J. L. DURRMEYER

Formule de représentation d'un semi-groupe

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 7, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A7_0>

FORMULE DE REPRESENTATION D'UN SEMI-GROUPE

Par J.L. DURRMEYER

Le théorème de Hille-Yosida, comme on le sait, est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé, de domaine dense et dont le résolvant existe pour la suite des nombres entiers, par exemple, soit le générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu.

Malheureusement, ce critère fait intervenir les puissances successives des résolvants, ce qui parfois en limite son emploi. Il serait donc intéressant d'obtenir un critère analogue s'exprimant uniquement en fonction des résolvants, c'est ce problème que nous allons tenter de résoudre.

§ 1 - UNE FORMULE DE REPRESENTATION D'UN SEMI-GROUPE FORTEMENT CONTINU.

Proposition 1.1. Soit X un espace de Banach, $t \to h(t)$ une fonction à valeur dans X et définie pour $t \geq o$. Supposons que cette fonction soit bornée et fortement continue. Alors :

$$h(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=o}^{n} e^{-Kt}\,(1-e^{-t})^{n-K} \binom{n}{K} (n+1) \int_o^\infty h(u) \binom{n}{K} e^{-(K+1)u}\,(1-e^{-u})^{n-K} du$$

uniformément en t sur tout compact de R^+.

Proposition 1.2. Soit X un espace de Banach, G(t) un semi-groupe fortement continu défini sur X, que l'on suppose borné. Désignons par A le générateur infinitesimal du semi-groupe, alors pour tout $x \in X$

$$G(t)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=o}^{n} e^{-Kt}\,(1-e^{-t})^{n-K} \binom{n}{K} (n+1) \sum_{J=o}^{n-K} \binom{n}{K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j}\,(n+1-j-A)^{-1} x$$

uniformément en t sur tout compact de R^+.

Remarque : Contrairement à la formule de "représentation exponentielle" classique, cette relation ne fait pas intervenir les puissances successives des résolvants du générateur infinitesimal A du semi-groupe G(t).

Démonstration de la proposition 2.

Soit x quelconque dans X et considérons l'application $h(t) : t \longrightarrow G(t)x$.

Appliquons alors la proposition 1.1 que l'on admet pour l'instant, il vient alors

$$G(t)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=o}^{n} e^{-Kt}\,(1-e^{-t})^{n-K} \binom{n}{K}(n+1) \int_o^\infty G(u)x\binom{n}{K} e^{-(K+1)u}\,(1-e^{-u})^{n-K} du$$

fortement dans X et uniformément par rapport à t sur tout compact de R^+.

Mais le résolvant $(\lambda I-A)^{-1}$ du générateur infinitesimal A est lié au semi-groupe $G(t)$ par la relation

$$(\lambda I-A)^{-1}x = \int_0^\infty G(t)x\, e^{-\lambda t}\, dt \;, \quad \lambda>0$$

pour tout $x \in X$.

D'autre part

$$e^{-Kt}(1-e^{-t})^{n-K} = \sum_{j=0}^{n-K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j}\, e^{-t(n-j)}$$

d'où la proposition 2.

Démonstration de la proposition 1.

Lemme 1.1. Soit $t \to X(t)$ une fonction définie sur $[0,1]$ à valeur dans un espace de Banach, bornée sur l'intervalle de définition et mesurable. Alors en tout point t où la fonction $t \to X(t)$ est continue, la relation suivante est valable

$$X(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} t^K (1-t)^{n-K}\; (n+1) \int_0^1 \binom{n}{K}\, X(u) u^K (1-u)^{n-K} du$$

fortement dans X.

De plus, si sur un intervalle $I \subset [0,1]$, la fonction $t \to X(t)$ est continue, alors la convergence est uniforme par rapport à t sur I.

Pour la démonstration quelque peu technique de ce lemme nous renvoyons à [1].

La proposition 1.1 résulte alors du lemme 1.1. que l'on applique à la fonction $\mathcal{E} \longrightarrow h(-\text{Log}\, \mathcal{E})$, fonction qui vérifie bien les hypothèses du lemme 1.1. Il suffit ensuite de poser $\mathcal{E} = e^{-t}$ pour obtenir la proposition 1.1.

Proposition 1.3. : La formule de représentation précédente peut encore s'écrire

$$G(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=o}^{n} e^{-Kt} (1-e^{-t})^{n-K} \binom{n}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}$$

fortement simplement dans X, et uniformément par rapport à t sur tout compact de R^+.

Démonstration. Posons $\Delta\mu_n = \mu_{n+1}-\mu_n$, $\Delta^K = \Delta(\Delta^{K-1})$, alors

$$(n+1) \sum_{j=o}^{n-K} \binom{n}{K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j} (n+1-j-A)^{-1} = (-1)^{n-K} (n+1)\binom{n}{K} \Delta^{n-K}(k+1-A)^{-1}$$

D'autre part, d'après l'équation résolvante

$$\Delta(k-A)^{-1} = (k+1-A)^{-1}-(k-A)^{-1} = -(k+1-A)^{-1} (k-A)^{-1}.$$

et le résultat s'obtient par récurrence.

§ 2 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN OPERATEUR FERME SOIT LE GENERATEUR INFINITESIMAL D'UN SEMI-GROUPE FORTEMENT CONTINU.

Proposition 2.1. : Soit A un opérateur linéaire de X dans lui-même, X étant un espace de Banach. On suppose que A est un opérateur fermé, dont le domaine D(A) est dense dans X, de plus on suppose l'existence de résolvants de A : $(k-A)^{-1}$ pour tout k entier >o. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que A soit le générateur infinitesimal d'un semi-groupe G(t) fortement continu et borné par M est que

$$(2) \qquad \sup_{\substack{o\leq K\leq n \\ n\in N}} \left\| \prod_{j=K}^{n} \left(I-\frac{A}{j+1}\right)^{-1} \right\| \leq M.$$

Remarque.

1) Dans le cas des semi-groupes de contraction, on retrouve le critère classique

$$\left\| \left(I-\frac{A}{K}\right)^{-1} \right\| \leq 1$$

2) Le critère (2) peut encore s'écrire

$$\sup_{\substack{o\leq K\leq n \\ n\in N}} \left\| (n+1) \sum_{j=o}^{n-K} \binom{n}{K}\binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j} (n+1-j-A)^{-1} \right\| \leq M$$

Démonstration de la proposition 2.1.

Condition nécessaire : On a vu que

$$\prod_{j=K}^{n} \left(I-\frac{A}{j+1}\right)^{-1} x = (n+1) \int_o^\infty G(t)x\, e^{-(K+1)t} (1-e^{-t})^{n-K} dt$$

$$\text{or } (n+1)^{-1} = \int_o^\infty e^{-(k+1)t} (1-e^{-t})^{n-K} dt$$

donc

$$\left\| \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1} x \right\| \leq \frac{\int_o^\infty \|G(t)x\| \, e^{-(K+1)t} \, (1-e^{-t})^{n-K} dt}{\int_o^\infty e^{-(K+1)t} \, (1-e^{-t})^{n-K} dt}$$

d'où

$$\sup_{\substack{o\leq K\leq n \\ n\in N}} \left\| \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1} \right\| \leq \sup_{t\geq o} \|G(t)\|$$

Condition suffisante : Supposons donc que

$$\sup_{\substack{o\leq K\leq n \\ n\in N}} \left\| \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1} \right\| \leq M$$

Posons $G_m(t) = \sum_{K=o}^{m} \binom{m}{K} e^{-Kt} \, (1-e^{-t})^{m-K} \prod_{j=K}^{m} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}$ et $\sup_{t\geq o} \|G_m(t)\| \leq M$

alors $G_m(t) \in \mathcal{L}(X,X)$.

Lemme 2.1. : Pour tout $x\in X$

$$G_m(t)x - G_n(t)x = \int_o^t \frac{d}{du}\left(G_n(t-u) \, G_m(u)x\right) du + \varepsilon^t_{m,n}(x)$$

où pour tout x, $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m}} \|\varepsilon^t_{m,n}(x)\| = o$

uniformément en t sur tout compact de R^+.

Démonstration. On a

$$\int_o^t \frac{d}{du}\left(G_m(u) \, G_n(t-u)x\right) du = G_m(t) \, G_n(o)x - G_m(o) \, G_n(t)x.$$

Montrons que pour tout $x\in X$ et uniformément en t sur tout compact de R^+

$\lim_{m,n\to\infty} \|G_m(t)G_n(o)x - G_m(o)G_n(t)x - G_m(t)x + G_n(t)x\| = o$, or

$G_n(o) = (I-\frac{A}{n})^{-1}$. Soit alors $x \in D(A)$

$$(I-\frac{A}{n})^{-1}x - x = n(n-A)^{-1} \left[I-\left(\frac{n-A}{n}\right)\right]x = (n-A)^{-1} Ax = \frac{1}{n}(I-\frac{A}{n})^{-1} Ax = \frac{O(1)}{n}$$

donc puisque D(A) est dense dans X, pour tout $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} (I-\frac{A}{n})^{-1}x = x$,
d'où le résultat puisque $\|G_m(t)x\| < M\,\|x\|$.

Lemme 2.2. Si $x \in D(A)$ alors

$$\frac{d}{dt}\,G_m(t)x = G_{m-1}(t)\,(I-\frac{A}{m+1})^{-1}\;Ax + \eta_m^t x$$

où pour tout $x \in D(A)$ $\lim\limits_{m\to\infty} \|\eta_m^t x\| = o$ uniformément sur tout compact de R^+.

Démonstration :

$$\frac{d}{dt}\,(\sum_{K=o}^{n} \binom{n}{K} e^{-Kt}(1-e^{-t})^{n-K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}x) =$$

$$\sum_{K=o}^{n-1} e^{-(K+1)t}\;(1-e^{-t})^{n-(K+1)} \Big[-\binom{n}{K+1}K+1 \prod_{j=K+1}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}x +$$

$$\binom{n}{K}\,n-K \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}x\Big] = \sum_{K=o}^{n-1} e^{-(K+1)t}\;(1-e^{-t})^{n-(K+1)}\,n\,\binom{n-1}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}\,\frac{A}{K+1}x$$

expression que nous allons comparer à

$$\sum_{K=o}^{n-1} e^{-(K)t}\;(1-e^{-t})^{n-1-K}\;\binom{n-1}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}\;Ax$$

par différence, il vient

$$\sum_{K=o}^{n-1} e^{-Kt}\;(1-e^{-t})^{n-1-K}\;\binom{n-1}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{j+1})^{-1}\Big[\frac{n}{K+1}\,e^{-t}-1\Big]\;Ax$$

$$\leq M \sum_{K=o}^{n-1} e^{-Kt}\;(1-e^{-t})^{n-1-K}\;\binom{n-1}{K} \left|\frac{n}{K+1}\,e^{-t}-1\right|$$

puisque $\left\|\prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}\right\| \leq M$ par hypothèse, soit encore après changement de variable l'expression

$$\sum_{K=o}^{n-1} \delta^K\;(1-\delta)^{n-K-1}\;\binom{n-1}{K} \left|\frac{n\delta}{K+1}-1\right|\;,\;\delta \in [\varepsilon,1] \qquad o<\varepsilon<1$$

puisque $o \leq t \leq t_o$, mais d'après l'inégalité de Schwarz

$$(\sum_{K=o}^{n-1} \delta^K\;(1-\delta)^{n-K-1}\;\binom{n-1}{K} \left|\frac{n\delta}{K+1}-1\right|)^2 \leq$$

$$(1) \qquad \sum_{K=o}^{n-1} \delta^K\;(1-\delta)^{n-K-1}\;\binom{n-1}{K} (\frac{n\delta}{K+1}-1)^2$$

en développant le carré, on obtient une somme de trois termes s_1, s_2, s_3 dont le premier s_1 est égal à

$$\sum_{K=o}^{n-1} \delta^K (1-\delta)^{n-K-1} \binom{n-1}{K} \frac{n^2 \delta^2}{(K+1)^2}$$

Considérons alors la suite de fonctions $f_n(\delta) = (\frac{1}{\delta+\frac{1}{n}})^2$ $\delta \in [\varepsilon,1]$ le polynôme de Bernstein d'ordre n-1 associé à

$f_{n-1}(\delta)$ est égal à

$$\sum_{K=o}^{n-1} \delta^K (1-\delta)^{n-K-1} \binom{n-1}{K}^{-1} \left(\frac{1}{\frac{k}{n-1}+\frac{1}{n-1}}\right)^2 = \sum_{K=o}^{n-1} \delta^K (1-\delta)^{n-K} \binom{n-1}{K} \left(\frac{n-1}{k+1}\right)^2$$

En reproduisant la démonstration du théorème d'approximation de Bernstein [2], on démontre que

$$\sum_{K=o}^{n-1} \delta^K (1-\delta)^{n-K} \binom{n-1}{K}^{-1} \left(\frac{n-1}{k+1}\right)^2$$

converge uniformément sur $[\varepsilon,1]$ vers $\frac{1}{\delta^2}$, donc s_1 converge vers 1.

On montre par le même procédé que s_2 converge vers 2, et enfin $s_3=1$, d'où le résultat.

<u>Lemme 2.3.</u> La suite $(G_m(t)x)_{m\in N}$ est pour tout $x\in X$ une suite de Cauchy dans X, uniformément en t sur tout compact de R^+.

<u>Démonstration</u> : Soit $x\in D(A^2)$

De ce qui précède résulte que

$$G_m(t)x-G_n(t)x = -\int_o^t G_m(u)\, G_{n-1}(t-u)\, (I-\frac{A}{n+1})^{-1} Ax\, du + \int_o^t G_{m-1}(u)\, G_n(t-u)x\, (I-\frac{A}{m+1})^{-1} Ax\, du + \varepsilon^t_{m,n}\, x$$

et l'on sait que pour tout $x\in X$, $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n}} \|\varepsilon^t_{m,n}x\| = o$ uniformément en t sur tout compact de R^+.

On peut encore écrire l'expression précédente ainsi

$$G_m(t)x-G_n(t)x = \int_o^t G_m(u)G_n(t-u)\left((I-\frac{A}{n+1})^{-1} - (I-\frac{A}{m+1})^{-1}\right)- (I-\frac{A}{m+1})\ Ax\ du\ +$$

$$\int_o^t (G_{m-1}(u)-G(u))\ G_m(t-u)\ (I-\frac{A}{m+1})^{-1}\ Ax\ du\ +$$

$$\int_o^t G_m(t-u)\ (G_{n-1}(u)-G_n(u)\ (I-\frac{A}{n+1})^{-1}\ Ax\ du + \varepsilon^t_{m,n}x.$$

Montrons que pour tout $x \in D(A)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_o^t (G_{m-1}(u)-G_m(u))\ G_n(t-u)\ (I-\frac{A}{m+1})^{-1}\ Ax\ du = o$$

uniformément en t sur tout compact de R^+, et que de même

$$\lim_{n\to\infty} \int_o^t (G_{n-1}(u)-G_n(u))\ G_m(t-u)\ (I-\frac{A}{n+1})^{-1}\ Ax\ du = o$$

uniformément en t sur tout compact de R^+.

Il suffit alors de montrer que pour tout x

$$\lim_{m\to\infty} \|(G_{m-1}(u)-G_m(u))x\| = o \text{ presque partout en } u.$$

Or

$$G_{m-1}(u)x - G_m(u)x = \left[\sum_{K=o}^{m-1} e^{-Ku}\ (1-e^{-u})^{m-K-1}\ \binom{m-1}{K} \prod_{j=K}^{m-1} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\right.$$

$$- \sum_{K=o}^{m} \binom{m}{K}\ e^{-Ku}\ (1-e^{-u})^{m-K} \prod_{j=K}^{m-1}\ (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\ +$$

$$\left. + \sum_{K=o}^{m} \binom{m}{K}\ e^{-Ku}\ (1-e^{-u})^{m-K}\ (I-(I-\frac{A}{m+1})^{-1}) \prod_{j=K}^{m-1} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\right]$$

et la troisième composante de la somme précédente converge vers zéro lorsque m tend vers l'infini puisque $\lim_{m\to\infty} (I-\frac{A}{m+1})^{-1}x = x.$

Pour les deux premières composantes, on obtient aisément la majoration (après changement de variable $e^{-u}=t$)

$$\sum_{K=o}^{m-1} \binom{m-1}{K}\ t^K\ (1-t)^{m-K} \left|1-\frac{(1-t)m}{m-K}\right|$$

quantité que l'on traite selon la méthode exposée précédemment (on introduit ici la suite de fonction $f_m = \frac{1}{1-t+\frac{1}{m}}$), finalement

$$G_m(t)x-G_n(t)x = \int_o^t G_m(u)G_n(t-u)\left((I-\frac{A}{n+1})^{-1} - (I-\frac{A}{m+1})^{-1}\right) Ax + \varepsilon^t_{m,n}x$$

où pour tout $x\in D(A^2)$, $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n}} \|\varepsilon^t_{m,n}x\| = o$ uniformément en t sur tout compact de R^+.

Enfin $(I-\frac{A}{n+1})^{-1} Ax - (I-\frac{A}{m+1})^{-1} Ax = (O(\frac{1}{n})-O(\frac{1}{m}))A^2x$ puisque $x\in D(A^2)$.

Donc puisque $D(A^2)$ est dense dans X (car D(A) l'est), la suite $(G_m(t)x)_{m\in N}$ est bien une suite de Cauchy dans X uniformément en t sur tout compact de R^+ $(\sup\limits_{t\leq o} \|G_m(t)\| \leq M)$.

Lemme 2.4. : La suite d'opérateur $(G_m(t))_{m\in N}$ converge dans $\mathscr{L}(X,X)$ muni de convergence simple forte vers un opérateur $G(t)\in \mathscr{L}(X,X)$, la convergence étant uniforme par rapport à t sur tout compact de R^+.

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence immédiate du lemme 2.3. et du théorème de Banach-Steinhauss.

Lemme 2.5. : Pour tout $x\in X$ et pour tout entier $\ell\geq o$, l'opérateur G(t) vérifie la relation

$$\int_o^\infty G(t)x\, e^{-(\ell+1)t}\, dt = (\ell+1-A)^{-1}x.$$

Démonstration : On a pour tout $x\in X$

$$\lim_{m\to\infty} \int_o^\infty G_m(t)x\, e^{(\ell+1)t}\, dt = \int_o^\infty G(t)x\, e^{-(\ell+1)t} dt,\ \ell\geq o$$

or

$$\int_0^\infty G_n(t)x\, e^{-(\ell+1)t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\ell+1)t} \sum_{K=o}^{n} e^{-(K+1)t} (1-e^{-t})^{n-K} \binom{n}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\, dt = \int_o^1 \sum_{K=o}^{n} t^{K+\ell} (1-t)^{n-K} \binom{n}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\, dt$$

e désigne un entier positif quelconque.

De plus la démonstration du lemme 1.2 (non exposée) permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_o^1 \sum_{K=o}^{n} t^{K+\ell} (1-t)^{n-K} \binom{n}{K} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x\, dt =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{K=o}^{n} \frac{1}{n+1} (\frac{k}{n})^{\ell} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x$$

or $\prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x = n+1 \sum_{J=o}^{n-K} \binom{n}{K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j} (n-j+1-A)^{-1}x$

donc

$$\sum_{K=o}^{n} \frac{1}{n+1} (\frac{k}{n})^{\ell} \prod_{j=K}^{n} (I-\frac{A}{J+1})^{-1}x = \sum_{K=o}^{n} \sum_{j=o}^{n-K} (\frac{k}{n})^{\ell} \binom{n}{K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j} (n-j+1-A)^{-1}x = \sum_{j=o}^{n} \sum_{K=o}^{n-j} (\frac{k}{n})^{e} \binom{n}{K} \binom{n-K}{j} (-1)^{n-K-j} (n-j+1-A)^{-1}x$$

(cf proposition 1.3.).

Posons $m=n-j$, la sommation s'écrit alors

$$\sum_{m=o}^{n} (m+1-A)^{-1}x \sum_{K=o}^{m} (\frac{k}{n})^{\ell} \binom{m}{K} (-1)^{m-K} = \sum_{m=o}^{n} \Delta^m f(o) \binom{n}{m} (m+1-A)^{-1}x$$

ou $x \to f(x) = x^{\ell}$

$$\Delta f(o) = f(\frac{1}{n}) - f(o) \ , \ \Delta^m f(o) = \Delta(\Delta^{m-1} f(o))$$

et il est bien connu que si $f \in c^P(-\beta,\beta)$ alors il existe

$$\xi \in (-\beta,\beta) \text{ tel que } \Delta^K f(o) = \frac{1}{n^K} f^{(K)}(\xi) \ , \ o \leq K \leq P$$

et $f^{(K)}$ désignant la dérivée d'ordre K de f.

En conclusion il vient

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\infty G_m(t)x\, e^{-(\ell+1)t} = \lim_{m\to\infty} \sum_{K=0}^{\ell} \Delta^K f(o) \binom{n}{K} (K+1-A)^{-1}x$$

et un calcul sans difficulté montre que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{\ell} \Delta^K f(o) \binom{n}{K} (K+1-A)^{-1}x = (\ell+1-A)^{-1}x$$

Lemme 2.6. : L'opérateur $G(t)$ défini précédemment, au lemme 2.4. est le semi-groupe fortement continu et borné admettant A comme générateur infinitesimal.

Démonstration : L'application $t \to G(t)x$ est pour tout x de X fortement continue puisque $G_n(t)x$ converge uniformément par rapport à t, sur tout compact de R^+, vers $G(t)x$. D'autre part $G(o)x = x$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(o)x = x$.

Montrons alors que pour presque tout $t,t' \geq o$ et pour tout $x \in X$ $G(t+t')x = G(t) \circ G(t')x$ (cela suffit puisque l'application $t \to G(t)x$ est continue). Ceci résulte de ce que pour tout $x' \in X'$, dual de X, on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \langle x', G(t)G(\sigma')x\rangle\, e^{-Kt}\, e^{-K'\sigma}\, dt\, d\sigma =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \langle x', G(t+\sigma')x\rangle\, e^{-Kt}\, e^{-K'\sigma}\, dt\, d\sigma \quad \text{pour tout } K,\ K' \text{ entier} > o.$$

En effet, d'après l'équation résolvante

$$(KI-A)^{-1}x - (K'I-A)^{-1}x = (K'-K)(KI-A)^{-1}\,(k'I-A)^{-1}x$$

et ainsi

$$\langle x', -\frac{-(kI-A)^{-1}x+(K'I-A)^{-1}x}{k-k'}\rangle = \langle x', \frac{1}{k'-k}\left(\int_0^\infty G(u)x\, e^{-Ku}du - \int_0^\infty G(\sigma)x\, e^{-K'\sigma}\, d\sigma\right\rangle$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \langle x', G(t)\, G(t')x\rangle\, e^{-Kt}\, e^{-K'\sigma}\, dt\, d\sigma = \int_0^\infty e^{-K'\sigma}\, \langle x', G(\sigma)x\rangle\, d\sigma$$

$$\int_0^\sigma e^{-(Kt+K't)} dt = \int_0^\infty e^{-Kt+K't} dt \int_t^\infty e^{-K'\sigma}\, \langle x', G(\sigma)x\rangle\, d\sigma =$$

$$\int_0^\infty e^{-Kt} dt \int_t^\infty e^{-Ku+K't}\, \langle x', G(u)x\rangle\, du = \int_0^\infty e^{-Kt}\, dt \int_0^\infty e^{-K'\sigma}\, \langle x', G(t+\sigma)x\rangle\, d\sigma$$

REFERENCES

[1] J.L DURRMEYER Thèse 3ème cycle.

[2] LORENTZ Bernstein Polynomials Torento Press.