

P. BOERO

R. PAVEC

**Coercivité de formes sesquilinéaires intégro-différentielles
dans des espaces de Sobolev avec poids**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 2, p. 1-27

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970__1_A2_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Coercivité de formes sesquilinéaires intégral-différentielles
dans des espaces de Sobolev avec poids.

par

P. BOERO et R. PAVEC

Le but de ce travail est d'étudier la coercivité de formes sesquilinéaires intégral-différentielles "formellement positives" dégénérées sur la frontière de l'ouvert. Dans la première partie, on suppose que l'ouvert est borné et à frontière de classe C^∞ et on étend les résultats obtenus par Aronszajn dans le cas de formes du même type définies sur $H^m(\Omega)$. Dans la deuxième partie, on suppose l'ouvert moins régulier, et on obtient une caractérisation des formes coercives d'ordre 2 et quelques résultats partiels dans le cas de formes d'ordre $2m$. Dans les deux cas, la méthode de démonstration consiste à se ramener à l'étude de formes sur l'ouvert \mathbb{R}_+^n (1^e partie) où $\mathbb{R}^{n-j} \times (\mathbb{R}_+)^j$, (2^e partie).

I - FORMES DEFINIES SUR UN OUVERT BORNE A FRONTIERE C^∞ .

1. Notations, hypothèses et énoncé des résultats.

Soit ψ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n et Ω l'ouvert défini par :

$$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) > 0\}$$

On suppose que cet ouvert est non vide et borné et qu'en tout point de la frontière Γ de Ω la différentielle de ψ est non nulle. r étant un nombre réel positif ou nul, on pose pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) = \psi^r(x)$$

Soit D^α , $\alpha \in \mathbb{N}^n$, l'opérateur différentiel :

$$D^\alpha = \prod_{j=1}^n D_j^{\alpha_j}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Définissons les espaces :

$$W_\varphi^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m : \varphi^{1/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

où $m \in \mathbb{N}$. On munit $W_\varphi^m(\Omega)$ de la norme :

$$\|u\|_{W_\varphi^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\varphi^{1/2} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et on note :

$$\|u\|_{W_\varphi^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \|\varphi^{1/2} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Soient $P_k(x, \xi)$, $k = 1, \dots, N$, des polynômes en ξ de degré $\leq m$. On pose :

$$P_k(x, \xi) = P'_k(x, \xi) + R_k(x, \xi)$$

où P'_k est la partie principale de P_k . On suppose que les coefficients de P'_k sont continus sur $\bar{\Omega}$ et ceux de R_k dans $L^\infty(\Omega)$.

Posons : pour tout $u, v \in W_\varphi^m(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \varphi(x) \sum_{k=1}^N P_k(x, D)u \overline{P_k(x, D)v} dx.$$

Définition : On dit que la forme sesquilinéaire a est coercive sur

$W_{\varphi}^m(\Omega)$ s'il existe $\alpha_0 > 0$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a(u, u) \geq \alpha_0 \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 - \lambda_0 \|u\|_{W_{\varphi}^0(\Omega)}^2 .$$

On donne des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les polynômes P_k , pour que a soit coercive sur $W_{\varphi}^m(\Omega)$. Soit :

$$A(x, \xi) = \sum_{k=1}^N |P_k(x, \xi)|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

THEOREME 1 : Pour que a soit coercive sur $W_{\varphi}^m(\Omega)$, il faut et il suffit que :

(A) Pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, on ait $A(x, \xi) \neq 0$.

(B) Pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, de la forme

$\xi = \xi_1 + \tau \xi_2$, où $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ et est tangent en x à Γ et ξ_2 est le vecteur unitaire de la normale en x à Γ , $\tau \in \mathbb{C}$, on ait $A(x, \xi) \neq 0$.

Ce résultat a été démontré par Aronszajn [3] dans le cas $r=0$, c'est-à-dire pour des formes définies sur $H^m(\Omega)$. On suppose donc dans la suite que r est strictement positif. Au § 6, on utilisera la proposition suivante (Agmon [1], Aronszajn [3]).

Proposition 1. Soient Q_k , $k = 1, \dots, N$ des polynômes homogènes de degré m , à coefficients constants tels que :

pour tout $\xi = (\xi', \xi_n) \neq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \neq 0$.

Alors la forme :

$$A(u, v) = \int_{\Omega_t} \sum_{k=1}^N Q_k(D)u \overline{Q_k(D)v} \, dx$$

définie sur $H^m(\Omega_t)$, avec $\Omega_t = \mathbb{R}^{n-1} \times]t, +\infty[$, vérifie :

$$\forall u \in H^m(\Omega_t) : A(u, u) \geq \alpha |u|_{H^m(\Omega_t)}^2 .$$

et la constante α est indépendante de t .

2. La condition (A) est nécessaire.

Si a est coercive sur $W_{\varphi}^m(\Omega)$ alors pour tout ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ (i.e. $\bar{\Omega}' \subset \Omega$) la forme :

$$A_{\Omega'}(u, v) = \int_{\Omega'} \sum_{k=1}^N P_k(x, D) u \overline{P_k(x, D) v} \, dx$$

est coercive sur $H_0^m(\Omega')$. Ceci résulte immédiatement du fait que si on prolonge $u \in H_0^m(\Omega')$ par 0 dans $\Omega - \Omega'$ on obtient un élément de $W_{\varphi}^m(\Omega)$ et qu'il existe $m > 0$ et $M < +\infty$ tels que

$$\forall x \in \Omega' : m \leq \varphi(x) \leq M.$$

La condition (A) résulte alors de la réciproque de l'inégalité de Gårding.

On suppose maintenant la condition (A) réalisée et il reste à démontrer l'équivalence de (B) et de la coercivité de a . Pour cela, on va se ramener à \mathbb{R}_+^n . Explicitons d'abord les hypothèses faites sur Ω .

3. Explicitation des hypothèses faites sur Ω .

Soient :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$$

$$\Sigma_+ = \{x \in \Sigma \mid x_n > 0\}$$

$$\Sigma_0 = \{x \in \Sigma \mid x_n = 0\}.$$

Nous allons montrer que pour tout $x_0 \in \Gamma$ il existe un voisinage V_0 de x_0 et un difféomorphisme θ de V_0 dans Σ_0 tel que le poids ψ se transforme en x_n et que les hypothèses (A) et (B) soient conservées.

Supposons $x_0 = 0$. Par une transformation unitaire de matrice A , on transforme Ω en Ω' de frontière Γ' tel que ce plan tangent en 0 à Γ' soit $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Posons pour $x' \in \Omega'$:

$$(1) \quad \begin{cases} y_i = x'_i & 1 \leq i \leq n-1 \\ y_n = \psi(A^{-1}(x')) = \psi_1(x') \end{cases}$$

La différentielle de cette application en x' a pour matrice :

$$J(x') = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x'_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x'_n} \end{pmatrix}$$

I étant la matrice unité d'ordre $n-1$. La différentielle de ψ étant non nulle en tout point de Γ , on en déduit :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x'_n}(0) \neq 0.$$

Il existe donc un voisinage ouvert V_0 de x_0 tel que $J(x')$ inversible sur AV_0 . En composant A et l'application (1), on obtient un difféomorphisme θ possédant les propriétés suivantes :

- $v_0 \cap \Omega \xrightarrow{\theta} \Sigma_+$.
- $v_0 \cap \Gamma \xrightarrow{\theta} \Sigma_0$.
- La différentielle de θ au point $x \in V_0$ a pour matrice :

$$D(x) = J(A(x)) \circ A$$

$$- \psi(\theta^{-1}(y)) = y_n, y \in \theta(v_0)$$

Pour tout u satisfaisant à :

$$(2) \quad u \in W_{\psi}^m(\Omega), \text{ supp } u \subset V_0 \cap \bar{\Omega}$$

posons :

$$(3) \quad u \circ \theta^{-1} = v$$

En prolongeant v par 0 à \mathbb{R}_+^n , on a :

$$(4) \quad v \in W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n), \text{ supp } v \subset \theta(v_0 \cap \bar{\Omega})$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$(5) \quad \frac{1}{c} \|v\|_{W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 \leq \|u\|_{W_{\psi}^m(\Omega)}^2 \leq c \|v\|_{W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

pour tout u satisfaisant à (2).

Posons :

$$b(v,v) = a(u,u) = a(v \circ \theta, v \circ \theta) \\ = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{k=1}^N |P_k(x,D)(v \circ \theta)|^2 dx.$$

Faisons le changement de variable $\theta(x) = y$. Il vient en prolongeant toutes les fonctions par 0 à \mathbb{R}_+^n :

$$(6) \quad b(v,v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n^r \sum_{k=1}^N |P_k(\theta^{-1}(y),D)(v \circ \theta)(\theta^{-1}(y))|^2 |J| dy$$

où $|J| = |D(x)|$, jacobien du changement de variable est non nul. D'après la forme de dérivation des fonctions composées :

$$b(v,v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} y_n^r |J| \sum_{k=1}^N |Q_k(y,D)v|^2 dy.$$

Avec

$$(Q_k(y,D)v) \circ \theta = P_k(\theta^{-1}(y),D)(v \circ \theta)$$

pour toute fonction v de classe C^∞ par exemple. Prenons :

$$v(y) = e^{i\lambda \xi y}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$Q_k(y,D)v = Q_k(y,\lambda \xi)v$$

On a :

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} v \circ \theta(x) = \lambda \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial \theta_j(x)}{\partial x_i} \right) v \circ \theta(x) = \lambda \xi'_i v \circ \theta(x) ; \quad y = \theta(x).$$

en posant

$$\xi' = (\xi'_i)_{i=1, \dots, n} = {}^t D(x) \xi.$$

En itérant, on en déduit :

$$D^\alpha v \circ \theta(x) = (\lambda^{|\alpha|} \xi'^{\alpha} + R_\alpha(\xi', \lambda)) v \circ \theta(x)$$

où $R_\alpha(\xi', \lambda)$ est un polynôme de degré $< |\alpha|$ en λ ; soit

$$P_k(x,D) v \circ \theta(x) = [\lambda^m P'(x, \xi') + R_k(\xi', \lambda)] v \circ \theta(x)$$

où R_k est de degré $< m$ en λ . On déduit donc :

$$Q_k(y, \lambda \xi) = \lambda^m P'(x, \xi') + R_k(\xi', \lambda), \quad y = \theta(x).$$

Donc en divisant par λ^m et en prenant la limite quand $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$(7) \quad \begin{cases} Q'_k(y, \xi) = P'_k(x, \xi') \\ \xi' = {}^t D(x) \xi \\ y = \theta(x) \end{cases}$$

La matrice ${}^t D(x)$ étant non singulière, l'hypothèse (A) se conserve donc.

Soit $y \in \Sigma_0$ et T et N les sous-espaces tangent et normal à Σ_0 :

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = \lambda e_n, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}.$$

Soient N' et T' les sous-espaces transformés de N et T par ${}^t D(x)$; $x = \theta^{-1}(y)$.

Puisque ${}^t D(x)$ est non singulière N' et T' engendrent \mathbb{R}^n . Vérifions que T'

est la direction de la normale en $x = \theta^{-1}(y)$ à Γ . On a :

$$e'_n = {}^t D(x) e_n$$

Soit :

$$e'_n = {}^t A {}^t J(x) e_n = A^{-1} ({}^t J(Ax) e_n) \quad ,$$

Or

$${}^t J(Ax) e_n = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_n} (Ax) \cdot e_n$$

donc est normal à Γ' en Ax . A étant unitaire e'_n est donc orthogonal à Γ en x .

L'hypothèse (B) se conserve donc puisque ${}^t D(x)$ transforme la normale en y

à Σ_0 en la normale à Γ en $x = \theta^{-1}(y)$.

D'après ce qui précède, on peut donc trouver un recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$

$$(O_i)_{0 \leq i \leq p}$$

tel que : - $O_0 \in \Omega$

- O_i est voisinage d'un point x_i de Γ et il existe un difféomorphisme θ_i de O_i dans Σ possédant les propriétés de θ énoncées précédemment.

On utilisera dans la suite une partition de l'unité :

$$(\varphi_i)_{i=0,p} \quad , \quad \varphi_i \in \mathcal{D}(O_i)$$

avec :

$$\sum_{i=0}^p \varphi_i^2(x) = 1, \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Dans \mathbb{R}_+^n le poids se transforme en x_n^r . Il existe une fonction en escalier h définie sur $[0,1]$ telle que :

$$(8) \quad \forall t \in [0,1] , \frac{1}{2} t^r \leq h(t) \leq t^r.$$

h peut se construire de la manière suivante. Soit $(t_i)_{i=0, \dots, \infty}$ la suite définie par :

$$t_0 = 1$$

$$t_{i+1}^r = \frac{1}{2} t_i^r , i \geq 1$$

Cette suite tend vers 0. En effet :

$$t_{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/r} t_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i+1}{r}}$$

Posons :

$$h(0) = 0$$

$$h(t) = t_{i+1}^r \text{ pour } t \in [t_{i+1}, t_i]$$

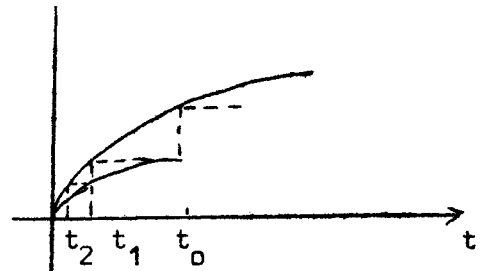
Soit

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Alors :

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y(t-t_i) , \alpha_i = t_i^r - t_{i+1}^r = \frac{1}{2} t_i^r > 0.$$

Au paragraphe 4, on démontre deux lemmes qui vont permettre de "localiser" le problème en utilisant la partition de l'unité qui vient d'être introduite plus haut.



4 - Inégalités entre les normes de $W_{\varphi}^m(\Omega)$, $W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)$, $W_{\varphi}^0(\Omega)$.

Lemme 4.1. Soit b une forme sesquilinéaire sur $W_{\varphi}^m(\Omega)$, du type

$$(1) \quad b(u, v) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} v} dx ; \quad a_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(\Omega).$$

$(O_i)_{0 \leq i \leq p}$ et $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq p}$ étant les ouverts et les fonctions introduites au § 3, on a pour tout $u \in W_{\varphi}^m(\Omega)$:

$$(2) \quad b(u, u) = \sum_{i=0}^p b(\varphi_i u, \varphi_i u) + R(u)$$

et

$$(3) \quad |R(u)| \leq C \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)} \|u\|_{W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)}.$$

La formule de Leibniz appliquée au développement de $b(\varphi_i u, \varphi_i u)$ montre que $R(u)$ est une somme de termes de la forme :

$$\int_{\Omega} \varphi(x) f(x) D^{\alpha} u \overline{D^{\beta} u} dx$$

où

$$f \in L^{\infty}(\Omega) \quad \text{et} \quad |\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq m, \quad |\alpha| + |\beta| \leq 2m-1.$$

La majoration (3) résulte donc de l'inégalité de Schwarz.

Lemme 4.2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c(\varepsilon)$ et $c_1(\varepsilon)$ telles

que pour tout $u \in W_{\varphi}^m(\Omega)$:

$$(4) \quad \|u\|_{W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{W_{\varphi}^0(\Omega)}^2$$

$$(5) \quad \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)} \|u\|_{W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 + c_1(\varepsilon) \|u\|_{W_{\varphi}^0(\Omega)}^2.$$

Remarquons d'abord que (5) résulte de (4) et de :

$$2 \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)} \|u\|_{W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 + \frac{1}{\eta} \|u\|_{W_{\varphi}^{m-1}(\Omega)}^2 ; \quad \eta > 0.$$

La démonstration de (4) se fait en ramenant à R_+^n . On utilisera

le lemme :

Lemme 4.3. L'inégalité (4) est vérifiée dans l'espace :

$$\{ u \in W_{x_n}^m(R_+^n) ; \text{supp } u \subset \Sigma_+ \cup \Sigma_0 \}.$$

En effet, en utilisant la fonction étagée h introduite au § 3 :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{x_n}^{m-1}(R_+^n)}^2 &= \int_{R_+^n} x_n^r \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha u|^2 \right) dx \\ &\leq 2 \int_{R_+^n} h(x_n) \left(\sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha u|^2 \right) dx \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int_{t_i}^{\infty} \int_{R^{n-1}} \sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha u|^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$(6) \quad \|u\|_{W_{x_n}^{m-1}(R_+^n)}^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|u\|_{H^{m-1}(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2.$$

Or on sait que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $c(\epsilon)$

$$\|u\|_{H^{m-1}(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2 \leq \epsilon \|u\|_{H^m(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{L^2(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2$$

et la constante $c(\epsilon)$ ne dépend pas de i . En reportant dans (6), il vient

donc :

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_{x_n}^{m-1}(R_+^n)}^2 &\leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\epsilon \|u\|_{H^m(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{L^2(R^{n-1} \times]t_i, \infty[)}^2 \right) \\ &\leq 2 \epsilon \int_{R_+^n} h(x_n) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^2 \right) dx + 2c(\epsilon) \int_{R_+^n} h(x_n) |u(x)|^2 dx \\ &\leq 2 \left(\epsilon \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{W_{x_n}^0(R_+^n)}^2 \right). \end{aligned}$$

Démonstration du lemme 4.2.

On fait une démonstration par récurrence sur m . D'après le lemme 4.1 :

$$\|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 = \sum_{i=0}^p \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 + R(u)$$

avec

$$|R(u)| \leq c \|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)} \|u\|_{W_\varphi^{m-2}(\Omega)}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence et (5) :

$$(7) \quad |R(u)| \leq c \cdot \varepsilon \|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 + c \cdot c_1(\varepsilon) \|u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, on obtient donc ;

$$(8) \quad \|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \sum_{i=0}^p \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 + c_1 \|u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2.$$

La fonction $\varphi_0 u \in H^m(\Omega)$. Donc en posant $m = \inf_{x \in \Omega_0} \varphi(x)$, $M = \sup_{x \in \Omega_0} \varphi(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_0 u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 &\leq M \|\varphi_0 u\|_{H^{m-1}(\Omega)}^2 \leq M(\varepsilon \|\varphi_0 u\|_{H^m(\Omega)}^2 + c(\varepsilon) \|\varphi_0 u\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &\leq \frac{M\varepsilon}{m} \|\varphi_0 u\|_{W_\varphi^m(\Omega)}^2 + \frac{MC(\varepsilon)}{m} \|\varphi_0 u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Pour $i \geq 1$, en utilisant les difféomorphismes θ_i introduits au § 3 posons :

$$v_i = (\varphi_i u) \circ \theta_i^{-1}$$

D'après le lemme 4.3 :

$$\|v_i\|_{W_{\varphi_i}^{m-1}(R_+^n)} \leq \varepsilon \|v_i\|_{W_{\varphi_i}^m(R_+^n)} + c(\varepsilon) \|v_i\|_{W_{\varphi_i}^0(R_+^n)}$$

et d'après les inégalités (3.5), on a donc :

$$\|\varphi_i u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^m(\Omega)}^2 + c_2(\varepsilon) \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2.$$

En reportant dans (8), on obtient donc :

$$(9) \quad \|u\|_{W_\varphi^{m-1}(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \sum_{i=0}^p \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^m(\Omega)}^2 + c_3(\varepsilon) \|u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2$$

puisque

$$\sum_{i=0}^p \|\varphi_i u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2 = \|u\|_{W_\varphi^0(\Omega)}^2.$$

L'inégalité (4) résulte alors de (9) en remarquant que :

$$\|\varphi_i u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 \leq c \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2, \quad i = 0, \dots, p$$

Pour $m=1$, l'inégalité (4) est immédiate : il suffit de prendre $c(\epsilon) = 1$ pour tout ϵ .

Remarque 4.1. : L'inégalité (4) est vérifiée dans l'espace :

$$\left\{ u \in W_{\xi}^m(\mathbb{R}^{n-1} \times]0,1[), \text{ supp } u \text{ borné} \right\}$$

où $\xi(x) = x_n^r (1-x_n)^r$.

$$\text{En effet en prenant } O_1 = \mathbb{R}^{n-1} \times]-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[, \quad O_2 = \mathbb{R}^{n-1} \times]\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[$$

et φ_1 et φ_2 telles que :

$$\begin{cases} \varphi_1 \in \mathcal{D}(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[) \\ \varphi_2 \in \mathcal{D}(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}[) \\ \varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t) = 1, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

La démonstration précédente s'applique puisque le lemme 4.3.

permet de majorer

$$\|\varphi_1 u\|_{W_{x_n^r}^{m-1}(\mathbb{R}_+^n)}^2 \quad \text{et} \quad \|\varphi_2 u\|_{W_{(1-x_n)^r}^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times]-\infty, 1[)}^2.$$

Cette remarque sera utilisée au paragraphe 5.

5. Condition nécessaire : la coercivité entraîne (B).

Soit $x_0 \in \Gamma$ et V_0 et θ le voisinage de x_0 et le difféomorphisme introduits au § 3. Alors la forme déduite de a :

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^r \sum_{k=1}^N Q_k(x, D) u \overline{Q_k(x, D) v} \, dx$$

est coercive sur l'espace :

$$(1) \quad \left\{ u \in W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n), \text{ supp } u \subset \theta(V_0 \cap \overline{\Omega}) \right\}.$$

et d'après le § 3 pour montrer que les polynômes P_k vérifient l'hypothèse (B) en x_0 , il suffit de montrer que :

(B') Pour tout $\xi = (\xi', \xi_n) \neq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^N |Q'_k(o, \xi)|^2 \neq 0$.

Posons :

$$b_o(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^r \sum_{k=1}^N Q'_k(o, D) u \cdot \overline{Q'_k(o, D) v} \, dx$$

$u, v \in W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)$ et à support borné.

Lemme 5.1. b_o est coercive sur :

$\{u \in W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n), \text{supp } u \text{ borné}\}$,
muni de la norme induite par $W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)$.

Si u est à support borné pour λ assez grand :

$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, est à support contenu dans $\theta(v_o \cap \bar{\Omega})$ et on a :

$$(2) \quad b(u_\lambda, u_\lambda) \geq \alpha_o \|u_\lambda\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 - \lambda_o \|u_\lambda\|_{W_{x_n^r}^0(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

Exprimons les deux membres de (2) par rapport à u . $b_o(u_\lambda, u_\lambda)$

est de la forme :

$$(3) \quad \lambda^{2m-n-r} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^r \sum_{k=1}^N |Q'_k(\frac{x}{\lambda}, D) u(x)|^2 \, dx + R.$$

où R est une somme de termes du même type que dans (3) mais avec pour exposant de λ : $2p-n-r$ avec $p \leq m-1$. De même dans le deuxième membre de (2) le terme de plus haut degré en λ est :

$$\lambda^{2m-n-r} \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^r \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \, dx.$$

Lorsque λ tend vers $+\infty$: les coefficients de $Q'_k(\frac{x}{\lambda}, D)$ convergent uniformément vers ceux de $Q'_k(o, D)$ sur $\text{supp } u$ et $\frac{R}{\lambda^{2m-n-r}}$ tend vers 0.

On obtient donc :

$$(4) \quad b_0(u_\lambda, u_\lambda) \geq \alpha_0 |u|^2_{W_{x_n^r}(R_+^n)}$$

Posons maintenant :

$$(5) \quad \begin{aligned} \Omega_1 &= R^{n-1} \times]0, 1[, \quad \xi(x) = x_n^r (1-x_n)^r \\ b_1(u, v) &= \int_{\Omega_1} \xi(x) \sum_{k=1}^N Q'_k(0, D)u \overline{Q'_k(0, D)v} \, dx \end{aligned}$$

pour u et v appartenant à l'espace :

$$(6) \quad \{u \in W_\xi^m(\Omega_1) , \text{ supp } u \text{ borné}\}.$$

Lemme 5.2. La forme b_1 définie par (5) est coercive sur l'espace défini par (6).

Soient φ_1 et φ_2 les fonctions introduites dans la remarque 4.1.

D'après le lemme 4.1. :

$$b_1(u, u) = b_1(\varphi_1 u, \varphi_1 u) + b_2(\varphi_2 u, \varphi_2 u) + R(u)$$

et d'après la remarque 4.1.

$$|R(u)| \leq \epsilon \|u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{W_\xi^0(\Omega_1)}^2$$

$b_1(\varphi_i u, \varphi_i u)$, $i = 1, 2$, se minore en utilisant le lemme 5.1. Il vient :

$$b_1(u, u) \geq \alpha (\|\varphi_1 u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2 + \|\varphi_2 u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2) - |R(u)|.$$

En utilisant à nouveau les lemmes du paragraphe 4, on obtient :

$$b_1(u, u) \geq \alpha \|u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2 - \epsilon \|u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2 - c(\epsilon) \|u\|_{W_\xi^0(\Omega_1)}^2$$

$$(7) \quad b_1(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \|u\|_{W_\xi^m(\Omega_1)}^2 - c \|u\|_{W_\xi^0(\Omega_1)}^2.$$

Démonstration de (B').

Posons $Q_k(D) = Q'_k(o, D)$. En introduisant la transformation de Fourier partielle dans R^{n-1} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} b_1(u, u) &= \int_0^1 \xi(x) dx_n \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^N |Q_k(D)u|^2 dx' , \quad x = (x', x_n) \\ &= \int_0^1 \xi(x) dx_n \int_{R^{n-1}} \sum_{k=1}^N |Q_k(\xi', D_n) \hat{u}(\xi', x_n)|^2 d\xi' . \end{aligned}$$

Soit $v \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ et $\xi_n \in \mathbb{C} - \{0\}$. Posons :

$$u(x', x_n) = v(x') e^{i\xi_n x_n}$$

$$Q_k(\xi', D_n) \hat{u}(\xi', x_n) = Q_k(\xi', \xi_n) \hat{v}(\xi') e^{i\xi_n x_n} .$$

Donc :

$$b_1(u, u) = \int_0^1 \xi(x) |e^{i\xi_n x_n}|^2 dx_n \int_{R^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \right) |\hat{v}(\xi')|^2 d\xi' .$$

En transformant de la même manière le second membre de (7), et après simplification par $\int_0^1 \xi(x) |e^{i\xi_n x_n}|^2 dx$, il vient donc :

$$\int_{R^{n-1}} \left[\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 - \alpha_1 \left(\sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha \right) - \lambda_1 \right] |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \geq 0$$

et cette inégalité est vérifiée pour toute fonction $v \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(R^{n-1}))$, donc pour toute fonction de $\mathcal{Y}(R^{n-1})$. On en déduit :

$$\forall \xi' \in R^{n-1} , \quad \sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \geq \alpha_1 \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha - \lambda_1$$

ce qui donne, compte tenu de l'homogénéité :

$$\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \geq \alpha_1 \sum_{|\alpha|=m} \xi^\alpha \bar{\xi}^\alpha , \quad \text{pour tout } \xi' \in R^{n-1} \text{ et } \xi_n \in \mathbb{C} - \{0\}$$

et la condition (B') en résulte.

6. Condition suffisante : (B) entraîne la coercivité de a.

Soit $x \in \Gamma$, V_0 et θ le voisinage de x_0 et le difféomorphisme introduits au § 3. Alors la forme déduite de a :

$$(1) \quad b(u,v) = \int_{x_n^{\Gamma}} x_n^{\Gamma} \sum_{k=1}^N Q_k(x,D) \overline{Q_k(x,D)v} \, dx$$

(2) $u, v \in W_{x_n^{\Gamma}}^m(\mathbb{R}_+^n)$, et à support dans $\theta(V_0 \cap \bar{\Omega})$ vérifie :

(A') Pour tout $x \in \theta(V_0 \cap \Omega)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$:

$$\sum_{k=1}^N |Q_k'(x, \xi)|^2 \neq 0$$

(B') Pour tout $x \in \theta(V_0 \cap \Gamma)$, pour tout $\xi = (\xi', \xi_n) \neq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^N |Q_k'(x, \xi)|^2 \neq 0.$$

Lemme 6.1. La forme b définie par (1) est coercive sur l'espace défini par (2).

La démonstration de ce lemme se fait en deux étapes :

1) Cas où les polynômes Q_k sont homogènes à coefficients constants.

Les deux hypothèses (A') et (B') se réduisent alors à :

(C) Pour tout $\xi = (\xi', \xi_n) \neq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \neq 0.$$

Alors d'après la proposition 1.1. la forme :

$$A_t(u,v) = \int_t^{\infty} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^N Q_k(D)u \overline{Q_k(D)v} \, dx$$

est coercive sur $H^m(\mathbb{R}^{n-1} \times]t, +\infty[)$, et on a l'inégalité :

$$A_t(u,u) \geq \alpha |u|_{H^m(\mathbb{R}^{n-1} \times]t, +\infty[)}^2, \quad u \in H^m(\mathbb{R}^{n-1} \times]t, +\infty[)$$

et α ne dépend pas de t.

On va en déduire la coercivité de b . On a :

$$\begin{aligned} b(u,u) &\geq \int_0^\infty h(x_n) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^N |Q_k(D)u|^2 dx \\ &\geq \sum_{i=1}^\infty \alpha_i A_{t_i}(u,u) \\ b(u,u) &\geq \alpha \sum_{i=1}^\infty \alpha_i |u|_{H^m(\mathbb{R}^{n-1} \times]t_i, +\infty[)}^2 \\ &\geq \alpha \int_0^\infty h(x_n) dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx' \end{aligned}$$

D'où :

$$(3) \quad b(u,u) \geq \alpha_1 |u|_{W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2, \quad \text{avec } \alpha_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

2. Cas général.

Soit b' la partie principale de b , c'est-à-dire :

$$b(u,u) = \int x_n^r \sum_{k=1}^N |Q'_k(x,D)u|^2 dx$$

D'après le lemme 4.3. :

$$|b'(u,u) - b(u,u)| \leq \varepsilon \|u\|_{W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{W_{x_n}^0(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

Il suffit donc de montrer que b' est coercive.

Soit $x_0 \in \overline{\Theta(v_0 \cap \Gamma)}$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que si u est à support contenu dans la boule de centre x_0 et de rayon δ :

$$(4) \quad b'(u,u) \geq \alpha_0 \|u\|_{W_{x_n}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 - \lambda_0 \|u\|_{W_{x_n}^0(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

Posons :

$$Q'_k(x,D) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha,k}(x) D^\alpha$$

$$Q'_k(x,D)u = Q'_k(x_0,D)u + \sum_{|\alpha|=m} (a_{\alpha,k}(x) - a_{\alpha,k}(x_0)) D^\alpha u$$

Soit $\omega(\rho) = \sup |a_{\alpha,k}(x) - a_{\alpha,k}(x_0)|$ où le sup est pris pour

$$|\alpha| = m, k=1, N, x \in \theta(v_0 \cap \bar{\Omega}), |x-x_0| < \rho.$$

D'après la continuité des coefficients $a_{\alpha,k}$: $\lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho) = 0$.

Si u est à support dans la boule de centre x_0 et rayon ρ , on a donc :

$$\|Q'_k(x_0, D)u\|_{W_{x_n}^0(R_+^n)} \leq \|Q'_k(x, D)u\|_{W_{x_n}^0(R_+^n)} + \omega(\rho) \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)};$$

On en déduit :

$$b'_{x_0}(u, u) \leq c(b'(u, u) + \omega^2(\rho) \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)}^2)$$

avec :

$$b'_{x_0}(u, u) = \int_{x_n} \sum_{k=1}^N |Q'_k(x_0, D)u|^2 dx.$$

Donc d'après l'inégalité (3) du lemme 6.1 :

$$\alpha_1 \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)}^2 \leq c(b'(u, u) + \omega^2(\rho) \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)}^2).$$

On en déduit (4) en prenant ρ assez petit et en utilisant le lemme 4.3.

$\overline{\theta(v_0 \cap \Gamma)}$ étant compact, on peut en trouver un recouvrement fini par des boules de centre x_i et de rayon $\delta(x_i)$. Soient U_i , $i = 1, q$ ces boules et U_0 un ouvert tel que :

$$\overline{\theta(v_0 \cap \Omega)} \subset \bigcup_{i=0}^q U_i, \text{ et } U_0 \in \Sigma_+$$

Il existe des fonction $\psi_i \in \mathcal{D}(U_i)$ telles que :

$$\sum_{i=0}^q \psi_i^2(x) = 1, x \in \theta(v_0 \cap \Omega)$$

D'après les lemmes 4.1. et 4.3. :

$$b'(u, u) = \sum_{i=0}^q b'(\psi_i u, \psi_i u) + R(u)$$

$$|R(u)| \leq \varepsilon \|u\|_{W_{x_n}^m(R_+^n)}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{W_{x_n}^0(R_+^n)}^2,$$

Le terme $b(\psi_0 u, \psi_0 u)$ se minore en la coercivité de :

$$\int_{U_0} \sum_{k=1}^N |Q'_k(x, D)u|^2 dx$$

sur $H_0^m(U_0)$, qui résulte de (A') et de l'inégalité de Garding.

$b(\psi_i u, \psi_i u)$ se minore en utilisant (4), pour $1 \leq i \leq q$. On obtient :

$$b'(u, u) \geq \alpha \sum_{i=0}^q \|\psi_i u\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 - \lambda \|u\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 - |R(u)|$$

et en utilisant à nouveau les lemmes 4.1. et 4.3. :

$$\sum_{i=0}^q \|\psi_i u\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 = \|u\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 + R_1(u)$$

avec :

$$|R_1(u)| \leq \varepsilon \|u\|_{W_{x_n^r}^m(\mathbb{R}_+^n)}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{W_{x_n^r}^0(\mathbb{R}_+^n)}^2$$

Démonstration de la coercivité de a.

Soit $(O_i)_{i=0,p}$ le recouvrement de Ω introduit au paragraphe (3)

$$a(u, u) = \sum_{i=0}^p a(\varphi_i u, \varphi_i u) + R(u)$$

où

$$|R(u)| \leq \varepsilon \|u\|_{W_{\varphi}^m(\Omega)}^2 + c(\varepsilon) \|u\|_{W_{\varphi}^0(\Omega)}^2.$$

$a(\varphi_0 u, \varphi_0 u)$ se minore en utilisant l'hypothèse (A) et l'inégalité de Garding.

$a(\varphi_i u, \varphi_i u) = b((\varphi_i u) \circ \theta_i^{-1}, (\varphi_i u) \circ \theta_i^{-1})$, $1 \leq i \leq p$, et on utilise la

coercivité de b qui résulte du lemme 6.1. On termine alors comme dans la démonstration précédente.

7. Cas des coefficients constants.

Lorsque $P_k(x,D) = P_k(D)$ les hypothèses (A) et (B) sont équivalentes à :

$$(1) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n - \{0\} : \sum_{k=1}^N |P_k(\xi)|^2 \neq 0.$$

En effet (1) résulte du fait que pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, il existe $x \in \Gamma$, ξ_1 tangent à Γ en x , ξ_2 normal en x à Γ et $\tau \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\xi = \xi_1 + \tau \xi_2.$$

8. Cas où $m=1$.

Soit a une forme sesquilinéaire sur $W_\varphi^1(\Omega)$ dont la partie principale a' s'écrit :

$$a'(u,v) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u \overline{D_j v} dx,$$

Les coefficients a_{ij} étant continus sur $\overline{\Omega}$.

Théorème 8.1. Pour que a soit coercive sur $W_\varphi^1(\Omega)$, il faut et il suffit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

(A') Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \Omega$:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \right) \geq \alpha |\xi|^2$$

(B') Pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ de la forme $\xi_1 + \tau \xi_2$ où ξ_1 est tangent en x à Γ , ξ_2 étant le vecteur unitaire de la normale en x à Γ et $\tau \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \overline{\xi_j} \right) \geq \alpha |\xi|^2$$

On se ramène au cas d'une forme hermitienne en posant :

$$b(u,v) = \frac{1}{2}(a(u,v) + \overline{a(v,u)}).$$

On a :

$$\begin{cases} b(u,v) = \overline{b(v,u)} \\ b(u,u) = \operatorname{Re} a(u,u). \end{cases}$$

et si $\sum_{ij=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j$ désigne la forme hermitienne dans \mathbb{C}^n associé à b :

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j = \sum_{ij=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j.$$

La démonstration du théorème 1 s'adapte a ce cas :

si b est coercive, on en déduit :

$$(A) \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \sum_{ij=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \neq 0$$

$$(B) \quad \forall x \in \Gamma, \forall \xi = \xi_1 + \tau \xi_2, \dots$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n b_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \neq 0.$$

La condition (A) donne immédiatement (A'), (B) donne :

$$\forall x \in \Gamma, \exists \alpha(x) > 0 : \forall \xi = \xi_1 + \tau \xi_2$$

$$\sum b_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha(x) |\xi|^2$$

De la continuité de b_{ij} sur Γ , il résulte :

$$\inf_{x \in \Gamma} \alpha(x) = \alpha > 0.$$

Si (A') et (B') sont réalisées, la démonstration de la coercivité se fait comme pour le théorème 1, sauf pour la première partie du lemme 6.1 (cas des coefficients constants dans \mathbb{R}_+^n), où on ne peut plus faire appel au résultat d'Aronszajn : on pourrait décomposer b en somme de carrés, mais on aurait une expression de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} x_x^r \sum_{k=1}^n \varepsilon_k |Q_k(D)u|^2 dx$$

avec $\varepsilon_k = \pm 1$ et les hypothèses (A') et (B') n'entraînent pas $\varepsilon_k = +1$.

Démontrons donc directement que la forme :

$$(1) \quad b(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^r \sum_{i, j=1}^n \alpha_{ij} D_i u \overline{D_j v} \, dx$$

est coercive sur l'espace :

$$u \in W_{x_n^r}^1(\mathbb{R}_+^n), \text{ supp } u \text{ borné.}$$

Les coefficients α_{ij} vérifiant :

$$(2) \quad \sum_{i, j=1}^r \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha |\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi', \xi_n)$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$

Remarquons d'abord que si ξ est la forme :

$$(3) \quad \xi = (\lambda \xi', \xi_n), \lambda \in \mathbb{C}, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \xi_n \in \mathbb{C}$$

l'inégalité (2) est encore vérifiée : il suffit de l'écrire pour $(\xi', \frac{\xi_n}{\lambda})$

et de multiplier les deux membres par $|\lambda|^2$. s'écrit :

$$b(u, u) = \int_0^\infty x_n^r \, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{i, j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \right) d\xi'$$

où ξ est donné par (3) avec :

$$\lambda = \hat{U}(\xi', x_n)$$

$$\xi_n = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{U}(\xi', x_n).$$

En appliquant (2), on en déduit donc :

$$\begin{aligned} b(u, u) &\geq \alpha \int_0^\infty x_n^r \, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\xi_i \hat{U}(\xi', x_n)|^2 + \left| \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_n}(\xi', x_n) \right|^2 \right) d\xi' \\ &\geq \alpha |u|_{W_{x_n^r}^1(\mathbb{R}_+^n)}^2. \end{aligned}$$

II - LE CAS D'UN OUVERT AVEC COINS.

Dans cette partie, on suppose que l'ouvert Ω est borné et que tout point de la frontière possède un voisinage V tel que $V \cap \Omega$ s'applique sur $(\mathbb{R}_+)^j \times \mathbb{R}^{n-j}$. (Le cube $]0,1[^n$ de \mathbb{R}^n possède cette propriété).

La méthode de démonstration est analogue utilisée en (I).

1. Hypothèses et énoncé des résultats.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n et :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_i(x) > 0, \quad 1 \leq i \leq p\}.$$

On suppose Ω non vide et borné. Si $x \in \Gamma$, la frontière de Ω , l'une au moins des fonctions φ_i s'annule en x . Soit :

$$I(x) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\} \mid \varphi_i(x) = 0\}.$$

On suppose que pour tout $x \in \Gamma$, $I(x)$ a au plus n éléments. Soit :

$$\Gamma_j = \{x \in \Gamma \mid |I(x)| = j\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Soit $T(x)$ le sous-espace de \mathbb{R}^n orthogonal au système de vecteurs

engendré $\{\varphi_i(x)\}_{i \in I(x)}$; et $N_C(x)$ le sous-espace engendré par ce système

dans \mathbb{C}^n . On suppose que si $x \in \Gamma_j$, $T(x)$ est de dimension $n-j$.

Soit pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^p \varphi_i^{r_i}(x), \quad \text{ou } r_i \in \mathbb{R}_+.$$

On définit l'espace $W_\varphi^m(\Omega)$ comme au (I). On considère comme au (I) la forme :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{k=1}^N P_k(x, D) u \overline{P_k(x, D) v} dx.$$

THEOREME 1.

1) Conditions nécessaires; si a est coercive sur $W^m(\Omega)$ alors :

(A) Pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$, on a $A(x, \xi) \neq 0$

(B) Pour tout $x \in \Gamma_j$ et $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ de la forme $\xi = \xi_1 + \xi_2$

ou $\xi_1 \in T(x)$ et $\xi_2 \in N_C(x)$ on a $A(x, \xi) \neq 0$, ($1 \leq j \leq n$).

2) Conditions suffisantes : La condition (A) et la condition (B₁) suivante entraînent la coercivité de a :

- Pour tout $x \in \Gamma_1$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ de la forme $\xi = \xi_1 + \xi_2$ ou $\xi_1 \in T(x)$ et $\xi_2 \in N_{\mathbb{C}}(x)$ on a : $A(x, \xi) \neq 0$.

- Pour tout $x \in \Gamma_j$, avec $j \geq 2$, et tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ on a : $A(x, \xi) \neq 0$.

2. La condition (A) est nécessaire. (même démonstration qu'au (I)).

3. Explicitation des hypothèses faites sur Ω .

On démontre que tout point $x_0 \in \Gamma_j$ possède un voisinage V_0 tel que :

$$V_0 \cap \Omega = \{x \mid \forall i \in I(x_0) : \psi_i(x) > 0\} \cap V_0$$

$$V_0 \cap \Gamma = \{x \mid \forall i \in I(x_0) : \psi_i(x) = 0\} \cap V_0$$

$$V_0 \cap \Gamma_k = \emptyset \quad \text{si } k > j$$

et tel qu'il existe un difféomorphisme θ possédant les propriétés :

$$V_0 \cap \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^+)^j \times \mathbb{R}^{n-j} = \Omega_j$$

$$V_0 \cap \Gamma \longrightarrow ((\mathbb{R}^+)^j \times \mathbb{R}^{n-j}) \cap \{x \mid \prod_{i=1}^j x_i = 0\}$$

$$\forall x \in \theta(V_0 \cap \Omega) : \psi_i(\theta^{-1}(x)) = x_i, \quad 1 \leq i \leq j$$

(En supposant $I(x) = \{1, 2, \dots, j\}$)

La différentielle de θ en x_0 transforme $T(x_0)$ et $N(x_0)$ en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-j}$ et $\mathbb{R}^j \times \{0\}$ respectivement.

On vérifie alors de la même manière qu'au (I) que les propriétés (A), (B) et (B₁) se conservent dans ce difféomorphisme. Le poids se transforme donc en :

en :

$$\psi_j(x) = \prod_{i=1}^j x_i^{r_i}$$

On utilisera les inégalités :

$$(1) \quad \frac{1}{2} H(x_1, \dots, x_j) \leq \prod_{i=1}^j x_i^{r_i} \leq H(x_1, x_2, \dots, x_j)$$

où

$$H(x_1, \dots, x_j) = \prod_{i=1}^j h(x_i) \quad (I-3)$$

4. Inégalités entre les normes.

Lemme 4.1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c(\epsilon)$ tel que pour tout $u \in W_{\psi}^m(\Omega)$:

$$\|u\|_{W_{\psi}^{m-1}(\Omega)}^2 \leq \epsilon \|u\|_{W_{\psi}^{m-1}(\Omega)}^2 + c(\epsilon) \|u\|_{W_{\psi}^0(\Omega)}^2$$

La démonstration est analogue à celle de (I-4). On vérifie que le lemme est également valable pour l'ouvert

$$\Omega_j' =]0, 1[\times]x^j, R^{n-j}[, \text{ avec le poids } \psi_j(x) \cdot \psi_j(1-x).$$

5. Conditions nécessaires.

On suppose a coercive. Soit $x_0 \in \Gamma_j$. En utilisant le difféomorphisme

θ introduit au § 3, on démontre que si la forme :

$$b(v, v) = \int_{\Omega_j} \psi_j(x) \sum_{k=1}^N |Q_k(x, D)v|^2 dx$$

est coercive sur

$$\{u \in W_{\psi_j}^m(\Omega_j), \text{ supp } u \text{ borné}\}$$

alors :

$$\sum_{k=1}^N |Q_k'(0, \xi)|^2 \neq 0 \text{ pour } \xi \in \mathbb{C}^n - \{0\} \text{ de la forme}$$

$$\xi = (\xi', \xi'') \text{ ou } \xi' \in \mathbb{C}^j \text{ et } \xi'' \in \mathbb{R}^{n-j}.$$

On montre d'abord que la forme :

$$b'(v, v) = \int_{\Omega_j} \psi_j(x) \cdot \psi_j(1-x) \sum_{k=1}^N |Q_k'(0, D)u|^2 dx.$$

En introduisant alors les fonctions $e^{\xi' x'} u(x'')$, où $x = (x', x'')$ et en

utilisant la transformation de Fourier partielle par rapport à x'' , on en déduit le résultat cherché.

6. Conditions suffisantes de coercivité.

En utilisant un recouvrement convenable et une partition de

l'unité associée à ce recouvrement, on se ramène à montrer que la forme :

$$(1) \quad b(u, v) = \int_{\Omega_j} \varphi_j(x) \sum_{k=1}^N Q_k(x, D) u \overline{Q_k(x, D) v} \, dx$$

est coercive sur :

$$(2) \quad \{u \in W^m(\Omega_j) \mid \text{supp } u \subset \Sigma\}$$

sachant que :

$$1^\circ) \quad \sum_{k=1}^N Q'_k(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } x \in \Sigma_+ \text{ et } \xi \in \mathbb{C}^n - \{0\} \text{ si } j \geq 2.$$

$$2^\circ) \quad \sum_{k=1}^N Q'_k(x, \xi) \neq 0 \text{ pour } x \in \Sigma \text{ et } \xi = (\xi', \xi''), \xi' \in \mathbb{C}, \xi'' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ si } j=1.$$

Le cas $j=1$ a été traité au (I). Si $j \geq 2$, on procède de la même manière: dans le cas des coefficients constants, on utilise les inégalités 3-1 et le fait la forme :

$$\int_{\Omega_j} \sum_{k=1}^N |Q_k(D)u|^2 \, dx$$

est coercive sur $H^m(\Omega_j)$ sachant que $\sum_{k=1}^N |Q_k(\xi)|^2 \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, d'après un résultat de Smith (4).

7. Cas de formes d'ordre 2.

On considère sur $W_\varphi^1(\Omega)$ une forme sesquilinéaire dont la partie principale s'écrit

$$a'(u, v) = \int_{\Omega} \varphi(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i u \overline{D_j v} \, dx$$

les coefficients a_{ij} étant continus sur $\overline{\Omega}$. Posons pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$A(x, \xi) = \text{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \overline{\xi_j} \right)$$

Théorème 7.1. : Pour que a soit coercive sur $W_\varphi^1(\Omega)$, il faut et il suffit que

(A') Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et tout $x \in \Omega$ on ait : $A(x, \xi) > 0$.

(B') Pour tout $x \in \Gamma_j$ et pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ de la forme :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \text{ ou } \xi_1 \in T(x) \text{ et } \xi_2 \in N_{\mathbb{C}}(x) \text{ on ait } A(x, \xi) > 0.$$

Comme au I-8, on se ramène au cas où a est hermitienne.

La démonstration du théorème 1.1. s'adapte, sauf la démonstration des conditions suffisantes de coercivité ; il reste à vérifier que :

$$b(u, v) = \int_{\Omega_j} \psi_j(x) \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} D_i u \overline{D_j v} dx$$

est coercive sur $\{u \in W_{\psi_j}^m(\Omega_j), \text{supp } u \text{ borné}\}$ sachant que :

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j > 0 \text{ pour } \xi = (\xi', \xi'') \neq 0, \xi' \in \mathbb{C}^j, \xi'' \in \mathbb{R}^{n-j}$$

On en déduit :

$$\sum \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour } \xi = (\xi', \xi'') \in \mathbb{C}^j \times \mathbb{R}^{n-j}$$

et de même qu'au I-8 :

$$(1) \sum \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \geq \alpha |\xi|^2 \text{ pour } \xi = (\xi', \lambda \xi''), \xi' \in \mathbb{C}^j, \xi'' \in \mathbb{R}^{n-j}, \lambda \in \mathbb{C}$$

En utilisant la transformation de Fourier en x'' :

$$b(v, v) = \int_{(\mathbb{R}_+)^j} \psi_j(x') dx' \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \left(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j \right) d\xi''$$

ou

$$\xi = (\xi_i)_{i=1, n} = (\xi', \lambda \xi'')$$

avec

$$\lambda = \hat{u}(x', \xi'')$$

$$\xi_i = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x', \xi''), \quad i = 1, j$$

D'après l'inégalité (1), il vient donc :

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq \alpha \int_{(\mathbb{R}_+)^j} \psi_i(x') dx' \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \left(\sum_{i=1}^j \left| \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(x', \xi'') \right|^2 + \sum_{i=j+1}^n |\xi_i \hat{u}(x', \xi'')|^2 \right) d\xi'' \\ &\geq \alpha |u|_{W_{\psi_j}^1(\Omega_j)}^2 \end{aligned}$$

d'où la coercivité de b .

BIBLIOGRAPHIE

1. S. AGMON : The coerciveness problem for integro-differential forms.
J. Analyse Math, 6, (1958) 183-223.
2. S. AGMON : Lectures on boundary value problems. Van Nostrand Math.
Studies.
3. N. ARONZAJN : On coercive integro-differential quadratic forms.
Tchn. Report n°14. University of Kansas. (1955) 94-106
4. SMITH : Inequalites for formaly positive integro-differential forms.
Bull. Am. Math. Soc. 67 (1961) 368-370.