J. F. Nourrigat

Un théorème de trace (par transformation de Fourier)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. nº 8, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A8_0>

UN THEOREME DE TRACE (par Transformation de Fourier)

par

J.F. NOURRIGAT

Soit X et Y deux espaces de Hilbert tels que $X \subset Y$, l'inclusion étant continue et X dense dans Y.

On se propose de démontrer que si l'on a :

$$(1) \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}^+, X) \\ u^{(m)} \in \sum_{k=o}^{m-1} H^{-k}\left(\mathbb{R}^+, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right) \end{cases}$$

alors u a une trace dans $[X,Y]_{\frac{1}{2m}}$.

Ce résultat est une généralisation des théorèmes de trace de [1] ; il sert pour l'étude des traces de distributions de domaines d'opérateurs différentiels maximaux, dans le cas Hilbertien (cf. [2] où sont donnés un exemple d'application et une méthode de démonstration apparemment plus compliquée, mais valable dans "un cadre non hilbertien").

On désigne par $W(\mathbb{R}^+)$ l'espace des distributions à valeurs dans Y telles que les relations (1) soient vérifiées, muni de la norme :

$$\|u\|_{W(\mathbb{R}^+)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+,X)} + \inf_{u^{(m)} = \sum_{k=o}^{m-1} f_k} \left(\sum_{k=o}^{m-1} \|f_k\|_{H^{-k}\left(\mathbb{R}^+, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)} \right).$$

On définit de même $W(\mathbb{R})$.

Proposition 1.

$\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$ est dense dans W.

Soit T une forme linéaire continue sur W telle que T(u) = 0 pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$. T peut s'écrire :

$$T(u) = \langle f, u \rangle_{L^2(X') \times L^2(X)} + \langle g, u^{(m)} \rangle_{F'_m \times F_m} \text{, avec}$$

$$F_m = \sum_{k=0}^{m-1} H^{-k}\left(\mathbb{R}^+, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$$

$$F'_m = \bigcap_{k=0}^{m-1} H^{k}\left(\mathbb{R}^+, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$$

En prenant $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, X)$ on voit que :

$$(-1)^m g^{(m)} + f = 0.$$

Par conséquent : $\begin{cases} g \in L^2(Y') \\ g^{(k)} \in L^2\left([X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right) \text{ pour } 1 \leq k \leq m-1 \\ g^{(m)} \in L^2(X'). \end{cases}$

En prenant u dans $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$ on voit que les traces de g jusqu'à l'ordre m-1 sont nulles. Il existe donc une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, Y)$ telle que

$$\varphi_n \to g \text{ dans } L^2(Y')$$

$$\varphi_n^{(k)} \to g^{(k)} \text{ dans } L^2\left([X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$$

$$\varphi_n^{(m)} \to g^{(m)} \text{ dans } L^2(X')$$

D'où $\varphi_n \to g$ dans F_m et $\varphi_n^{(m)} \to (-1)^m f$ dans $L^2(X')$.

Pour tout $u \in W$, on a

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} < (-1)^m \varphi_n^{(m)}, u >_{L^2(X')\times L^2(X)} + < \varphi_n , u^{(m)} >_{F'_m \times F_m}$$

$$= 0$$

Théorème 1.

L'application $u \longmapsto u(o)$, définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$, se prolonge par densité en une application linéaire continue de $W(\mathbb{R}^+)$ dans $[X,Y]_{\frac{1}{2m}}$.

Pour démontrer ce théorème, on a d'abord besoin du résultat :

Lemme 1.

Il existe un opérateur linéaire continu P de $W(R^+)$ dans $W(R)$ tel que $Pu|_{R^+} = u$.

Définissons Pu pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+, X)$ par

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=o}^{m-1} \lambda_k \, u(x,-\alpha_k t) & \text{si } t < 0 , \end{cases}$$

où les α_k sont des réels strictement positifs et les λ_i vérifient :

$$\sum_{k=o}^{m-1} \lambda_k \, (-\alpha_k)^j = 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq j \leq m-1.$$

L'opérateur P est linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^+, X)$ dans $L^2(\mathbb{R}, X)$.

On a :

$$(Pu)^{(m)}(t) = \begin{cases} u^{(m)}(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (-\alpha_k)^m \, u^{(m)} \, (-\alpha_k t) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Notons Q l'opérateur de prolongement défini par

$$Qv(t) = \begin{cases} v(t) & \text{si } t > 0 \\ \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k (-\alpha_k)^m \, v(-\alpha_k t) & \text{si } t < 0 . \end{cases}$$

Les conditions sur les λ_k entraînent que Q est continu pour les topologies induites par $H^{-k}\left(\mathbb{R}^+, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$ et $H^k\left(\mathbb{R}, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$, quel que soit k vérifiant $0 \leq k \leq m-1$.

On a donc, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+,X)$

$$\|Pu\|_{W(R)} \leq \text{cte} \, \|u\|_{W(R^+)} .$$

L'opérateur P se prolonge donc par densité en un opérateur linéaire continu de $W(R^+)$ dans $W(R)$.

Démonstration du théorème 1.

Si $u \in W(R)$, il existe des fonctions $f_k \in L^2\left(\mathbb{R}, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)$, $0 \leq k \leq m-1$ telles que

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d^k}{dt^k} f_k .$$

La norme de W est équivalente à la norme :

$$\|u\| = \|u\|_{L^2(\mathbb{R},X)} + \inf_{u^{(m)} = \sum \frac{d^k}{dt^k} f_k} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \|f_k\|_{L^2\left(\mathbb{R}, [X,Y]_{\frac{m-k}{m}}\right)} \right) .$$

D'après [1], il existe une somme mesurable hilbertienne $\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \, d\mu(\lambda)$, $d\mu(\lambda)$ étant une mesure de Radon sur $[\lambda_0, +\infty]$, $\lambda_0 > 0$, et un isomorphisme T de Y sur $\mathcal{H}$ qui applique X sur $\mathcal{H}^1$ et $[X,Y]_\theta$ sur $\mathcal{H}^{1-\theta}$, où

$$\mathcal{H}^{1-\Theta} = \{v \in \mathcal{H};\ \lambda^{1-\Theta} v \in \mathcal{H}\} .$$

On a de plus :

$$\|x\|_X = \|Tx\|_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_{\lambda_o}^{\infty} \lambda^2 \|v(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_{[X,Y]_\Theta} = \|Tx\|_{\mathcal{H}^{1-\Theta}} = \left(\int_{\lambda_o}^{\infty} \lambda^{2(1-\Theta)} \|v(\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons

$$v(\xi,\lambda) = T\hat{u}(\xi)$$

$$g_k(\xi,\lambda) = T\hat{f}_k(\xi)$$

($\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u).

On a :

(2) $$v(\xi,\lambda) = \sum_{k=o}^{m-1} (i\xi)^{k-m} g_k(\xi,\lambda).$$

La norme de u dans W est équivalente à

$$\|u\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_o}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} + \inf \sum_{k=o}^{m-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_o}^{\infty} \lambda^{\frac{2k}{m}} \|g_k(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'inf portant sur toutes les fonctions g_k pour laquelle la relation précédente (2) est vérifiée.

Posons $$\varphi(\xi,\lambda) = \lambda \left[1 + \inf_{1 \le k \le m} \frac{|\xi|^k}{\lambda^{k/m}} \right] .$$

On a pour tout λ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|v(\xi,\lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda} d\xi \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi,\lambda)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\lambda)^2 \|v(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \text{cte}\ \lambda^{\frac{1}{2m}-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\frac{k}{m}} \|g_k(\xi,\lambda)\|_{\mathcal{H}_\lambda} \right) d\xi \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R},X)$, en intégrant pour la mesure $d\mu(\lambda)$, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2-\frac{1}{m}} \|u(t,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \|v(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda)$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\frac{2k}{m}} \|g_k(\xi,\lambda)\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} d\mu(\lambda) .$$

En passant à l'inf sur toutes les fonctions g_k pour lesquelles (2) a lieu, on obtient :

$$\|u(t)\|_{[X,Y]_{\frac{1}{2m}}} \leq \text{cte}\ \|u\|_W .$$

L'application $u \longmapsto u(t)$, $t \geq 0$, définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}^+,X)$, se prolonge en une application linéaire continue de W dans $[X,Y]_{\frac{1}{2m}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LIONS et MAGENES : "Problèmes aux limites non homogènes", Paris 1968.

[2] Ch. GOULAOUIC et P. GRISVARD : C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268 (1969).