CLAUDIO BAIOCCHI

# Équations différentielles abstraites. Application au problème de Cauchy-Mêlé pour l'équation de la chaleur

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 6, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A6_0>

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES ABSTRAITES. APPLICATION AU PROBLEME DE CAUCHY-MELE POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR.

par

Claudio BAIOCCHI

1\. On se donne deux espaces de Hilbert, $K$ et $H$, avec $K \hookrightarrow H$ ; et un sous-espace fermé $V$ de $K$ (muni de la norme induite) avec $V$ dense dans $H$. On identifie $H$ à son antidual $H^*$ et on peut alors plonger $H$ dans $V^*$ (antidual de $V$) en obtenant ainsi :

$$
(1.1) \qquad V \underset{\text{dense}}{\overset{\text{fermé}}{\hookrightarrow}} K \hookrightarrow H = H^* \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V^*
$$

Ayant $K \underset{\text{dense}}{\hookrightarrow} V^*$, on peut considérer les espaces d'interpolation $[K, V^*]_\theta$ ; on suppose :

$$
(1.2) \qquad [K,V^*]_{\frac{1}{2}} = H
$$

(on remarquera que, d'après Lions-Peetre [10], on a toujours

$$
H = [V,V^*]_{\frac{1}{2}} \hookrightarrow [K,V^*]_{\frac{1}{2}}
$$

Pour tout $\alpha$ réel, on va désigner par $H^\alpha(H)$ l'espace $\{V \in \mathcal{S}'(H)\ ;\ (1+\tau^2)^{\alpha/2}\, \hat{v}(\tau) \in L^2(H)\}$ où $\hat{V}$ est la transformée de Fourier de $V$ (au sens de $\mathcal{S}'(H)$ ; cf. Schwartz [11]). On a, d'après (1.2) :

$$
(1.3) \qquad \begin{cases} L^2(K) \cap H^1(V^*) \hookrightarrow H^{1/2}(H)\ . \\ \text{Toute } u \in L^2(K) \cap H'(V^*) \text{ est (p.p. égale à) une fonction continue} \\ \text{à valeurs dans } H. \end{cases}
$$

On va faire les identifications suivantes (qui sont évidemment compatibles avec (1.1)) :

$$
(1.4) \qquad (H^\alpha(H))' = H^{-\alpha}(H), \text{ pour tout } \alpha \text{ réel,}
$$

(1.5) $\mathcal{G}(V) \subset \mathcal{G}(H) \subset \mathcal{G}'(H) \subset \mathcal{G}'(V^*) = (\mathcal{G}(V))^*$,

et on remarque explicitement que l'on a (grâce aux identifications faites et au fait que $u \longrightarrow u' = \frac{du}{dt}$ est linéaire continue de $H^\alpha(H)$ dans $H^{\alpha-1}(H)$ pour tout $\alpha$ réel) :

(1.6) $\begin{cases} \text{la forme } \{u,v\} \longrightarrow \langle u', v \rangle_{H^{-1/2}(H),\, H^{1/2}(H)} \text{ est sesquilinéaire continue} \\ \text{sur } H^{1/2}(H) \text{ ; si } v \in \mathcal{G}(V) \text{ on a } \langle u',v \rangle_{H^{-1/2}(H),\, H^{1/2}(H)} = \langle i\,\tau\,\hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau) \rangle_{\mathcal{G}'(V^*),\, \mathcal{G}(V)} \end{cases}$

2. On garde les hypothèses et notations du N° 1. On se donne $K$ avec :

(2.1) $\begin{cases} L^2(V) \subsetneq \mathcal{K} \subsetneq L^2(K),\ \mathcal{K} \text{ sous-espace} \\ \text{fermé de } L^2(K) \text{ (muni de la norme induite)} \end{cases}$

et une forme $\{u,v\} \longrightarrow k(u,v)$ sesquilinéaire sur $\mathcal{K}$, continue et coercitive, au sens suivant :

(2.2) $\begin{cases} \text{il existe } M \text{ et } \alpha \text{ réels positifs avec :} \\ |k(u,v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{K}} \|v\|_{\mathcal{K}} \qquad \forall\, u,\ v \in \mathcal{K} \\ \text{Ré } k(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{\mathcal{K}} \qquad \forall\, u \in \mathcal{K} \end{cases}$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.

*Sous les hypothèses et les identifications (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) (2.1), (2.2), soit* $L : v \longrightarrow L(v)$ *donnée avec :*

*(2.3)* $L$ *est antilinéaire continue sur* $L^2(K)$.

*Il existe* $u$ *unique avec*

*(2.4)* $u \in K \cap H^{1/2}(H)$

*(2.5)* $\langle u',v \rangle_{H^{-1/2}(H),\, H^{1/2}(H)} + k(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)$.

*En outre,* u *vérifie :*

(2.6) $\quad u \in H^1(V^*) \cap C^\circ(H)$

*et dépend continument de* L, *à savoir*

(2.7) $\quad \|u\|_{L^2(K)} + \|u\|_{H^1(V^*)} \leq C \|L\|_{(L^2(K))^*}$

C *étant une constante indépendante de* L.

Avant de donner la démonstration du théorème, on va expliciter un cas particulier. Précisément, soient encore K, H donnés avec

(2.8) $\quad K \hookrightarrow H \qquad$ K,H Hilbert ; K séparable.

Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ on se donne V(t) et a(t,u,v) avec :

(2.9) $\quad \begin{cases} V(t) \text{ est sous espace fermé de } K \text{ ; et il existe } V \text{ avec} \\ V \subset V(t) \text{ p.p, } V \text{ remplissant (1.1), (1.2).} \end{cases}$

(2.10) $\quad \begin{cases} \{u,v\} \longrightarrow a(t,u,v) \text{ est sesquilinéaire sur } K \text{ ;} \\ t \longrightarrow a(t,u,v) \in L^\infty(\mathbb{R}) \qquad \forall\, u,\, v \in K \\ \exists\, \alpha > 0 \text{ avec Ré } a(t,u,v) \geq \alpha \|u\|_K^2 \qquad \forall\, u \in K, \quad \text{p.p.} \end{cases}$

K étant séparable, pour $u,v \in L^2(K)$, la fonction $t \to a(t,u(t), v(t))$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ ; on peut donc poser :

(2.11) $\quad \begin{cases} \mathcal{K} = L^2(V(t)) = \{u \in L^2(K) \text{ ; } u(t) \in V(t) \text{ p.p.}\} \text{ ;} \\ k(u,v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} a(t,u(t), v(t))\, dt \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{K}, \end{cases}$

et on vérifie aisément que l'on a (2.1), (2.2), (pour (2.1), il suffit d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus).

On a alors :

Théorème 2.

*Sous les hypothèses (2.8), (2.9), (2.10), soit* f *donnée avec*

*(2.12)* $f \in L^2(K^*)$

*Il existe* u *unique avec :*

*(2.13)* $u \in L^2(V(t)) \cap H^{1/2}(H)$

*(2.14)* $$\langle u', v \rangle_{H^{-1/2}(H),\, H^{1/2}(H)} + \int_{\mathbb{R}} a(t,u(t),v(t))\, dt = \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), v(t) \rangle_{K^*, K}\, dt$$

$$\forall\, v \in L^2(V(t)) \cap H^{1/2}(H) .$$

(pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème 1 avec $\mathcal{K}$, k donnés par (2.11) et L donnée par $L(v) = \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), v(t) \rangle_{K^*, K}\, dt$ ; on a évidemment (2.3)).

On peut compléter un peu le théorème 2, de façon à y voir la résolution d'un problème de Cauchy, de la façon suivante :

Théorème 3.

*Sous les hypothèses (2.8), (2.9), (2.10), (2.12), si* $f(t) = 0$ *pour* $t \leq t_0$ *et si* $V(t) = V(t_0)$ *pour* $t \leq t_0$ *, on a* $u(t) = 0$ *pour* $t \leq t_0$.

(il s'agit donc d'un problème de Cauchy avec donnée initiale nulle en $t_0$). Le théorème suivant indique de quelle façon on peut résoudre un problème de Cauchy avec donnée initiale non nulle :

Théorème 4.

*On se donne* K, H *avec (2.8) ; on se donne aussi* $u_0$ *et pour presque tout* $t \geq 0$, $V_*(t)$, $a_*(t,u,v)$, $f_*(t)$, *avec :*

$$(2.15)\quad \begin{cases} V_*(t) \textit{ est tel que, en posant (p.p.) :} \\ V(t) = \begin{cases} V_*(t) & \textit{pour } t \geq 0 \\ K & \textit{pour } t < 0 \,; \end{cases} \\ \textit{on ait (2.9).} \end{cases}$$

$$(2.16)\quad \begin{cases} a_*(t,u,v) \textit{ est telle que, en posant (p.p.) :} \\ a(t,u,v) = \begin{cases} a_*(t,u,v) & \textit{pour } t \geq 0 \\ (u,v)_K & \textit{pour } t < 0 \,; \end{cases} \\ \textit{on ait (2.10).} \end{cases}$$

$$(2.17)\quad f_*(t) \in L^2(0, +\infty \,; K^*) \quad ; u_o \in H$$

*Il existe alors un prolongement* $f$ *de* $f_*$ *, avec* $f \in L^2(K^*)$ *tel que la solution* $u$ *de (2.13), (2.14) (que l'on sait être fonction continue à valeurs dans* $H$*) vérifie :*

$$(2.18)\quad u(0) = u_o$$

*Si* $f_1$ *,* $f_2$ *sont deux prolongements de* $f_*$ *tels que les* $u_1$ *,* $u_2$ *correspondantes remplissent :*

$$u_1(0) = u_o \ , \ u_2(0) = u_o \ , \ \textit{on a } u_1(t) = u_2(t) \quad \forall\, t \geq 0.$$

3. On va montrer de quelle façon on peut traiter, à l'aide des théorèmes 2 et 4, le problème de Cauchy mêlé pour l'équation de la chaleur.

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ; on désigne par $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\Omega$ des éléments de $\mathcal{D}^1(\mathbb{R}^n)$ (fonctions continues ainsi que leurs dérivées premières et à support compact) ; et par $H^1(\Omega)$ le complété de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ par rapport à la norme :

$$\| \varphi \|_{H^1(\Omega)} = \left( \| \varphi \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est bien connu que si l'on pose $K = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, (2.8) est remplie.

Si l'on désigne par $H^1_0(\Omega)$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ de $C^1_0(\Omega)$, et par $H^{-1}(\Omega)$ l'antidual de $H^1_0(\Omega)$ (avec les identifications usuelles : $L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))^* \subset H^{-1}(\Omega)$), et si la frontière de $\Omega$ est "suffisamment régulière", on a $[H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1/2} = L^2(\Omega)$ (cf. p. ex. Baiocchi [2]) ; on pourra donc choisir $V = H^1_0(\Omega)$ pour avoir (1.2), (et (1.1) correspond alors aux identifications usuelles).

Soit donc $\Omega$ tel que ci-dessus ; soit $Q$ le cylindre $\Omega \times \mathbb{R}$, et $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$ sa frontière. On se donne une partie quelconque $\Sigma_0$ de $\Sigma$ ; et on pose, pour presque tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Gamma(t_0) = \overline{\Sigma}_0 \cap \{t = t_0\}$ ; $V(t_0)$ = adhérence dans $H^1(\Omega)$ des éléments de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ nuls sur $\Gamma(t_0)$. Avec le choix de $V,K,H$ précédemment indiqué on a évidemment (2.8), (2.9).

On choisit enfin $a(t,u,v) = (u,v)_K$ (pour un peu simplifier !) et on va interpréter le théorème 2, en supposant $f(t) \in L^2(H)$.

En écrivant (2.14) avec $v \in \mathcal{D}(Q)$, on a :

(3.1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + u - \Delta_x u = f \qquad$ au sens de $\mathcal{D}'(Q)$

($\Delta_x$ désignant le laplacien dans les "variables d'espace" : $\Delta_x = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $x_1, \ldots, x_n$ étant le point générique de $\Omega$) ;

La condition $u \in L^2(V(t))$ s'interprète :

(3.2) $\quad u(x,t) = 0 \qquad$ sur $\overline{\Sigma}_0$

et finalement, compte-tenu de (2.14) et de (3.1), on a la validité d'une relation telle que :

(3.3) $\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Sigma-\overline{\Sigma}_0} = 0 \qquad$ ($\nu$ = normale à $\partial\Omega$)

dès que l'on pourra écrire une "demie formule de Green" (du type :

$$\int_Q \left[u,\overline{v} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\right] dx\, dt = \int_Q (u - \Delta_x u)\, \overline{v}\, dx\, dt + \int_\Sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \quad d\sigma(x,t)\ ].$$

- Pour ce qui concerne le problème de Cauchy mêlé par l'équation de la chaleur, le théorème 4 nous assure que, $\Omega$ étant donné comme auparavant, si $f(x,t) \in L^2(\Omega \times ]0,T[)$ $(T \in ]0, +\infty[)$ et si $u_o(x) \in L^2(\Omega)$, le problème

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f(x,t) & \text{dans } \Omega \times ]0,T[ \\ u(x,o) = u_o(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \overline{\Sigma}_o\ ,\ \Sigma_o \text{ sous-ensemble quelconque de } \partial\Omega \times ]0,T[ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0,T[ - \overline{\Sigma}_o \end{cases}$$

admet une et une seule "solution faible" où la solution faible est à interpréter au sens suivent :

a) on remplace $u$ par $e^t u$ de façon que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$ se transforme en $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x + I$ ($I$ = identité)

b) on prolonge $f(x,t)$ par $0$ pour $t > T$

c) on considère $\Sigma_o$ plongé dans $\Sigma = \partial\Omega \times R$

d) on cherche à définir $f$ pour $t < 0$ de façon que la solution du problème posé sur la droite toute entière vérifie $u(x,o) = u_o(x)$.

e) on résoud le problème sur la droite toute entière grâce au théorème 4 ; la solution étant indépendante du prolongement fait en d).

f) la solution trouvée (modulo la transformation $u \to e^t u$) vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega \times ]0,T[)$ ; elle est fonction continue de $t$ à valeurs $L^2(\Omega)$, et dans ce sens, vérifie $u(x,o) = u_o(x)$ ; elle est nulle sur $\overline{\Sigma}_o$ au sens qu'elle peut être approchée, p.p. en $t$, par rapport à la norme de $H^1(\Omega)$ par des fonctions continues nulles sur cette partie de $\partial\Omega$ ;

finalement, on a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ hors de $\overline{\Sigma}_o$ au sens d'une demi-formule de Green (formelle, qu'en général on n'a pas le droit d'écrire).

4. L'étude du problème (3.4) avait été l'objet de nombreux travaux. L'étude la plus proche de celle ici donnée est la suivante (Lions [7], chap. IV, n° 5) : on part d'un espace de Hilbert H et d'une famille V(t) d'espaces de Hilbert avec $V(t) \subsetneq H$, famille mesurable sur $[0,T]$ par rapport à la mesure dt, et d'une forme a(t,u,v) associée à un opérateur $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(V(t), V(t)')$, le champ d'opérateurs $\mathcal{A}(t)$ étant mesurable. Sous des hypothèses analogues à (2.10), on démontre que, pour tout $\{f,u_o\} \in L^2(0,T\ ;\ H) \times H$, il existe $u \in \int^{\oplus} V(t)\, dt$ (espace remplaçant $L^2(V(t))$) telle que :

$$(4.1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_o^T \left[a(t,u(t), v(t)) - (u(t), v'(t))_H\right] dt = \int_o^T (f(t),v(t))_H\, dt + (u_o,v(o))_H \\ \qquad\qquad \text{pour tout } v \in \displaystyle\int^{\oplus} V(t)\, dt \text{ avec } v' \in L^2(0,T\ ;\ H),\ v(T) = 0. \end{cases}$$

(on a donc l'existence de la solution d'un problème plus faible, sous des hypothèses plus générales) ; l'unicité de la solution de (4.1) est un problème ouvert.

Si l'on suppose que les V(t) sont des sous-espaces fermés d'un espace K avec $K \subsetneq H$, on connaît l'unicité de la solution quand :

(4.2) V(t) décroit lorsque t croit.

(4.3) $a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)}$ et $t \to a(t,u,v) \in C^1([0,T])$.

(cf. alors Lions, loc. cit.) ; ou bien, si en désignant par $P_t$ la projection orthogonale de K sur V(t), on a :

(4.4) $t \to (P_t k,\ h)_K \in C^1\ ([0,T]) \qquad \forall\ h,k \in K$

(cf. Lions [9] ; cf. aussi Kato-Tanabe [6] où l'on démontre l'unicité en supposant (4.4) et (4.3) ; cf. aussi Cooper [5] et Carroll-Cooper [4] où, avec des hypothèses analogues, on traite le problème pour des opérateurs monotones dans des espaces de Banach) ; toujours sous l'hypothèse $V(t) \subset K \underset{\text{fermé}}{\subsetneq} H$ j'avais démontré l'unicité de la solution du problème en supposant valable (2.9) et sous une hypothèse de densité :

$$(4.5) \qquad L^2(0,T\,;\,V(t)) \cap H^1(0,T\,;\,H) \text{ est dense dans } L^2(0,T\,;\,V(t)) \cap H^{1/2}(0,T\,;\,H)$$

(cf. [1], [2] ; ces résultats rentrent en particulier dans Brézis [3] où l'on étudie plus en général des inéquations variationnelles).

Toutefois, dans les applications concrètes, les hypothèses (4.2), (4.4), (4.5) impliquent des restrictions sur le sous-ensemble $\Sigma_0$ de $\Sigma$.

La difficulté essentielle est que, jusqu'à ce que l'on reste sur l'intervalle $[0,T]$, <u>la dérivée n'opère pas entre $H^{1/2}(H)$ et son antidual</u> ; de façon que le crochet $<u', v>_{H^{-1/2}(H) \, H^{1/2}(H)}$ n'a pas de sens, et l'on est forcé de le remplacer par :

$$-\int_0^T (u,v')_H \, dt \quad \text{(cf. (4.1)) en ayant ainsi une équation fonction-}$$

nelle (à savoir (4.1)) avec <u>peu de test-fonctions</u> ; au contraire, en posant le problème sur la droite toute entière, on peut chercher u "plus régulière" (à savoir $u \in H^{1/2}(H)$) et donc écrire le crochet $< u',v >$ ; on écrit l'équation pour "assez de test-fonctions" de sorte que l'unicité est maintenant immédiate ; ici, c'est l'existence qui est plus difficile, dès que l'on cherche u "plus régulière".

5. On va maintenant donner une esquisse des démonstrations. On étudiera, d'un seul coup, deux types de problèmes, à savoir (au lieu de (2.5) qui correspond au signe + dans l'équation (5.1) suivante :

(5.1) $\qquad \pm < u',v > + k(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)$

(où le crochet est, ici et dans la suite, l'antidualité entre $H^{-1/2}(H)$ et $H^{1/2}(H)$).

D'abord, l'unicité : étant donné que l'on peut prendre dans (5.1) $v = u$, si on a $u \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)$ qui remplit (5.1) avec $L(v) \equiv 0$, on écrit (5.1) avec $v = u$ ; et on prend la partie réelle des deux membres. Compte-tenu de (2.10) et du fait que Ré $< u',u > = 0$, pour tout $u \in H^{1/2}(H)$, on en tire $\|u\|_K = 0$, donc $u = 0$.

Pour l'existence, on va faire usage d'un procédé de "régularisation elliptique" : pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

(5.2) $\qquad E_\varepsilon^{\pm}(u,v) = \pm < u',v > + k(u,v) + \varepsilon(u,v)_{H^{1/2}(H)} \qquad \forall\ u,v \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)$

et on a (cf. aussi (1.6), (2.2)) :

(5.3) $\qquad \{u,v\} \to E_\varepsilon^{\pm}(u,v)$ est sesquilinéaire continue sur $K \cap H^{1/2}(H)$.

En employant encore la relation Ré $< u',u > = 0$ et (2.2), on a évidemment :

(5.4) $\qquad \forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ u \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)$, Ré $E_\varepsilon(u,u) \geq \min [\varepsilon,\alpha]\ \|u\|^2_{\mathcal{K} \cap H^{1/2}(H)}$ d'où,

grâce au lemme de Lax-Milgram, quelle que soit $L : v \to L(v)$ avec (2.3) :

(5.5) $$\begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ u_\varepsilon \text{ unique dans } \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H) \text{ avec} \\ E_\varepsilon\ (u_\varepsilon\ ,v) = L(v) \quad \forall \quad V \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H). \end{cases}$$

En employant encore (2.2) et Ré $< u',u > = 0$, on a, de $E_\varepsilon(u_\varepsilon\ ,v) = L(v)$ avec $v = u$ :

(5.6) $\qquad \alpha\|u_\varepsilon\|_K \leq \|L\|_{(L^2(K))^*}$

On prend maintenant, dans $E_\varepsilon(u_\varepsilon\ ,v) = L(v)$, $v \in \mathcal{S}(V)$ (ce qui est possible car $\mathcal{S}(V) \subset L^2(V) \subset K$) ; on aura, compte-tenu de (1.6) et du fait que

$$(u_\varepsilon\ ,v)_{H^{1/2}(H)} = < (1+\tau^2)^{1/2}\ \hat{u}_\varepsilon(\tau),\ \hat{v}(\tau) >_{\mathcal{S}'(V^*)\ \mathcal{S}(V)} \quad :$$

$$\left| {}_{\mathcal{S}'(V^*)}< \left[\pm i\tau + \varepsilon(1+\tau^2)^{\frac{1}{2}}\right] \hat{u}_\varepsilon(\tau), \hat{v}(\tau) >_{\mathcal{S}(V)} \right| = |L(v) - k(u_\varepsilon, v)| \leq$$

$$\leq \|L\|_{(L^2(K))^*} \cdot \|v\|_{L^2(K)} + M \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{K}} \|v\|_{\mathcal{K}}$$

(on applique (2.2))

$$\leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \|L\|_{(L^2(K))^*} \|v\|_{L^2(V)} .$$

(on applique (5.6) et le fait que $L^2(V) \overset{\text{fermé}}{\subset} \mathcal{K} \overset{\text{fermé}}{\subset} L^2(K)$).

Comme, pour $v \in \mathcal{S}(V)$, $\hat{v}$ décrit tout $\mathcal{S}(V)$, et que $\|v\|_{L^2(V)} = \|\hat{v}\|_{L^2(V)}$ (théorème de Plancherel ; cf. Schwartz [11]), on en tire :

$$\left| {}_{\mathcal{S}'(V^*)} \left[\pm i\, \tau+\varepsilon\ (1+\tau^2)^{1/2}\right] \hat{u}_\varepsilon(\tau), w(\tau) >_{\mathcal{S}(V)} \right| \leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \|L\|_{(L^2(K))^*} \|W\|_{L^2(V)}$$

pour tout $W \in \mathcal{S}(V)$,

d'où $\left[\pm i\, \tau + \varepsilon(1+\tau^2)^{1/2}\right] \hat{u}_\varepsilon(\tau) \in L^2(V^*)$ et :

$$(5.7) \qquad \left\| \left[\pm\, i\, \tau + \varepsilon(1+\tau^2)^{1/2}\right] \hat{u}_\varepsilon(\tau) \right\|_{L^2(V^*)} \leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \|L\|_{(L^2(K))^*}$$

En explicitant (5.7), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^2 \|\hat{u}_\varepsilon(\tau)\|^2_{V^*} d\tau \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\tau^2 + \varepsilon^2(1+\tau^2)\right] \|\hat{u}_\varepsilon(\tau)\|^2_{V^*} d\tau = \left\| \left[\pm\, i\tau+\varepsilon(1+\tau^2)^{1/2}\right]\hat{u}_\varepsilon(\tau)\right\|^2_{L^2(V^*)}$$

$$\leq (1 + \frac{M}{\alpha})^2 \|L\|^2_{(L^2(K))^*}$$

d'où évidemment (grâce aussi à (5.6)) :

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(K) \cap H^1(V^*)} = \|u\|^2_{L^2(K)} + \int_{\mathbb{R}} (1+\tau^2) \|\hat{u}_\varepsilon(\tau)\|^2_{V^*} d\tau \leq (1+c^2) \|u\|^2_{L^2(K)} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \tau^2 \|\hat{u}_\varepsilon(\tau)\|^2_{V^*} d\tau \leq (1+c^2) \frac{1}{\alpha^2} \|L\|^2_{(L^2(K))^*} + (1+ \frac{M}{\alpha})^2 \|L\|^2_{(L^2(K))^*}$$

où c est telle que $\|v\|_{V^*} \leq c \|v\|_V$ , pour tout $v \in V$.

On a donc obtenu :

(5.8) $$\|u_\varepsilon\|_{L^2(K)\cap H^1(V^*)} \leq C\,\|L\|_{(L^2(K))^*}$$

où $C \leq 1 + \frac{M+1+c}{\alpha}$ est indépendante de L et de $\varepsilon$. On peut fonc extraire de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ une suite $\{u_{\varepsilon_u}\}_{n=1,2,\ldots}$ avec $\lim_{u\to\infty} \varepsilon_n = 0$, telle que $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$ dans $L^2(K) \cap H^1(V^*)$.

On aura, en particulier $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0$ dans $H^{1/2}(H)$ (cf (1.3)) et $u_0 \in \mathcal{K}$, étant donné que $u_{\varepsilon_n} \in \mathcal{K}$ pour tout n.

Ayant fixé $v \in K \cap H^{1/2}(H)$, on peut passer à la limite dans $E^{\pm}_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}, v) = L(v)$, et on obtient :

$$\pm < u'_0\,,\ v > + k\,(u_0, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{K} \cap H^{1/2}(H).$$

Donc $u_0$ est <u>une</u> solution de (5.1) qui vérifie $u_0 \in H^1(V^*)$ (et donc, d'après (1.3), $u_0 \in C°(H)$ ; et (d'après (5.8)) :

(5.9) $$\|u_0\|_{L^2(K)} + \|u_0\|_{H^1(V^*)} \leq C\,\|L\|_{(L^2(K))^*}$$

grâce à l'unicité de la solution de (5.1), on a terminé ; en particulier le théorème 1 est démontré.

Le théorème 2 résulte évidemment du théorème 1 ; le théorème 3 est conséquence de résultats bien connus sur le problème dans le cas où V(t) est indépendant de t (on se borne à travailler sur $]-\infty, t_0[$ où l'on a bien $V(t) \equiv V(t_0)$) (cf. alors Lions [7] et [8]) ; et le théorème 4 est une adaptation simple des procédés employés dans [1], théorème 5.2.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BAIOCCHI : "Regolarità e unicità della soluzione di una equazione differentiale astratte". Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XXXV (1965), pages 380-417.

[2] C. BAIOCCHI : "Sul problema unisto per l'equazione parabolica del tipo del calore". Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XXXVI (1966) pages 80-121.

[3] BREZIS : "Travail en préparation et communication personnelle".

[4] R.W. CARROLL et J.M. COOPER : "Sur les solutions d'une équation d'évolution à domaine variable". C.R. Ac. Sc. Paris 270 (1970) p. 319-321.

[5] J.M. COOPER : "Evolution Equations in Banach Space with variable domain". Sous presse.

[6] T. KATO et H. TANABE : "On abstract evolution equation". Osaka Math. J. XIV (1962) pp. 107-133.

[7] J.L. LIONS : "Equations différentielles opérationnelles". Springer-Verlag - band 111.

[8] J.L. LIONS : "Equations différentielles dans les espaces de Hilbert". Corso C.I.M.E. 1963 - Ediz. Cremonese.

[9] J.L. LIONS : "Remarques sur les équations différentielles opérationnelles"
Osaka Mat. J. XV (1963) pages 131-142.

[10] J.L. LIONS et J. PEETRE : "Sur une classe d'espaces d'interpolation".
Publ. I.H.E.S. N° 19.

[11] L. SCHWARTZ : "Théorie des distributions à valeurs vectorielles" I et II.
Annales de l'Institut Fourier 7 (1958) et 8 (1958).