \end{cases}$$

On veut remplacer l'inconnue en posant $A^{-1}g = w$; compte-tenu de (3.13), (3.14), (qui impliquent $(A\,w)' = A\,w' + A'\,w$) on est ramené à :

$$(3.18)\qquad \begin{cases} \text{On a } u \in L^2(0,T\ ;\ W),\ u_0 \in H\ ; \\ A\ (-w' + Aw) = 0\ ;\ w(T) = 0\ ;\ u_0 = A(0)\ w(0) \end{cases}$$

et on veut tirer que $w \equiv 0$

Or, l'obtention de (3.18) est presque immédiate : elle implique

$$\begin{cases} -\,w' + A\,w = 0 \\ w(T) = 0 \end{cases}$$

d'où, $w \equiv 0$ grâce aux estimations déjà trouvées (avec le sens du temps renversé, la donnée de Cauchy étant $t=T$) qu'on peut appliquer, dès que w est "suffisamment régulière".

Remarque 3.7.

Si, au lieu de multiplier par $u' + Au$, on multiplie par $\mu u' + \varepsilon Au$, ε et μ étant > 0 à choisir, on peut admettre dans (3.14) $C < 2$; (cf. ([7])) (on appliquera, à la fin, le lemme de Lax-Milgram au lieu du théorème de Riesz).

Remarque 3.8.

Pour ce qui concerne la validité de (3.14), on peut remarquer qu'on a (3.14) si l'on est dans la situation suivante :

$$
(3.19)\quad \begin{cases} \text{il existe } \Theta \in [0,1[\text{ et } \varphi_\Theta(t) \in L^{\frac{1}{1-\Theta}}(0,T) \quad \text{tels que} \\ |a'(t,u,v)| \leq \varphi_\Theta(t) \, \|u\|_{[W,V]_\Theta} \|v\|_{[W,V]_\Theta} \quad \forall\, u,v \in W, \quad \text{p.p. en } t \end{cases}
$$

En effet, si on a (3.19), grâce à la relation

$\|u\|_{[W,V]_\Theta} \leq C_\Theta \|u\|_W^{1-\Theta} \|V\|_V^\Theta$ (cf. [7]), on en déduit que pour tout

$u \in L^2(0,T\ ;\ W) \cap H^1(0,T\ ,\ H)$, on a, p.p. en t :

$$
|a'(t,u(t),\ u(t))| \leq \varphi_\Theta(t) \, \|u\|_W^{2\Theta} \|u\|_V^{2-2\Theta} \leq \varepsilon \|u\|_W^2 +
$$

$$
+ C_{\varepsilon,\Theta} \, \varphi_\Theta^{\frac{1}{1-\Theta}}(t) \, \|u\|_V^2
$$

avec $C_{\varepsilon,\Theta}$ qui dépend uniquement de ε et de Θ.

Maintenant, dès que $\|u\|_W \leq C \, \|A(t)\, u(t)\|_H$, par un choix convenable de ε on en déduit :

$$
|a'(t,u(t),\ u(t)| \leq C \, \|A(t)\, u(t)\|_H^2 + \varphi(t) \, \|u(t)\|_V^2
$$

avec $C < 1$ et $\varphi(t) \in L^1(0,T)$; d'où (3.14).

En particulier, pour $\Theta = 1$, on retrouve (3.5).

On termine avec les applications au cas concret du n° 2. Sous des hypothèses convenables sur Ω et les $a_{ij}(x,t)$, on a :

$$
D(A(t)) = W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ ;
$$

$$
[W,V]_\Theta \subset H^{2-\Theta}(\Omega) \subset W^{1,\frac{2n}{n-2(1-\Theta)}}(\Omega)\ ;
$$

$$
|a'(t,u,u)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx \right| \leq
$$

$$
\leq \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right\|_{L^{\frac{n}{2(1-\Theta)}}(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2(1-\Theta)}}(\Omega)} \leq
$$

$$
\leq C_{n,\Omega} \left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right\|_{L^{\frac{n}{2(1-\Theta)}}(\Omega)} \|u\|^2_{[W,V]_\Theta}
$$

Pour avoir (3.19), il suffit donc d'avoir :

$$(3.20) \quad \begin{cases} \text{il existe } \theta \in [0,1[\text{ tel que} \\ \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in L^{\frac{1}{1-\theta}}(0,T\,;\,L^{\frac{n}{2(1-\theta)}}(\Omega)) \end{cases}$$

(il faut naturellement ajouter des hypothèses qui assurent que l'on ait $D(A(t)) = W = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, uniformément en t ; pour cela, il suffit, si Ω est régulier, de supposer que l'on ait :

$$(3.21) \quad \begin{cases} \text{il existe } \sigma \in [0,1[\text{ tel que} \\ \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_\ell} \in L^{\frac{2}{1-\sigma}}(0,T\,;\,L^{\frac{n}{1-\sigma}}(\Omega)) \end{cases}$$

cf. [15] où l'on démontre que, si (3.21) est valable, $D(A(t)) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ p.p. en t, avec des constantes d'équivalence des normes indépendantes de t).

Les hypothèses (3.20), (3.21) coïncident avec les hypothèses obtenues, par une technique liée au fait que A(t) est un opérateur différentiel en x, dans le travail [11].

Remarque 3.9.

Pour plus de détails, on renvoie à [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS J.L. : "Equations différentielles opérationnelles". Springer Verlag (1961)

[2] BAIOCCHI C. : "Un criterio di resolubilità..." Rend. Ist. Lombardo 100 (1966)

[3] BAIOCCHI C. : "Sulle equazioni differenziali astratte..." Annali di Mat. LXXVI (1967).

[4] BAIOCCHI C. : "Soluzioni ordinarie e generalizate del problema di Cauchy"... Ricerche di Mat.XVI (1967)

[5] BAIOCCHI C. : "Soluzioni deboli dei problemi ai limiti..." Rend. Ist. Lombardo 103 (1969).

[6] LIONS J.L. : "Cours C.I.M.E. 1963" (éd. Cremonese)

[7] LIONS J.L. : "Espaces intermédiaires entre espaces Hilbertiens et applications" Bull. Mat. Soc. Sc. R.P. Roumaine 50 (1958).

[8] LADYZENSKAJE, SOLONNIKOF, URALTEEVA : "Equations linéaires et quasi-linéaires du type parabolique". Moska. Nauka (1967).

[9] GUGLIELMINO F. : "Sulle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale". Ann. Mat. Pura Appl. (4), 65 (1964), 127-151.

[10] GUGLIELMINO F. : "Nuovi contributi allo studio delle equazioni paraboliche del secundo ordine di tipo non variazionale. Ricerche Mat. 14 (1965) 124-144

[11] ARENA O. : "Regolarità delle soluzioni...". Le Matematiche 1970.

[12] BARDOS C. : Travail à paraître.

[13] LIONS J.L. et MAGENES E. : "Problèmes aux limites non homogènes" (3 volumes) édit. Dunod (1969-1970).

[14] BAIOCCHI C. : Travail à paraître aux Rendiconti dei Corsi I.N.A.M. "Convegno su le equazioni di evoluzione". Roma 11.15/V/1970.

[15] MIRANDA C. : "Alcune osservazioni sulla maggiora zione in L_p^V della solution deboli delle equazioni elliti-che del secundo ordine". Ann. Math. Pura Appl. (4) 61 (1963) 151-169.