

R. PAVEC

Isomorphisme entre $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et (s) , d'après une note de M. Zerner

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969__1_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ISOMORPHISME ENTRE $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ET (s)

D'après une note de M. ZERNER

Par M.R. PAVEC

Cet exposé est le développement d'une note de M. Martin ZERNER

[6]. Dans cette note M. ZERNER démontre l'isomorphisme entre :

- $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ espaces des fonctions C^∞ sur $\bar{\Omega}$, Ω étant un ouvert borné possédant la propriété du cône.

- et (s) espace des suites à décroissance rapide.

Ce résultat avait déjà été obtenu comme corollaire par BAOUENDI-GOULADUIC [1] et TRIEBEL [4] dans le cas où l'ouvert est borné et à frontière C^∞ .

Notations.

Toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Ω : ouvert borné de \mathbb{R}^n possédant la propriété du cône : il existe une parallélépipède P_0 de sommet o tel que quel que soit $x \in \Omega$ il existe un parallélépipède P_x déduit de P_0 par translation et transformation orthogonale et contenu dans Ω .

C : parallélépipède rectangle fermé de \mathbb{R}^n tel que $\bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{C}$

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$: espace des fonctions f définies sur Ω , qui sont restriction d'une fonction \tilde{f} de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n et à support dans C muni de la topologie d'espace de Fréchet habituelle.

(s) : espace des suites à décroissance rapide muni de la topologie d'espace de Fréchet définie par les semi-normes :

$$p_k(u_n) = \sup_n |n^k u_n|, \quad k \in \mathbb{N}$$

\mathcal{P} : espace des polynômes à n variables

\mathcal{P}_k : espace des polynômes à n variables de degré total $\leq k$.

On a le théorème :

Théorème : $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est isomorphe à (s) algébriquement et topologiquement.

Démonstration:

\mathcal{P} étant dense dans $L^2(\Omega)$, on peut construire une base de polynômes orthonormaux P_i , de degré croissant. L'application I qui à $f \in L^2(\Omega)$ fait correspondre la suite de ses coefficients sur la base P_i est un isomorphisme entre $L^2(\Omega)$ et ℓ^2 . On va montrer que la restriction de I à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est isomorphisme entre $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et (s) . Il suffit pour cela de montrer que $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) = (s)$, la continuité résultant du théorème du graphe fermé puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et (s) s'injectent continûment dans $L^2(\Omega)$ et ℓ^2 .

1°) $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \subset (s)$.

Soit $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et \tilde{f} un prolongement de f à c .

$$\tilde{c}_k = \text{distance de } \tilde{f} \text{ à } \mathcal{P}_k \text{ dans } L^\infty(c)$$

$$c_k = \text{distance de } f \text{ à } \mathcal{P}_k \text{ dans } L^\infty(\Omega)$$

$$\alpha_k = \text{distance de } f \text{ à } \mathcal{P}_k \text{ dans } L^2(\Omega).$$

$$I(f) = (u_k).$$

On a :

$$0 \leq \alpha_k \leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} c_k \leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} \tilde{c}_k.$$

Or $(c_k) \in (s)$ (d'après Lorentz [3]), donc $(\alpha_k) \in (s)$.

La suite P_i étant orthonormale :

$$\alpha_k^2 = \sum_{p > d(k)} |u_p|^2$$

où $d(k) = \binom{n+k}{n}$ est la dimension de \mathcal{P}_k .

La suite $v_i^2 = \sum_{\rho > i} |u_\rho|^2$ appartient à (s) . En effet :

$$i^m v_i^2 \leq i^m \alpha_k^2 \text{ où } k \text{ est tel que } d(k) \leq i < d(k+1)$$

$$\leq (k+1)^{mn} \alpha_k^2$$

donc pour tout m :

$$\sup |i^m v_1^2| < +\infty$$

et donc $(v_1^2) \in (s)$.

On en déduit $I(f) \in (s)$.

2°) $I(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \supset (s)$.

a) Inégalité de Markov pour la norme de $L^2(\Omega)$: il existe $c(\Omega) > 0$:

$$\|P'\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) k^{n+2} \|P\|_{L^2(\Omega)}, \quad P \in \mathcal{P}_k.$$

Pour une norme quelconque, on note :

$$\|f'\| = \left\| \left(\sum \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|$$

Pour un parallélépipède P_0 , on a l'inégalité :

$$\|P'\|_{L^\infty(P_0)} \leq c(P_0) k^2 \|P\|_{L^\infty(P_0)}, \quad P \in \mathcal{P}_k$$

où $c(P_0)$ ne dépend que de P_0 et est invariant si on fait une transformation orthogonale sur P_0 (Coatmélec [2]).

Pour $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |P'(x)| &\leq \|P'\|_{L^\infty(P_x)} \leq r(P_0)^{n+2} \|P\|_{L^\infty(P_x)} \\ &\leq c(P_0) k^2 \|P\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|P'\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(P_0) k^2 \|P\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|P'\|_{L^2(\Omega)} &\leq (\text{mes } \Omega)^{1/2} \|P'\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq c_1(\Omega) k^2 \|P\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Démontrons l'inégalité

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2(\Omega) k^N \|P\|_{L^2(\Omega)}, \quad P \in \mathcal{P}_k.$$

Soit $P \in \mathcal{P}_k$ et $x_0 \in \Omega$ tel que $|P(x_0)| = \|P\|_{L^\infty(\Omega)}$. Supposons :

$$\bullet P(x_0) > 0.$$

$$\bullet x_0 = 0, \quad P_{x_0} = P_0.$$

Pour tout $x \in P_0$:

$$\begin{aligned} P(x) &\geq P(0) - \|P'\|_{L^\infty(P_0)} |x| \\ &\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 - \frac{\|P'\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}} |x|\right). \end{aligned}$$

Soient e_1, e_2, \dots, e_n les arêtes de P_0 :

$$P_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum t_i e_i \quad 0 \leq t_i \leq 1\}$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum t_i e_i \quad 0 \leq t_i\}$$

Il existe $\rho_0 > 0$ tel que :

$$P_0 \cap B(0, \rho_0) = K \cap B(0, \rho_0).$$

Posons

$$\alpha = \frac{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P'\|_{L^\infty(\Omega)}} \quad \text{et } \rho = \inf(\alpha, \rho_0)$$

$$\begin{aligned} x \in P_0 \implies P(x) &\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right). \\ &\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right). \end{aligned}$$

si $x \in K_\rho = K \cap B(0, \rho)$, on a :

$$x \in P_0 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{|x|}{\rho} \geq \alpha.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|P\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \int_{K_\rho} \|P\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx \\ &\geq \|P\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{K_\rho} \left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx \\ \int_{K_\rho} \left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx &= \int_0^\rho \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2 dr \int_{S_r} d\sigma, \quad S_r = \{x \in K \mid |x| = r\} \\ \text{or } \int_{S_r} d\sigma &= r^{n-1} \int_{S_1} d\sigma = c_1 r^{n-1} \\ \int_{K_\rho} \left(1 - \frac{|x|}{\rho}\right)^2 dx &= c_1 \int_0^\rho r^{n-1} \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2 dr \\ &= c_1 \rho^n \int_0^1 u^{n-1} (1-u)^2 du = c_2 \rho^n \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_3 \rho^{-n/2} \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{si } \rho = \rho_0 : \|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_4 \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\rho = \alpha$$

$$\alpha = \frac{\|P\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|P\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{c(P_0)k^2}$$

d'où :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_5 k^n \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc dans les deux cas :

$$\|P\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_6 k^n \|P\|_{L^2(\Omega)}$$

b) Soit $f \in L^2(\Omega)$ telle que $I(f) \in (s)$.

$$I(f) = (\alpha_i)$$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_i \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La série

$$g_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha}$$

est convergente dans $L^2(\Omega)$: en effet d'après l'inégalité de Markov comme

$P_i \in \mathcal{P}_i$:

$$\left\| \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) i^{(n+2)|\alpha|} \quad \|P_i\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) i^{(n+2)|\alpha|}$$

comme (α_i) est à décroissance rapide la série :

$$\sum |\alpha_i| \left\| \frac{\partial^\alpha P_i}{\partial x^\alpha} \right\|$$

converge, d'où le résultat. La dérivation étant fermée dans $L^2(\Omega)$, on en

déduit $D^\alpha f = g_\alpha$, d'où $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$.

On a donc $f \in \bigcap_{m \geq 0} H^m(\Omega)$.

Ω possédant la propriété du cône, en utilisant le prolongement de Sobolev,

on en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}$, f admet un prolongement \tilde{f}_m à \mathbb{R}^n , de classe

c^m . Mais alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, f est de classe c^m sur $\bar{\Omega}$ au sens donné dans :

- Whitney : [5]

et d'après le théorème I de ce même article, f admet un prolongement \tilde{f} à \mathbb{R}^n

de classe c^∞ . Donc $f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAOUENDI-GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe
d'opérateurs elliptiques dégénérés.
CRAS. Tome 266. 5-2-1968

- [2] COATMELEC : Thèse Rennes 1966.

- [3] LORENTZ : Approximation of functions.

- [4] TRIEBEL : Math. Annalen. 177 - 1968 p.247-264.

- [5] WHITNEY : Extensions of differentiable functions.
Am. Math. Soc. Volume 36 1934 p.64-65.

- [6] ZERNER : Développement en série de polynômes orthonormaux des fonctions
indéfiniment différentiables.
CRAS t.268 (27-1-1969).