

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2

« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. n° 9, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__2_A9_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POINTS DE NON-PLATITUDE D'UN MORPHISME D'ESPACES ANALYTIQUES

par Jean-Claude TOUGERON

Nous proposons une démonstration du théorème suivant, démontré par J. FRISCH dans [3] :

Théorème. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques et soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur X . L'ensemble Z des points $x \in X$ en lesquels \mathcal{F} n'est pas f -plat est un sous-ensemble analytique fermé de X (i.e. Z est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace analytique fermé de X).

Cette démonstration diffère sensiblement de celle de FRISCH, mais s'appuie, comme cette dernière, sur le théorème du paragraphe 1 de [3].

Si Y' est un sous-espace analytique fermé de Y , désignons par i l'immersion fermée de $f^{-1}(Y')$ dans X et par f' l'application induite par f de $f^{-1}(Y')$ dans Y' . On désignera par $Q(Y')$ l'ensemble des points $x \in f^{-1}(Y')$ en lesquels $i^*(\mathcal{F})$ n'est pas f' -plat. Nous devons démontrer que $Z = Q(Y)$ est un sous-ensemble analytique fermé de X .

Nous démontrons d'abord quelques lemmes :

Lemme 1. Avec les notations précédentes :

$$Q(Y) \cap f^{-1}(Y') = Q(Y') \cup \text{Supp} [\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y'})]$$

Puisque $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y'})_x = \text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{Y, f(x)}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_{Y', f(x)})$, ce lemme est une conséquence du résultat bien connu (cf. [1], théorème 1, chapitre III, § 5) :

Lemme 2. Soient A et B deux anneaux locaux noethériens et soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme local de A dans B. Si M est un module de type fini sur B et si I est un idéal propre de A, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) M est un A-module plat.

(2) M/IM est un module plat sur A/I et $\text{Tor}_1^A(M, A/I) = (0)$.

Pour la démonstration du lemme suivant, nous renvoyons à [2], chapitre 4, § 6.9 :

Lemme 3. Soient A un anneau intègre noethérien, B une A-algèbre de type fini et M un module de type fini sur B. Il existe $f \in A - (0)$ tel que M_f soit un module plat sur A_f .

Corollaire. Soit p un idéal premier d'un anneau noethérien A et soit M un module de type fini sur A. Il existe $f \in A - p$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p^i \cdot M_f / p^{i+1} \cdot M_f$ soit un module plat sur $A_f / p \cdot A_f$.

Démonstration. Le module gradué $\text{Gr}_p(M) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i \cdot M / p^{i+1} \cdot M)$ est de type fini sur $\text{Gr}_p(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i / p^{i+1})$ et $\text{Gr}_p(A)$ est une algèbre de type fini sur A/p .

D'après le lemme 3, il existe $f \in A - p$ tel que $[\text{Gr}_p(M)]_{\bar{f}} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (p^i \cdot M_f / p^{i+1} \cdot M_f)$

soit un module plat sur $A_f / p \cdot A_f$. Cela entraîne évidemment que $\forall i \in \mathbb{N}$, $p^i \cdot M_f / p^{i+1} \cdot M_f$ soit un module plat sur $A_f / p \cdot A_f$.

Lemme 4. Soit K un compact de Stein d'un espace analytique X. Si \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent sur X, l'application canonique $j : \mathcal{F}(K) \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,X} \rightarrow \mathcal{F}_X$ est un isomorphisme.

Démonstration. Le faisceau $\mathcal{F}|_K$ admet une présentation finie :

$$(\mathcal{O}_X|_K)^m \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{O}_X|_K)^n \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}|_K \longrightarrow 0$$

Puisque K est de Stein, on a une suite exacte :

$$(\mathcal{O}_X(K))^m \xrightarrow{\varphi(K)} (\mathcal{O}_X(K))^n \xrightarrow{\psi(K)} \mathcal{F}(K) \longrightarrow 0$$

D'où un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathcal{O}_X(K))^m \otimes \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\varphi(K) \otimes 1} & (\mathcal{O}_X(K))^n \otimes \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\psi(K) \otimes 1} & \mathcal{F}(K) \otimes \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow s & & \downarrow s & & \downarrow j & & \\ (\mathcal{O}_{X,x})^m & \xrightarrow{\varphi_x} & (\mathcal{O}_{X,x})^n & \xrightarrow{\psi_x} & \mathcal{F}_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Puisque les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, j est un isomorphisme.

Soit X un espace analytique et soit X' un sous-espace analytique fermé de X . Supposons X' réduit (i.e. sans nilpotents) et irréductible en un point $x_0 \in X'$ (i.e. \mathcal{O}_{X',x_0} est un anneau intègre). On sait qu'il existe un voisinage compact K de x_0 dans X et un système fondamental de voisinages ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ de K dans X tels que :

(1) Si X'_0 est l'ensemble des points réguliers de X' de dimension $p = \dim(X'_{x_0})$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $U_\alpha \cap X'_0$ est connexe et dense dans $U_\alpha \cap X'$.

(2) K est un compact de Stein semi-analytique.

Soit \mathcal{F} un faisceau analytique cohérent sur X et soit \mathcal{H} le faisceau sur X des germes de fonctions analytiques nuls sur X' . Puisque X' est réduit,

$$\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X | \mathcal{H}. \text{ En outre } \mathcal{H}(K) = \{f \in \mathcal{O}_X(K) ; f_{x_0} \in \mathcal{H}_{x_0}\} : \text{ en effet, si}$$

$f_{x_0} \in \mathfrak{H}_{x_0}$, soit F un représentant de f sur un ouvert U_α ; $F = 0$ sur $U_\alpha \cap X'_0$ au voisinage de x_0 , donc $F = 0$ sur la variété connexe $U_\alpha \cap X'_0$ et donc sur $U_\alpha \cap X'$:

il en résulte que $f \in \mathfrak{H}(K)$. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{H}(K)$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_X(K)$. D'après (2), $\mathcal{O}_X(K)$ est un anneau noethérien (cf [3]). Enfin, puisque K est un compact de Stein, $\mathfrak{F}(K)$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_X(K)$.

Appliquons le corollaire du lemme 3 à l'anneau $A = \mathcal{O}_X(K)$; à l'idéal premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{H}(K)$ et au module $M = \mathfrak{F}(K)$. Il existe $f \in \mathcal{O}_X(K)$, $f_{x_0} \notin \mathfrak{H}_{x_0}$ tel que :

$\forall i \in \mathbb{N} \quad (\mathfrak{H}(K)^i \cdot \mathfrak{F}(K) / \mathfrak{H}(K)^{i+1} \cdot \mathfrak{F}(K))_f$ soit un module plat sur $(\mathcal{O}_X(K) / \mathfrak{H}(K))_f$.

Si $x \in X' \cap K$ et si $f(x) \neq 0$, on a un diagramme commutatif de morphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(K) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(K)_f \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

On en déduit immédiatement que

$[\mathfrak{H}(K)^i \cdot \mathfrak{F}(K) / \mathfrak{H}(K)^{i+1} \cdot \mathfrak{F}(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{F}_x^i$ est un module plat

(donc libre) sur $[\mathcal{O}_X(K) / \mathfrak{H}(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = [(\mathcal{O}_X / \mathfrak{H})(K)] \otimes_{\mathcal{O}_X(K)} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X',x}$

(d'après le lemme 4). Puisque $\mathfrak{H}(K)^i \cdot \mathfrak{F}(K) / \mathfrak{H}(K)^{i+1} \cdot \mathfrak{F}(K) = (\mathfrak{H}^i \cdot \mathfrak{F} / \mathfrak{H}^{i+1} \cdot \mathfrak{F})(K)$,

le lemme 4 entraîne aussi que : $\mathfrak{F}_x^i = \mathfrak{H}_x^i \cdot \mathfrak{F}_x / \mathfrak{H}_x^{i+1} \cdot \mathfrak{F}_x$. Nous avons

démontré le :

Lemme 5.

Avec les notations précédentes, il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans X et un sous-ensemble analytique fermé X'' de $X' \cap V$ tel que $X'' \neq X'_{x_0}$ et $\forall x \in X' \cap V - X''$, $\forall i \in \mathbb{N}$, le module $\mathcal{H}_x^i \cdot \mathcal{F}_x / \mathcal{H}_x^{i+1} \cdot \mathcal{F}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_{X',x}$.

Démonstration du théorème. Le théorème étant de nature locale, on peut supposer que X est un sous-espace analytique fermé d'un ouvert Ω de \mathbb{C}^n . On a : $f : \Pi \circ \varphi$, où φ est l'immersion fermée : $X \ni x \rightsquigarrow (x, f(x)) \in \Omega \times Y$ et Π la projection : $\Omega \times Y \ni (\omega, y) \rightsquigarrow y \in Y$. Remplaçant le faisceau \mathcal{F} par $\varphi_* (\mathcal{F})$, on peut donc supposer que $X = \Omega \times Y$ et que f est la projection de $\Omega \times Y$ sur Y .

Considérons le diagramme commutatif de morphismes d'espaces analytiques :

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega \times Y & \xrightarrow{\phi} & \Omega \times Y \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ \Omega \times Y & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

où $\forall (\omega, \omega', y) \in \Omega \times \Omega \times Y$, $\phi(\omega, \omega', y) = (\omega, y)$ et $f'(\omega, \omega', y) = (\omega', y)$ et f, φ sont les projections évidentes sur Y . Ce diagramme est le produit fibré des morphismes f et φ ; en outre φ est un morphisme plat. Désignons par Z' l'ensemble des points de $\Omega \times \Omega \times Y$ en lesquels $\phi^* (\mathcal{F})$ n'est pas f' -plat. D'après la proposition 2.4 et le corollaire 2.5 de l'exposé 13 de [4], $Z' = \phi^{-1}(Z)$.

Si Δ désigne la diagonale de $\Omega \times \Omega$, ϕ induit un isomorphisme de $\Delta \times Y$ sur $\Omega \times Y$. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que $(\Delta \times Y) \cap Z'$ est un sous-ensemble analytique fermé de $\Omega \times \Omega \times Y$. Puisque f' induit un isomorphisme de $\Delta \times Y$ sur $\Omega \times Y$, on est ramené à démontrer le théorème suivant :

Soit X' un sous-espace analytique fermé de $\Omega \times Y = X$ tel que f induise un isomorphisme de X' sur Y . Alors l'ensemble $Q(Y) \cap X'$ des points $x \in X'$ en lesquels \mathcal{F} n'est pas f -plat est un sous-ensemble analytique fermé de X' .

Soit $x_0 \in X'$ et posons $y_0 = f(x_0)$. Montrons, par récurrence sur $p = \dim(Y_{y_0})$, que $Q(Y) \cap X'$ est analytique au voisinage de x_0 . Remplaçant si nécessaire Y par un voisinage ouvert de y_0 , on peut supposer que

$Y = \bigcup_{i=1}^s Y_i$, où les Y_i sont des sous-espaces analytiques fermés réduits de Y , irréductibles au point y_0 . D'après le lemme 1 :

$$Q(Y) = \bigcup_{i=1}^s Q(Y_i) \cup \bigcup_{i=1}^s (\text{Supp} [\text{Tor}_1^Y(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y_i})])$$

Puisque le support d'un faisceau analytique cohérent est un sous-ensemble analytique fermé, tout revient à montrer que les $Q(Y_i) \cap X'$ sont analytiques au voisinage de x_0 . On peut donc supposer Y réduit et irréductible au point y_0 . Dans ce cas X' est réduit et irréductible au point x_0 .

Soit \mathcal{H} le faisceau d'idéaux sur X tel que $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X / \mathcal{H}$. D'après le lemme 5 (en remplaçant si nécessaire Y par un voisinage ouvert du point y_0), il existe un sous-espace analytique fermé Y'' de Y tel que $Y''_{y_0} \neq Y_{y_0}$ (donc $\dim(Y''_{y_0}) < \dim(Y_{y_0})$) et $\forall x \in X' - f^{-1}(Y'')$ et $\forall i \in \mathbb{N}$, le module

$\mathcal{H}_x^i \cdot \mathcal{F}_x / \mathcal{H}_x^{i+1} \cdot \mathcal{F}_x$ est libre sur $\mathcal{O}_{X',x}$, donc sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)} = A_x$. Il en résulte que $\mathcal{F}_{1,x}^i = \mathcal{F}_x / \mathcal{H}_x^{i+1} \cdot \mathcal{F}_x$ est un module libre sur A_x . Pour tout module N de type fini sur A_x , le complété de $\text{Tor}_1^{A_x}(\mathcal{F}_x, N)$ pour la topologie \mathcal{H}_x -adique est égal à $\lim_{\leftarrow} \text{Tor}_1^{A_x}(\mathcal{F}_{1,x}^i, N) = (0)$. Ainsi $\text{Tor}_1^{A_x}(\mathcal{F}_x, N) = (0)$

et \mathcal{F}_X est un A -module plat. On en déduit l'inclusion :

$$Q(Y) \cap X' \subset f^{-1}(Y'') \cap X'.$$

D'après le lemme 1 :

$$Q(Y) \cap f^{-1}(Y'') = Q(Y'') \cup \text{supp} [\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y''})]$$

Donc :

$$Q(Y) \cap X' = (Q(Y'') \cap X') \cup (\text{supp} [\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y''})] \cap X').$$

Par hypothèse de récurrence, $Q(Y'') \cap X'$ est analytique au voisinage de x_0 ; il en sera de même de $Q(Y) \cap X'$, c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI Algèbre commutative.
- [2] A. GROTHENDIECK "Eléments de géométrie algébrique", publ. Math. de l'I.H.E.S., Paris.
- [3] J. FRISCH "Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques", Inventiones Mathematicae, vol. 4, Fasc. 2, 1967.
- [4] H. CARTAN Séminaire, 13^e année : 1960/1961.