B. HANOUZET

Problèmes elliptiques dans des ouverts non bornés

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1969-1970, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 1, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1969-1970___1_A1_0>

PROBLEMES ELLIPTIQUES DANS DES OUVERTS NON BORNES

par

B. HANOUZET.

On se propose de résoudre le problème de Dirichlet pour certains opérateurs elliptiques définis dans l'espace entier ou dans un demi espace. On obtient des résultats pour des opérateurs elliptiques dégénérés ou non, la dégénérescence signifie ici, que les coefficients de la partie principale de l'opérateur tendent vers zéro ou vers l'infini, quand $|x|$ tend vers l'infini.

J. BARROS NETO traite dans [2] un problème analogue pour des opérateurs elliptiques homogènes ; dans cet article, il utilise les espaces D^m obtenus par complétion de l'espace des fonctions C^∞ à support compact par rapport à la norme de Dirichlet ([3] et [5]). Ces espaces sont des espaces normaux de distributions quand $\frac{1}{2} - \frac{m}{n} > o$, (n est la dimension de l'espace), la méthode utilisée ne s'applique donc pas en particulier à l'opérateur de Laplace en dimension 2.

On introduit ici des espaces de Sobolev avec poids, ces espaces coïncident avec les espaces D^m pour certaines valeurs des paramètres (théorème I.2). Notons que c'est l'inégalité de Hardy [4] qui, pour un ouvert non borné, joue le rôle de l'inégalité de Poincaré (voir [7] par exemple) valable pour un ouvert borné dans une direction. Citons aussi L.D. KUDRJACEV [6] qui introduit des espaces analogues pour des fonctions poids tenant vers zéro à l'infini.

Dans la première partie, on introduit les espaces, et on étudie certaines de leurs propriétés.

Dans la deuxième partie, on pose le problème dans l'espace entier par la méthode variationnelle. Les résultats de régularité (théorème II.1) sont obtenus en approchant le problème par une famille de "problèmes tronqués", et en démontrant des inégalités à priori sur ces problèmes tronqués.
Cette méthode peut être rapprochée de la méthode de régularisation elliptique utilisée pour des opérateurs elliptiques dégénérés définis dans un ouvert borné (voir [1] par exemple). On traite aussi de la même façon le problème de Dirichlet homogène dans un semi espace.

I - LES ESPACES

1- Notations et premières propriétés

$\mathbb{R}^n$ désignant l'espace euclidien de dimension n, on note $\mathbb{R}^n_+$ le demi espace ouvert : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > o\}$ et $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ le demi espace fermé : $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq o\}$. Le point générique de $\mathbb{R}^n_+$ sera aussi noté (x',y) avec $x' = (x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $y = x_n \in \mathbb{R}_+$. D_i désignant la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$, pour $\ell \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$D^\ell = D_1^{\ell_1}\ldots D_n^{\ell_n} = \frac{\partial^{|\ell|}}{\partial x_1^{\ell_1}\ldots\partial x_n^{\ell_n}} .$$

Les notations relatives aux espaces de distributions sont celles de [8]. Introduisons enfin les fonctions poids $(1+\rho^2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, où la fonction ρ est définie par $\rho(x) = |x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

Nous pouvons maintenant introduire les espaces :

Définition I.1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$, on pose :

$$W^{m,p}_\alpha(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\ell|}{2}} D^\ell u \in L^p(\Omega) \; ; \; |\ell| \leq m\}.$$

On a immédiatement

1°) $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$|u|_{W^{m,p}_\alpha(\Omega)} = \Big(\sum_{|\ell|\leq m} |(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\ell|}{2}} D^\ell u|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \qquad (I.1)$$

2°) On a les inclusions suivantes, avec injections continues :

$$W^{m,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow W^{m-1,p}_{\alpha-1}(\Omega) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow W^{o,p}_{\alpha-m}(\Omega).$$

3°) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'application :

$$u \longmapsto \varphi u$$

est linéaire continue de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et, de même, pour

$\Psi \in \overline{\mathcal{D}(R^n_+)}$ (1) , l'application :

$$u \longmapsto \Psi u$$

est linéaire continue de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n_+)$. ($W^{m,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev habituel, voir [7] par exemple.

4°) Dans le cas particulier p=2, on note $W^m_\alpha(\Omega) = W^{m,2}_\alpha(\Omega)$,

$$W^m_\alpha(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\ell|}{2}} D^\ell u \in L^2(\Omega) \ ; \ |\ell| \leq m\}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire :

$$(u,v)_{W^m_\alpha(\Omega)} = \sum_{|\ell|\leq m} \int_\Omega (1+\rho^2)^{\alpha-m+|\ell|} D^\ell u \, \overline{D^\ell v} \, dx.$$

2- Espaces duals

Nous commençons par démontrer un résultat de densité :

Théorème I.1

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$

$\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)}$ est dense dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Démontrons seulement la première partie. On se ramène, par troncatures, aux propriétés de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(x) = 1$ pour $\rho(x) \leq 1$, $\varphi(x) = o$ pour $\rho(x) \geq 2$, $o \leq \varphi(x) \leq 1$ et posons :

$$\varphi_\lambda(x) = \varphi(\tfrac{x}{\lambda}) \ ; \ u_\lambda = \varphi_\lambda \, u.$$

Nous montrons que, pour $u \in W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $u_\lambda \longrightarrow u$ dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Soit $i \in \mathbb{N}^n$, $|i| \leq m$ et exprimons :

---

(1) $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)}$ désigne l'espace des restrictions à $\mathbb{R}^n_+$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \quad |D^i(u_\lambda - u)|^p \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \quad |\sum_{j\leq i} \binom{j}{i} D^j \varphi_\lambda D^{i-j} u - D^i u|^p \, dx$$

$$\leq C \left\{ \int_{\lambda\leq\rho(x)\leq 2\lambda} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \sum_{\substack{j\leq i \\ j\neq i}} |\binom{j}{i} D^j \varphi_\lambda D^{i-j} u|^p \, dx \right.$$

$$\left. + \int_{\rho(x)\geq\lambda} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \quad |\varphi_\lambda - 1|^p \, |D^i u|^p \, dx \right\}.$$

Il est immédiat que le dernier terme dans l'accolade tend vers zéro quand λ tend vers l'infini. Pour les autres termes, on a :

$$D^j \varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^{|j|}} (D^j \varphi)\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

donc, pour $j\leq i$, $j\neq i$:

$$\int_{\lambda\leq\rho(x)\leq 2\lambda} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \quad |D^j \varphi_\lambda \; D^{i-j} u|^p \, dx \leq$$

$$C \int_{\lambda\leq\rho(x)\leq 2\lambda} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|)\frac{p}{2}} \quad \lambda^{-|j|p} \, |D^{i-j} u|^p \, dx \leq$$

$$C \int_{\lambda\leq\rho(x)\leq 2\lambda} (1+4\lambda^2)^{\frac{|j|p}{2}} \; \lambda^{-|j|p} \; (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i|-|j|)\frac{p}{2}} \quad |D^{i-j} u|^p \, dx$$

$$\leq C \int_{\lambda\leq\rho(x)\leq 2\lambda} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|i-j|)\frac{p}{2}} \quad |D^{i-j} u|^p \, dx.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Soit maintenant u à support compact, alors u appartient à $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ implique que u appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Par suite il existe une suite $\varphi_\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, u et $\{\varphi_\mu\}_{\mu\geq 1}$ à supports dans un compact fixe, telle que :

$$\varphi_\mu \longrightarrow u \text{ dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \mu \longrightarrow +\infty$$

mais alors , d'après la propriété des supports :

$$\varphi_\mu \longrightarrow u \text{ dans } W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \mu \longrightarrow +\infty .$$

Conséquence :

$W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace normal, par suite son dual est un espace de distributions. Par définition, on pose :

$$W_{-\alpha}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) = (W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n))' \; ; \; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On obtient immédiatement :

1) Si $T \in (W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n))'$, il existe une famille de fonctions

$$\{f_\ell\}_{|\ell| \leq m} \; , \; f_\ell \in W_{-\alpha+m-|\ell|}^{o,p'} \quad , \; (\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1),$$

telle que :

$$T = \sum_{|\ell| \leq m} D^\ell f_\ell .$$

2) $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est un Banach réflexif.

3- Comparaison à $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

On étudie d'abord le cas $\alpha = o$ et on démontre l'identité de $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et de $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ pour certaines valeurs des paramètres.

Définition I.2

Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme :

$$|u|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{|\ell| = m} |D^\ell u|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$ cet espace est un espace de distributions, et on a :

Théorème I.2

Pour $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$, les espaces $W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ coïncident, algébriquement et topologiquement.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $|\varphi|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq |\varphi|_{W_o^{m,p}(\mathbb{R}^n)}$, il suffit de montrer que :

$$\forall \; \ell \in \mathbb{N}^n, \quad |\ell| < m \; , \; |(1+\rho^2)^{\frac{|\ell|-m}{2}} D^\ell \varphi|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |\varphi|_{D^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \qquad (I.2)$$

Nous utilisons les coordonnées polaires $x = \rho\sigma$, $\rho \geq o$, $\sigma \in S_{n-1}$ (sphère unité de $\mathbb{R}^n$) pour montrer d'abord que :

$$|(1+\rho^2)^{\frac{|\ell|-m}{2}} D^\ell \varphi|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|k|=|\ell|+1} |\rho^{|k|-m} D^k \varphi|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(I.3)}$$

Pour $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $|\Psi(\rho\sigma)| \leq \int_\rho^{+\infty} |D_t \Psi(t\sigma)| \, dt$.

On obtient :

$$\int_{R^n} (1+\rho^2)^{(|\ell|-m)\frac{p}{2}} |\Psi(x)|^p \, dx$$

$$\leq \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_o^{+\infty} (1+\rho^2)^{(|\ell|-m)\frac{p}{2}} \left(\int_\rho^{+\infty} |D_t \Psi(t\sigma)| \, dt\right)^p \rho^{n-1} \, d\rho$$

$$\leq C \int_{S^{n-1}} d\sigma \int_o^{+\infty} \rho^{(|\ell|-m)p+n-1} \left(\int_\rho^\infty |D_t \Psi(t\sigma)| dt\right)^p d\rho.$$

Mais $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$ implique $(|\ell|-m)pMn-1 > -1$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hardy [4] qui fournit :

$$|(1+\rho^2)^{\frac{|\ell|-m}{2}} \Psi|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$C \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \int_o^{+\infty} \rho^{(|\ell|+1-m)p+n-1} |D_\rho \Psi(\rho\sigma)|^p \, d\rho\right)^{1/p}$$

$$\leq C \sum_{i=1}^n |\rho^{|\ell|+1-m} D_i \Psi(x)|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

En remplaçant Ψ par $D^\ell \varphi$ on obtient (I.3). Si $|\ell|+1 < m$, on peut réitérer le procédé qui fournit (I.2).

Remarque :

Supposant toujours $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$, on sait que $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à l'espace :

$$\{u \in L^{q_m}(\mathbb{R}^n) \mid D^j u \in L^{q_{m-|j|}}(\mathbb{R}^n) \ ; \ |j| \leq m \ , \ \frac{1}{q_{m-j}} = \frac{1}{p} - \frac{m-|j|}{n}\}$$

Pour étudier le cas général (α quelconque), nous montrons d'abord que pour m fixé, deux espaces $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $W_\beta^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ sont isomorphes, plus précisément :

Théorème I.3

Pour α , $\beta \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$, l'application :

$$u \longmapsto (1+\rho^2)^{\beta/2} u$$

est un isomorphisme de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

(L'application $u \longrightarrow (1+\rho^2)^{-\beta/2}u$ est l'isomorphisme inverse).

1°) Cas $m \geq o$

Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, posons $v = (1+\rho^2)^{\beta/2}u$; alors pour $|\ell| \leq m$, on a :

$$D^\ell v = \sum_{k \leq \ell} \binom{\ell}{k} D^k((1+\rho^2)^{\beta/2})\, D^{\ell-k}u$$

donc, puisque

$$|D^k(1+\rho^2)^{\beta/2}| \leq C\, (1+\rho^2)^{\frac{\beta-|k|}{2}} ,$$

on a :

$$(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-\beta-m+|\ell|}{2}} |D^\ell v| \leq C \sum_{k \leq \ell} \binom{\ell}{k} (1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\ell-k|}{2}} |D^{\ell-k}u|$$

et par suite :

$$|(1+\rho^2)^{\beta/2}u|_{W_{\alpha-\beta}^{m,p}} \leq C\, |u|_{W_\alpha^{m,p}}$$

La réciproque est immédiate.

2°) Cas $m<o$

Il suffit de transposer le résultat précédent.

Corollaire I.1

Pour $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > o$, l'application :

$$u \longmapsto \Big(\sum_{\ell=m} |D^\ell (1+\rho^2)^{\alpha/2}u|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/p}$$

définit une norme sur $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ équivalente à celle définie par (I.1).

En effet l'application $u \longmapsto (1+\rho^2)^{\alpha/2} u$ est un isomorphisme de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{o}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, et on applique le théorème I.2

Corollaire I.2

L'application $u \longmapsto (1+\rho^2)^{\beta/2} D^j u$ est linéaire continue de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{\alpha-\beta}^{m-|j|,p}(\mathbb{R}^n)$.

4- Propriétés de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$

Théorème I.4 $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à $\mathbb{R}_+^n$ des fonctions de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Cette propriété découle immédiatement du résultat suivant :

Lemme I.1

Il existe un prolongement linéaire continu de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

On utilise la méthode de Babitch. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$, on pose :

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x',x_n) & \text{si } x_n > 0 \\ \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \; \varphi(x',-k\,x_n) & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

et on choisit les λ_k solutions du système

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \; (-k)^j = 1 \quad , \quad j = 0,1,\dots,m.$$

On vérifie ensuite que

$$|P\varphi|_{W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \;\; |\varphi|_{W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)}$$

d'où le lemme.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ n'est pas dense dans $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, nous introduisons un nouvel espace :

Définition I.4

$\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$ désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_+^n)$.

On a les propriétés :

1°) Pour que u appartenant à $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$ soit dans $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$, il faut et il suffit que son prolongement par 0 en dehors de $\mathbb{R}_{+}^{n}$ $\tilde{u}$ soit dans $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}^{n})$.

2°) Le dual $W_{-\alpha}^{-m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$ de $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{m,p'}(\mathbb{R}_{+}^{n})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ est un espace de distributions.

3°) Pour $m \in \mathbb{N}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, l'application

$$u \longmapsto (1+\rho^{2})^{\beta/2} u$$

est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$ sur $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha-\beta}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$.

Pour $m \in \mathbb{Z}$, cette application est un isomorphisme de $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$ sur $W_{\alpha}^{m,p}(\mathbb{R}_{+}^{n})$.

II - LE PROBLEME DE DIRICHLET HOMOGENE - REGULARITE.

On traite de certains problèmes de Dirichlet homogènes dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n_+$ posés par la méthode variationnelle. L'existence et l'unité de la solution sont immédiates. L'essentiel des résultats porte sur l'étude de la régularité de la solution.

1- Cas de l'espace entier.

On restreint l'étude à une équation elliptique d'ordre 2, l'ordre 2m se traiterait de façon analogue. On traite d'abord le cas où l'on peut prendre $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme espace pivot pour la méthode variationnelle (théorème II.1). Le cas général (théorème II.2) sera ensuite une conséquence du théorème I.3.

Soit a une forme intégro-différentielle définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij}(x)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx \qquad \text{(II.1)}$$

On suppose que

$$a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(II.2)}$$

ce qui implique que a est continue sur $W^1_1(\mathbb{R}^n) \times W^1_1(\mathbb{R}^n)$, et on suppose d'autre part que a est $W^1_1(\mathbb{R}^n)$-coercitive :

$$\exists \delta > o \text{ tel que, } \forall\, u \in W^1_1(\mathbb{R}^n), \qquad \text{(II.3)}$$

$$\mathrm{Re}\; a(u,u) \geq \delta\, |u|^2_{W^1_1(\mathbb{R}^n)}$$

On a immédiatement :

Proposition

Si $f \in W^{-1}_{-1}(\mathbb{R}^n)$, le problème

$$\begin{cases} u \in W^1_1(\mathbb{R}^n) \\ a(u,v) = (f,\overline{v})_{W^{-1}_{-1} \times W^1_1} \quad \forall\, v \in W^1_1 \end{cases} \qquad \text{(II.4)}$$

admet une solution unique.

Introduisons l'opérateur A(x,D) associé à

$$A(x,D) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} (-1)^{|j|} \; D^j \; ((1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} \; a_{ij} \; D^i)$$

On obtient l'énoncé équivalent :

A est un isomorphisme de W_1^1 sur W_{-1}^{-1} (II.5)

On se propose de déterminer des propriétés de u si Au appartient à un espace plus petit que $W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)$, en particulier si $Au \in \bigcap_{k\geq o} W_k^k(\mathbb{R}^n)$.

Nous supposerons réalisées les hypothèses :

$\exists C > o$ tel que $|D^\ell a_{ij}| < C \; (1+\rho^2)^{-\frac{|\ell|}{2}}$, $\ell \in \mathbb{N}^n$ (II.6)

Remarquons que ces dernières hypothèses sont naturelles dans le cas d'une variable pour assurer que A est linéaire continu de $\bigcap_{k\geq o} W_k^k(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Les hypothèses II 2,3,6 étant réalisées, nous obtenons :

Théorème II.1

Pour $k\geq 1$, l'opérateur A est un isomorphisme topologique de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Il est immédiat par le corollaire I.2 que A est linéaire continu de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ dans $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Dans le lemmes qui suivent, nous démontrons d'abord que $A(W_2^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que :

si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$.

L'isomorphisme est alors une conséquence du théorème de Banach.

La démonstration du théorème II.1 se termine ensuite par récurrence.

Lemme II.1

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout ℓ vérifiant $|\ell| = 2$, on a $(1+\rho^2)^{1/2} \; D^\ell u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

On utilise la méthode des quotients différentiels.

Pour $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$\tau_h u(x) = u(x_1+h, x_2, \dots, x_n)$$

et pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\tau_h T$ est définie par :

$$<\tau_h T, \varphi>_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = <T, \tau_h \varphi>_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Formellement on a :

$$A\left(\frac{\tau_h u-u}{h}\right) = \frac{\tau_h f-f}{h} + \left(\frac{\tau_h A-A}{h}\right) \tau_h u \tag{II.7}$$

On vérifie que $\dfrac{\tau_h u-u}{h} \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ pour $h \neq o$.

Puis des inclusions topologiques :

$W_1^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)$ (2)

on tire que pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\left|\frac{1}{h}(\tau_h f-f)\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On étudie ensuite $\left(\dfrac{\tau_h A-A}{h}\right) \tau_h u$; pour cela écrivons d'abord A sous la forme :

$$A(x,D) = \sum_{|k| \leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|k|}{2}} \, a_k(x) \, D^k$$

L'hypothèse II.6 implique que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^n : |D^{\ell} a_j(x)| \leq C(1+\rho^2(x))^{-\frac{|\ell|}{2}} \tag{II.6'}$$

De $|a_j(x)| \leq C$ et $|D a_j(x)| \leq C$, on tire que, pour $v \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\left|\frac{\tau_h A-A}{h} v\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, |v|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}$$

et comme $|\tau_h u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \, |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}$, on déduit avec (II.5) et (II.7) :

$$\left|\frac{\tau_h u-u}{h}\right|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \left|\frac{\tau_h f-f}{h}\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} + \left|\frac{\tau_h A-A}{h} \tau_h u\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

$$\leq C \left\{ |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

---

(2) $H^s(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev usuel, voir [7] par exemple

Par argument de compacité faible de la boule unité de $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, on déduit que :

$$D_1 u \in W_1^1(\mathbb{R}^n).$$

Le raisonnement est identique pour les autres dérivées premières, donc le lemme II.1 est vérifié.

Pour poursuivre la démonstration, il serait intéressant d'étudier un terme de la forme :

$$(1+\rho^2)^{1/2} \frac{\tau_h u - u}{h},$$

mais on ne peut savoir à priori si cette expression est dans $W_1^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarquons d'autre part que nous n'avons pas utilisé le maximum sur f.

On a en effet

$$\left|(1+\rho^2)^{1/2} \frac{\tau_h f - f}{h}\right|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ |f|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Le lemme II.1 permet d'affirmer en particulier que $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Nous utiliserons ce résultat en tronquant la solution du problème II.4, puis en démontrant des inégalités à priori indépendantes de la troncature.

Introduisons :

Le problème tronqué

Soit $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $o \leq \Psi \leq 1$, satisfaisant :

$$\Psi(x) \equiv 1 \text{ pour } \rho(x) \leq 1\ ,\ \Psi(x) \equiv o \text{ pour } \rho(x) \geq 2.$$

Posons $\Psi_k(x) = \Psi(\frac{x}{k})$ et $u_k = \Psi_k u$.

Alors si u (dans $W_1^1(\mathbb{R}^n)$) est solution de $Au = f$, u_k (dans W_1^1) est solution du problème tronqué :

$$(p_k) \qquad Au_k = g_k = \Psi_k\, Au + [A, \Psi_k]\, u$$

($[A,\Psi_k]$ est le commutateur de A et Ψ_k : $[A,\Psi_k]\, u = A(\Psi_k u) - \Psi_k\, Au$).

Lemme II.2

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ et $Au = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors il existe $C>o$ telle que :

$$|g_k|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \{|u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\}$$

Il est immédiat que $|\Psi_k\ Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Etudions $[A,\Psi_k]u$:

$$[A,\Psi_k]u = \sum_{|\alpha|\leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}\ a_\alpha(x)\ D^\alpha(\Psi_k u) - \Psi_k\ (1+\rho^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}\ a_\alpha(x)\ D^\alpha u.$$

Il suffit d'étudier trois types de termes :

$$(1+\rho^2)^{1/2}\ (D_j\ \Psi_k)u\ ;\ (1+\rho^2)\ (D_i\ \Psi_k)\ (D_j u)\ ;\ (1+\rho^2)\ (D_i\ D_j\ \Psi_k)u.$$

1°) $|(1+\rho^2)^{1/2}(D_j\ \Psi_k)u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =$

$$\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)\ \frac{1}{k^2}\ |(D_j\Psi)(\tfrac{x}{k})|^2\ |u|^2\ dx\ \leq$$

$$C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{1+4k^2}{k^2}\ |u|^2\ dx\ \leq\ C\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\ dx$$

2°) $|(1+\rho^2)\ (D_i\ \Psi_k)\ D_j u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} =$

$$\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)^2\ \frac{1}{k^2}\ |(D_i\Psi)\ (\tfrac{x}{k})|^2\ |D_j u|^2\ dx\ \leq$$

$$C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{1+4k^2}{k^2}\ (1+\rho^2(x))\ |D_j u|^2\ dx \leq C\ |(1+\rho^2)^{1/2}\ D_j u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

3°) $|(1+\rho^2)\ (D_i\ D_j\ \Psi_k)u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$$\leq C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} \frac{(1+4k^2)^2}{k^4}\ |u|^2\ dx \leq C\ |u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ces trois majorations montrent que :

$$|[A,\Psi_k]\ u|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ |u|_{W^1_1(\mathbb{R}^n)}$$

où C est une constante qui dépend de Ψ mais qui ne dépend pas de k.

Démontrons maintenant une nouvelle inégalité à priori :

Lemme II.3

Si $u \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors il existe une constante $C>0$ telle que :

$$|(1+\rho^2)^{1/2}\, D\, u_k|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\{|Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}\}$$

(D désigne une dérivée quelconque).

$(1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k$ est solution de :

$$A((1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k) = (1+\rho^2)^{1/2}\, Dg_k + [A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]\, u_k.$$

Le lemme II.1 assure que $(1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ et par (II.5), on obtient :

$$|(1+\rho^2)^{1/2}\, Du_k|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |(1+\rho^2)^{1/2}\, Dg_k + [A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]\, u_k|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Il suffit de majorer le deuxième membre indépendamment de k. Par le lemme II.?, on a :

$$|(1+\rho^2)^{1/2}\, Dg_k|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\{|u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} + |Au|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\}.$$

Reste à étudier :

$$[A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]\, u_k = \sum_{|j|\leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|j|}{2}}\, a_j(x)\, [D^j,(1+\rho^2)^{1/2}]\, Du_k$$

$$+ \sum_{|j|\leq 2} (1+\rho^2)^{1/2}\, [(1+\rho^2)^{\frac{|j|}{2}}\, a_j(x), D]\, D^j u_k.$$

En tenant compte de II.6', on obtient :

$$|[A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]\, u_k|_{W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |u_k|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\, |u|_{W_1^1(\mathbb{R}^n)}.$$

De ce dernier lemme, on déduit par argument de compacité faible de la boule unité de $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ que $(1+\rho^2)^{1/2}\, Du \in W_1^1(\mathbb{R}^n)$ donc $u \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration du théorème II.1 se termine par récurrence. Supposons démontré, pour $k\geq 1$, que les conditions $u \in W_k^k(\mathbb{R}^n)$ et $Au \in W_{k-1}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ impliquent $u \in W_{k+1}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$. Supposons $Au \in W_k^k(\mathbb{R}^n)$; alors $(1+\rho^2)^{1/2}\, Du \in W_k^k(\mathbb{R}^n)$ et

$$A((1+\rho^2)^{1/2}\, Du) = (1+\rho^2)^{1/2}\, D(Au) + [A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]\, u.$$

On vérifie que :

$$|(1+\rho^2)^{1/2}\, D(Au)|_{W^{k-1}_{k-1}} \leq C\, |Au|_{W^k_k}$$

$$|[A,(1+\rho^2)^{1/2}\, D]u|_{W^{k-1}_{k-1}} \leq C\, |u|_{W^{k+1}_{k+1}}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$$(1+\rho^2)^{1/2}\, Du \in W^{k+1}_{k+1}(\mathbb{R}^n) \text{ donc } u \in W^{k+2}_{k+2}(\mathbb{R}^n).$$

Le théorème II.1 nous donne un résultat de régularité pour des opérateurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que les coefficients de la partie principale tendent vers l'infini quand $\rho(x)$ tend vers l'infini. Le théorème I.3 va nous permettre d'utiliser ces résultats pour des problèmes dégénérés à l'infini.

Soit $b(u,v)$ une forme intégro-différentielle définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par:

$$b(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{|i|\leq 1\\|j|\leq 1}} (1+\rho^2)^{s-1+\frac{|i|+|j|}{2}}\, b_{ij}(x)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx$$

On suppose que $b_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, (donc b est continue sur $W^1_s(\mathbb{R}^n) \times W^1_s(\mathbb{R}^n)$) et que b est W^1_s-coercitive.

L'opérateur

$$B = \sum_{\substack{|i|\leq 1\\|j|\leq 1}} (-1)^{|j|}\, D^j\left((1+\rho^2)^{s-1+\frac{|i|+|j|}{2}}\, b_{ij}\, D^i\right)$$

définit alors un isomorphisme de $W^1_s(\mathbb{R}^n)$ sur $W^{-1}_{-s}(\mathbb{R}^n)$.

S'il existe une constante $C>o$ telle que :

$$\forall\, \ell \in N^n,\ |D^\ell\, b_{ij}| < C\, (1+\rho^2)^{-\frac{|\ell|}{2}}$$

On obtient :

<u>Théorème II.2</u>

L'opérateur B est un isomorphisme de

$$W^k_{k+s-1}(\mathbb{R}^n) \text{ sur } W^{k-2}_{-s+k-1}(\mathbb{R}^n)\ ;\ k\geq 1.$$

Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on pose $T_r u = (1+\rho^2)^{r/2}\, u$.

La forme intégro-différentielle a définie par :

$$a(u,v) = b\,(T_{1-s}u,\ T_{1-s}v)$$

vérifie alors les hypothèses II.2, II.3, II.6. L'opérateur A associé à a est donc un isomorphisme de $W_k^k(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$.

Mais d'autre part $B = T_{s-1}\, A\, T_{s-1}$, le théorème II.2 vient donc par le théorème I.3.

<u>Conséquence</u>

Si $f \in \bigcap_{k \geq 1} W_{-s+k-1}^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, la solution u dans $W_s^1(\mathbb{R}^n)$ de l'équation $Bu = f$ est dans $\bigcap_{k \geq 1} W_{k+s-1}^{k}(\mathbb{R}^n)$.

En particulier si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Plus précisément, dans le cas du théorème II.1, on trouve $u \in \bigcap_{k \geq 0} W_k^k(\mathbb{R}^n)$.

Ce dernier espace est strictement plus petit que $\bigcap_{k \geq 0} H^k(\mathbb{R}^n)$. En effet, en dimension 1 considérons $u = \text{Log}\,(1+(1+x^2)^\alpha)$ avec $\alpha < -\frac{1}{4}$.

Alors $u \in \bigcap_{k \geq 0} H^k(\mathbb{R})$ et cependant $(1+x^2)^{1/2}\, u' \notin L^2(\mathbb{R})$.

2- <u>Cas du demi espace</u>

On définit une forme intégro-différentielle a sur $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \times \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ par

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}}\, a_{ij}(x)\, D^i u\, \overline{D^j v}\, dx$$

On suppose que :

$$a_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \qquad \text{(II.8)}$$

$$a \text{ est } \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n_+) \text{ coercitive} \qquad \text{(II.9)}$$

alors l'opérateur $A(x;D)$ associé à a est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}^n)$ sur $W_{-1}^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$. On suppose de plus que :

$$\exists\, \gamma > 0 \mid \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}^n_+},\ |a_{nn}(x)| \geq \gamma \qquad \text{(II.10)}$$

$$\exists\, C > 0 \mid \forall\, \ell \in \mathbb{N}^n,\ |D^\ell a_{ij}| < C\,(1+\rho^2)^{-\frac{|\ell|}{2}} \qquad \text{(II.11)}$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème II.3

L'opérateur $A(x,D)$ est un isomorphisme de $W_k^k(\mathbb{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\mathbb{R}_+^n)$, $k \geq 1$.

On commence par étudier le cas $k=2$. $A(x,D)$ est linéaire continue de $W_2^2(\mathbb{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^n)$.

Il suffit de montrer que les conditions :

$$u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n) \text{ , } Au \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$$

impliquent $u \in W_2^2(\mathbb{R}_+^n)$.

La démonstration est analogue à celle du théorème II.1, on doit cependant distinguer ici les variables tangentielles et la variable normale.

Par la méthode des quotients différentiels, on obtient d'abord :

Lemme II.4

Si D est une dérivée tangentielle, alors $u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ impliquent $Du \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$.

En introduisant ensuite le problème tronqué :

Lemme II.5

Si D est une dérivée tangentielle, alors $u \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$ et $Au \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ impliquent $(1+\rho^2)^{1/2}\ Du \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\mathbb{R}_+^n)$.

En utilisant ensuite (II.10) on obtient le théorème II.3 pour $k=2$.

La démonstration se termine ensuite par récurrence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S. BAOUENDI Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
S.M.F., 95, (1967), p.45-87.

[2] J. BARROS-NETO Inhomogeneons boundary value problems in a half space.
Ann. Sc. Nor. Sup. de Pisa, XIX, (1965) III, p.331-365.

[3] J. DENY et J.L. LIONS Les espaces du type de Beppo-Lévi
Ann. Inst. Fourier, Grenoble V (1953-1954) p.305-370.

[4] HARDY-LITTLEWOOD-POLYA Inéqualities Combridge (1952).

[5] L. HORMANDER et J.L. LIONS Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet.
Math. Scand. IV, (1956) p.259-270.

[6] L.D. KUDRJAVCEV Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions.
Soviet Math. Dokl. 4 (1963) p.1715-1717.

[7] J. NE CAS Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.
Masson. Paris (1967).

[8] L. SCHWARTZ Théorie des distributions.
Hermann Paris (1966).