JEAN-CLAUDE TOUGERON
JEAN MERRIEN

Idéaux de fonctions différentiables, II

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 2
« Séminaire de probabilités, statistiques et analyse », , exp. nº 7, p. 1-64
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___2_A7_0>

IDEAUX DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES, II (*)

par

Jean-Claude TOUGERON et Jean MERRIEN

INTRODUCTION.

Le but de cet article est la démonstration d'un théorème annoncé dans [7].

Soient $\mathcal{O}_p$ (resp. $\mathcal{E}$) l'anneau des germes de fonctions numériques, analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p$ (resp. C^∞ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$). Désignons par $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_p, \mathcal{E})$ l'ensemble des homomorphismes Θ de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathcal{O}_p$ dans $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$, nous montrons qu'"en général", $\mathcal{M} \otimes_\Theta \mathcal{E}$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$ et qu'"en général", pour $i \geq 1$, les $\mathrm{TOR}_i^\Theta(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $i > \sup(dh(\mathcal{M}) - n, 0)$. En particulier, pour tout module de type fini $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}$, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet ; en outre l'anneau $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}$-module plat. On retrouve un théorème de B. Malgrange, [4].

Le chapitre I traite des modules de Fréchet. Soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'anneau des fonctions numériques C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Un module $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est un module de Fréchet, s'il existe une suite exacte :

$(0) \longrightarrow \mathcal{R}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0)$, où $\mathcal{R}(\Omega)$ est un sous-module fermé de type fini de $\mathcal{E}(\Omega)^p$. Un module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}$ est un module de Fréchet

(*) Cet article sera publié aux annales de l'Institut Fourier, vol. I, 1970.

si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}$, où Ω est un voisinage de 0 et $\mathcal{M}(\Omega)$ un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Un module de présentation finie $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{E}$ est un module de Fréchet si et seulement si l'application canonique : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$ est injective ($\tilde{\mathcal{F}}$ est l'anneau des germes de champs de séries formelles en 0). Cette dernière caractérisation est importante, car elle permettra, au chapitre III, d'utiliser des techniques, d'ailleurs très élémentaires, d'algèbre homologique.

Nous avons groupé au chapitre II, la partie (d'ailleurs essentielle) de la démonstration, où interviennent les techniques propres aux fonctions différentiables. L'inégalité de Łojasiewicz y joue un rôle fondamental. Si $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ est une k-strate de $\mathcal{E}(\Omega)$ vérifiant certaines conditions, et si $\mathcal{J}'$ est un idéal fermé, l'idéal $\mathcal{J}$ est fermé (proposition 5). Ce dernier résultat et le critère de platitude (chapitre III, lemme 1) entraînent facilement le résultat annoncé (chapitre III, théorèmes 1, 2, 3).

Nous donnons au chapitre IV trois applications des théorèmes fondamentaux. Signalons simplement les deux premières. Soit π un idéal de $\mathcal{O}_p$: si l'anneau $\mathcal{O}_p/\pi$ est réduit et équidimensionnel et si $dh(\mathcal{O}_p/\pi) < n$, "en général" $\mathcal{E}/\Theta(\pi)$. $\mathcal{E}$ est "formellement réduit et équidimensionnel en tout point voisin de l'origine" ; si l'anneau $\mathcal{O}_p/\pi$ est normal et si $dh(\mathcal{O}_p/\pi) < n-1$, "en général" $\mathcal{E}/\Theta(\pi).\mathcal{E}$ est "formellement normal en tout point voisin de l'origine".

CHAPITRE I

§ 1 - MODULES DE FRECHET SUR $\mathcal{E}(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathcal{E}$ le faisceau sur Ω des germes de fonctions à valeurs réelles et de classe C^∞.

Si F est un fermé de Ω, on note $\underline{m}_F^\infty$ l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions plates sur F (i.e. nulles sur F ainsi que toutes leurs dérivées) et l'on pose $\mathcal{E}(F) = \mathcal{E}(\Omega) / \underline{m}_F^\infty$. On désigne par T_F la projection canonique : $\mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(F)$.

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F} = \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ l'anneau des séries formelles en $x_1,\dots,x_n$ à coefficients réels. Si $x \in \Omega$, l'anneau $\mathcal{E}(x)$ est isomorphe à $\mathcal{F}$ (à tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on associe sa série de Taylor en x : l'application de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{F}$ ainsi obtenue est surjective (théorème de Borel généralisé) et son noyau est $\underline{m}_x^\infty$). Pour cette raison, l'anneau $\mathcal{E}(x)$ sera noté $\mathcal{F}_x$. On a une injection canonique ι_Ω : $\mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \prod_{x\in\Omega} \mathcal{F}_x = \tilde{\mathcal{F}}(\Omega)$.

Munissons $\mathcal{E}(\Omega)^p$ de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet (convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées sur tout compact de Ω). Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ un module de type fini sur $\mathcal{E}(\Omega)$ et considérons une suite exacte :

$$(*) \qquad (0) \longrightarrow \mathcal{R}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0).$$

On munit $\mathcal{M}(\Omega)$ de la topologie quotient de $\mathcal{E}(\Omega)^p/\mathcal{R}(\Omega)$: cette topologie τ_* est indépendante de la suite exacte (*). En effet, soit :

$$(*') \qquad (0) \longrightarrow \mathcal{R}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{p'} \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0)$$

une seconde suite exacte. On peut construire un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \mathcal{R}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}(\Omega)^p \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathcal{M}(\Omega)}"] & (0) \\
(0) \arrow[r] & \mathcal{R}'(\Omega) \arrow[r] & \mathcal{E}(\Omega)^{p'} \arrow[r] & \mathcal{M}(\Omega) \arrow[r] & (0)
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\tau_* > \tau_{*'}$. De même $\tau_* < \tau_{*'}$, donc $\tau_* = \tau_{*'}$. Cette topologie sera dite canonique.

Proposition 1.

Si $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de présentation finie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ (i.e. $\mathcal{R}(\Omega)$ est un module de type fini sur $\mathcal{E}(\Omega)$), les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{M}(\Omega)$ muni de la topologie canonique est un espace de Fréchet (i.e. $\mathcal{R}(\Omega)$ est un sous-module fermé de $\mathcal{E}(\Omega)^p$),

2) l'application canonique :

$$\mathcal{M}(\Omega) \xrightarrow{\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}} \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \tilde{\mathcal{F}}(\Omega)$$ est injective.

Démonstration.

De la suite exacte (*), on déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(0) \arrow[r] & \left(\bigcap_{x \in \Omega} \mathcal{R}(\Omega) + \underline{m}_x^\infty . \mathcal{E}(\Omega)^p \right) / \mathcal{R}(\Omega) \arrow[r] & \mathcal{M}(\Omega) \arrow[r] \arrow[dr, "\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}"'] & \prod_{x \in \Omega} \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{F}_x \\
& & & \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \tilde{\mathcal{F}}(\Omega) \arrow[u, "j_{\mathcal{M}(\Omega)}"']
\end{tikzcd}$$

où j désigne un morphisme fonctoriel évident entre deux foncteurs exacts à droite. Le module $\mathcal{M}(\Omega)$ admet une présentation finie :

$\mathcal{E}(\Omega)^q \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0)$. Puisque $j_{\mathcal{E}(\Omega)^q}$, $j_{\mathcal{E}(\Omega)^p}$ sont des isomorphismes, $j_{\mathcal{M}(\Omega)}$ est un isomorphisme. La première ligne du diagramme étant exacte, l'application $\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}$ sera injective si et seulement si $\mathcal{R}(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega} \mathcal{R}(\Omega) + \underline{m}_x^\infty . \mathcal{E}(\Omega)^p$, i.e. si et seulement si $\mathcal{R}(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)^p$ (ceci d'après le théorème spectral de Whitney ; cf. B. Malgrange [4], chapitre II).

<u>Définition 1</u>.

Un module $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est un <u>module de Fréchet</u> s'il est de présentation finie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ et s'il vérifie l'une ou l'autre des conditions 1) et 2) de la proposition précédente.

<u>Proposition 2</u>.

<u>Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(\Omega)$ et soit F un fermé de Ω. On a l'égalité :</u> $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \mathcal{E}(F)) = (0)$.

Cette proposition est une conséquence facile du lemme suivant :

<u>Lemme</u>.

<u>Soit $\{\Psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fonctions appartenant à l'idéal $\underline{m}_F^\infty$. Alors il existe $\Psi \in \underline{m}_F^\infty$ strictement positive sur $\Omega - F$ et pour tout</u>

$i \in \mathbb{N}$, une fonction $h_i \in \underline{m}_F^\infty$, telles que : $\Psi_i = h_i \cdot \Psi$.

En effet, supposons démontré le lemme précédent. Considérons une suite exacte de modules sur $\mathcal{E}(\Omega)$:

$$(0) \longrightarrow \mathcal{R}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0).$$

Nous devons montrer que l'application : $\mathcal{R}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}(F) \longrightarrow \mathcal{E}(F)^p$ est injective, i.e. que : $\underline{m}_F^\infty \cdot \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{R}(\Omega) \cap \underline{m}_F^\infty \cdot \mathcal{E}(\Omega)^p$.

Soit $(\Psi_i) \in \mathcal{R}(\Omega)$, les Ψ_i étant infiniment plates sur F. D'après le lemme précédent, il existe $\Psi \in \underline{m}_F^\infty$, strictement positive sur $\Omega - F$ et, pour tout $i \in [1, p]$, une fonction $h_i \in \underline{m}_F^\infty$, telles que $\Psi_i = h_i \cdot \Psi$.

Visiblement, $(h_i) \in \bigcap_{x \in \Omega} \mathcal{R}(\Omega) + \underline{m}_x^\infty \cdot \mathcal{E}(\Omega)^p = \mathcal{R}(\Omega)$ et

$(\Psi_i) = \Psi \cdot (h_i) \in \underline{m}_F^\infty \cdot \mathcal{R}(\Omega)$, c.q.f.d.

Démonstration du lemme.

Par une partition de l'unité, on se ramène au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et F est un compact de $\mathbb{R}^n$. Si $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_s) \in \mathcal{E}(R^n)^s$ et si K est un fermé de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$||\underline{u}||_K^r = \sup_{\substack{x \in K \\ i \in [1,s] \\ |\omega| \in [0,r]}} |D^\omega u_i(x)|.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $d(x,K)$ la distance euclidienne de x à K.

Pour tout entier $i \geq 0$, posons $U_i = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d(x,F) < 1/2^i\}$; $F_i = \overline{U}_i - U_{i+1}$, et pour $i > 0$, $G_i = (\mathbb{R}^n - U_{i-1}) \cup (\overline{U}_{i+2})$. La distance entre les fermés F_i et G_i est supérieure à $\frac{1}{2^{i+2}}$. D'après un lemme classique (cf. B. Malgrange, [4], page 11, lemme 4.2) nous pouvons construire des fonctions $\varepsilon_i \in \mathcal{E}(R^n)$ telles que :

a) $\varepsilon_i = 1$ sur F_i ; $\varepsilon_i = 0$ sur G_i ; $\varepsilon_i \geq 0$,

b) il existe des constantes C_r indépendantes de $i \in \mathbb{N}^+$, telles que :

(1) $$||\varepsilon_i||^r_{\mathbb{R}^n} \leq C_r \cdot 2^{ir} .$$

Par hypothèse, $\Psi_i \in \underline{m}^\infty_F$; à tout entier $r > 0$, on peut donc associer un entier $\mu(r) > 0$ tel que, $\forall x \in U_{\mu(r)}$ et $\forall i \in [0,r]$, on ait l'inégalité :

(2) $$||\Psi_i||^r_x \leq d(x,F)^{r^2} .$$

On peut supposer la suite $\mu(r)$ croissante et tendant vers l'infini quand r tend vers l'infini. Nous construisons une suite $S(i)$ d'entiers positifs, comme suit : $S(i) = r$, si $\mu(r) \leq i < \mu(r+1)$.

Les inégalités (1) entraînent que la série $\sum\limits_{i=\mu(1)}^{\infty} (\frac{1}{2^i})^{S(i)} \cdot \varepsilon_i$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^n$ ainsi que toutes ses dérivées. Soit $\Psi' \in \underline{m}^\infty_F$ sa limite. Puisque Ψ' est strictement positive sur $U - F$, où U est un voisinage de F, on peut en modifiant de façon convenable Ψ', construire une fonction $\Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, strictement positive sur $\mathbb{R}^n - F$ et égale à Ψ' dans un voisinage de F. Donc, en restriction à $\mathbb{R}^n - F$, $\Psi_i = h_i \cdot \Psi$, où les h_i sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n - F$: il reste à montrer que les quotients h_i sont prolongeables en des fonctions plates sur F.

Soit $x \in U_{\mu(r)} - U_{\mu(r+1)}$; alors $x \in F_j$ avec $\mu(r) \leq j < \mu(r+1)$.

Ainsi : (3) $$\Psi'(x) \geq (\frac{1}{2^j})^{S(j)} = (\frac{1}{2^j})^r \geq d(x,F)^r .$$

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C'_s > 0$, telles que :

(4) $$\forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in U_o - F \quad ||\frac{\Psi_i}{\Psi'}||^s_x \leq C'_s \; \frac{||\Psi_i||^s_x}{|\Psi'(x)|^{s+1}}$$

En définitive, si $r \geq s$ et si $x \in U_{\mu(r)} - U_{\mu(r+1)}$, d'après (2), (3) et (4) :

$$\forall\, i \in [0,s] \qquad \left\| \frac{\psi_i}{\psi'} \right\|_x^s \leq C'_s \, \frac{\|\psi_i\|_x^r}{|\psi'(x)|^{s+1}} \leq C'_s \, d(x,F)^{r(r-s-1)} .$$

Donc, lorsque $d(x,F) \longrightarrow 0$, $\|h_i\|_x^s \longrightarrow 0$, i.e. les h_i sont prolongeables en des fonctions infiniment plates sur F, c.q.f.d.

Corollaire 1.

Soit : $(0) \longrightarrow \mathcal{M}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}''(\Omega) \longrightarrow (0)$ une suite exacte de modules sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Si $\mathcal{M}'(\Omega)$ et $\mathcal{M}''(\Omega)$ sont des modules de Fréchet, $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de Fréchet.

Démonstration.

Les modules $\mathcal{M}'(\Omega)$ et $\mathcal{M}''(\Omega)$ étant de présentation finie, il en sera de même de $\mathcal{M}(\Omega)$. Considérons le diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
(0) & \longrightarrow & \mathcal{M}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{M}''(\Omega) & \longrightarrow & (0) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{M}'(\Omega)}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{M}(\Omega)}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{M}''(\Omega)}} & & \\
 & & \mathcal{M}'(\Omega) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\Omega) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{M}''(\Omega) \otimes \tilde{\mathcal{F}}(\Omega) & \longrightarrow & (0) \\
 & & {\scriptstyle \wr}\downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{M}'(\Omega)}} & & {\scriptstyle \wr}\downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{M}(\Omega)}} & & {\scriptstyle \wr}\downarrow{\scriptstyle j_{\mathcal{M}''(\Omega)}} & & \\
\prod\limits_{x\in\Omega} \mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}''(\Omega), \mathcal{F}_x) & \longrightarrow & \prod\limits_{x\in\Omega} \mathcal{M}'(\Omega) \otimes \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \prod\limits_{x\in\Omega} \mathcal{M}(\Omega) \otimes \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \prod\limits_{x\in\Omega} \mathcal{M}''(\Omega) \otimes \mathcal{F}_x & \longrightarrow & (0)
\end{array}$$

D'après la proposition 2, $\prod\limits_{x\in\Omega} \mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}''(\Omega), \mathcal{F}_x) = (0)$. Les applications $\iota_{\mathcal{M}'(\Omega)}$ et $\iota_{\mathcal{M}''(\Omega)}$ étant injectives, $\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}$ est injective, c.q.f.d.

Corollaire 2.

Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ un module sur $\mathcal{E}(\Omega)$ admettant une 2-présentation finie : $\mathcal{E}(\Omega)^{n_2} \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{n_1} \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{n_o} \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0)$. Le module $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de Fréchet si et seulement si $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)) = (0)$. Dans ce cas : $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega)) = (0)$.

Démonstration.

En tensorisant par $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ la suite exacte :

$(0) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega) / \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow (0)$, on obtient une suite exacte :

$$\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega)) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega)/\mathcal{E}(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \xrightarrow{\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}} \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega).$$

Le module $\mathcal{M}(\Omega)$ admettant une 2-présentation finie, on vérifie facilement que $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \tilde{\mathfrak{F}}(\Omega)) \simeq \prod_{x \in \Omega} \mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}(\Omega)}(\mathcal{M}(\Omega), \mathfrak{F}_x)$.

Le corollaire 2 résulte alors immédiatement des propositions 1 et 2.

§ 2 - MODULES DE FRECHET LOCAUX.

Un faisceau différentiable $\mathcal{M}$ sur Ω (i.e. un faisceau de modules sur $\mathcal{E}$) est quasi-flasque, si pour tout ouvert U de Ω, l'application canonique : $\mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ est un isomorphisme (J.Cl. TOUGERON [8]).

Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ un module de présentation finie sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Il existe une suite exacte : $\mathcal{E}(\Omega)^q \xrightarrow{\varphi_\Omega} \mathcal{E}(\Omega)^p \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow (0)$. Le morphisme φ_Ω définit un morphisme $\varphi : \mathcal{E}^q \rightarrow \mathcal{E}^p$. Si $\mathcal{M} = \operatorname{coker} \varphi$, pour tout ouvert U de Ω, $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}(U)$: le faisceau $\mathcal{M}$ est donc quasi-flasque.

On définit un faisceau flasque $\tilde{\mathcal{F}}$ sur Ω en associant à tout ouvert U de Ω le module $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ sur $\mathcal{E}(U)$ (les morphismes de restriction sont les morphismes canoniques évidents). Vérifions que $\tilde{\mathcal{F}}$ est quasi-flasque, i.e. que l'application canonique : $\tilde{\mathcal{F}}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}(U) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U)$ est un isomorphisme. Elle est visiblement surjective. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \tilde{\mathcal{F}}(\Omega)$; $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{E}(U)$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i f_i = 0$. D'après le lemme de [8], il existe $\varepsilon \in \mathcal{E}(\Omega)$, telle que ε soit plate sur $\Omega - U$, ne s'annule en aucun point de U et les fonctions $\varepsilon \cdot f_i$ se prolongent en des fonctions f'_i indéfiniment dérivables sur Ω, plates sur $\Omega - U$. Visiblement, $\sum_{i=1}^{p} \varphi_i f'_i = 0$ et

$$\sum_{i=1}^{p} \varphi_i \otimes f_i = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \otimes \frac{f'_i}{\varepsilon} = \left(\sum_{i=1}^{p} \varphi_i f'_i\right) \otimes 1/\varepsilon = 0, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Les faisceaux $\mathcal{M}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ étant quasi-flasques, il en sera de même de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$: en effet, on a une suite exacte : $\mathcal{E}^q \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0)$, d'où une suite exacte : $\tilde{\mathcal{F}}^q \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}^p \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow (0)$; les faisceaux $\tilde{\mathcal{F}}^q$, $\tilde{\mathcal{F}}^p$ étant quasi-flasques, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$ est quasi-flasque (cf. [8], proposition 1). Il en sera de même de $\ker(\iota_{\mathcal{M}})$ où $\iota_{\mathcal{M}}$ est l'application canonique : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$.

Soit $x \in \Omega$. Si $\mathcal{M}_x$ est un module de présentation finie sur $\mathcal{E}_x$, il est aisé de construire un module de présentation finie $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ tel que $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}_x$ (i.e. $\mathcal{M}_x$ est la fibre en x du faisceau $\mathcal{M}$ associé au module $\mathcal{M}(\Omega)$). Un tel module $\mathcal{M}(\Omega)$ sera par définition un représentant de $\mathcal{M}_x$ sur Ω.

<u>Proposition 3.</u>

<u>Si U est un ouvert de Ω et si $\mathcal{M}(\Omega)$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(\Omega) \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{E}(U)$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(U)$.</u>

<u>Démonstration</u>.

Il suffit de tensoriser par $\mathcal{E}(U)$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ l'application $\iota_{\mathcal{M}(\Omega)}$ et de remarquer que $\mathcal{E}(U)$ est un module plat sur $\mathcal{E}(\Omega)$ (cf. [8], corollaire du lemme) et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est quasi-flasque.

<u>Proposition 4.</u>

<u>Soit $\mathcal{M}_x$ un module de présentation finie sur $\mathcal{E}_x$. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>si $\mathcal{M}(\Omega)$ est un représentant de $\mathcal{M}_x$ sur Ω, il existe un voisinage ouvert U de x dans Ω tel que $\mathcal{M}(U)$ soit un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(U)$</u>.

2) <u>l'application canonique</u> $\iota_{\mathcal{M}_x} : \mathcal{M}_x \longrightarrow \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{E}_x} \tilde{\mathcal{F}}_x$ <u>est injective</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soit $\mathcal{M}$ le faisceau associé au représentant $\mathcal{M}(\Omega)$. Le noyau $\ker(\iota_{\mathcal{M}})$ du morphisme canonique : $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$ est quasi-flasque. La condition 2) signifie que $\ker(\iota_{\mathcal{M}})_x = (0)$; d'après la proposition 4 de [8], il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\ker(\iota_{\mathcal{M}})|U = (0)$; i.e. $\iota_{\mathcal{M}(U)}$ est injective, i.e. $\mathcal{M}(U)$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(U)$. Ainsi 2) entraîne 1) et la réciproque est triviale.

<u>Définition 2.</u>

Un module $\mathcal{M}_x$ sur $\mathcal{E}_x$ est un <u>module de Fréchet</u> s'il est de présentation finie et s'il vérifie l'une ou l'autre des conditions 1) et 2) de la proposition 4.

Un sous-module N_x de $\mathcal{E}_x^n$ est <u>fermé</u> si $\mathcal{E}_x^p/N_x$ est un module de Fréchet. Cela signifie que N_x est induit par un sous-module fermé, de type fini de $\mathcal{E}(\Omega)^p$, où Ω est un voisinage convenable de x.

<u>Proposition 5.</u>

<u>Soit $\mathcal{M}_x$ un module de Fréchet sur $\mathcal{E}_x$. On a l'égalité</u> :

$\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}_x}(\mathcal{M}_x, \mathfrak{F}_x) = (0)$

(ceci résulte trivialement de la définition précédente et de la proposition 2).

<u>Proposition 6.</u>

<u>Soit $\mathcal{M}_x$ un module sur $\mathcal{E}_x$ admettant une 2-présentation finie</u> :

$\mathcal{E}_x^{n_2} \longrightarrow \mathcal{E}_x^{n_1} \longrightarrow \mathcal{E}_x^{n_o} \longrightarrow \mathcal{M}_x \longrightarrow (0)$. <u>Le module $\mathcal{M}_x$ est un module de Fréchet si et seulement si</u> $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}_x}(\mathcal{M}_x, \tilde{\mathfrak{F}}_x/\mathcal{E}_x) = (0)$. <u>Dans ce cas</u> :

$\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}_x}(\mathcal{M}_x, \tilde{\mathfrak{F}}_x) = (0)$.

(ceci résulte trivialement de la définition précédente et du corollaire 2 de la proposition 2).

<u>Proposition 7.</u>

<u>Soit</u> $(0) \longrightarrow \mathcal{M}'_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{M}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{M}''_x \longrightarrow (0)$ <u>une suite exacte de modules sur $\mathcal{E}_x$. Si $\mathcal{M}'_x$ et $\mathcal{M}''_x$ sont des modules de Fréchet, $\mathcal{M}_x$ est un module de Fréchet.</u>

<u>Démonstration</u>.

Les modules $\mathcal{M}'_x$ et $\mathcal{M}''_x$ étant de présentation finie, il en est de même de $\mathcal{M}_x$. Soient $\mathcal{M}'(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, $\mathcal{M}''(\Omega)$ des représentants sur Ω de $\mathcal{M}'_x$, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}''_x$ respectivement ; $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}''$ les faisceaux associés à $\mathcal{M}'(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, $\mathcal{M}''(\Omega)$ respectivement. D'après la proposition 5 de [8] il existe un voisinage

U de x et une suite de faisceaux : $(0)\longrightarrow \mathcal{M}'|U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}|U \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}''|U \longrightarrow (0)$, telle que les morphismes α, β induisent respectivement en x les morphismes α_x et β_x. Les faisceaux $\ker \alpha$, $\mathrm{Im}\, \beta$, $\ker \beta/\mathrm{Im}\, \alpha$ sont quasi-flasques (cf. [8], proposition 1) et $(\ker \alpha)_x = (\mathcal{M}''/\mathrm{Im}\, \beta)_x = (\ker \beta/\mathrm{Im}\, \alpha)_x = (0)$. D'après la proposition 4 de [8], en diminuant U si nécessaire, la suite $(0) \longrightarrow \mathcal{M}'(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{M}''(U) \longrightarrow (0)$ est exacte et l'on peut supposer que $\mathcal{M}'(U)$ et $\mathcal{M}''(U)$ sont des modules de Fréchet sur $\mathcal{E}(U)$. D'après le corollaire 1 de la proposition 2, $\mathcal{M}(U)$ est un module de Fréchet. Il en sera de même de $\mathcal{M}_x$.

Un exemple.

Soit $\underline{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_x$: $\underline{m}_x$ est l'idéal des germes nuls en x et est engendré par les $x_i - a_i$ (les a_i sont les coordonnées de x). Visiblement, $\mathcal{E}_x/\underline{m}_x$ est un module de Fréchet.

Soit N un module sur $\mathcal{E}_x$ et supposons que $\dim_{\mathbb{R}}(N) < \infty$. La suite des $\underline{m}_x^i \cdot N$ est décroissante et donc stationnaire, i.e. il existe i tel que $\underline{m}_x \cdot \underline{m}_x^i \cdot N = \underline{m}_x^i \cdot N$. Il en résulte, par le lemme de Nakayama, que $\underline{m}_x^i \cdot N = (0)$. Ainsi N est un module de longueur finie sur l'anneau noethérien $\mathcal{F}_x$. Il existe une suite croissante $N_0, \dots, N_S$ de sous-modules de N telle que $N_0 = (0)$; $N_S = N$ et $\forall i \in [0, S-1]$ $N_{i+1}/N_i \simeq \mathcal{E}_x/\underline{m}_x$. D'après la proposition 7, N est un module de Fréchet.

Proposition 8.

Un module $\mathcal{M}_X$, de présentation finie sur $\mathcal{E}_X$, est un module de Fréchet, si et seulement si $\ker(\iota_{\mathcal{M}_X})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration.

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Posons $\mathcal{M}'_X = \ker(\iota_{\mathcal{M}_X})$; $\mathcal{M}''_X = \mathcal{M}_X / \mathcal{M}'_X$. On vérifie immédiatement que $\ker(\iota_{\mathcal{M}''_X}) = (0)$. i.e. $\mathcal{M}''_X$ est un module de Fréchet. D'après la remarque précédente, $\mathcal{M}'_X$ est un module de Fréchet. Il suffit alors d'appliquer la proposition 7.

CHAPITRE II

Dans ce chapitre Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(\Omega)$ l'algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur Ω. Si $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_s)$ est un élément de $(\mathcal{E}(\Omega))^s$, on note (φ) l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_s$, et $J_k(\varphi)$ l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ et tous les jacobiens $\frac{D(f_1,\dots,f_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ où $f_1,\dots,f_k$ appartiennent à (φ).

Si $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$, on note $||x||$ la norme euclidienne de x, et si $F \subset \Omega$, $d(x,F)$ désigne la distance de x à F. Si F est vide on pose $d(x,F) = 1$.

On pose, pour $\rho \geq 0$, $B(x,\rho) = \{y, ||x-y|| \leq \rho\}$.

Si $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on note $\frac{D^{|\omega|}\varphi}{D\,x^\omega}$ la dérivée $\frac{\partial^{|\omega|}\varphi}{\partial x_1^{\omega_1}\dots\partial x_n^{\omega_n}}$. Si K est un compact de Ω, et $\mu \in \mathbb{N}$ on pose

$$||\varphi||_K^\mu = \sup_{x\in K,\,|\omega|\leq\mu} \left| \frac{D^{|\omega|}\varphi}{D\,x^\omega}(x) \right|$$

§ 1.

Définition 1.

Soient F et G deux fermés de Ω, et f une fonction numérique sur Ω. On dit que f vérifie $\mathcal{L}(F,G)$, ou que f vérifie sur G une inégalité de Łojasiewicz par rapport à F, si, pour tout compact K contenu dans G, il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que : $\forall x \in K$ $|f(x)| \geq C\, d(x,F)^\alpha$.

Définition 2.

Soient $\mathcal{J}$ un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\Omega)$, F l'ensemble de ses zéros. On dit que $\mathcal{J}$ est un idéal de Łojasiewicz s'il existe $f \in \mathcal{J}$ vérifiant $\mathcal{L}(F,\Omega)$.

On voit alors que, si $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ est un système quelconque de générateurs de $\mathcal{J}$, $\sum_{i=1}^{s} |\varphi_i|$ (ou $\sum_{i=1}^{s} \varphi_i^2$) vérifie $\mathcal{L}(F,\Omega)$.

Proposition 1.

Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\mathcal{J}$ est un idéal de Łojasiewicz.

b) Toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur F, appartient à $\underline{m}_F^\infty.\mathcal{J}$.

c) Toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur F, appartient à $\mathcal{J}$.

Démonstration.

a) $\Rightarrow$ b) : On choisit un système de générateurs $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ et on pose $f = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i^2$. Soit φ une fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$ plate sur F. On considère la fonction $\Psi = \frac{\varphi}{f}$, définie et de classe C^∞ en dehors de F. Nous allons montrer que Ψ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur Ω, plate sur F.

Pour tout compact K il existe $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que : $\forall x \in K \quad |f(x)| \geq C\, d(x,F)^\alpha$. D'autre part, pour tout multi-indice ω, il existe $C' > 0$ tel que :

$$\forall x \in K - F \quad \left| \frac{D^{|\omega|}\Psi}{D x^\omega}(x) \right| \leq C' \frac{||\varphi||_x^{|\omega|}}{|f(x)|^{|\omega|+1}} \leq C' \frac{||\varphi||_x^{|\omega|}}{C^{|\omega|+1}\, d(x,F)^{(|\omega|+1)\alpha}} .$$

Puisque φ est plate sur F, $||\varphi||_x^{|\omega|}$ tend vers zéro plus vite que toute puissance de $d(x,F)$, quand $d(x,F)$ tend vers zéro, et les $\frac{D^{|\omega|}\Psi}{D x^\omega}$ se prolongent par continuité en des fonctions nulles sur F.

b) $\Longrightarrow$ c) : évident.

c) $\Longrightarrow$ a) : si $\mathcal{J}$ n'était pas un idéal de Łojasiewicz on pourrait construire une suite de points $x^p \in \Omega - F$, convergeant vers un élément $x \in F$, et telle que $\sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x^p)| \leq d(x^p,F)^{p+1}$. En remplaçant au besoin la suite x^p par une sous-suite, on peut supposer que les boules $B(x^p, \frac{1}{2} d(x^p,F)) = \mathcal{B}_p$ sont deux à deux disjointes. Soit alors $\varepsilon_p \in \mathcal{E}(\Omega)$, tel que $\varepsilon_p(x^p) = 1$, $\varepsilon_p = 0$ sur le complémentaire de $\mathcal{B}_p$, et $||\varepsilon_p||^r_{\mathcal{B}_p} \leq \frac{C_r}{d(x^p,F)^r}$, où C_r est une constante indépendante de p ([4], chapitre I).

La série $\sum_{p=1}^{\infty} d(x^p,F)^p \varepsilon_p$ converge vers une fonction $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur F.

Par hypothèse $\varphi \in \mathcal{J}$. Or dans ce cas il existerait une constante C telle que $|\varphi(x^p)| \leq C \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x^p)|$, d'où $d(x^p,F)^p \leq C\, d(x^p,F)^{p+1}$, ce qui est impossible.

<u>Proposition 2</u>.

<u>Tout idéal fermé, de type fini, de $\mathcal{E}(\Omega)$ est de Łojasiewicz</u>.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 et du théorème spectral de Whitney ([4], chapitre II).

§ 2.

Le lemme suivant précise le théorème des fonctions implicites.

Lemme 1.

Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\Theta = (\Theta_1,\dots,\Theta_n)$ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Posons $\delta = \dfrac{D(\Theta_1,\dots,\Theta_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}$. Il existe des constantes strictement positives, c, c', c'' telles que : $\forall a \in K$ avec $\delta(a) \neq 0$ et $\forall \rho_a$, avec $0 < \rho_a \leq \delta(a)$, l'application Θ induit un difféomorphisme de $\mathcal{V}_a = \Theta^{-1}(\mathcal{B}_a) \cap B(a, c\rho_a)$ sur $\mathcal{B}_a$, où $\mathcal{B}_a = B(\Theta(a), c''|\delta(a)|\rho_a)$; en outre $\mathcal{V}_a \supset B(a, c'|\delta(a)|\rho_a)$. Enfin on peut choisir la constance c de telle sorte que, $\forall x \in B(a, c|\delta(a)|)$, on ait $|\delta(x)| \geq \dfrac{|\delta(a)|}{2}$.

Démonstration.

Soit $a \in K$, tel que $\delta(a) \neq 0$. Posons $x - a = y$ et $X - \Theta(a) = Y$. On appelle Δ_a la différentielle de Θ en a et on définit $G_a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, par $G_a(y,Y) = \Delta_a^{-1}(\Delta_a(y) - (\Theta(a+y) - \Theta(a)) + Y)$, de telle sorte que $X = \Theta(x)$ est équivalent à $y = G_a(y,Y)$.

La fonction G_a vérifie $G_a(0,0) = 0$ et pour $i = 1,2,\dots,n$, $\dfrac{\partial G_a}{\partial y_i}(0,Y) = 0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $C_1 > 0$ indépendant de a, tel que :

$$\forall a \in K,\ \text{avec } \delta(a) \neq 0,\ \|G_a(0,Y)\| \leq \frac{C_1}{|\delta(a)|}\|Y\| \qquad (1)$$

De la même manière, si $0 < h < 1$, il existe $C > 0$ tel que :

$\forall a \in K$, avec $\delta(a) \neq 0$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $\forall y$, avec $\|y\| \leq C\,|\delta(a)|$, $\forall i = 1,2,\dots,n$, on ait

$$\left\|\frac{\partial G_a}{\partial y_i}(y,Y)\right\| = \left\|\frac{\partial G_a}{\partial y_i}(y,Y) - \frac{\partial G_a}{\partial y_i}(0,Y)\right\| \leq \frac{h}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

et aussi $|\delta(x)| \geq \frac{|\delta(a)|}{2}$.

On déduit de (2), par une autre application du théorème des accroissements finis :

$\forall y$, $\forall y'$, avec $||y|| \leq C|\delta(a)|$ et $||y'|| \leq C|\delta(a)|$,

$$||G_a(y,Y) - G_a(y',Y)|| \leq h \; ||y - y'|| \qquad (3)$$

Soit ρ_a, $0 < \rho_a \leq |\delta(a)|$, et posons $C" = \frac{C}{C_1}(1 - h)$.

Supposons $X \in \mathcal{B}_a$, d'où $||Y|| \leq C"|\delta(a)| \; \rho_a$.

Définissons par récurrence une suite x^p de l'espace $\mathbb{R}^n$ par les formules : $x^1 - a = G_a(0,Y), \ldots, x^p - a = G_a(x^{p-1} - a, Y)$. Vérifions par récurrence sur p que $x^p \in B(a, C\rho_a)$. C'est vrai pour $x^\circ = a$. Supposons qu'il en soit ainsi de x^{p-1}. Alors :

$$||x^p - a|| \leq ||G_a(x^{p-1} - a, Y) - G_a(0,Y)|| + ||G_a(0,Y)||$$

$$\leq h||x^{p-1} - a|| + \frac{C_1}{|\delta(a)|} C"|\delta(a)| \; \rho_a \leq$$

$$\leq h \; C\rho_a + C(1 - h) \; \rho_a = C \; \rho_a,$$

d'après les inégalités (1) et (3), l'hypothèse de récurrence et le choix de C".

La suite x^p est une suite de Cauchy ; en effet, d'après (3)

$$||x^p - x^{p-1}|| = ||G_a(x^{p-1} - a, Y) - G_a(x^{p-2} - a, Y)|| \leq h||x^{p-1} - x^{p-2}||.$$

Donc la suite x^p converge vers un élement $Y(X) \in B(a, C\rho_a)$.

Puisque $x^p - a = G_a(x^{p-1} - a, Y)$, un passage à la limite montre que $\gamma(X) - a = G_a(\gamma(X) - a, Y)$, donc que $\Theta(\gamma(X)) = X$ pour tout $X \in \mathcal{B}_a$, et Θ induit une surjection de $\mathcal{V}_a$ sur $\mathcal{B}_a$.

Réciproquement, montrons que pour tout $x \in \mathcal{V}_a$, $\gamma(\Theta(x)) = x$. En effet, $x - a = G_a(x - a, \Theta(x) - \Theta(a))$, et $\gamma(\Theta(x))$ est la limite d'une suite de points $x^p \in B(a, C\rho_a)$ tels que $x^p - a = G_a(x^{p-1} - a, \Theta(x) - \Theta(a))$. Il résulte alors de (3) que $||x - x^p|| \leq h||x - x^{p-1}||$ et donc que $x = \lim_{p\to\infty} x^p = \gamma(\Theta(x))$.

Finalement Θ induit une bijection de $\mathcal{V}_a$ sur $\mathcal{B}_a$, qui est un difféomorphisme puisque Θ est régulière en tout point de $\mathcal{V}_a$.

L'existence de la constante C' résulte du fait que Θ est lipschitzienne. Il suffit en effet de déterminer $C' > 0$ telle que :

$$B(a, C'|\delta(a)|\,\rho_a) \subset B(a, C\rho_a) \text{ et } \Theta(B(a, C'|\delta(a)|\,\rho_a)) \subset \mathcal{B}_a.$$

Corollaire.

Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, Γ l'ensemble des zéros de $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $\delta = \dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$, et K un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe des constantes $H > 0$ et $H' > 0$ telles que :

$$\forall a \in K, \quad \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(a)| \geq H|\delta(a)| \inf(|\delta(a)|, H' d(a,\Gamma)).$$

Démonstration.

On applique le lemme 1 à la fonction $\Theta(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, en prenant $\rho_a = \inf(|\delta(a)|, \frac{1}{C} d(a,\Gamma))$ si $a \notin \Gamma$.

La fonction $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ ne s'annule pas à l'intérieur de la boule $B(a, C\rho_a)$, et, puisque $\Theta(B(a, C\rho_a)) \supset \mathcal{B}_a$, le point

$a' = (0,\dots 0, a_{k+1}, \dots a_n)$ n'appartient pas à l'intérieur de $\mathcal{B}_a$. Donc $\forall a \in K$:

$$\sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(a)| \geq ||a' - \Theta(a)|| \geq C''|\delta(a)|\rho_a \geq H|\delta(a)| \inf(|\delta(a)|, H' d(a,\Gamma))$$

en posant $H = C''$ et $H' = \frac{1}{C}$.

§ 3.

Dans toute la suite de ce chapitre on étudiera la situation suivante : $\varphi_1,\dots,\varphi_s$, δ sont des éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$; $\mathfrak{J}$ est l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_s$ et $\mathfrak{J}'$ celui engendré par $\mathfrak{J}$ et δ ; Σ (resp. Σ') désigne l'ensemble des zéros de $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}'$), et $V(\delta)$ l'ensemble des zéros de δ. On suppose que $\delta \in \overline{J_k(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}$, racine de $J_k(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$, et que pour $j = k+1,\dots,s$, $\delta\,\varphi_j$ appartient à l'idéal engendré par $\varphi_1,\dots,\varphi_k$.

<u>Proposition 3.</u>

<u>Si l'idéal $\mathfrak{J}'$ est de Łojasiewicz, il en est de même de $\mathfrak{J}$.</u>

<u>Démonstration.</u>

En modifiant δ, on peut supposer que celui-ci appartient à l'idéal engendré par les $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$. Soit K un compact de Ω. Par hypothèse il existe $H_1 > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que :

$$\forall x \in K \quad \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| + |\delta(x)| \geq H_1\, d(x,\Sigma')|^{\alpha} \qquad (1).$$

On peut décomposer K en $K = K' \cup K''$, où K' et K'' sont définis par

$$K' = \{x \in K,\ \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| \geq \frac{H_1}{2} d(x,\Sigma')^{\alpha}\}$$

$$K'' = \{x \in K,\ |\delta(x)| \geq \frac{H_1}{2} d(x,\Sigma')^{\alpha}\}.$$

Puisque $\Sigma' \subset \Sigma$ on a : $\forall x \in K'$ $\quad \sum_{i=1}^{s} |\varphi_i(x)| \geq \frac{H_1}{2} d(x,\Sigma)^\alpha$ (2)

D'autre part il existe $H_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in K'' \quad \sum_{\underline{i}} \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x) \right| \geq H_2\, d(x,\Sigma')^\alpha \text{ où } \underline{i} = (i_1,\ldots,i_k)$$

$$(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n).$$

On peut alors écrire $K'' = \bigcup_{\underline{i}} K''_{\underline{i}}$ où

$$K''_{\underline{i}} = \{x \in K'',\ \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}(x) \right| \geq \frac{H_2}{C_n^k}\, d(x,\Sigma')^\alpha\} .$$

Notons Γ l'ensemble des zéros de $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$. Par hypothèse $V(\delta) \cup \Sigma \supset \Gamma$, d'où $d(x,\Gamma) \geq \inf(d(x,V(\delta)),d(x,\Sigma)) \geq \inf(H_3|\delta(x)|,d(x,\Sigma))$ (3) pour un $H_3 > 0$.

D'après le corollaire du lemme 1, il existe $H > 0$ et $H' > 0$ tels que :

$$\forall x \in K, \quad \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)| \geq H \left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} \right| \inf\left(\left| \frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})} \right|,\ H'\, d(x,\Gamma) \right) \quad (4)$$

Il résulte alors des définitions de K'' et $K''_{\underline{i}}$, de (3) et (4) que :

$$\forall x \in K''_{\underline{i}}, \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)| \geq H \frac{H_2}{C_n^k} d(x,\Sigma)^\alpha \inf(\frac{H_2}{C_n^k} d(x,\Sigma)^\alpha,\ H'H_3 \frac{H_1}{2} d(x,\Sigma)^\alpha, H'\, d(x,\Sigma)\ ) \quad (5)$$

La proposition résulte de (2), (5) et de $K = K' \cup (\bigcup_{\underline{i}} K''_{\underline{i}})$.

§ 4.

Proposition 4.

Si $\mathfrak{J}'$ est un idéal de Łojasiewicz, toute fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur Σ' et nulle sur Σ, appartient à $\mathfrak{J}$.

Démonstration.

Nous utiliserons le lemme suivant (Γ désigne l'ensemble des zéros de $\varphi_1,\dots,\varphi_k$) :

Lemme 2.

Soient F et G deux fermés, $\Sigma' \subset F \subset G \subset \Sigma$, tels que $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}$ vérifie $\mathcal{L}(F,G)$, et soit φ une fonction plate sur F et nulle sur Γ. Alors il existe k éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, plats sur F, tels que $\varphi - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i$ soit plat sur G.

Montrons comment la proposition 4 se déduit du lemme 2 :

Soit $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur Σ', nulle sur Σ. Démontrons que $f \in \mathfrak{J}$. Puisque $\mathfrak{J}'$ est un idéal de Łojasiewicz, d'après la proposition 1 : $f \in \underline{m}^{\infty}_{\Sigma'} . \mathfrak{J}'$. L'idéal $\mathfrak{J}'$ étant engendré sur $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\mathfrak{J}$ et δ, on peut donc supposer, pour la démonstration, que $f \in \underline{m}^{\infty}_{\Sigma'} . \delta$ et donc que f s'annule sur $V(\delta) \cup \Sigma$, ensemble qui contient Γ. Puisque $\mathfrak{J}'$ est un idéal de Łojasiewicz, δ vérifie $\mathcal{L}(\Sigma',\Sigma)$. On peut donc décomposer Σ en $\Sigma = \bigcup_{\underline{i}} \Sigma_{\underline{i}}$ de telle sorte que, si $\underline{i} = (i_1,\dots,i_k)$, $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ vérifie $\mathcal{L}(\Sigma',\Sigma_{\underline{i}})$. On ordonne de manière quelconque l'ensemble des multi-indices : $\underline{i}^1, \underline{i}^2,\dots,\underline{i}^p,\dots,\ p \leq C_n^k$, et on pose : $F_o = \Sigma'$, $F_p = \bigcup_{j\leq p} \Sigma_{\underline{i}^j}$, pour $p = 1,2,\dots,C_n^k$. Alors si $\underline{i}^p = (i_1,\dots,i_k)$ le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ vérifie $\mathcal{L}(F_{p-1},F_p)$.

On raisonne par récurrence sur p : on suppose que $f = \Psi_p + \Psi'_p$, où Ψ_p est plate sur F_{p-1} et $\Psi'_p \in (\varphi_1,\dots,\varphi_k)$. En appliquant le lemme 2 à $\varphi = \Psi_p$, $F = F_{p-1}$, $G = F_p$ et en remplaçant le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}$ par $\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}$ on trouve que $\Psi_p - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \varphi_i = \Psi_{p+1}$, est plat sur F_p. Il en résulte que $f = \Psi_{p+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, \varphi_i + \Psi'_p$ et la fonction $\Psi'_{p+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi_i + \Psi'_p$ appartient à $(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$. Pour $p = C_n^k$ on a donc $f = \Psi + \Psi'$, avec $\Psi' \in \mathfrak{J}$ et Ψ plate sur Σ, et d'après les propositions 1 et 3, $\Psi \in \mathfrak{J}$.

Démonstration du lemme 2.

Nous allons d'abord définir sur G - F des champs de séries formelles $A_1,\dots,A_k$, tels que pour tout $x \in G - F$, $T_x\, \varphi = \sum_{i=1}^{k} (T_x\, A_i)(T_x\, \varphi_i)$. Puis nous montrerons que les champs A_i, prolongés par le champ nul sur F, sont les champs de fonctions α_i de classe C^∞ sur Ω.

Nous utiliserons la remarque suivante : soit $\Psi(X_1,\dots,X_n)$ une fonction de classe C^∞ telle que $\Psi(0,..0,X_{k+1},\dots,X_n) \equiv 0$. Alors

$$\Psi(X) = \sum_{i=1}^{k} X_i \int_0^1 \frac{\partial \Psi}{\partial X_i}(tX_1,\dots,tX_k,X_{k+1},\dots,X_n)\, dt.$$

On définit $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^n$, par $\Theta(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_k(x),x_{k+1},\dots,x_n)$.

Le jacobien de Θ est $\dfrac{D(\varphi_1,\dots\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)}$ et, pour tout $a \in G - F$, Θ induit un difféomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de $\Theta(a)$. Le lemme 1 indique comment varient ces voisinages quand a reste dans un compact fixe K, ce que nous pourrons supposer pour la suite de la démonstration.

Pour un tel compact il existe, par hypothèse, deux constantes $C_1 > 0$ et $\alpha \geq 0$, telles que :

$$\forall x \in K \cap G, \quad \left| \frac{D(\varphi_1,\dots\dots,\varphi_k)}{D(x_1,\dots\dots,x_k)} \right| \geq C_1\, d(x,F)^\alpha .$$

a) Définition des champs A_i.

Soit $a \in (G - F) \cap K$. Avec les notations du lemme 1, où on choisit $\rho_a = |\delta(a)|$, Θ induit un difféomorphisme Θ_a de $\mathcal{V}_a$ sur $\mathcal{B}_a$. Pour $X \in \mathcal{B}_a$ posons : $\Psi_a(X) = \varphi(\Theta_a^{-1}(X))$. On a donc :

$$\Psi_a(0,\dots,0,X_{k+1},\dots,X_n) = 0 \text{ et } \Psi_a(X) = \sum_{i=1}^{k} X_i \int_0^1 \frac{\partial \Psi_a}{\partial X_i}(tX_1,\dots,tX_k;X_{k+1},\dots,X_n)dt.$$

En désignant par $(\delta_{ij}(x))$ la matrice des cofacteurs de la matrice jacobienne de Θ en x, on a :

$$\frac{\partial \Psi_a}{\partial X_i}(X) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\Theta_a^{-1}(X)) \frac{\delta_{ij}}{\delta}(\Theta_a^{-1}(X))$$

d'où

$$\forall x \in \mathcal{V}_a, \varphi(x) = \Psi_a(\Theta(x)) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\delta_{ij}}{\delta}\Big) \circ (\ell_a(x,t))\, dt \qquad (1)$$

où $\ell_a(x,t)$ est une fonction de classe C^∞ à valeurs dans $\mathcal{V}_a$:

$$\ell_a(x,t) = \Theta_a^{-1}(t\varphi_1(x),\dots,t\varphi_k(x),x_{k+1},\dots,x_n).$$

Posons : $A_{a,i} = \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\delta_{ij}}{\delta}\Big) \circ (\ell_a(x,t))\, dt.$

Le chemin $\ell_a(x,t)$ dépend de a et les fonctions $A_{a,i}$ aussi. Mais si $x \in G$, $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0$, et $\ell_a(x,t) \equiv x$. En particulier $\ell_a(x,t)$ est alors indépendant de a. Il en résulte que la série formelle en un point $x \in \mathcal{V}_a \cap G$ de $A_{a,i}$ est indépendante de a et définit donc sur $(G - F) \cap K$ un champ de séries formelles A_i.

b) Prolongements des champs A_i.

Fixons $m \in \mathbb{N}$. Nous allons d'abord majorer $\|A_{a,i}\|^m_{\mathcal{V}_a}$.

Pour tout multi-indice $\omega = (\omega_1,..,\omega_n)$ on obtient en dérivant la formule (1)

$$(2) \quad \forall x \in \mathcal{V}_a \qquad \frac{D^{|\omega|}A_{a,i}}{D\, x^{\omega}}(x) = \int_0^1 \frac{P_{i,\omega}\,(x,t)}{\delta^{2|\omega|+1}(\,\ell_a(x,t))}\; dt$$

où $P_{i,\omega}(x,t)$ est un polynôme en t, en les $\dfrac{D^{|\omega'|}\varphi}{D\, x^{\omega'}}$ (x) pour $|\omega'| \leq |\omega| + 1$, et en les $\dfrac{\partial^{|\omega''|}\varphi}{\partial\, x^{\omega''}}$ $(\ell_a(x,t))$ pour $|\omega''| \leq |\omega| + 1$, dont les coefficients sont indépendants de a.

De (2) on déduit : (3) $\|A_{a,i}\|^m_{\mathcal{V}_a} \leq C_2 \dfrac{\|\varphi\|^{m+1}_{\mathcal{V}_a}}{d(a,F)^{(2m+1)\alpha}}$,

pour tout $a \in (G - F) \cap K$.

On voit facilement qu'il existe une constante $C_3 > 0$, telle que $\forall x \in \mathcal{V}_a$, $d(x,F) \leq C_3\, d(a,F)$. Il en résulte, puisque φ est plate sur F, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C(p)$, indépendante de a, telle que : $\|A_{a,i}\|^m_{\mathcal{V}_a} \leq C(p)\, d(a,F)^p$ (4).

Désignons toujours par A_i les champs A_i prolongé par le champ nul sur F. Pour montrer que A_i est le champ d'une fonction de classe C^{∞} sur Ω, il faut montrer ([4], chapitre I) que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un module de continuité ε tel que :

$\forall a \in G \cap K$, $\forall b \in G \cap K$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$|T_a^{\,m} A_i(x) - T_b^{\,m} A_i(x)| \leq (\|a - x\|^m + \|b - x\|^m)\; \varepsilon\,(\|a - b\|).$$

Nous distinguerons trois cas. Dans chacun d'eux on peut déterminer un tel module de continuité.

1°) a et b appartiennent à $(G-F)\cap K$ et $d(a,b) \leq C' C_1^2 d(a,F)^{2\alpha} \leq$

$$\leq C' |\delta(a)|^2 = C'|\delta(a)|\rho_a.$$

Alors, d'après le lemme 1, $b \in \mathcal{V}_a$. Sur $\mathcal{V}_a \cap G$ le champ A_i est celui de la fonction $A_{a,i}$. Il existe alors une constante $H_1 > 0$ telle que :

$$|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)| \leq H_1(||a-x||^m + ||b-x||^m) ||a-b|| ||A_{a,i}||_{\mathcal{V}_a}^{m+1}$$

et d'après (4), $||A_{a,i}||_{\mathcal{V}_a}^{m+1}$ est bornée quand a décrit $(G-F)\cap K$.

2°) a et b appartiennent à $(G-F)\cap K$ et $d(a,b) > C' C_1^2 d(a,F)^{2\alpha}$. On voit alors facilement qu'il existe une constante C_1' telle que :

$$d(a,b) \geq C_1' d(b,F)^{2\alpha} .$$

D'après (4), il existe pour tout entier p, une constante H(p) telle que :

$$|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)| \leq |T_a^m A_i(x)| + |T_b^m A_i(x)|$$

$$\leq H(p) ((1+||a-x||^m) d(a,F)^p + (1+||b-x||^m) d(b,F)^p)$$

$$\leq H(p)(\sup(\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_1'}))^{\frac{p}{2\alpha}} (2+||a-x||^m+||b-x||^m)||a-b||^{\frac{p}{2\alpha}}$$

et il suffit de prendre $p > 2\alpha (m+1)$.

3°) Si a ou b appartient à $F\cap K$, l'un des deux termes de la différence $|T_a^m A_i(x) - T_b^m A_i(x)|$ est nul et on majore l'autre comme dans le 2ème cas.

§ 5.

Dans ce paragraphe on suppose, en outre, que Ω est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.

Si $\mathfrak{J}'$ est fermé, et si pour tout $x \in \Sigma - \{0\}$, $T_x\ \delta$ n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau $\mathfrak{F}_x / T_x\ \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ est un idéal fermé.

Démonstration.

Soit φ une fonction adhérente à $\mathfrak{J}$. Puisque $T_0\,\varphi \in T_0\ \mathfrak{J}$, on peut supposer $T_0\ \varphi = 0$. Puisque $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}'$ et que $\mathfrak{J}'$ est fermé, $\varphi \in \mathfrak{J}'$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i,1}\ \varphi_i + \Psi_1\ \delta.$$

Dans cette égalité on peut supposer que $\alpha_{i,1}$ et Ψ_1 sont plates en 0 :

En effet, d'après le lemme du chapitre I, on peut écrire $\varphi = \varphi'\ \varphi''$, φ' et φ'' plates en 0, $\varphi'(x) > 0$ pour $x \neq 0$; la fonction φ'' qui appartient ponctuellement à $\mathfrak{J}$, appartient à $\mathfrak{J}'$ ([4], chapitre II), ce qui donne le résultat.

Pour tout $x \neq 0$ on a $T_x\ \varphi = \sum_{i=1}^{s} (T_x\ \alpha_{i,1}\ T_x \varphi_i) + T_x\ \Psi_1\ T_x\ \delta$, et par hypothèse $T_x\ \varphi \in T_x\ \mathfrak{J}$. Puisque $T_x\ \delta$ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathfrak{F}_x / T_x\ \mathfrak{J}$ et que $T_x\ \Psi_1\ T_x\ \delta \in T_x\ \mathfrak{J}$, on a $T_x\ \Psi_1 \in T_x\ \mathfrak{J}$.

Comme on a aussi $T_0\ \Psi_1 = 0 \in T_0\ \mathfrak{J}$, il résulte du théorème spectral de Whitney ([4], chapitre II) que Ψ_1 est adhérente à $\mathfrak{J}$.

D'où $\varphi = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_{i,1} + \delta\alpha_{i,2})\,\varphi_i + \Psi_2\ \delta^2$ avec Ψ_2 plate à l'origine.

En itérant ce raisonnement on obtient : $\varphi = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{p} \delta^j \alpha_{i,j+1} \right) + \Psi_{p+1} \delta^{p+1}$

avec Ψ_{p+1} plate à l'origine.

Soit K un compact contenu dans $V(\delta)$. Si d_p est un nombre > 0, on désigne par ε_p une fonction nulle sur $\{x,\ d(x,K) \geq \frac{1}{d_p}\}$, égale à 1 sur $\{x,\ d(x,K) \leq \frac{1}{2d_p}\}$ et telle que :

$$\left| \frac{D^{|\omega|} \varepsilon_p}{D\, x^{\omega}} \right| \leq \frac{C_{|\omega|}}{d_p^{|\omega|}}\ ,\ \text{où } C_{|\omega|} \text{ est indépendant de } p \ ([4],$$

chapitre I).

Puisque la fonction $\delta^p \alpha_{i,p+1}$ est nulle sur K, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre p-1 inclu, on peut, par la formule de Leibnitz, déterminer la suite de nombres d_p de telle sorte que

$$\| \varepsilon_p\, \delta^p\, \alpha_{i,p+1} \|_{\Omega}^{p-1} \leq \frac{1}{2^p}\ .$$

La série $\sum_{p \geq 0} \varepsilon_p\, \delta^p\, \alpha_{i,p+1}$ converge alors uniformément, ainsi que toutes ses dérivées. Soit $\alpha_{i,K}$ la somme de cette série. Pour tout p la fonction $\alpha_{i,K} - \sum_{j=0}^{p} \delta^j \alpha_{i,j+1}$ est p-plate sur K.

Par une partition de l'unité on construit alors des fonctions $\alpha_i \in \mathcal{E}(\Omega)$, $i = 1,\dots,s$, telles que, pour tout p, la fonction $\alpha_i - \sum_{j=0}^{p} \delta^j \alpha_{i,j+1}$ soit p-plate sur $V(\delta)$.

La fonction $\varphi - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{p} \delta^j \alpha_{i,j+1} - \alpha_i \right) \varphi_i + \Psi_{p+1} \delta^{p+1}$

est donc p-plate sur $V(\delta)$, pour tout p. D'après la proposition 4, et puisque $\mathcal{J}'$, fermé, est de Łojasiewicz, la fonction $\varphi - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_i$ appartient à $\mathcal{J}$.

Corollaire.

Soient $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ des éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$. Si $J_p(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ contient une puissance de $\underline{m}_0$ ($\underline{m}_0$ est l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions nulles à l'origine), l'idéal $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ est fermé.

Démonstration.

On applique la proposition 5 avec : $\mathfrak{J} = (\varphi_1,\dots,\varphi_p)$; $k = s = p$;

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i^2 + \sum_{\underline{i}} \left(\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_p)}{D(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}\right)^2 .$$

On a $V(\delta) = \{0\}$ et δ vérifie $\mathcal{L}(0,\Omega)$. L'idéal $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + (\delta)$ est donc fermé. Les hypothèses de la proposition 5 sont vérifiées.

CHAPITRE III

§ 1 - UN CRITERE DE PLATITUDE.

Soit A un anneau local régulier de dimension p, d'idéal maximal $\underline{n}$, de corps résiduel $\underline{k} = A/\underline{n}$. Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur A ; supposons $\mathcal{M} \neq (0)$. On appelle $\mathcal{M}$-suite de A (J.P. Serre, [6], chapitre IV) toute suite $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_k\}$ d'éléments de $\underline{n}$ telle que, pour tout i, $1 \leq i \leq k$, a_i ne soit pas diviseur de zéro dans $\mathcal{M}/(a_0, \dots, a_{i-1}).\mathcal{M}$ (on pose $a_0 = 0$). On note $(\underline{a})$ l'idéal engendré par $a_1, \dots, a_k$ dans A.

Soient $\underline{A}$ la catégorie abélienne des A-modules de type fini ; $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne ; $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{C}$ telle que, pour toute suite exacte $C' \longrightarrow C \longrightarrow C''$ de la catégorie $\mathcal{C}$, l'hypothèse $C', C'' \in \mathcal{C}'$ implique $C \in \mathcal{C}'$. Si T est un foncteur additif, exact à droite, de $\underline{A}$ dans $\mathcal{C}$, on désigne par $L_i\, T$, le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche du foncteur T. La dimension homologique globale de A étant égale à p, on a $L_i\, T = 0$, si $i > p$.

Lemme 1.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur A. Il existe un nombre fini de A-suites de A telles que : pour tout foncteur additif et exact à droite T de $\underline{A}$ dans $\mathcal{C}$, l'hypothèse : pour tout α, $L_1\, T\, (A/(\underline{a}^{\alpha})) \in \mathcal{C}'$, implique : $\forall\, i \geq 1$, $L_i\, T(\mathcal{M}) \in \mathcal{C}'$.

Démonstration.

Soit $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_k\}$ une A-suite de A. Posons $\underline{a}_j = \{a_1, \dots, a_j\}$ pour $j \in [1, k]$; $\underline{a}_0 = 0$ et supposons que les $L_1\, T(A/(\underline{a}_j))$ appartiennent à $\mathcal{C}'$.

Montrons, par récurrence sur j, que $\forall i \geq 1 \quad L_i\, T(A/(\underline{a}_j)) \in \mathcal{C}'$.

Si $j = 0$, le résultat est trivial. Supposons $j > 0$ et considérons la suite exacte : $(0) \longrightarrow A/(\underline{a}_{j-1}) \xrightarrow{a_j} A/(\underline{a}_{j-1}) \longrightarrow A/(\underline{a}_j) \longrightarrow (0)$ où a_j désigne la multiplication par a_j. On en déduit une suite exacte :

$$L_i\, T(A/(\underline{a}_{j-1})) \longrightarrow L_i\, T(A/(\underline{a}_j)) \longrightarrow L_{i-1}\, T(A/(\underline{a}_{j-1})).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\forall i \geq 2$, $L_i\, T(A/(\underline{a}_j)) \in \mathcal{C}'$, c.q.f.d.

En augmentant, si nécessaire, le nombre des suites . }, nous pouvons donc, dans l'énoncé du lemme, remplacer l'hypothèse par la suivante : "pour tout α et tout $i \geq 1$, $L_i\, T(A/(\underline{a}^{\alpha})) \in \mathcal{C}'$ ".

Montrons, par récurrence sur la dimension p-k du module $\mathcal{M}$, puis par récurrence descendante sur $i_o \geq 1$, qu'il existe des A-suites de A, telles que l'hypothèse : $\forall \alpha$, $\forall i \geq 1$, $L_i\, T(A/(\underline{a}^{\alpha})) \in \mathcal{C}'$ implique $L_{i_o}\, T(\mathcal{M}) \in \mathcal{C}'$.

L'anneau A étant noethérien, il existe une suite croissante : $(0) = \mathcal{M}_o \subset \mathcal{M}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{M}_s = \mathcal{M}$ de sous-modules de $\mathcal{M}$ et des idéaux premiers $\mathfrak{p}_j$ de hauteur $\geq k$, tels que $\forall j \in [1,s]$, $\mathcal{M}_j/\mathcal{M}_{j-1} \simeq A/\mathfrak{p}_j$. (J.P. Serre [6], chapitre I, corollaire 4 de la proposition 7). Utilisant la suite exacte des $L_i\, T$ et la première hypothèse de récurrence, on peut donc supposer que $\mathcal{M} = A/\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, de hauteur k.

Si $p-k = 0$, i.e. si $\dim(\mathcal{M}) = 0$, nécessairement $\mathfrak{p} = \underline{n}$. L'anneau A étant régulier, l'idéal maximal $\underline{n}$ est engendré par une A-suite $\{a_1, \ldots, a_p\}$ et, dans ce cas, le résultat est trivial.

Supposons $p-k > 0$. Si $i_\circ > p$, $L_{i_\circ} T(\mathcal{H}) = (0)$. Soit $\underline{a} = \{a_1,\dots,a_k\}$ une A-suite de A telle que $\mathfrak{p}$ soit un idéal premier minimal contenant $(\underline{a})$.

On a : $\quad (\underline{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots\dots \cap \mathfrak{q}_s$

où les $\mathfrak{q}_i$ sont des idéaux primaires de hauteur k et, par exemple, $\mathfrak{p}$ est la racine de $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$.

Considérons la suite exacte :

$$(0) \longrightarrow A/(\underline{a}) \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{j=1}^{s} A/\mathfrak{q}_j \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow (0)$$

où l'on désigne par ι l'injection obtenue, par passage au quotient, de l'application : $A \ni a \rightsquigarrow (a,\dots,a) \in A^s$. Visiblement, $\dim(\mathcal{H}) < p-k$. D'après la première hypothèse de récurrence, il existe des A-suites telles que l'hypothèse : $\forall \alpha$, $\forall i \geq 1$, $L_i\, T(A/(\underline{a}^\alpha)) \in \mathcal{C}'$ implique :

$L_{i_\circ} T(\mathcal{H}) \in \mathcal{C}'$ et $L_{i_\circ} T(A/(\underline{a})) \in \mathcal{C}'$, donc $L_{i_\circ} T(A/\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}'$.

Le module $A/\mathfrak{q}$ étant $\mathfrak{p}$-primaire, il existe une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow A/\mathfrak{p} \longrightarrow A/\mathfrak{q} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow (0).$$

où $\mathcal{K}$ est un module de dimension $\leq p-k$. On en déduit une suite exacte :

$$L_{i_\circ+1} T(\mathcal{K}) \longrightarrow L_{i_\circ} T(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow L_{i_\circ} T(A/\mathfrak{q}).$$

D'après la seconde hypothèse de récurrence (celle sur $i_\circ$), il existe des A-suites telles que l'hypothèse : $\forall \alpha$, $\forall i \geq 1$, $L_i\, T(A/(\underline{a}^\beta)) \in \mathcal{C}'$ implique : $L_{i_\circ+1} T(\mathcal{K}) \in \mathcal{C}'$. D'après la suite exacte précédente, si l'on a simultanément $L_i\, T(A\ (\underline{a}^\alpha)) \in \mathcal{C}'$ et $L_i\, T(A\ (\underline{a}^\beta)) \in \mathcal{C}'$: $L_{i_\circ} T(A/\mathfrak{p}) \in \mathcal{C}'$, c.q.f.d.

Corollaire 1.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur A. Il existe un nombre fini de A-suites de A telles que, pour tout module B sur A, l'hypothèse :

pour tout α, $\mathrm{TOR}_1^A(A/(\underline{a}^\alpha), B)$ *est de longueur finie*

implique $\mathrm{TOR}_1^A(\mathcal{M}, B)$ *est de longueur finie.*

Démonstration.

On applique le lemme 1, en prenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie des A-modules ; pour $\mathcal{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les modules de longueur finie ; pour T le foncteur $. \otimes_A B$.

Corollaire 2.

Un A-module B est plat (resp. injectif) si et seulement si pour toute A-suite $\underline{a}$ de A, on a :

$$\mathrm{TOR}_1^A(A/(\underline{a}), B) = (0) \quad (\text{resp. } \mathrm{EXT}_A^1(A/(\underline{a}), B) = (0)).$$

Remarque. Soit $\underline{a} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ une suite d'éléments de A et soit B un module sur A. Le module $\mathcal{R}_B(\underline{a})$ des "relations entre les a_i à coefficients dans B" est le noyau de l'homomorphisme :

$$B^k \ni (b_1, \ldots, b_k) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{k} a_i\, b_i \in B.$$

On a visiblement : $\mathrm{TOR}_1^A(A/(\underline{a}), B) = \mathcal{R}_B(\underline{a}) \,/\, \mathcal{R}_A(\underline{a}) \,.\, B.$

Le module $\mathcal{R}_A(\underline{a})$ contient toujours les relations dites "triviales" : $r_{\alpha\beta} = (r_{\alpha\beta}^1, \ldots\ldots, r_{\alpha\beta}^k)$ où $r_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, si $\gamma \neq \alpha$ et β ; $r_{\alpha\beta}^\alpha = -a_\beta$ et $r_{\alpha\beta}^\beta = a_\alpha$.

Si $\underline{a}$ est une A-suite de A ou si $(\underline{a}) = A$, $\mathcal{R}_A(\underline{a})$ est engendré par les relations triviales.

§ 2 - EN GENRAL : $\dim_{\mathbb{R}} (\mathrm{TOR}_1^{\ominus}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}})) < \infty$.

Soit Ω un voisinage ouvert de l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$. Les anneaux $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{F}_o$, $\tilde{\mathcal{F}}_o$ définis au chapitre I, seront notés respectivement $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ (il n'y a aucune confusion possible : nous n'utilisons pas dans ce chapitre les faisceaux $\mathcal{E}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ du chapitre I).

Rapportons l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) à un système de coordonnées $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$ (resp. $\underline{y} = (y_1,\dots,y_p)$). Soit $\mathcal{A}_p$ l'anneau des germes de fonctions à valeurs réelles, analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^p$. Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}$; $\underline{n}$ celui de $\mathcal{A}_p$.

Désignons par $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}_p, \mathcal{E})$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathcal{A}_p$ dans $\mathcal{E}$. On définit une bijection Ξ :

$$\bigoplus_p \underline{m} \ni \underset{\sim}{\theta} = (\underset{\sim}{\theta}_1,\dots,\underset{\sim}{\theta}_p) \rightsquigarrow \Theta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_p, \mathcal{E}) \text{ en posant :}$$

$\forall f \in \mathcal{A}_p$, $\Theta(f) = f(\underset{\sim}{\theta}_1,\dots,\underset{\sim}{\theta}_p)$ (pour tout Θ appartenant à $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}_p, \mathcal{E})$, on a $\Xi^{-1}(\Theta) = (\Theta(y_1),\dots,\Theta(y_p))$).

Soit $T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} = \mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$ la surjection qui associe à tout germe sa série de Taylor à l'origine. On en déduit une surjection T^p :

$$\mathcal{E}^p \ni (\underset{\sim}{\theta}_1,\dots,\underset{\sim}{\theta}_p) \rightsquigarrow (T(\underset{\sim}{\theta}_1),\dots,T(\underset{\sim}{\theta}_p)) \in \mathcal{F}^p.$$

Soit π la projection canonique : $\bigoplus_p \underline{m} \longrightarrow \bigoplus_p \underline{m}/\underline{m}^2$.

<u>Définition</u>.

Une propriété $\mathcal{P}$ relative aux éléments Θ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}_p, \mathcal{E})$ est vraie <u>en général</u>, si $\forall \xi \in \bigoplus_p \underline{m}/\underline{m}^2$, il existe dans $\mathcal{F}^p$ une provariété algébrique de codimension infinie V_ξ telle que tout Θ appartenant à $\Xi((T^p)^{-1}(\mathcal{F}^p - V_\xi) \cap \pi^{-1}(\xi))$ satisfasse à $\mathcal{P}$ (pour la définition d'une provariété algébrique, nous renvoyons à [7], chapitre I, § 1).

<u>Remarque</u>. Il serait naturel d'adopter la définition suivante (cf. J.Cl. TOUGERON [7], chapitre I, § 3) :

Une propriété $\mathcal{G}$ relative aux éléments Θ de $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_p, \mathcal{E})$ est vraie <u>en général</u>, s'il existe dans $\mathcal{F}^p$ une provariété algébrique de codimension infinie V telle que tout Θ appartenant à $\Xi((T^p)^{-1}(\mathcal{F}^p - V) \cap \bigoplus_p \underline{m})$ satisfasse à $\mathcal{G}$.

Avec cette définition, la proposition 1 et donc la proposition 3 de ce chapitre, sont vraies ; malheureusement, nous ne savons pas démontrer la proposition 4.

Posons $\hat{\Theta} = T \circ \Theta$. Si π est un idéal de $\mathcal{O}_p$, on note simplement $\Theta[\pi]$ l'idéal engendré par $\Theta(\pi)$ dans $\mathcal{E}$; par $\hat{\Theta}[\pi]$ l'idéal $T(\Theta[\pi])$, engendré par $\hat{\Theta}(\pi)$ dans $\mathcal{F}$.

<u>Proposition 1</u>.

<u>Soit π un idéal propre de hauteur k de $\mathcal{O}_p$. En général, la hauteur de $\hat{\Theta}[\pi]$ est égale à $\inf(k,n)$</u>.

Pour la démonstration, nous renvoyons à [7], chapitre I, proposition 2. En fait, on y démontre le résultat avec l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[y_1,\dots,y_p]$ au lieu de $\mathcal{O}_p = \mathbb{R}\{\{y_1,\dots,y_p\}\}$, mais la démonstration se transpose sans difficultés.

<u>Proposition 2</u>. ([7], chapitre I, corollaire proposition 1).

<u>Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$. L'application $\Omega \ni x \rightsquigarrow ht(T_x(\mathfrak{I}))$ est semi-continue inférieurement</u>.

Soient Θ appartenant à $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_p, \mathcal{E})$; $\mathcal{M}$ un module sur $\mathcal{O}_p$; B un module sur $\mathcal{E}$: Θ munit B d'une structure de $\mathcal{O}_p$-module. Le module $\mathrm{TOR}_i^{\mathcal{O}_p}(\mathcal{M}, B)$ sera noté $\mathrm{TOR}_i^{\Theta}(\mathcal{M}, B)$; de même $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_p} B$ sera noté $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} B$.

<u>Proposition 3</u>.

<u>Soit $\underline{a} = \{a_1,\dots,a_k\}$ une $\mathcal{O}_p$-suite de $\mathcal{O}_p$:</u>

1) <u>si $k \leq n$, en général : $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \mathfrak{F}) = TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \tilde{\mathfrak{F}}) = (0)$.</u>

2) <u>si $k > n$, en général : $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \mathfrak{F})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie isomorphe à $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \tilde{\mathfrak{F}})$.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soit Ω un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{R}^n$ et soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$ induisant respectivement à l'origine les germes $\Theta(a_1), \ldots, \Theta(a_k)$ (donc $T_o(\varphi_i)) = \hat{\Theta}(a_i))$.
Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal engendré par les φ_i dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

1) Si $k \leq n$, d'après la proposition 1, en général $ht(T_o(\mathfrak{J})) = k$. Supposons cette condition satisfaite. D'après la proposition 2, en diminuant Ω si nécessaire, $\forall x \in \Omega$, $ht(T_x(\mathfrak{J})) \geq k$. Ainsi, ou $T_x(\mathfrak{J}) = \mathfrak{F}_x$, ou $\{T_x(\varphi_1), \ldots, T_x(\varphi_k)\}$ est une $\mathfrak{F}_x$-suite de $\mathfrak{F}_x$. Dans l'un ou l'autre cas, le module des relations entre les $T_x(\varphi_i)$ est engendré par les relations triviales (cf. remarque du § 1). En passant aux germes à l'origine :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}_p}(\underline{a}) \, . \, \tilde{\mathfrak{F}} = \mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{F}}}(\underline{a}) \text{ ; de même : } \mathcal{R}_{\mathcal{O}_p}(\underline{a}) \, . \, \mathfrak{F} = \mathcal{R}_{\mathfrak{F}}(\underline{a}), \text{c.q.f.d.}$$

2) Si $k \geq n$, d'après la proposition 1, en général $ht(T_o(\mathfrak{J})) = n$. Supposons cette condition satisfaite. D'abord, le module $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \mathfrak{F})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (car $\mathfrak{F}/(\underline{a}). \mathfrak{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, i.e. de support réduit à l'idéal maximal de $\mathfrak{F}$).

Montrons ensuite que l'application canonique :

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{F}}}(\underline{a}) / \mathcal{R}_{\mathcal{O}_p}(\underline{a}) \, . \, \tilde{\mathfrak{F}} \simeq TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \tilde{\mathfrak{F}}) \to TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{a}), \mathfrak{F}) \simeq$$

$\mathcal{R}_{\mathfrak{F}}(\underline{a}) / \mathcal{R}_{\mathcal{O}_p}(\underline{a}). \mathfrak{F}$ est un isomorphisme, ce qui terminera la démonstration. D'une part, cette application est visiblement surjective. D'autre part, si Ω est assez petit, l'ensemble des zéros de l'idéal $\mathfrak{J}$ se réduit à l'origine.

Donc, $\forall x \in \Omega - \{0\}$, $T_x(\mathfrak{I}) = \mathfrak{F}_x$ et le module des relations entre les $T_x(\varphi_i)$ est engendré par les relations triviales. Passant aux germes, on voit que toute relation entre les a_i, à coefficients dans $\tilde{\mathfrak{F}}$ et plate à l'origine, est combinaison linéaire à coefficients dans $\tilde{\mathfrak{F}}$ de relations triviales. Ceci prouve que l'application précédente est injective, c.q.f.d.

Corollaire.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini que $\mathcal{O}_p$. En général :

$\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathfrak{F}})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Cela résulte de la proposition précédente et du corollaire 1 du lemme 1.

§ 3 - EN GENERAL $\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathfrak{F}}/\mathcal{E}) = (0)$.

Soit π un idéal de $\mathcal{O}_p$ engendré par des éléments $\Phi_1,\ldots,\Phi_s$. On note $J_k(\pi)$ l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_p$ par $\Phi_1,\ldots,\Phi_s$ et tous les jacobiens
$$\frac{D(\Phi_{i_1},\ldots,\Phi_{i_k})}{D(y_{j_1},\ldots,y_{j_k})}.$$

De même, si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathcal{E}$ engendré par des éléments $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$, on note $J_k(\mathfrak{I})$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})}$.

On désigne par $\bar{\mathfrak{I}}$ la racine de l'idéal $\mathfrak{I}$, i.e.

$\bar{\mathfrak{I}} = \{\varphi \in \mathcal{E},\ \exists m \in \mathbb{N},\ \varphi^m \in \mathfrak{I}\}$.

Proposition 4.

Soit π un idéal de $\mathcal{O}_p$. En général :

$$\underline{m} \cdot \Theta\left[J_k(\pi)\right] \subset \overline{J_k(\Theta[\pi])}.$$

Pour la démonstration, nous renvoyons au théorème de quasi-transversalité (J.Cl. TOUGERON [7], chapitre I). En fait, on y démontre le résultat avec l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[y_1,\dots,y_p]$ au lieu de $\mathcal{O}_p = \mathbb{R}\{\{y_1,\dots,y_p\}\}$, mais la démonstration se transpose sans difficultés.

Proposition 5.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. En général, $\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$.

Démonstration.

Le module $\mathcal{M}$ étant de présentation finie (car $\mathcal{O}_p$ est noethérien), le module $\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}$ est de présentation finie sur $\mathcal{E}$.

Nous procédons par récurrence sur la dimension p-k du module $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M} = (0)$, i.e. si $p-k = -1$, le résultat est trivial. Supposons $p-k \geq 0$ et admettons le résultat pour tout module de dimension strictement inférieure à p-k.

1 - Supposons d'abord que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_p/\pi$, où π est un idéal premier de hauteur k de $\mathcal{O}_p$. Considérons d'abord le cas $\pi = \underline{n}$ (i.e. $p-k = 0$). Visiblement, $J_p(\underline{n}) = \mathcal{O}_p$. D'après la proposition 4, en général : $\overline{J_p(\Theta\,[\underline{n}])} \supset \underline{m}$. Si $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ sont des représentants respectifs de $\Theta(y_1),\dots,\Theta(y_p)$ sur un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$, et si Ω est assez petit, $J_p(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ contient une puissance de l'idéal $\underline{m}_o$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions nulles à l'origine. D'après le corollaire de la proposition 5, chapitre II, l'idéal engendré dans $\mathcal{E}(\Omega)$ par les $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ est fermé et donc $\mathcal{O}_p/\underline{n}\otimes_{\Theta}\mathcal{E} = \mathcal{E}/(\Theta(y_1),\dots,\Theta(y_p))$ est un module de Fréchet.

Supposons $p-k > 0$, i.e. $\pi \subsetneqq \underline{n}$. Il existe une famille $\{\Phi_1,\dots,\Phi_s\}$ de générateurs de l'idéal π et $\Delta \in (\underline{n} - \pi) \cap J_k(\Phi_1,\dots,\Phi_k)$ tels que, pour

$j = k+1,\ldots,s$, $\Delta \,.\, \Phi_j$ appartienne à l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_p$ par $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ (résultat classique, cf. B. Malgrange [4], chapitre III, § 5).

a) D'après la proposition 4, en général : $\underline{m} \,.\, \Theta(\Delta) \in \overline{J_k(\Theta(\Phi_1),\ldots,\Theta(\Phi_k))}$ i.e. puisque $\Theta(\Delta) \in \underline{m}$:

$$\Theta(\Delta) \in \overline{J_k(\Theta(\Phi_1),\ldots,\Theta(\Phi_k))} \,.$$

b) Pour tout $j = k+1,\ldots,s$, $\Theta(\Delta) \,.\, \Theta(\Phi_j)$ appartient à l'idéal engendré dans $\mathcal{E}$ par $\Theta(\Phi_1),\ldots,\Theta(\Phi_k)$.

c) On a $ht(\pi + (\Delta)) > k$. D'après l'hypothèse de récurrence, en général $\mathcal{E} / \Theta[\pi + (\Delta)]$ est un module de Fréchet, i.e. $\Theta[\pi + (\Delta)]$ est un idéal fermé de $\mathcal{E}$.

d) Considérons la suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_p/\pi \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi+(\Delta) \longrightarrow (0)$$

(où Δ désigne la multiplication par Δ). On en déduit une suite exacte :

$$\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/\pi+(\Delta), \tilde{\mathfrak{F}}) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}/\pi.\tilde{\mathfrak{F}} \xrightarrow{\Delta} \tilde{\mathfrak{F}}/\pi.\tilde{\mathfrak{F}} \,.$$

En général (corollaire de la proposition 3) le noyau de l'application $\tilde{\mathfrak{F}}/\pi.\tilde{\mathfrak{F}} \xrightarrow{\Delta} \tilde{\mathfrak{F}}/\pi.\tilde{\mathfrak{F}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$, δ des représentants respectifs de $\Theta(\Phi_1),\ldots,\Theta(\Phi_s)$, $\Theta(\Delta)$, sur un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathfrak{J}$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$; $\mathfrak{J}'$ l'idéal engendré dans $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ et δ.

D'après a), b), c), d) et la proposition 5 du chapitre II : en général, $\mathfrak{J}$ est un idéal fermé de $\mathcal{E}(\Omega)$ (on choisit, bien entendu, pour chaque Θ , un voisinage Ω assez petit) ; donc $\Theta[\pi]$ est un idéal ~~fermé~~ de $\mathcal{E}$, i.e. $\mathcal{O}_p/\pi.\mathcal{O}_p \otimes_{\Theta} \mathcal{E} = \mathcal{E}/\Theta[\pi]$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$.

2 - Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$, de dimension p-k. De la suite exacte : $(0) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E} \longrightarrow (0)$, on déduit une suite exacte :

$$TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \xrightarrow{\iota} (\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}.$$

Le module $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}} (\ker \iota) < \infty$ (chapitre I, proposition 8). D'après le corollaire de la proposition 3, en général : $\dim_{\mathbb{R}}(TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}})) < \infty$. Si cette condition est satisfaite, d'après la suite exacte précédente, $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ sera un module de Fréchet si et seulement si $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

L'anneau $\mathcal{O}_p$ étant noethérien, il existe une suite croissante : $(0) = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \ldots\ldots \subset \mathcal{M}_s = \mathcal{M}$ de sous-modules de $\mathcal{M}$ et des idéaux premiers π_j de hauteur $\geq$ k, tels que $\forall j \in [1,s]$, $\mathcal{M}_j/\mathcal{M}_{j-1} \simeq \mathcal{O}_p/\pi_j$ (J.P. Serre [6], chapitre I, corollaire 4 de la proposition 7).

D'après la première partie de la démonstration et la remarque précédente, en général : $\forall j \in [1,s]$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/\pi_j , \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})) < \infty$. D'où en utilisant la suite exacte des Tor : en général, $\dim_{\mathbb{R}}(TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})) < \infty$, et, en conclusion : en général, $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet, c.q.f.d.

<u>Corollaire</u>.

<u>Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. En général, $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.</u>

Démonstration.

De la suite exacte : $(0) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E} \longrightarrow (0)$

on déduit une suite exacte :

$$\mathrm{TOR}_2^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) \longrightarrow$$

$$\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \xrightarrow{\iota} \mathcal{M} \otimes_{\Theta} \tilde{\mathcal{F}} \quad .$$

D'après le corollaire de la proposition 3, et la proposition 5, en général $\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet (i.e. $\ker \iota = (0)$). Donc en général : $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})) < \infty$; de même, en général : $\mathrm{TOR}_2^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie (car $\mathrm{TOR}_2^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) \simeq \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E})$, où $\mathcal{N}$ est le noyau d'un épimorphisme $\mathcal{O}_p^q \longrightarrow \mathcal{M}$). Le corollaire est alors immédiat.

Lemme 2.

Soient $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$ et $\Theta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_p, \mathcal{E})$. Si $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$ et si $\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les applications canoniques :

$$\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \xrightarrow{u} \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \xrightarrow{v} \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

sont des isomorphismes. En outre, $\mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) = (0)$.

Démonstration.

De la suite exacte : $(0) \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{O}_p^q \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0)$

on déduit, en tensorisant par $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_p$, une suite exacte :

$$(*) \quad (0) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \longrightarrow N \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^q \xrightarrow{\beta} \mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \longrightarrow (0)$$

Le module $\mathcal{H} = \mathrm{Im}\,\alpha = \ker\beta$ est de présentation finie (car $N \otimes_\Theta \mathcal{E}$ est de présentation finie et $\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E})$ est de type fini) et c'est un sous-module de $\mathcal{E}^q$: visiblement, $\mathcal{H}$ est un module de Fréchet. D'après la proposition 5 du chapitre I : $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}}(\mathcal{M}\otimes_\Theta \mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}}(\mathcal{H},\mathcal{F}) = (0)$. En tensorisant par $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$ la suite exacte (∗), on obtient donc une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{F} \longrightarrow N \otimes_\Theta \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^q \longrightarrow \mathcal{M}\otimes_\Theta \mathcal{F} \longrightarrow (0).$$

Donc $\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{F} \simeq \mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E})$ (on a ce dernier isomorphisme car $\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie). Ainsi, $v \circ u$ est un isomorphisme.

Il reste à montrer que u est surjective. Le module $\mathcal{H}$ étant de présentation finie, $\mathcal{M}\otimes_\Theta \mathcal{E}$ admet une 2-présentation finie. D'après la proposition 6 du chapitre I, $\mathrm{TOR}_1^{\mathcal{E}}(\mathcal{M}\otimes_\Theta \mathcal{E},\tilde{\mathcal{F}}) = (0)$. En tensorisant par $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{E}$ la suite exacte (∗), on obtient donc une suite exacte :

$$\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow N \otimes_\Theta \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}^q \longrightarrow \mathcal{M}\otimes_\Theta \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow (0).$$

Puisque $\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E}) \simeq \mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{F}}$, on en déduit que u est surjective.

Enfin, on a une suite exacte : $\mathrm{coker}\, u \longrightarrow \mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) \longrightarrow \ker \iota$; puisque $\ker\iota = \mathrm{coker}\, u = (0)$, $\mathrm{TOR}_1^\Theta(\mathcal{M},\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) = (0)$, c.q.f.d.

On déduit du lemme précédent, de la proposition 5 et de son corollaire, le

<u>Théorème 1.</u>

<u>Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. En général</u> :

1) $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$.

2) $\forall i \geq 1$, $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{E}) = (0)$.

3) $\forall i \geq 1$, $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et l'on a des isomorphismes canoniques :

$$TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) \simeq TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \simeq TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}).$$

Corollaire.

Soit π un idéal de $\mathcal{O}_p$. En général $\Theta[\pi]$ est un idéal fermé.

§ 4 - COMPLEMENTS.

Nous complétons le théorème 1 par un certain nombre de remarques.

A) Supposons $p \leq n$.

L'idéal maximal $\underline{n}$ de $\mathcal{O}_p$ étant engendré par la $\mathcal{O}_p$-suite $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_p)$, d'après la proposition 3.1) : en général, $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/\underline{n}, \mathcal{F}) = (0)$. Il en résulte, d'après un critère bien connu (N. Bourbaki, [1], chapitre III) que $\mathcal{F}$ est alors un module plat sur $\mathcal{O}_p$. On déduit de là et du théorème 1, le :

Théorème 2.

Supposons $p \leq n$.

1) En général, $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_p$-module plat, i.e. pour tout module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_p$ et tout $i \geq 1$, $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0)$.

2) Si $\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$, en général :

$$\forall i \geq 1 \qquad TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) = TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) = (0).$$

<u>Remarque 1</u>. Supposons $p = n$; posons $\mathcal{O}_p = \mathcal{O}$ et prenons pour Θ l'injection définie par $\Theta(y_i) = x_i$. D'après les théorèmes 1 et 2, si $\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}$, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet ; en outre l'anneau $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}$-module plat. On retrouve un théorème de B. Malgrange (cf. [4], chapitre VI,). De même $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ sont plats sur $\mathcal{O}$. Moyennant celle de $\mathcal{F}$, le lecteur vérifiera que la platitude de $\tilde{\mathcal{F}}$ équivaut au théorème de cohérence d'OKA (i.e. le faisceau structural d'une variété analytique est cohérent). Ce théorème est d'ailleurs un corollaire immédiat de la proposition 2 et du corollaire 2 du lemme 1.

<u>Remarque 2</u>. Nous donnerons ultérieurement des conditions suffisantes très larges pour qu'un morphisme $\Theta : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathcal{E}$ soit plat. Ces conditions étant vérifiées en général, on a donc le résultat plus précis : "si $p \leq n$, en général $\mathcal{E}$ est un module plat sur $\mathcal{O}_p$".

B) <u>Supposons $p \geq n$.</u>

Posons $\underline{y}_j = (y_1,\dots,y_j)$.

<u>Lemme 3.</u>

<u>Si $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/(\underline{y}_n), \mathcal{F}) = (0)$, on a pour tout module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_p$ et tout $i > p-n$, $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0)$.</u>

<u>Démonstration</u>.

L'hypothèse signifie que $\{\hat{\Theta}(y_1),\dots,\hat{\Theta}(y_n)\}$ est une $\mathcal{F}$-suite de $\mathcal{F}$. Les complexes de l'algèbre extérieure : $K^{\mathcal{O}_p}(y_1,\dots,y_n)$ et $K^{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}(y_1),\dots,\hat{\Theta}(y_n)) = K^{\mathcal{O}_p}(y_1,\dots,y_n) \otimes_{\Theta} \mathcal{F}$ sont des résolutions à gauche de $\mathcal{O}_p/(\underline{y}_n)$ et $\mathcal{O}_p/(\underline{y}_n) \otimes_\Theta \mathcal{F}$ respectivement (J.P. Serre, [6], chapitre IV). Il en résulte que $\forall i \geq 1$, $TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/(\underline{y}_n), \mathcal{F}) = (0)$.

En utilisant la suite exacte des TOR et les suites exactes (pour $j \geq n$) :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{O}_p/(\underline{y}_j) \xrightarrow{y_{j+1}} \mathcal{O}_p/(\underline{y}_j) \longrightarrow \mathcal{O}_p/(\underline{y}_{j+1}) \longrightarrow (0)$$

on vérifie que : $\forall i > p-n$ $\quad TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/\underline{n}, \mathcal{F}) = (0)$.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. Démontrons par récurrence sur $p-k = \dim(\mathcal{M})$ que $TOR_i^\Theta(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0)$ pour $i > p-n$. On peut supposer que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_p/\pi$, où π est un idéal premier de hauteur k. Le résultat est démontré lorsque $\pi = \underline{n}$, i.e. $k = p$. Si $k < p$, soit $\delta \in \underline{n} - \pi$ et considérons la suite exacte : $(0) \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_p/\pi \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi+(\delta) \longrightarrow (0)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\forall i > p-n$, $TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/\pi+(\delta), \mathcal{F}) = (0)$. Il résulte alors de la suite exacte précédente que : $TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/\pi, \mathcal{F}) = \delta . TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/\pi, \mathcal{F})$. Par le lemme de Nakayama, $TOR_i^\Theta(\mathcal{O}_p/\pi, \mathcal{F}) = (0)$, c.q.f.d.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. Supposons $\mathcal{M} \neq (0)$. La codimension homologique de $\mathcal{M}$ (notée $\mathrm{codh}(\mathcal{M})$) est la longueur d'une $\mathcal{M}$-suite maximale (J.P. Serre [6], chapitre IV). La dimension homologique de $\mathcal{M}$ (notée $\mathrm{dh}(\mathcal{M})$) est le plus petit entier $q \geq 0$ pour lequel il existe une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{O}_p^{n_q} \longrightarrow \mathcal{O}_p^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_p^{n_0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0)$$

L'anneau $\mathcal{O}_p$ étant régulier, on a l'égalité : $dh(\mathcal{M}) + codh(\mathcal{M}) = p$ (cf. J.P. Serre [6], chapitre IV, proposition 21).

<u>Théorème 3.</u>

<u>Supposons $p \geq n$.</u>

1) <u>En général, pour tout module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_p$ et tout $i > p-n$: $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0)$.</u>

2) <u>Si $\mathcal{M}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$, $\mathcal{M} \neq (0)$, en général : $\forall i > \sup(0, dh(\mathcal{M}) - n)$</u>

$$TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{E}) = TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{F}}) = TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0).$$

<u>Démonstration.</u>

1) résulte immédiatement du lemme 3 et de la proposition 3,1),

2) d'après le théorème 1, il suffit de montrer qu'en général,

$\forall i > \sup(0, dh(\mathcal{M}) - n)$, $TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0)$.

Nous procédons par récurrence descendante sur $q = dh(\mathcal{M})$. Si $q = p$, cela résulte de 1). Supposons donc $q < p$. On a $codh(\mathcal{M}) = p - q > 0$ et il existe donc $a \in \underline{n}$ tel que a ne soit pas diviseur de zéro dans $\mathcal{M}$. On a $dh(\mathcal{M}/a.\mathcal{M}) = q + 1$ et par hypothèse de récurrence, en général :

$$\forall i > \sup(0, q + 1 - n), \quad TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}/a.\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (0).$$

De la suite exacte : $(0) \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{a} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/a.\mathcal{M} \longrightarrow (0)$

on déduit une suite exacte, pour $i > \sup(0, q + 1 - n)$:

$$TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{a} TOR_i^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \longrightarrow (0) \longrightarrow TOR_{i-1}^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{a} TOR_{i-1}^{\Theta}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

Il en résulte d'abord, par le lemme de Nakayama, qu'en général :

$$\forall i > \sup(0,\ q+1-n)\ ,\quad \mathrm{TOR}_i^{\Theta}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = (0).$$

Si $q+1-n \leq 0$, le théorème est démontré. Sinon, $q+1-n \geq 1$, et l'on a une injection canonique :

$$\mathrm{TOR}_{q+1-n}^{\Theta}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{a} \mathrm{TOR}_{q+1-n}^{\Theta}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}).$$

Mais, en général (d'après le théorème 1) : $\mathrm{TOR}_{q+1-n}^{\Theta}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. L'application injective précédente est donc bijective, et, par application du lemme de Nakayama, en général $\mathrm{TOR}_{q+1-n}^{\Theta}(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}) = (0)$, c.q.f.d.

CHAPITRE IV

Dans ce chapitre, nous donnons quelques applications des théorèmes du chapitre III.

§ 1 - LES IDEAUX $\sigma_k(\mathcal{M})$.

Soit A un anneau commutatif et unitaire. Si $\mathcal{M}$ est un module de présentation finie sur A, on a une suite exacte :

$$(*) \qquad A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow (0).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$; si $q-p \leq k < q$, on désigne par $\sigma'_k(M)$ l'idéal engendré dans A par les mineurs d'ordre $q - k$ de M ; si $k < q - p$, on pose $\sigma'_k(M) = (0)$; si $k \geq q$, $\sigma'_k(M) = A$.

Lemme 1.

Soit $A^{p'} \xrightarrow{M'} A^{q'} \xrightarrow{\alpha'} \mathcal{M} \longrightarrow (0)$ une seconde présentation finie du module $\mathcal{M}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma'_k(M) = \sigma'_k(M')$.

Démonstration.

Soient $(e_1,\ldots,e_q)$ la base canonique de A^q ; $(e'_1,\ldots,e'_{q'})$ celle de $A^{q'}$. Posons $\alpha\,(e_i) = x_i$; $\alpha'(e'_j) = x'_j$. Il existe des $C_{ij} \in A$ tels que :

$$x'_j = \sum_{i=1}^{q} C_{ij}\, x_i.$$

Considérons la présentation finie :

$$A^{p''} \xrightarrow{M''} A^q \oplus A^{q'} \xrightarrow{\alpha''} \mathcal{M} \to (0)$$

où $\alpha''(e_i) = x_i$; $\alpha''(e'_j) = x'_j$. Il suffit de montrer que $\sigma'_k(M) = \sigma'_k(M'')$ (car on aura de façon analogue : $\sigma'_k(M') = \sigma'_k(M'')$). Soit $\mathcal{N}$ le sous-module de $\ker \alpha''$ engendré par les $\sum_{i=1}^{q} C_{ij}\, e_i - e'_j$, $j \in [1,q']$, et identifions A^q au sous-module $A^q \oplus 0$ de $A^q \oplus A^{q'}$. Il est immédiat que : $\ker \alpha'' = \ker \alpha' \oplus \mathcal{N}$, et l'on peut donc supposer que :

$$M'' = \begin{vmatrix} M & C \\ 0 & -I_{q'} \end{vmatrix}$$

où C est la matrice des C_{ij} et $I_{q'}$ est la matrice carrée unité de rang q'. On vérifie alors facilement que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sigma'_k(M) = \sigma'_k(M'')$, c.q.f.d.

L'idéal $\sigma_k(M)$ est donc indépendant de la présentation (*) du module $\mathcal{M}$ et sera noté $\sigma_k(\mathcal{M})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, désignons par $\sigma_k(\mathcal{M})$ l'idéal engendré dans A par tous les ξ tels que $\xi . \mathcal{M}$ soit contenu dans un sous-module de $\mathcal{M}$ engendré par k éléments. Si I est un idéal de A, on désigne par $\overline{I}$ sa racine.

Lemme 2.

On a $\sigma'_k(\mathcal{M}) \subset \sigma_k(\mathcal{M})$ et $\overline{\sigma'_k(\mathcal{M})} = \overline{\sigma_k(\mathcal{M})}$.

Démonstration.

Soit $A^p \xrightarrow{M} A^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M} \longrightarrow (0)$ une présentation du module $\mathcal{M}$. Si $k \geq q$, $\sigma'_k(\mathcal{M}) = A = \sigma_k(\mathcal{M})$ (car $\mathcal{M}$ est engendré par q éléments). Nous supposerons donc $k < q$.

Montrons d'abord que $\sigma'_k(\mathcal{M}) \subset \sigma_k(\mathcal{M})$. Si $k < q-p$, $\sigma'_k(\mathcal{M}) = (0)$ et l'inclusion est évidente. Si $q - p \leq k < q$, soit $\xi \in \sigma'_k(\mathcal{M})$ et supposons pour fixer les idées, que ξ est le déterminant de la matrice intersection des $q - k$ premières colonnes avec les $q - k$ premières lignes de M. Désignons par $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ et $(e_1,\dots,e_q)$ les bases canoniques de A^p et A^q respectivement. Le système $(M(\varepsilon_1),\dots,M(\varepsilon_{q-k}), e_{q-k+1},\dots,e_q)$ a un déterminant égal à ξ et donc, par la règle de Cramer, $\xi.A^q$ est contenu dans le sous-module engendré par ces éléments. Il en résulte que : $\xi.\mathcal{M} \subset (\alpha(e_{q-k+1}),\dots,\alpha(e_q))$, i.e. $\xi \in \sigma_k(\mathcal{M})$.

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer l'inclusion : $\overline{\sigma'_k(\mathcal{M})} \supset \sigma_k(\mathcal{M})$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier contenant $\sigma'_k(\mathcal{M})$ et désignons par $\underline{k}_{\mathfrak{p}}$ le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$. De la suite exacte :
$A^p_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{M} A^q_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{p}}} \mathcal{M}_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (0)$, on déduit l'inégalité :
$\dim_{\underline{k}_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \underline{k}_{\mathfrak{p}}) > k$. Si $\xi.\mathcal{M}$ est contenu dans un sous-module engendré par k éléments, nécessairement $\xi \in \mathfrak{p}$, car sinon $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ serait engendré par k éléments et donc on aurait : $\dim_{\underline{k}_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{M}_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \underline{k}_{\mathfrak{p}}) \leq k$. Ainsi $\mathfrak{p} \supset \sigma_k(\mathcal{M})$ et $\overline{\sigma'_k(\mathcal{M})} \supset \sigma_k(\mathcal{M})$, c.q.f.d.

Remarque 1. Pour tout entier $k \geq 0$, on a des inclusions :

$$\sigma'_k(\mathcal{M}) \subset \sigma'_{k+1}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \sigma_k(\mathcal{M}) \subset \sigma_{k+1}(\mathcal{M}).$$

L'annulateur $\mathrm{Ann}(\mathcal{M})$ du module $\mathcal{M}$ est égal à $\sigma_o(\mathcal{M})$. D'après le lemme 2 : $\sigma'_o(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Ann}(\mathcal{M})$ et $\overline{\sigma'_o(\mathcal{M})} = \overline{\mathrm{Ann}(\mathcal{M})}$.

Remarque 2. Supposons que A est un anneau intègre et soit K son corps des fractions. Le rang de $\mathcal{M}$ est par définition l'entier $\mathrm{rg}(\mathcal{M}) = \dim_K(\mathcal{M} \otimes_A K)$.

Si $h = rg(\mathcal{M})$, on sait qu'il existe un sous-module L de $\mathcal{M}$, isomorphe à A^h et tel que $\mathcal{M}/L$ soit un module de torsion (i.e. il existe $\xi \in A - (0)$ tel que $\xi.\mathcal{M} \subset L$). Visiblement : $\xi \in \sigma_h(\mathcal{M})$ et donc $\sigma_h(\mathcal{M}) \neq (0)$.

Supposons $h > 0$. Si $\sigma_{h-1}(\mathcal{M}) \neq (0)$, il existe $\eta \neq 0$ tel que $\eta.L$ soit un sous-module libre de rang h d'un module engendré par $h-1$ éléments. Ceci est absurde et donc $\sigma_{h-1}(\mathcal{M}) = (0)$. Ainsi :

Le rang de $\mathcal{M}$ est le plus petit entier $h \geq 0$ tel que $\sigma_h(\mathcal{M}) \neq (0)$.

Remarque 3. Supposons que A est un anneau noethérien intègre. Si $h = rg(\mathcal{M})$, posons $H_o(\mathcal{M}) = \overline{\sigma_h(\mathcal{M})}$: $H_o(\mathcal{M})$ est l'intersection des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $dh(\mathcal{M}_\mathfrak{p}) > 0$ (en effet, un idéal premier $\mathfrak{p}$ ne contient pas $\sigma_h(\mathcal{M})$ si et seulement si $\mathcal{M}_\mathfrak{p}$ est engendré par h éléments ; i.e. si et seulement si $\mathcal{M}_\mathfrak{p}$ est un A -module libre).

Si q est un entier ≥ 1, considérons une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow A^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A^{n_o} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0).$$

Posons $k = rg(\mathcal{N})$: l'idéal $\overline{\sigma_k(\mathcal{N})}$ est indépendant de la suite exacte précédente ($\mathcal{M}$ et q sont fixés) et sera noté $H_q(\mathcal{M})$. En effet, un idéal premier $\mathfrak{p}$ ne contient pas $\sigma_k(\mathcal{N})$ si et seulement si $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ est engendré par k éléments, i.e. si et seulement si $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ est libre. On a une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{N}_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p}^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow A_\mathfrak{p}^{n_o} \longrightarrow \mathcal{M}_\mathfrak{p} \longrightarrow (0).$$

Le module $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ est donc libre, si et seulement si : $dh(\mathcal{M}_\mathfrak{p}) \leq q$ (J.P. Serre [6], chapitre IV, proposition 17). Ainsi $H_q(\mathcal{M}) = \overline{\sigma_k(\mathcal{N})}$ est l'intersection des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $dh(\mathcal{M}_\mathfrak{p}) > q$.

§ 2 - UN CRITERE DE REDUCTION ET UN CRITERE DE NORMALITE.

Dans ce paragraphe, on suppose que $A = \mathbb{R}\{\{x_1,\dots,x_n\}\}$ ou $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n]]$. Si I est un idéal propre de A engendré par des éléments $\varphi_1,\dots,\varphi_s$, on note $J_k(I)$ l'idéal engendré dans A par I et tous les jacobiens $\dfrac{D(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_k})}{D(x_{j_1},\dots,x_{j_k})}$.

L'anneau A/I est _réduit_ si $I = \bar{I}$; _équidimensionnel_ si $\bar{I}$ est une intersection d'idéaux premiers ayant tous la même hauteur.

On pose $\mathcal{R}_k(I) = \overline{\sigma_k(I)} \cap \overline{J_k(I)}$. Le lemme suivant est une version du critère jacobien des points simples (M. Nagata, [5], chapitre VII) :

Lemme 3.

Soient I un idéal propre de A et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant I. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}$ est régulier de dimension $ht(\mathfrak{p}) - k$ si et seulement si $\mathcal{R}_k(I) \not\subset \mathfrak{p}$.

Lemme 4.

Soit I un idéal propre de A tel que A/I soit réduit et équidimensionnel de dimension n - k. Alors : $\overline{J_k(I)} \subset \overline{\sigma_k(I)}$ et

$$ht(\mathcal{R}_k(I)) > k = ht(I).$$

(pour la démonstration, nous renvoyons à [7], chapitre I, § 1, 4).

Lemme 5.

L'anneau A/I est réduit et équidimensionnel de dimension n - k si et seulement s'il existe un élément δ appartenant à $\mathcal{R}_k(I)$ et qui ne soit pas diviseur de zéro dans A/I.

Démonstration.

La condition est nécessaire. En effet, d'après le lemme 4, l'idéal $\mathfrak{A}_k(I)$ n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ contenant I. Soit $\delta_i \in (A - \mathfrak{p}_i) \cap \mathfrak{R}_k(I)$. On peut supposer que, pour tout $i \neq j$, $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ et donc que $\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{p}_i$. Soit $\delta'_i \in (A - \mathfrak{p}_i) \cap (\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{p}_j)$. Visiblement :

$$\delta = \sum_{i=1}^{s} \delta_i\, \delta'_i \in \mathfrak{R}_k(I) \cap (\bigcap_{i=1}^{s} A - \mathfrak{p}_i).$$

Ainsi δ n'est pas diviseur de zéro dans A/I.

La condition est suffisante. Montrons d'abord que $I = \overline{I}$. Soit $\xi \in \overline{I}$ et posons $M = (I + \xi.A)/I$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier qui ne contient pas δ, ou $I \not\subset \mathfrak{p}$ et visiblement $M_{\mathfrak{p}} = (0)$; ou $I \subset \mathfrak{p}$: dans ce cas l'anneau $A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}$ est régulier (lemme 3) et donc $I.A_{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$. Ainsi : $\xi \in \overline{I.A_{\mathfrak{p}}} = I.A_{\mathfrak{p}}$ et l'on a encore $M_{\mathfrak{p}} = (0)$. Il en résulte que $M_{\delta} = (0)$, i.e. il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\delta^q.\xi \in I$. Puisque δ n'est pas diviseur de zéro dans A/I, $\xi \in I$. Ainsi $I = \overline{I}$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal associé à I. Par hypothèse, δ n'est pas diviseur de zéro dans A/I et donc $\delta \notin \mathfrak{p}$. On a $I = \overline{I} = \mathfrak{p} \cap I'$, où I' est un idéal de A tel que $I' \not\subset \mathfrak{p}$. Ainsi $I.A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{R}_k(I) \not\subset \mathfrak{p}$. D'après le lemme 3, $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}$ est régulier de dimension $ht(\mathfrak{p}) - k$; ainsi $ht(\mathfrak{p}) = k$, c.q.f.d.

Soit I un idéal propre de A tel que A/I soit équidimensionnel de dimension $n - k > 0$. Nous allons traduire dans notre langage le critère de normalité suivant (J.P. Serre [6], chapitre IV, théorème 11) :

L'anneau $B = A/I$ est normal si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{p} \supset I$ et $ht(\mathfrak{p}) \leq k+1$, l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}$ est régulier,

2) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{p} \supset I$ et $ht(\mathfrak{p}) \geq k+2$, on a codh $(A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}) \geq 2$.

D'après le lemme 3, la condition 1) signifie simplement que : $ht(\mathcal{R}_k(I)) \geq k+2$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur $i \geq k+2$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier de dimension i, et donc : codh $(A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}}) = i - dh(A_{\mathfrak{p}}/I.A_{\mathfrak{p}})$ (J.P. Serre, [6], chapitre IV, proposition 21). La condition 2) signifie donc que $dh(A/I)_{\mathfrak{p}} \leq i-2$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur $i \geq k+2$, i.e. (d'après la remarque 3 du paragraphe 1), pour $i = k+2,\dots,n$; $ht(H_{i-2}(A/I)) \geq i+1$.

Si $k = n-1$, seule la condition 1) intervient et dans ce cas A/I est régulier de dimension 1. Nous avons donc démontré le :

Lemme 6.

Soit I un idéal propre de A tel que A/I soit équidimensionnel de dimension $n-k > 0$. L'anneau A/I est normal si et seulement si $ht(\mathcal{R}_k(I)) \geq k+2$, et pour $i = k+2,\dots,n$: $ht(H_{i-2}(A/I)) \geq i+1$.

§ 3 - TRANSFERT PAR Θ DES PROPRIETES DE REDUCTION OU DE NORMALITE SUR π.

Nous revenons aux notations du chapitre III. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini de $\mathcal{E}$, on désigne par $\tilde{\mathfrak{J}}$ un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, choisi une fois pour toutes et induisant l'idéal $\mathfrak{J}$ à l'origine ; par $V(\tilde{\mathfrak{J}})$ l'ensemble des zéros de $\tilde{\mathfrak{J}}$.

Théorème 1.

Soit π un idéal propre de $\mathcal{O}_p$ tel que $\mathcal{O}_p/\pi$ soit réduit et équidimensionnel de dimension p-k et tel que $dh(\mathcal{O}_p/\pi) < n$. En général, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]})$ et assez voisin de 0, l'anneau $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est réduit et équidimensionnel de dimension n-k. En général, l'anneau $\mathcal{E}/\Theta[\pi]$ est réduit (i.e. sans nilpotents).

Démonstration.

La dernière assertion est une conséquence immédiate de la première et du corollaire du théorème 1, chapitre III.

Supposons d'abord $\pi \neq \underline{n}$. D'après le lemme 5, il existe Δ appartenant à $\underline{n} \cap \mathcal{R}_k(\pi)$ tel que la suite :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_p/\pi \longrightarrow \mathcal{O}_p/\pi+(\Delta) \longrightarrow (0)$$

soit exacte. On a $dh(\mathcal{O}_p/\pi + (\Delta)) \leq n$. D'après les théorèmes II et III du chapitre III : en général, $TOR_1^{\Theta}(\mathcal{O}_p/\pi + (\Delta), \tilde{\mathcal{F}}) = (0)$,

i.e. (1) $\Theta(\Delta)$ n'est pas diviseur de zéro dans $\tilde{\mathcal{F}}/\Theta(\pi).\tilde{\mathcal{F}}$.

D'après le théorème de quasi-transversalité (chapitre III, proposition 4) : en général $\underline{m}.\Theta(\Delta) \subset \overline{J_k(\Theta[\pi])}$, i.e. $\Theta(\Delta) \in \overline{J_k(\Theta[\pi])}$; visiblement : $\Theta(\Delta) \in \overline{\sigma_k(\Theta[\pi])}$. Ainsi, en général :

(2) $\Theta(\Delta) \in \mathcal{R}_k(\Theta[\pi])$.

Soit δ un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ induisant le germe $\Theta(\Delta)$ à l'origine. Si les conditions (1) et (2) sont satisfaites, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]})$ et assez voisin de 0 :

(1) $T_x(\delta)$ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$.

(2) $T_x(\delta) \in \mathfrak{R}_k(T_x(\widetilde{\Theta[\pi]}))$.

Le théorème résulte alors du lemme 5.

Supposons $\pi = \underline{n}$. On a $dh(\mathcal{O}_p/\underline{n}) = p$, donc $p < n$. Puisque $J_p(\underline{n}) = \mathcal{O}_p$, d'après la proposition 4 du chapitre III : en général, $\overline{J_p(\Theta[\underline{n}])} \supset \underline{m}$. Supposons cette condition satisfaite. Pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]}) - \{0\}$, assez voisin de 0, l'anneau $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est régulier de dimension $n-p$ (donc à fortiori réduit et équidimensionnel). L'idéal $\Theta[\pi] = (\hat{\Theta}(y_1),\dots,\hat{\Theta}(y_p))$ est une intersection complète de hauteur p et donc tous les idéaux premiers associés à cet idéal sont de hauteur p. Puisque $p < n$, il existe $\delta \in \mathfrak{R}_p(\hat{\Theta}[\pi])$ (en effet, cet idéal contient l'idéal maximal de $\mathcal{F}$) tel que δ ne soit pas diviseur de zéro dans $\mathcal{F}/\hat{\Theta}[\pi]$. D'après le lemme 5, $\mathcal{F}/\hat{\Theta}[\pi]$ est réduit et équidimensionnel de dimension $n-p$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque 1. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la dimension homologique de $\mathcal{O}_p/\pi$, on a toutefois le résultat suivant (démonstration identique à la précédente) : en général, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]}) - \{0\}$ et assez voisin de 0, l'anneau $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est réduit et équidimensionnel de dimension $n-k$.

Remarque 2. L'hypothèse du théorème 1 implique $k < n$. En effet, on a : $\dim(\mathcal{O}_p/\pi) = p-k \geq \mathrm{codh}\,(\mathcal{O}_p/\pi) > p-n$ (cf. [6], chapitre IV).

Si M est un module de présentation finie sur $\mathcal{E}$, on désigne par $\tilde{M}$ un représentant (fixé une fois pour toutes) de M sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\tilde{M}$ est un module de présentation finie sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\tilde{M} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E} \simeq M$).

Proposition 1.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$. En général, pour tout x assez voisin de l'origine :

1) $ht(\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}_x)) \geq \inf(n, ht(\sigma'_k(\mathcal{M})))$

2) $rg(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}_x) = rg(\mathcal{M})$.

Démonstration.

Il est évident que

(a) $\sigma'_k(\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}) = \Theta\,[\sigma'_k(\mathcal{M})]$;

(b) $T_o(\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}})) = \hat{\Theta}\,[\sigma'_k(\mathcal{M})]$ et pour tout x assez voisin de l'origine :

(c) $\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x) = T_x(\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}}))$. L'inégalité 1) résulte de (b) et (c) et des propositions 1 et 2 du chapitre III.

D'après (a) et (c), si $\sigma'_k(\mathcal{M}) = (0)$, pour tout x assez voisin de l'origine :

$\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}}\otimes \mathcal{F}_x) = (0)$; d'après 1), si $\sigma'_k(\mathcal{M}) \neq (0)$, en général, pour tout x assez voisin de l'origine, $\sigma'_k(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x) \neq (0)$. L'égalité 2) résulte de là et de la définition du rang d'un module (remarque 2, § 1).

Proposition 2.

Soit $\mathcal{M}$ un module de type fini sur $\mathcal{O}_p$, tel que $dh(\mathcal{M}) \leq n$.

En général, pour tout x assez voisin de l'origine :

1) $ht(H_q(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}_x)) \geq \inf(n, ht(H_q(\mathcal{M})))$

2) $dh(\widetilde{\mathcal{M}\otimes_{\Theta}\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{F}_x) \leq dh(\mathcal{M})$.

Démonstration.

Considérons une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_p^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_p^{n_0} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow (0).$$

D'après les théorèmes du chapitre III, en tensorisant par $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{O}_p$ la suite exacte précédente, on obtient en général une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathcal{E}^{n_0} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E} \longrightarrow (0)$$

et $\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}$.

La suite exacte précédente est induite par une suite exacte de modules sur $\mathcal{E}(\Omega)$ (Ω est un voisinage assez petit de l'origine de $\mathbb{R}^n$) :

$$(0) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega)^{n_0} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow (0)$$

et l'on peut supposer que $\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}(\Omega)$ est un module de Fréchet sur $\mathcal{E}(\Omega)$.

D'après la proposition 2 du chapitre I, la suite :

$$(0) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x^{n_{q-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_x^{n_0} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x \longrightarrow (0)$$

est exacte, pour tout $x \in \Omega$. 1) résulte immédiatement de la suite exacte précédente, de la proposition 1 (appliquée à $\mathcal{N}$ au lieu de $\mathcal{M}$) et de la remarque 3 du paragraphe 1.

Si $q = dh(\mathcal{M})$, le module $\mathcal{N}$ est libre et pour tout x assez voisin de l'origine, $\widetilde{\mathcal{N} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x$ est un module libre sur $\mathcal{F}_x$. La dernière suite exacte montre alors qu'en général : $dh(\widetilde{\mathcal{M} \otimes_{\Theta} \mathcal{E}} \otimes \mathcal{F}_x) \leq q$. Ceci démontre 2).

Théorème 2.

Soit π un idéal propre de $\mathcal{O}_p$ tel que $\mathcal{O}_p/\pi$ soit normal de dimension $p-k$ et tel que $dh(\mathcal{O}_p/\pi) < n-1$. En général, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]})$ et assez voisin de 0, l'anneau $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est normal de dimension $n-k$.

Démonstration.

Nous vérifions le critère de normalité (lemme 6). Remarquons d'abord que : $k = ht(\pi) \leq dh(\mathcal{O}_p/\pi) < n-1$ (cf. [6], chapitre IV). En général, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]})$ et assez voisin de 0 :

1) D'après le théorème 1, $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est réduit et équidimensionnel de dimension $n-k$.

2) D'après les propositions 1, 2 et 4 du chapitre III (la vérification est facile et laissée au lecteur) :

$$ht(\mathcal{R}_k(T_x(\widetilde{\Theta[\pi]}))) \geq \inf(n, ht(\mathcal{R}_k(\pi))) \geq \inf(n, k+2) = k+2.$$

(la dernière inégalité résulte du lemme 6).

3) D'après la proposition 2,2) : $dh(\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})) \leq dh(\mathcal{O}_p/\pi) \leq n-2$. Donc $H_{n-2}(\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})) = \mathcal{F}_x$ (cf. remarque 3, § 1).

4) D'après la proposition 2,1), pour $i = k+2,\ldots,n-1$:

$$ht(H_{i-2}(\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]}))) \geq \inf(n, ht(H_{i-2}(\mathcal{O}_p/\pi))) \geq \inf(n, i+1) = i+1$$

(la dernière inégalité résulte du lemme 6).

D'après 1), 2), 3), 4), le critère de normalité est vérifié, c.q.f.d.

Remarque. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la dimension homologique de $\mathcal{O}_p/\pi$, on a le résultat suivant (démonstration identique à la précédente) : en général, pour tout x appartenant à $V(\widetilde{\Theta[\pi]}) - \{0\}$ et assez voisin de 0, l'anneau $\mathcal{F}_x/T_x(\widetilde{\Theta[\pi]})$ est normal de dimension n-k.

§ 4 - MULTIPLICITES LOCALES DE L'IMAGE RECIPROQUE D'UN ESPACE ANALYTIQUE PAR UNE APPLICATION C^∞.

Si A est un anneau local noethérien d'idéal maximal $\underline{n}$ et de dimension q, on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $F_A(k) = \dim_{A/\underline{n}} (\bigoplus_{i=0}^{k} \underline{n}^i/\underline{n}^{i+1})$.

On sait qu'il existe (cf. [6], chapitre II) un polynôme $\overline{F}_A$ tel que :

$$\overline{F}_A(k) = a_0 \binom{k+q}{q} + a_1 \binom{k+q-1}{q-1} + \dots + a_q$$

où les a_i sont des entiers rationnels et pour tout k assez grand : $F_A(k) = \overline{F}_A(k)$. La multiplicité de l'anneau local A est égale à a_0.

Supposons en particulier que $A = \mathcal{O}_p/I$ (I désigne donc un idéal de hauteur p-q). Soit π un idéal contenant I, tel que $\mathcal{O}_p/\pi$ soit régulier de dimension r et tel que $\bigoplus_{i \geq 0} \pi^i.A/\pi^{i+1}.A$ soit un module libre sur $\mathcal{O}_p/\pi$.

Lemme 7.

Avec les hypothèses précédentes, soit θ^* un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathcal{O}_p$ dans $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathrm{TOR}_1^{\theta^*}(\mathcal{O}_p/\pi, \mathcal{F}) = (0)$ et que $\mathcal{F}/\theta^*(\pi).\mathcal{F}$ est un anneau local régulier de dimension r+n-p. Si $A_\theta = \mathcal{F}/\theta^*(I).\mathcal{F}$:

si $n \geq p$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad F_{A_\theta}(k) = \sum_{i+j=k} F_A(i) \binom{j+n-p-1}{n-p-1}$

si $n \leq p$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad F_A(k) = \sum_{i+j=k} F_{A_\theta}(i) \binom{j+p-n-1}{p-n-1}$

Démonstration.

Montrons d'abord par récurrence sur $i > 0$ que :

$\mathrm{TOR}_1^{\Theta^*}(A/\pi^i.A, \mathfrak{F}) = (0)$. En effet, ceci est évident si $i = 1$ (car $A/\pi.A = \mathfrak{a}_p/\pi$) ; si $i > 1$, on a une suite exacte

$$(0) \longrightarrow \pi^{i-1}.A/\pi^i.A \longrightarrow A/\pi^i.A \longrightarrow A/\pi^{i-1}.A \longrightarrow (0) \text{ et}$$

$\mathrm{TOR}_1^{\Theta^*}(\pi^{i-1}.A/\pi^i.A, \mathfrak{F}) = \mathrm{TOR}_1^{\Theta^*}(A/\pi^{i-1}.A, \mathfrak{F}) = (0)$, d'après l'hypothèse et l'hypothèse de récurrence. En tensorisant par $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{a}_p$ la suite exacte précédente, on voit que : $(\pi^{i-1}.A/\pi^i.A) \otimes_{\Theta^*} \mathfrak{F} \simeq \Theta^*(\pi)^{i-1}.A_\Theta/\Theta^*(\pi)^i.A_\Theta$: ce dernier module est donc libre sur $\mathfrak{F}/\Theta^*(\pi).\mathfrak{F}$. En outre :

$$\lambda_i = \mathrm{rg}_{\mathfrak{F}/\Theta^*(\pi).\mathfrak{F}}\left(\bigoplus_{j=0}^{i} \Theta^*(\pi)^j.A_\Theta/\Theta^*(\pi)^{j+1}.A_\Theta\right) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{a}_p/\pi}\left(\bigoplus_{j=0}^{i} \pi^j.A/\pi^{j+1}.A\right).$$

On a les formules (cf. [3], corollaire 2 proposition 1, chapitre II) :

$$F_A(k) = \sum_{i+j=k} \lambda_i \binom{j+r-1}{r-1}$$

$$F_{A_\Theta}(k) = \sum_{i+j=k} \lambda_i \binom{j+r+n-p-1}{r+n-p-1}$$

Supposons $n \geq p$. On a :

$$F_{A_\Theta}(k) = \sum_{i+j=k} \lambda_i \sum_{j'+j''=j} \binom{j'+r-1}{r-1}\binom{j''+n-p-1}{n-p-1}$$

d'où la première égalité. La seconde s'en déduit en permutant les rôles de p et n.

Corollaire.

Avec les hypothèses du lemme 7, les anneaux A et A_Θ ont la même multiplicité.

Démonstration.

Supposons par exemple $n \geq p$. Soit G le polynôme tel que, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$G(k) = \overline{F}_{A_\Theta}(k) - \sum_{i+j=k} \overline{F}_A(i) \quad \binom{j+n-p-1}{n-p-1}.$$

On vérifie, en utilisant le lemme 7, que G est un polynôme de degré $\leq n-p-1$, nul si $n = p$. On a d'autre part :

$$\overline{F}_{A_\Theta}(k) - G(k) = \sum_{i+j=k} \sum_{\ell=0}^{q} a_{q-\ell} \binom{i+\ell}{\ell} \binom{j+n-p-1}{n-p-1} =$$

$$\sum_{\ell=0}^{q} a_{q-\ell} \binom{k+\ell+n-p}{\ell+n-p} .$$

Ceci montre que la multiplicité de A_Θ est a_0, c.q.f.d.

A tout Θ appartenant à $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_p, \mathcal{E})$, on associe, une fois pour toutes, une application C^∞ $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $\theta(0) = 0$ et telle que le germe $\underset{\sim}{\theta}$ de θ à l'origine induise Θ (i.e. $\Theta = \underset{\sim}{\theta}^*$).

Soit π un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un voisinage Ω_p de l'origine de $\mathbb{R}^p$ et soit $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles sur Ω_p. D'après le théorème 1 du chapitre III :

(A) En général, il existe un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\theta(\Omega) \subset \Omega_p$ et $\forall x \in \Omega - \{0\}$, $\mathrm{TOR}_1^{\theta^*}(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_{\theta(x)}/\pi_{\theta(x)}) = (0)$.

D'après le théorème de quasi-transversalité :

(B) En général, il existe un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\theta(\Omega) \subset \Omega_p$ et $\forall x \in \Omega - \{0\}$, tel que $\mathcal{O}_{\theta(x)}/\pi_{\theta(x)}$ soit un anneau local régulier de dimension r, l'anneau $\mathcal{F}_x/\theta^*(\pi_{\theta(x)}).\mathcal{F}_x$ est régulier de dimension $r+n-p$.

Lemme 8.

Soient $\mathcal{Y}$, π, deux faisceaux d'idéaux, analytiques cohérents sur un voisinage U de l'origine de $\mathbb{R}^p$. Supposons que $\mathcal{Y} \subset \pi$ et que $\mathcal{O}_0/\pi_0$ est réduit de dimension ≥ 0. Posons $\mathcal{A} = \mathcal{O}/\mathcal{Y}$. Il existe un voisinage $U' \subset U$ de l'origine et un faisceau d'idéaux π', analytique cohérent sur U', tels que : $\pi|U' \subset \pi'$; $\mathcal{O}_0/\pi'_0$ est réduit et $\dim(\mathcal{O}_0/\pi_0) > \dim(\mathcal{O}_0/\pi'_0)$; enfin, $\forall y \in V(\pi|U') - V(\pi')$, $\mathcal{O}_y/\pi_y$ est régulier et $\bigoplus_{i \geq 0} \pi_y^i . \mathcal{A}_y/\pi_y^{i+1} . \mathcal{A}_y$ est un module libre sur $\mathcal{O}_y/\pi_y$.

Pour une démonstration, nous renvoyons à J. Frisch [2], § 2 : Platitude générique.

Théorème 3.

Soit $\mathcal{Y}$ un faisceau d'idéaux, analytique cohérent sur un voisinage Ω_p de l'origine de $\mathbb{R}^p$. Posons $\mathcal{A} = \mathcal{O}/\mathcal{Y}$. Si Θ est une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\Theta(0) = 0$ et si $x \in \Theta^{-1}(\Omega_p)$, on pose $\mathcal{A}_{\Theta,x} = \mathcal{F}_x/\Theta^*_x(\mathcal{Y}_{\Theta(x)}).\mathcal{F}_x$.

En général, il existe un voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Theta(\Omega) \subset \Omega_p$ et, $\forall x \in (\Omega - \{0\}) \cap \Theta^{-1}(\mathrm{supp}(\mathcal{A}))$:

si $n \geq p$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad F_{\mathcal{A}_{\Theta,x}}(k) = \sum_{i+j=k} F_{\mathcal{A}_{\Theta(x)}}(i) \binom{j+n-p-1}{n-p-1}$

si $p \leq n$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad F_{\mathcal{A}_{\Theta(x)}}(k) = \sum_{i+j=k} F_{\mathcal{A}_{\Theta,x}}(i) \binom{j+p-n-1}{n-p-1}$

et, en outre, les anneaux $\mathcal{A}_{\Theta(x)}$ et $\mathcal{A}_{\Theta,x}$ ont la même multiplicité.

<u>Démonstration.</u>

Construisons, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, un voisinage $\Omega_p^{(i)}$ de l'origine de $\mathbb{R}^p$ et un faisceau d'idéaux $\pi^{(i)}$, analytique cohérent sur $\Omega_p^{(i)}$:

- on pose $\Omega_p^{(0)} = \Omega_p$ et $\pi^{(0)} = \sqrt{\mathcal{J}}$ (i.e., si $x \in \Omega_p$, $\pi_x^{(0)}$ est la racine de $\mathcal{J}_x$).

- si $i > 0$, le lemme 8 associe à l'ouvert $U = \Omega_p^{(i-1)}$; au faisceau $\mathcal{J} = \mathcal{J} \mid \Omega_p^{(i-1)}$; à $\pi = \pi^{(i-1)}$, un voisinage U' et un faisceau d'idéaux π' sur U'. On pose : $\Omega_p^{(i)} = U'$; $\pi^{(i)} = \pi'$.

Si $\pi_o^{(i-1)} \neq \mathcal{O}_o$, on a : $\dim(\mathcal{O}_o/\pi_o^{(i)}) < \dim(\mathcal{O}_o/\pi_o^{(i-1)})$. Il existe donc un entier s tel que, en diminuant $\Omega_p^{(s)}$ si nécessaire : $V(\pi^{(s)}) = \emptyset$.

Le théorème résulte immédiatement des remarques (A) et (B) appliquées successivement aux faisceaux d'idéaux $\pi = \pi^{(0)}$,....., $\pi^{(s-1)}$; du lemme 8 ; du lemme 7 et de son corollaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI — Algèbre commutative, chapitres I, II, III, IV.

[2] J. FRISCH — Points de non-platitude d'un morphisme d'espaces analytiques.

[3] H. HIRONAKA — Resolution of singularities, chapitre II, Annals of Mathematics, vol. 79.

[4] B. MALGRANGE — Ideals of differentiable functions. OXFORD UNI-PRESS 1966.

[5] M. NAGATA — Local Rings. Interscience tracts in pure and applied mathematics.

[6] J.P. SERRE — Algèbre locale. Multiplicités. Lecture notes in mathematics - 11 - 1965.

[7] J.Cl. TOUGERON — Idéaux de fonctions différentiables, I. Annales de l'Institut Fourier, 1968, tome XVIII.

[8] J.Cl. TOUGERON — Faisceaux différentiables quasi-flasques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260.