BOLLEY

JACQUES CAMUS

Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1968-1969, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , exp. n^o 1, p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1968-1969___1_A1_0>

QUELQUES RESULTATS SUR LES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

par MM. BOLLEY et CAMUS

Introduction.

On donne ici des résultats sur les espaces de Sobolev avec poids (immersion, densité, compacité, espaces de traces) et un exemple d'application aux problèmes aux limites elliptiques (d'autres applications seront étudiées plus tard, en particulier pour les opérateurs elliptiques dégénérés).

Il s'agit ici d'un exposé de synthèse : la plupart des résultats sont tirés de l'article de G. GEYMONAT et P. GRISVARD [2], complétés par les articles de KADLEC et KUFNER [5], P. GRISVARD [3], J.L. LIONS [6] et J. NECAS [8].

NOTATIONS

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ les espaces introduits dans [9].

Pour β appartenant à $\mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ on note $|\beta| = \beta_1+\dots+\beta_n$ et $D^\beta u = \dfrac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}$ pour tout élément u de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Pour ℓ appartenant à $\mathbb{N}$ et p appartenant à $]1,+\infty[$ on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et de puissance p-ième sommable pour la mesure de Lebesgue sur Ω et muni de la norme

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et par $W^{\ell,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev constitué des fonctions ayant leurs dérivées jusqu'à l'ordre ℓ dans $L^p(\Omega)$ et muni de la norme

$$||u||_{W^{\ell,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|\leq\ell} ||D^\beta u||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le point générique x de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, sera souvent noté $x = (x',x_n)$ avec $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, car comme on le verra, la dernière composante joue un rôle privilégié.

On désigne par $\mathbb{R}^n_+$ l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ suivant : $\{x\in\mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$. En particulier R^1_+ sera noté plus simplement $\mathbb{R}_+$.

Soit Ω_1 un sous-ensemble de Ω, la notation $\Omega_1 \Subset \Omega$ signifie que l'adhérence $\overline{\Omega}_1$ de Ω_1 est un compact contenu dans Ω.

Pour une fonction u définie sur Ω et pour un sous-ensemble Ω_1 de Ω la notation $u|_{\Omega_1}$ désigne la restriction de u à Ω_1.

Pour deux espaces topologiques A et B, la notation $A \hookrightarrow B$ signifie que A est inclus dans B algébriquement et topologiquement.

L'abréviation p.p. désigne "presque partout relativement à la mesure de Lebesgue" (le contexte donnant l'espace sur lequel cette mesure opère).

I - DEFINITIONS.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, de frontière Γ variété de dimension n-1, de classe C^β, $\overline{\Omega}$ étant une variété à bord de classe C^∞ de bord Γ.

Pour x appartenant à Ω, on désigne par $d(x,\Gamma)$ la distance de x à Γ.

Soit ρ une fonction de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$, non nulle sur Ω et telle qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 vérifiant :

$$0 < C_1 \leq \frac{\rho(x)}{d(x,\ )} \leq C_2 \text{ pour x appartenant à } \overline{\Omega} \text{ tel que}$$

$d(x,\Gamma) \leq \varepsilon$ (ε nombre fixé, $\varepsilon > 0$). Une telle fonction, qui est positive, est appelée "fonction poids".

Définition 1.1. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$. On désigne par $W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ l'espace :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \rho^\alpha D^\beta u \in L^p(\Omega),\ |\beta| \leq \ell\},$$

muni de la norme :

$$||u||_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\beta| \leq \ell} ||\rho^\alpha D^\beta u||^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.1. On note que $W_0^{\ell,p}(\Omega) = W^{\ell,p}(\Omega)$.

Remarque 1.2. Il est clair, d'après la définition, que si ρ_1 et ρ_2 sont deux "fonctions poids", les espaces $W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ associés respectivement à ρ_1 et ρ_2 coïncident.

Soit maintenant $\mathbb{R}_+^n = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$.

Définition 1.2. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tel que : $1 < p < +\infty$. On définit

$$W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n),\ x_n^\alpha D^\beta u \in L^p(\mathbb{R}_+^n) \text{ pour } |\beta| \leq \ell\}$$

et pour $u \in W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n)$,

$$||u||_{W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n)} = \Big(\sum_{|\beta| \leq \ell} ||x_n^\alpha D^\beta u||^p_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

<u>Définition 1.3.</u> On note $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ (resp. $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(R^n_+)$) l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(R^n_+)$) dans $W^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ (resp. $W^{\ell,p}_{\alpha}(R^n_+)$).

On a alors les résultats élémentaires suivants :

<u>Proposition 1.1.</u> Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $1 < p < +\infty$, $W^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ muni de la norme : $u \longmapsto ||u||_{W^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)}$ est un espace de Banach (de Hilbert dans le cas $p = 2$).

On a le même résultat en remplaçant Ω par $\mathbb{R}^n_+$.

La démonstration est analogue à celle des espaces de Sobolev habituels.

<u>Proposition 1.2.</u> Si $u \in W^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$, alors : pour tout ouvert $\Omega_1 \Subset \Omega$ on a :

$$u|_{\Omega_1} \in W^{\ell,p}(\Omega_1).$$

On a le même résultat en remplaçant Ω par $\mathbb{R}^n_+$.

En effet, sur Ω_1, on peut trouver deux constantes γ_1, γ_2 telles que : $0 < \gamma_1 \leq \rho(x) \leq \gamma_2$ pour $x \in \Omega_1$.

<u>Proposition 1.3.</u> Si $u \in W^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$, alors : pour tout ouvert $\Omega_1 \Subset \Omega$ on a :

$$u|_{\Omega_1} = \lim_{n\to+\infty} \Psi_n \text{ dans } W^{\ell,p}(\Omega_1),\ \Psi_n \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}_1).$$

On a le même résultat en remplaçant Ω par $\mathbb{R}^n_+$.

Soit d'abord Ω_1' tel que $\Omega_1 \Subset \Omega_1' \Subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\varphi = 1 \text{ sur } \Omega_1 \text{ et } \mathrm{Supp}(\varphi) \subset \Omega_1'.$$

Par suite, d'après la proposition 1.2, $\varphi u = v$ satisfait à : $v|_{\Omega_1'} \in W^{\ell,p}(\Omega_1')$ et de plus : $\mathrm{Supp}(v) \subset \Omega_1'$, donc $v \in W^{\ell,p}(\Omega)$.

Soit alors $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante, posons :

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}^n,\ (J_\varepsilon v)(x) = \int_\Omega j_\varepsilon(x-y)\, v(y)\, dy.$$

On en déduit (cf : [1]) que pour : $\varepsilon < d(K,\partial\Omega)$ où $K = \mathrm{Supp}(v)$, $(J_\varepsilon v)|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega)$. De plus, $(J_\varepsilon v)|_\Omega$ tend vers v quand ε tend vers 0, dans $W^{\ell,p}(\Omega)$. Il suffit ensuite de poser : $\Psi_n = (J_{\frac{1}{n}} v)\Big|_{\Omega_1}$.

<u>Proposition 1.4.</u> Si $u \in W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ et si $v \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ alors on a :

(i) $u\, v \in W^{\ell,p}(\Omega)$

(ii) on a la formule de Leibnitz :

pour $|\delta| \leq \ell$, $D^\delta(uv) = \sum\limits_{\beta \leq \delta} \binom{\delta}{\beta} D^\beta u\, D^{\delta-\beta} v$ sur Ω

où $\beta \geq \delta$ signifie : $\beta_i \leq \delta_i$ $i = 1,2,\dots,n$ et $\binom{\delta}{\beta} = \prod\limits_{i=1}^{n} \binom{\delta_i}{\beta_i}$.

On a le même résultat en remplaçant Ω par $\mathbb{R}_+^n$.

En effet, soit $\Omega_1 \Subset \Omega$ quelconque. D'après la proposition 1.3 (ou 1.2) on a :

$$\text{sur } \Omega_1,\ D^\delta(uv) = \sum_{\beta \leq \delta} \binom{\delta}{\beta} D^\beta u\, D^{\delta-\beta} v \quad \text{pour } |\delta| \leq \ell.$$

Ω_1 étant quelconque, on a la formule de Leibnitz (ii). En multipliant les deux membres dans cette formule par ρ^α, on obtient (i).

II - QUELQUES RESULTATS D'IMMERSION.

Théorème 2.1. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $1 < p < +\infty$, on a les inclusions algébriques et topologiques suivantes :

(i) si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou $\ell < \alpha + \frac{1}{p}$, alors :

$$W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\Omega)$$

et

$$W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\mathbb{R}_+^n) \quad \text{pour } j = 0,1,\ldots,\ell .$$

(ii) si $\alpha \in \mathbb{R}$ avec : $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$ alors :

$$W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\Omega)$$

et

$$W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\mathbb{R}_+^n) \text{ pour } j = 0,1,\ldots,\left[\alpha + \frac{1}{p}\right],$$ (ou $\left[\alpha + \frac{1}{p}\right]$ désigne le plus grand entier ≥ 0 et $< \alpha + \frac{1}{p}$).

(iii) $W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha+\beta}^{\ell,p}(\Omega)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq 0$.

(iv) $W^{\ell,q}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ pour $\alpha \leq 0$, $\alpha + \frac{1}{p} > 0$ et $q > \frac{p}{1+\alpha p}$.

(v) $W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{\ell,q}(\Omega)$ pour $\alpha \geq 0$, $\alpha + \frac{1}{p} < 1$ et $q < \frac{p}{1+\alpha p}$.

Pour (i) et (ii), on commence par ramener les cas $W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ aux cas $W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n)$ par cartes locales (en utilisant les propositions 1.3 et 1.4).

Pour établir (i) et (ii) dans le cas $\mathbb{R}_+^n$, on a besoin du lemme suivant : (cf. [4]).

Lemme 2.1. (Inégalité de Hardy). Soient $1 < p < +\infty$, $\beta \neq 1$ et f une fonction mesurable positive sur $(0,+\infty)$; on pose :

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt & \text{si } 1 > \beta \\ \int_0^x f(t)\,dt & \text{si } \beta > 1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\int_0^{+\infty} x^{-\beta}(F(x))^p \, dx \leq \left(\frac{p}{|\beta-1|}\right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-\beta} (f(x))^p \, dx.$$

<u>1er cas.</u>

$\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$: on va montrer que : $W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{\ell-1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ pour $\ell \geq 1$.

Soit $u \in W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}_+^n)$; i.e. : $x_n^\alpha D^\beta u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ pour $|\beta| \leq \ell$. On veut montrer que :

$x_n^{\alpha-1} D^\gamma u \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ pour $|\gamma| \leq \ell-1$. La fonction $\frac{1}{x_n}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^n$, $x_n^{\alpha-1} D^\gamma u$ est mesurable. On a donc :

$$\text{p.p. } x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n^\alpha D^\gamma u(x',x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R}_+)$$

et $$x_n^\alpha \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+),$$

pour $|\gamma| \leq \ell-1$. Par suite : $x_n \longmapsto D^\gamma u(x',x_n)$ (pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$) est continue sur $[0,+\infty[$ car $\alpha + \frac{1}{p} < 1$. Par ailleurs, comme $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$, il en résulte que la trace $D^\gamma u(x',0)$ est nécessairement nulle, d'où :

$$\text{p.p. } x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ D^\gamma u(x',x_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n)\, dx_n.$$

Par suite,

$$|D^\gamma u(x',x_n)| \leq \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n)\right| dx_n.$$

On applique le lemme 2.1. avec $\beta = -(\alpha-1)p$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} x_n^{(\alpha-1)p} |D^\gamma u(x',x_n)|^p \, dx_n \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{|1+(\alpha-1)p|}\right)^p \int_0^{+\infty} x_n^{\alpha p} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n)\right|^p dx_n.$$

Cette inégalité étant vraie pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{(\alpha-1)p} \; |D^\gamma u|^p \, dx \leq \left(\frac{p}{|1+(\alpha-1)p|}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \; \left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u\right|^p dx,$$

avec $|\gamma| \leq \ell-1$. Ceci montre que l'on a :

$$W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{\ell-1,p}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n_+).$$

En itérant ce résultat, on obtient :

$$W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W^{\ell-1,p}_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+), \text{ pour } j = 0,1,\dots,\ell \quad .$$

(remarquer que pour $j = 0,1,\dots,\ell-1$, on a : $\alpha - j + \frac{1}{p} \leq 0$).

<u>2ème cas</u>.

$\alpha + \frac{1}{p} > \ell$. On peut toujours supposer $\ell \geq 1$ car pour $\ell = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $u \in W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ et γ tel que : $|\gamma| \leq \ell-1$, on a :

$$\text{p.p. } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \; x_n^\alpha \; D^\gamma u\,(x',x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+)$$

et

$$x_n^\alpha \; \frac{\partial}{\partial x_n} \; D^\gamma u\,(x',x_n) \in L^p(\mathbb{R}_+).$$

Par suite : $x_n \longmapsto D^\gamma u(x',x_n)$ (pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$) est continue sur $]0,+\infty]$ car $\alpha + \frac{1}{p} > 1$. Par ailleurs, comme $\alpha + \frac{1}{p} \geq 0$, il en résulte que la trace $D^\gamma u(x',+\infty)$ est nécessairement nulle, d'où :

$$\text{p.p. } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \; D^\gamma u\,(x',x_n) = - \int_{x_n}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_n} \; D^\gamma u(x',x_n)\, dx_n$$

donc :

$$|D^\gamma u(x',x_n)| \leq \int_{x_n}^{+\infty} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n)\right| dx_n.$$

On applique alors le lemme 2.1 avec $\beta = -(\alpha-1)p$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} x_n^{(\alpha-1)p}\,|D^\gamma u(x',x_n)|^p\,dx_n \leq \left(\frac{p}{|1+(\alpha-1)p|}\right)^p \int_0^{+\infty} x_n^{\alpha p}\,\left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u(x',x_n)\right|^p dx_n .$$

Cette inégalité étant vraie pour presque tout x' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$, on déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{(\alpha-1)p}\,|D^\gamma u|^p\,dx \leq \left(\frac{p}{|1+(\alpha-1)p|}\right)^p \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} x_n^{\alpha p}\,\left|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\gamma u\right|^p\,dx,$$

avec $|\gamma| \leq \ell-1$. Ceci montre que l'on a :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{\ell-1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

En itérant ce résultat, puisque $\alpha - j + \frac{1}{p} > 1$ pour $j = 0,1,\ldots,\ell-1$, on obtient :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\mathbb{R}^n_+) \text{ , pour } j = 0,1,\ldots,\ell \text{ .}$$

Démontrons maintenant (ii) :

<u>3ème cas.</u>

$0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$. Si $\left[\alpha + \frac{1}{p}\right]_- = 0$, il n'y a rien à démontrer, on peut donc supposer $\left[\alpha + \frac{1}{p}\right]_- > 0$, ce qui implique : $\alpha + \frac{1}{p} > 1$. On raisonne alors comme au 2ème cas, ce qui donne :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{\ell-1,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

et en itérant ce résultat, on obtient :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha-j}^{\ell-j,p}(\mathbb{R}^n_+),\ j = 0,1,\ldots,\left[\alpha+\frac{1}{p}\right]_- .$$

Démontrons maintenant (iii) ; il suffit de remarquer que ρ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, donc bornée sur $\overline{\Omega}$.

Démontrons (iv) : soient α, p, q tels que : $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p}$ et $q > \frac{p}{1+\alpha p}$ (≥ 1). Soit $\varepsilon > 0$ tel que : $q \geq \frac{p}{1+\alpha p-\varepsilon}$ avec $1 + \alpha p - \varepsilon > 0$. On a alors, pour $u \in W^{\ell,q}(\Omega)$ et $|\beta| \leq \ell$,

$$\int_\Omega \rho^{\alpha p} |D^\beta u|^p dx \leq \left(\int_\Omega \rho^{\alpha pk'} dx\right)^{\frac{1}{k'}} \left(\int_\Omega |D^\beta u|^{kp} dx\right)^{\frac{1}{k}},$$

avec : $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ et $k = \frac{1}{1+\alpha p-\varepsilon} > 1$, donc $k' = \frac{1}{\varepsilon-\alpha p}$.

Comme $q \geq \frac{p}{1+\alpha p-\varepsilon}$ et Ω borné, il vient :

$$\left(\int_\Omega |D^\beta u|^{kp} dx\right)^{\frac{1}{kp}} \leq C\left(\int_\Omega |D^\beta u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

où C désigne une certaine constante. Il suffit maintenant de montrer que :

$$\int_\Omega \rho^{\alpha pk'} dx < +\infty.$$

Pour cela on raisonne par cartes locales. On est ramené à établir que :

$$\int_{\Sigma_+} x_n^{\alpha pk'} dx_1 \dots dx_n < +\infty$$

où $\Sigma_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, x_n > 0\}$.

Notons $I = \int_{\Sigma_+} x_n^{\alpha pk'} dx_1 \dots dx_n = \int_{\Sigma_+} x_n^{\frac{\alpha p}{\varepsilon-\alpha p}} dx$. On a :

$\int_0^1 x_n^{\frac{\alpha p}{\alpha p-\varepsilon}} dx_n < +\infty$ car $\frac{\alpha p}{\alpha p-\varepsilon} < 1$, d'où : $I < +\infty$.

Par suite :

$$\rho^\alpha D^\beta u \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\beta| \leq \ell, \text{ i.e. : } u \in W_\alpha^{\ell,p}(\Omega).$$

Démontrons (v) : soient α, p, q tels que : $\frac{1}{p} \leq \alpha + \frac{1}{p} < 1$ et $1 \leq q < \frac{p}{1+\alpha p}$. Comme précédemment, on introduit $\varepsilon > 0$ tel que : $q \leq \frac{p}{1+\alpha p+\varepsilon}$ et $1 + \alpha p + \varepsilon \leq p$. On a alors pour $u \in W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ et $|\beta| \leq \ell$:

$$\int_\Omega |D^\beta u|^q dx \leq \int_\Omega \rho^{-\alpha q} |\rho^\alpha D^\beta u|^q dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega \rho^{-\alpha qk'} dx\right)^{\frac{1}{k'}} \left(\int_\Omega |\rho^\alpha D^\beta u|^{qk} dx\right)^{\frac{1}{k}},$$

avec $\frac{1}{k'} + \frac{1}{k} = 1$. On conclut ensuite comme pour (iv).

<u>Théorème 2.2</u> Soient ℓ entier ≥ 1, $1 < p < +\infty$. On a alors :

(i) $W_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u \in L^p(\Omega),\ |\beta| \leq \ell\}$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou bien $\ell < \alpha + \frac{1}{p}$.

(ii) $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u \in L^p(\Omega),\ |\beta| \leq \ell\}$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\ldots,\ell$.

(iii) Sur $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$, la norme induite par $W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ est équivalente à la norme : $u \longmapsto \left(\sum_{|\beta|=\ell} \|\rho^\alpha D^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\ldots,\ell$.

<u>Démonstration</u>. Soient ℓ entier ≥ 1, $1 < p < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, désignons par $X_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ l'espace :

$$X_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u \in L^p(\Omega),\ |\beta| \leq \ell\}$$

muni de la norme :

$$u \longrightarrow \|u\|_{X_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta|\leq\ell} \|\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

c'est alors un espace de Banach.

D'après le théorème 2.1. (i) on a : pour $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou bien $\ell < \alpha + \frac{1}{p}$:

$$W_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-(\ell-|\beta|)}^{\ell-(\ell-|\beta|),p}(\Omega),\ |\beta| \leq \ell,$$

d'où :

$$W_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \subset X_\alpha^{\ell,p}(\Omega).$$

<u>Remarque 2.2.</u> En définissant de manière analogue $X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, il vient :

pour $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou bien $\ell < \alpha + \frac{1}{p}$, $W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \subset X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

D'après le théorème 2.1. (iii) (puisque Ω est borné) on a aussi :

$$X_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \subset W_\alpha^{\ell,p}(\Omega).$$

D'où, pour $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$ ou bien $\ell < \alpha + \frac{1}{p}$: $X_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$.

Par ailleurs, Ω étant borné, on a :

(2.1.) $$||\rho^\alpha D^\beta u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u||_{L^p(\Omega)}, \quad |\beta| \leq \ell .$$

La lettre C désignant d'une manière générale une constante. Or, par itération, on a :

(2.2.) $$||\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u||_{L^p(\Omega)} \leq C||\rho^{\alpha-\ell+|\beta|+1} D^\gamma u||_{L^p(\Omega)} =$$

$$= C ||\rho^{\alpha-\ell+|\gamma|} D^\gamma u||_{L^p(\Omega)} ,$$

avec $\gamma_i = \beta_i$ pour $i = 1,\dots,n-1$, et $\gamma_n = \beta_n+1$.

D'où : pour $|\beta| \leq \ell$, $||\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u||_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\gamma|=\ell} ||\rho^\alpha D^\gamma u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$

et finalement, on obtient :

(2.3) $$||u||_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} \leq C||u||_{X_\alpha^{\ell,p}(\Omega)}$$

(2.4) $$||u||_{X_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\gamma|=\ell} ||\rho^\alpha D^\gamma u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C||u||_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} .$$

Etudions maintenant les cas : $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\dots,\ell$.

On a déjà, puisque Ω est borné :

$$X_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \subset W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$$

et (2.3) est toujours valable.

Soit alors $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on se ramène pour cartes locales à $\mathbb{R}^n_+$ et puisque $(\alpha-\ell+|\beta|)p \neq 1$ pour $|\beta| = 0,1,\dots,(\ell-1)$, on déduit de l'inégalité de Hardy la relation (2.2) (avec $|\beta| \leq \ell-1$), d'où : la relation (2.4) est encore valable. Par suite , on obtient :

$$\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega).$$

La norme $\| \quad \|_{W_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)}$ sur $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ étant équivalente à celle de $X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ et à la norme :

$$u \longmapsto \Big(\sum_{|\gamma|=\ell} \|\rho^{\alpha} D^{\gamma} u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Il nous reste à établir que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$. Pour cela on vérifie d'abord que si $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ alors pour $u \in X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ on a : $\varphi u \in X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$. En effet, on a :

$$D^{\beta}(\varphi u) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^{\gamma} \varphi \quad D^{\beta-\gamma} u$$

d'où :

$$\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^{\beta} (\varphi u) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^{\gamma}\varphi \quad \rho^{|\gamma|})(\rho^{\alpha-\ell+|\beta|-|\gamma|} D^{\beta-\gamma} u)$$

i.e. : $\varphi u \in X_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$. On peut alors faire un raisonnement par cartes locales : on est ramené à démontrer que l'on peut approcher dans $X_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, un élément $u \in X_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ à support compact par des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

Nous allons en fait démontrer un résultat un peu plus fort :

<u>Lemme 2.2.</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $X_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>1ère étape</u>. Soit $u \in X_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ et $x \longmapsto \zeta(x)$ une fonction appartenant à $C^{\infty}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ telle que :

- $0 \leq \zeta(x) \leq 1,\ x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$.
- $\zeta(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.
- $\zeta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$.

On pose alors pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\zeta_{\lambda}(x) = \zeta(\frac{x}{\lambda})$ et $u_{\lambda} = \zeta_{\lambda}\, u$. Démontrons alors que : $\|u_{\lambda} - u\|_{X_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)}$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

En effet, on a :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\ D^\beta(u_\lambda - u)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}(1-\zeta_\lambda)\ D^\beta\ u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{0<\mu\leq\beta} \binom{\beta}{\mu} \frac{1}{|\lambda|^{|\mu|}} ||x_n^{|\mu|}(D^\mu\ \zeta)(\frac{x}{\lambda})\ x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-|\mu|}\ D^{\beta-\mu}\ u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Or $(\frac{x_n}{\lambda})^{|\mu|}\ (D^\mu\ \zeta)\ (\frac{x}{\lambda})$ est bornée, donc :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\ D^\beta(u_\lambda - u)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}(1-\zeta_\lambda)\ D^\beta\ u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ C \sum_{0<\mu\leq\beta} \{\int_{\substack{\lambda\leq|x|\leq 2\lambda \\ x_n\geq 0}} x_n^{(\alpha-\ell+|\beta|-|\mu|)p}\ |D^{\beta-\mu}u|^p\ dx\}^{\frac{1}{p}} ,$$

et quand λ tend vers $+\infty$, cette expression tend vers 0 d'après le théorème (de Lebesgue) de la convergence dominée, pour $|\beta| = 0,\ldots\ldots,\ell$.

<u>2ème étape</u>. Soit $u \in X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ telle que $u(x) = 0$ pour $|x| \geq N$. Soit alors $x_n \longmapsto \eta(x_n)$ une fonction appartenant à $C^\infty([0,+\infty])$ telle que :

- $0 \leq \eta(x_n) \leq 1,\ x_n \geq 0.$
- $\eta(x_n) = 0$ pour $0 \leq x_n \leq 1.$
- $\eta(x_n) = 1$ pour $x_n \geq 2.$

On pose alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta_\lambda(x_n) = \eta(\lambda x_n)$ et $u_\lambda = \eta_\lambda\ u$. Démontrons que $||u_\lambda - u||_{X^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)}$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

En effet, on a :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\, D^\beta(u_\lambda - u)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\,(1-\eta_\lambda)\, D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\beta_n} \binom{\beta_n}{j} \lambda^j\, ||x_n^j\, \eta^{(j)}(\lambda x_n)\, x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-j}\, D^{(\beta_1,\dots,\beta_n-j)} u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}(1-\eta_\lambda)\, D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ C \sum_{j=1}^{\beta_n} \{\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{2}{\lambda}} x_n^{(\alpha-\ell+|\beta|-j)p}\, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^{(\beta_1,\dots,\beta_{n-j})} u|^p dx'\}^{\frac{1}{p}}$$

et quand λ tend vers $+\infty$, cette expression tend vers 0 d'après le théorème (de Lebesgue) de la convergence dominée, pour $|\beta| \leq \ell$.

<u>3ème étape</u>. Soit $u \in X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ telle que : Supp(u) = K soit un compact de $\mathbb{R}^n_+$.

Pour $\varepsilon < d(K, x_n = 0)$, posons :

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(J_\varepsilon u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} j_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$

où $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille régularisante. On en déduit (cf. [1]) que : $J_\varepsilon u|_{\mathbb{R}^n_+} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ et que d'autre part : $J_\varepsilon u$ tend vers u dans $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ quand ε tend vers 0 et donc aussi dans $X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (car $J_\varepsilon u$ est à support contenu dans un compact fixe de $\mathbb{R}^n_+$).

Par ailleurs sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ (d'après l'inégalité de Hardy) on a :

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, $||u||_{X_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,(\sum_{|\gamma|=\ell} \|\rho^\alpha D^\gamma u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)})^{\frac{1}{p}}$ avec

$\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\dots,\ell$, or on a toujours :

$$\Big(\sum_{|\gamma|=\ell} ||\rho^{\alpha} D^{\gamma} u||^{p}_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq ||u||_{X^{\ell,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)}$$; il en résulte :

Lemme 2.3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\ldots,\ell$, la norme $||\quad||_{X^{\ell,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)}$ sur $X^{\ell,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n_+)$ est équivalente à la norme : $u \longmapsto \Big(\sum_{|\gamma|=\ell} ||\rho^{\alpha} D^{\gamma} u||^{p}_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.2.

Le théorème 2.2. ne donne pas de caractérisation de l'espace $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ pour les valeurs singulières $1,2,\ldots,\ell$ de $\alpha + \frac{1}{p}$, ceci à cause de la restriction $\beta \neq 1$ dans l'inégalité de Hardy. Nous commencerons donc par donner une modification de l'inégalité de Hardy.

Lemme 2.4. Soit $f \in \mathcal{D}(]0,1[)$. On a alors :

(i) si $\beta \neq -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $R > e^{\frac{2|\gamma|}{|\beta+1|}}$ on a :

$$\int_0^1 |f(t)|^p\, t^{\beta}\, \mathrm{Log}^{\gamma} \frac{R}{t}\, dt \leq \Big(\frac{2p}{|\beta+1|}\Big)^{p} \int_0^1 |f'(t)|^p\, t^{\beta+p}\, \mathrm{Log}^{\gamma} \frac{R}{t}\, dt$$

(ii) si $\gamma \neq -1$, $R \geq 1$, on a :

$$\int_0^1 |f(t)|^p\, t^{-1}\, \mathrm{Log}^{\gamma} \frac{R}{t}\, dt \leq \Big(\frac{p}{|\gamma+1|}\Big)^{p} \int_0^1 |f'(t)|^p\, t^{-1+p}\, \mathrm{Log}^{\gamma+p} \frac{R}{t}\, dt .$$

Dém. : (i) $\beta \neq -1$. On a :

$$\frac{d}{dt}\Big(t^{\beta+1}\, \mathrm{Log}^{\gamma} \frac{R}{t}\Big) = t^{\beta}\, \mathrm{Log}^{\gamma} \frac{R}{t}.\ P\Big(\frac{1}{\mathrm{Log}\, \frac{R}{t}}\Big)$$

où $P(X) = (\beta+1) - \gamma X$.

Pour $t \in]0,1[$ et $R \geq e^{2|\gamma|/|\beta+1|}$ on a : $\frac{R}{t} \geq e^{2|\gamma|/|\beta+1|}$

d'où : $0 \leq \mathrm{Log}^{-1} \frac{R}{t} \leq \frac{|\beta+1|}{2|\gamma|}$

$$\left|P\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right)\right| \geq |\beta+1| - |\gamma| \operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{t} \geq \frac{|\beta+1|}{2}$$

on obtient donc :

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^\beta \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt \leq \frac{2}{|\beta+1|} \left| \int_0^1 |f(t)|^p \frac{d}{dt}\left(t^{\beta+1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\right) dt\right|$$

$$\leq \frac{2}{|\beta+1|} \left\{ \left(|f(t)|^p t^{\beta+1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\right)\Big|_0^1 \right\} + \frac{2p}{|\beta+1|} \left|\int_0^1 |f(t)|^{p-1} \frac{d|f|}{dt} t^{\beta+1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt\right|$$

$$\leq \frac{2p}{|\beta+1|} \int_0^1 |f(t)|^{p-1} t^{\beta(p-1)/p} \operatorname{Log}^{\gamma\frac{p-1}{p}} \frac{R}{t} \cdot \left|\frac{df}{dt}\right| t^{\frac{\beta}{p}+1} \operatorname{Log}^{\gamma/p} \frac{R}{t}\, dt$$

$$\leq \frac{2p}{|\beta+1|} \left(\int_0^1 |f(t)|^p t^\beta \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{\beta+p} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

d'où l'inégalité (i).

(ii) $\gamma \neq -1$. On a : $t^{-1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t} = -\frac{1}{\gamma+1} \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Log}^{\gamma+1} \frac{R}{t}\right)$ et de la même façon que précédemment on obtient pour $f \in \mathfrak{D}(]0,1[)$:

$$\int_0^1 |f(t)|^p t^{-1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt \leq \frac{1}{|\gamma+1|} \left|\int_0^1 |f(t)|^p \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Log}^{\gamma+1} \frac{R}{t}\right) dt\right|$$

$$\leq \frac{p}{|\gamma+1|} \int_0^1 |f(t)|^{p-1} t^{-(p-1)/p} \operatorname{Log}^{\gamma(p-1)/p} \frac{R}{t} \cdot \left|\frac{df}{dt}\right| t^{\frac{p-1}{p}} \operatorname{Log}^{\frac{\gamma}{p+1}} \frac{R}{t}\, dt$$

$$\leq \frac{p}{|\gamma+1|} \left(\int_0^1 |f(t)|^p t^{-1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 \left|\frac{df}{dt}\right|^p t^{p-1} \operatorname{Log}^{\gamma+p} \frac{R}{t}\, dt\right)^{1/p},$$

d'où l'inégalité (ii).

Ceci étant pour $\alpha + \frac{1}{p} = k \in \{1,2,\dots,\ell\}$ on définit l'espace :

$$Y_k^{\ell,p}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'(\Omega),\ \rho^{\alpha-\ell+|\beta|} \operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{\rho} D^\beta u \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\beta|=0,\dots\ell-k$$
$$\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u \in L^p(\Omega) \text{ pour } |\beta| = \ell-k+1,\dots,\ell\}$$

muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\beta|=0}^{\ell-k} \|\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} \mathrm{Log}^{-1} \frac{R}{\rho} D^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{|\beta|=\ell-k+1}^{\ell} \|\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

avec $R > \mathrm{Max}\ (\mathrm{Max}_{x\in\overline{\Omega}}\ \rho(x),\ e^2)$. $Y_k^{\ell,p}\Omega$ est alors un espace de Banach.

On vérifie facilement (comme pour l'espace $X_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$) que si $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ alors : $u \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$ implique $\varphi\ u \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$. (Remarquer que $|\rho^{|\gamma|} \mathrm{Log}^{+1} \frac{R}{\rho}|$ est borné sur $\overline{\Omega}$ pour $|\gamma| > 0$).

Soit alors $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on va montrer que : pour $\alpha + \frac{1}{p} = k \in \{1,2,..\ell\}$ on a :

(2.5) $$\|u\|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)} \leq C\ \|u\|_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)}$$

ce qui prouvera que :

$$\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow Y_k^{\ell,p}(\Omega)\ \ (\text{car } W_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \text{ et } Y_k^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)).$$

D'après de qui précède, on se ramène, par cartes locales, à montrer que pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $\mathrm{Supp}(u) \subset \Sigma^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \quad |x| \leq 1 \quad x_n > 0\}$ on a :

(2.6) $$\Big(\sum_{|\beta|=0}^{\ell-k} \|x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} \mathrm{Log}^{-1} \frac{R}{\rho} D^\beta u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ \sum_{|\beta|=\ell-k+2}^{\ell} \|x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\ \|u\|_{W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

<u>1er cas</u>. $|\beta| \geq \ell-k+1$: il résulte de l'inégalité de Hardy (ce qui est légitime puisque $(\alpha-\ell+|\beta|)p \neq 1$) que l'on a :

$$(2.7) \qquad ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\, D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\, \Big(\sum_{|\gamma|=\ell} ||x_n^\alpha\, D^\gamma u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C\, ||u||_{W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \quad .$$

<u>2ème cas</u>. $|\beta| = \ell-k$, on doit majorer l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{-1} \operatorname{Log}^{-p} \frac{R}{x_n}\, |D^\beta u|^p\, dx = \int_{\Sigma_+} x_n^{-1} \operatorname{Log}^{-p} \frac{R}{x_n}\, |D^\beta u|^p\, dx.$$

D'après le lemme 2.4 (ii), puisque $R \geq e^2 \geq 1$, il vient :

$$\int_0^1 x_n^{-1} \operatorname{Log}^{-p} \frac{R}{x_n}\, |D^\beta u|^p\, dx_n \leq C \int_0^1 x_n^{-1+p}\, \Big|\frac{\partial}{\partial x_n} D^\beta u\Big|^p\, dx_n$$

et par suite :

$$I \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{-1+p}\, \Big|\frac{\partial}{\partial x_n}\, D^\beta u\Big|^p\, dx \quad .$$

Posons alors : $\frac{\partial}{\partial x_n} D^\beta = D^\gamma$; on a : $|\gamma| = |\beta| + 1 = \ell-k+1$, par ailleurs :

$\alpha-\ell+|\gamma| = \alpha-k+1 = -\frac{1}{p} + 1 = \frac{1}{p}(-1+p)$, on peut donc utiliser le résultat (2.7), ce qui donne :

$$(2.8) \qquad ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} \operatorname{Log}^{-1} \frac{R}{x_n}\, D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq Cte\, \Big(\sum_{|\gamma|=\ell} ||x_n^\alpha\, D^\gamma u||^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cte\, ||u||_{W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} .$$

<u>3ème cas</u>. $|\beta| = \ell-k-1$, on doit majorer :

$$I = \int_{\Sigma+} x_n^{-1-p} \operatorname{Log}^{-p} \frac{R}{x_n}\, |D^\beta u|^p\, dx \quad .$$

D'après le lemme 2.4. (i), puisque $R \geq e^2$, il vient :

$$I \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{-1} \, \mathrm{Log}^{-p} \frac{R}{x_n} \, |D^\gamma u|^p \, dx$$

avec $D^\gamma = \frac{\partial}{\partial x_n} D^\beta$, donc : $|\gamma| = |\beta| + 1 = \ell - k$, on peut alors utiliser la majoration (2.8), i.e. :

$$(2.9) \quad \left\| x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} \, \mathrm{Log}^{-1} \frac{R}{x_n} \, D^\beta u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \left(\sum_{|\gamma|=\ell} \| x_n^\alpha \, D^\gamma u \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \, \|u\|_{W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)} \; ;$$

et il est facile de voir, par un raisonnement analogue, que (2.9) est en fait valable pour $|\beta| \leq \ell - k$.

De (2.7) , (2.9), on déduit (2.6) avec l'information complémentaire suivante :

(2.10) sur $\mathcal{D}(\Omega)$, la norme $\| \quad \|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)}$ est équivalente à la norme :

$u \longmapsto \left(\sum_{|\gamma|=\ell} \| \rho^\alpha \, D^\gamma u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$ (puisque pour $k = 1,2,\ldots,\ell$ on a toujours : $\left(\sum_{|\gamma|=\ell} \| \rho^\alpha \, D^\gamma u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)}$).

En fait, on a mieux que le résultat : $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow Y_k^{\ell,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant :

<u>Théorème 2.3.</u> Pour $\alpha + \frac{1}{p} = k \in \{1,2,\ldots,\ell\}$ on a :

(i) $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega) = Y_k^{\ell,p}(\Omega)$.

(ii) Sur $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$, les normes : $u \longmapsto \left(\sum_{|\gamma|=\ell} \| \rho^\alpha \, D^\gamma u \|^p_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p} \right)^{\frac{1}{p}}$

$u \longmapsto \|u\|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)}$

$u \longmapsto \|u\|_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)}$

sont équivalentes.

Pour cela, on commence par remarquer, puisque Ω est borné, que l'on a :

(2.11) $\quad Y_k^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$.

En effet, pour : $|\beta| \leq \ell-k$ et $u \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$ on a :

$$\|\rho^\alpha D^\beta u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} \operatorname{Log}^{-1} \frac{R}{\rho} D^\beta u\|_{L^p(\Omega)},$$

et pour $|\beta| > \ell-k$, on a aussi :

$$\|\rho^\alpha D^\beta u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\rho^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta u\|_{L^p(\Omega)}$$

d'où :

$$\|u\|_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{Y_k^{\ell,p}(\Omega)}$$

ce qui prouve (2.11). Finalement, tenant compte de (2.10) et (2.11) il nous suffit de montrer que $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $Y_k^{\ell,p}(\Omega)$. Pour cela, on a besoin de quelques lemmes techniques :

Lemme 2.5. Soient $R > 0$, β et $\gamma \in \mathbb{R}$. Posons : $f(t) = t^\beta \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t}$. Alors si $t \in]0,R[$, $\quad f^{(k)}(t) = t^{\beta-k} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t} \cdot P_k\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right)$

où $P_k(X)$ est un polynôme de degré $\leq k$ et $P_1(X) = \beta - \gamma X$.

On fait la démonstration par récurrence sur l'entier k.

. k = 1, la vérification est immédiate ($P_0(X) = 1$).

. Supposons la formule vraie à l'ordre k, et montrons-la à l'ordre k+1 ; on obtient :

$$f^{(k+1)}(t) = t^{\beta-k+1} \operatorname{Log}^\gamma \frac{R}{t} \cdot P_{k+1}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right)$$

où $P_{k+1}(X) = (\beta-k) P_k(X) - \gamma X P_k(X) + X^2 P_k'(X)$

on a bien : degré $P_{k+1} \leq k+1$.

<u>Lemme 2.6.</u> Si $t \in]0,R[$, on a :

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right) = \frac{1}{t^k}\,\frac{1}{\operatorname{Log}^2\frac{R}{t}}\cdot P_{k-1}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right) \qquad (k \geq 1)$$

où $P_{k-1}(X)$ est le polynôme intervenant dans le lemme 2.5.

En effet, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{t}}\right) = \frac{1}{\operatorname{Log}^2\frac{R}{t}}\cdot\frac{1}{t} = f(t)$$

et $f(t)$ est une fonction du type indiquée dans le lemme 2.5.

<u>Lemme 2.7.</u> Soit $g \in C^\infty(]0,R[)$ et $f \in C^\infty([0,\infty[)$ avec $g \geq 0$, on a alors :

$$\frac{d^j}{dt^j}(f \circ g)(t) = \Sigma\, C^j_{n,\beta_i}\; f^{(n)}\left[g(t)\right] \prod_{i=1}^{j}\left(\frac{d^i}{dt^i}g(t)\right)^{\beta_i}$$

$$(t \in]0,R[)$$

pour $j \geq 1$, où la somme Σ est à prendre parmi les indices n, β_i tels que :

$$1 \leq \sum_{i=1}^{j} \beta_i \leq n \;,\; \beta_i \text{ entier } \geq 0$$

$$n + \sum_{i=1}^{j} \beta_i(i-1) \leq j.$$

On raisonne par récurrence sur l'entier j.

. $j = 1$: $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = f'\left[g(t)\right]\frac{d}{dt}g(t)$.

. Supposons la formule vraie à l'ordre j et démontrons la pour j+1. On obtient en dérivant les deux membres :

$$\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}(f \circ g)(t) = \Sigma\, C^j_{n,\beta_i}\; \left(f^{(n+1)}\left[g(t)\right] \prod_{i=1}^{j}\left(\frac{d^i}{dt^i}g(t)\right)^{\beta_i} + \right.$$

$$+ f^{(n)}\left[g(t)\right] \sum_{i'=1}^{j}\; \prod_{i\neq i'}\left(\frac{d^i}{dt^i}g(t)\right)^{\beta_i} \beta_{i'}\left(\frac{d^{i'}}{dt^{i'}}\right)^{\beta_{i'}-1}\frac{d^{i'+1}}{dt^{i'+1}}g!$$

On peut écrire :

$$f^{(n+1)}\left[g(t)\right] \frac{d}{dt} g(t) \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{d^i}{dt^i} g(t)\right)^{\beta_i} = f^{(n+1)}\left[g(t)\right] \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{d^i}{dt^i} g(t)\right)^{\gamma_i}$$

avec $\gamma_i = \beta_i$ si $i > 1$ et $\gamma_1 = \beta_1 + 1$. Ainsi, on a :

$$1 \leq \sum_{i=1}^{j} \gamma_i = \sum_{i=1}^{j} \beta_i + 1 \leq n + 1.$$

De plus :

$$(n+1) + \sum_{i=1}^{j} \gamma_i (i-1) = (n+1) + \sum_{i=2}^{j} \beta_i(i-1) + (\beta_1+1)(1-1)$$

$$= (n+1) + \sum_{i=2}^{j} \beta_i(i-1) \leq j + 1.$$

Il reste à vérifier que les conditions du lemme sont satisfaites pour des expressions de la forme :

$$C = \prod_{i \neq i'} \left(\frac{d^i}{dt^i} g(t)\right)^{\beta_i} \beta_{i'}\left(\frac{d^{i'}}{dt^{i'}} g\right)^{\beta_{i'}-1} \frac{d^{i'+1}}{dt^{i'+1}} g(t).$$

<u>1er cas.</u> $i' = j$ on peut alors écrire : $C = \beta'_i \prod_{i=1}^{j+1} \left(\frac{d^i}{dt^i} g(t)\right)^{\gamma_i}$

avec $\gamma_i = \beta_i$ pour $i < j$ et $\gamma_j = \beta_{j-1}$, $\gamma_{j+1} = 1$.

On a alors : $1 \leq \sum_i \gamma_i = \sum_i \beta_i \leq n$

et :

$$n + \sum_i \gamma_i(i-1) = n + \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i(i-1) + (\beta_j-1)(j-1) + j$$

$$= n + \sum_{i=1}^{j} \beta_i(i-1) + 1$$

$$\leq j+1 .$$

<u>2ème cas</u>. $i' < j$, on pose alors $i'_1 = i'+1$ on a : $i'_1 \leq j$, et donc on peut écrire :

$$C = \beta'_i \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{d^i}{dt^i} g(t)\right)^{\gamma_i}$$

avec $\gamma_i = \beta_i$ pour $i \neq i', i'_1$; $\gamma_{i'} = \beta_{i'}-1$ et $\gamma_{i'_1} = \beta_{i'_1}+1$. On a donc :

$$1 \leq \sum_i \gamma_i = \sum_i \beta_i \leq n$$

et

$$n + \sum_i \gamma_i(i-1) = n + \sum_{i \neq i', i'_1} \beta_i(i-1) + (\beta_{i'}-1)(i'-1) + (\beta_{i'_1}+1)(i'_1-1)$$

$$= n + \sum_i \beta_i(i-1) - i' + 1 + i'_1 - 1$$

$$= n + \sum_i \beta_i(i-1) + 1 \leq j + 1. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Ceci étant, soit $\eta = \eta(x_n) \in C^\infty([0,+\infty[)$ telle que :

- $\eta(x_n) = 0$ pour $0 \leq x_n \leq \frac{1}{4}$
- $\eta(x_n) = 1$ pour $\frac{3}{4} \leq x_n$
- $0 \leq (x_n) \leq 1$, $x_n \geq 0$.

Soit $\lambda > 0$ et $R \geq 1$, on pose alors :

$$(2.12) \qquad \eta_\lambda(x_n) = \begin{cases} \eta\left(\dfrac{\lambda}{\operatorname{Log} \frac{R}{x_n}}\right) & \text{pour } x_n < R \\ 1 & \text{pour } x_n \geq R. \end{cases}$$

η_λ possède les propriétés suivantes :

Lemme 2.8. $\eta_\lambda \in C^\infty([0,+\infty[)$ et vérifie :

(i) $\eta_\lambda(x_n) = 0$ pour $x_n < R\, e^{-4\lambda}$.

(ii) $\eta_\lambda(x_n) = 1$ pour $x_n \geq R\, e^{-4\lambda/3}$.

(iii) $0 \leq \eta_\lambda(x_n) \leq 1$.

(iv) Pour $x_n \in I_\lambda = [R\, e^{-4\lambda}, R\, e^{-4\lambda/3}]$ on a : (pour λ assez grand)

$$\left|\frac{d^j}{dx_n^j}\ \eta_\lambda(x_n)\right| \leq \frac{C_j}{x_n^j \operatorname{Log} \frac{R}{x_n}} \qquad (j \geq 1)$$

C_j étant une constante.

Les propriétés (i) (ii) (iii) et $\eta_\lambda \in C^\infty([0,+\infty[)$ sont évidentes (remarquer que $R\, e^{-4\lambda/3} < R$).

Démontrons (iv) : comme pour $x_n \in I_\lambda$, on a : $x_n < R$, on peut appliquer le lemme 2.7, ce qui donne :

$$\frac{d^j}{dx_n^j}\ \eta_\lambda(x_n) = \Sigma\ C^j_{n,\beta_i}\ \eta^{(n)}\ \left(\frac{\lambda}{\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}}\right) \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{\lambda}{\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}}\right)\right)^{\beta_i}$$

avec :

$1 \leq \sum_{i=1}^{j} \beta_i \leq n$, e t $n + \sum_{i=1}^{j} \beta_i(i-1) \leq j$. Or les dérivées $\eta^{(n)}$ de η sont bornées et donc :

$$\left|\frac{d^j}{d\,x_n^j}\ \eta_\lambda\ (x_n)\right| \leq C\ \Sigma\ \prod_i\ \lambda^{\beta_i} \left|\left(\frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{}{\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}}\right)\right)\right|^{\beta_i}.$$

Mais d'après le lemme 2.6 on a :

$$\frac{d^i}{dx_n^i}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}}\right) = \frac{1}{x_n^i}\ \frac{1}{\operatorname{Log}^2\frac{R}{x_n}}\ P_{i-1}\left(\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}}\right).$$

Mais si $x_n \in I_\lambda$, on a : $\frac{1}{4\lambda} \leq \frac{1}{\mathrm{Log}\frac{R}{x_n}} \leq \frac{3}{4\lambda}$, par suite $P_{i-1}\ (\frac{1}{\mathrm{Log}\ \frac{R}{x_n}})$

est borné, indépendamment de $\lambda \geq \lambda_o > 0$, pour $x_n \in I_\lambda$.

Par ailleurs, puisque pour $x_n \in I_\lambda$, on a : $\lambda \leq \frac{3}{4} \mathrm{Log}\ \frac{R}{x_n}$, donc :

$$\prod_i \lambda^{\beta_i} \left|\frac{d^i}{dx_n^i} (\frac{1}{\mathrm{Log}\ \frac{R}{x_n}})\right|^{\beta_i} \leq C \prod_i \mathrm{Log}^{\beta_i} \frac{R}{x_n} \frac{1}{x_n^{i\beta_i}} \frac{1}{\mathrm{Log}^{2\beta i} \frac{R}{x_n}}$$

$$\leq C\ x_n^{-\sum\limits_i i\beta_i}\ \mathrm{Log}^{-\sum\limits_i \beta_i} \frac{R}{x_n}.$$

Mais : $1 \leq \sum\limits_i \beta_i \leq n$ et pour $\lambda \geq 1$, on a : $\mathrm{Log}\ \frac{R}{x_n} \geq 1$.

$\sum\limits_i i\beta_i = \sum\limits_i \beta_i(i-1) + \sum\limits_i \beta_i \leq j-n+n = j$ et pour λ assez grand on a :

$R\ e^{-4\lambda/3} \leq 1$ donc $x_n \leq 1$. C.Q.F.D.

On peut alors démontrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $Y_k^{\ell,p}(\Omega)$.

<u>1ère étape</u>. Soit $u \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$. On se ramène, par cartes locales, à u telle que :

$\mathrm{Supp}(u) \subset \Sigma_+$. Pour $\lambda > 0$ on pose :

$$u_\lambda = \eta_\lambda\ u.$$

On a déjà, en revenant à Ω que $u_\lambda \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$, on va montrer que u_λ converge vers u dans $Y_k^{\ell,p}(\Omega)$ quand λ tend vers $+\infty$. On se ramène à démontrer :

(2.13) $\left|\left|x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\ \mathrm{Log}^{-1} \frac{R}{x_n}\ D^\beta(u-u_\lambda)\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ pour $|\beta| \leq \ell-k$.

(2.14) $\left|\left|x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\ D^\beta\ (u-u_\lambda)\right|\right|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ pour $|\beta| \geq \ell-k+1$.

Montrons (2.13), on a :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} \operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n} D^\beta(u-u_\lambda)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}(1-\eta_\lambda)\operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n} D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\beta_n} \binom{\beta_n}{j} ||x_n^j \eta_\lambda^{(j)}(x_n)\operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n} x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-j} D^{(\beta_1,\dots,\beta_{n-j})}u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

Or $|x_n^j \eta_\lambda^{(j)}(x_n)| \leq C$ pour $x_n \in I_\lambda$, la constante C pouvant être choisie indépendante de λ, d'où :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} \operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n} D^\beta(u-u_\lambda)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}\operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n}(1-\eta_\lambda)D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ C\sum_{j=1}^{\beta_n}\{\int_{I_\lambda} x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-j}\, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}}|D^{(\beta_1,\dots,\beta_{n-j})}u|^p\, dx'\}^{\frac{1}{p}}$$

et quand λ tend vers $+\infty$, cette expression tend vers 0 d'après le théorème de la convergence dominée.

Montrons (2.14); on a :

$$||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|} D^\beta(u-u_\lambda)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^{\alpha-\ell+|\beta|}(1-\eta_\lambda) D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{|\beta|-\ell+k-1}\binom{\beta_n}{j} ||x_n^j \eta_\lambda^{(j)}(x_n)\, x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-j} D^{(\beta_1,\dots,\beta_{n-j})}u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ \sum_{j=|\beta|-\ell+k}^{\beta_n}\binom{\beta_n}{j} ||x_n^j \eta_\lambda^{(j)}(x_n)\operatorname{Log}\frac{R}{x_n}\,.$$

$$.\, x_n^{\alpha-\ell+|\beta|-j}\operatorname{Log}^{-1}\frac{R}{x_n} D^{(\beta_1,\dots\beta_{n-j})}u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

On utilise alors la majoration (iv) du lemme 2.8, et on conclut comme pour (2.13).

2ème étape. On est ramené à établir que l'on peut approcher dans $Y_k^{\ell,p}(\Omega)$ tout élément $u \in Y_k^{\ell,p}(\Omega)$ à support compact dans Ω par des éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. Il suffit alors de reprendre la démonstration du lemme 2.2 3ème étape.

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.

Remarque 2.3. Il résulte du théorème 2.2 que :

$$H_0^1(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ tel que : } \frac{u}{\rho} \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad i = 1,\dots,n\}.$$

Puisque $\overset{\circ}{W}{}^p_\alpha(\Omega) = L^p_\alpha(\Omega)$ est un espace normal de distributions dans Ω (i.e. : un espace de distributions dans lequel $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense), $(L^p_\alpha(\Omega))'$ est un espace de distributions dans Ω.

Par ailleurs, l'espace $(L^p_\alpha(\Omega))'$ est isomorphe à l'espace $L^{p'}_{-\alpha}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. En effet, soit $T \in (L^p_\alpha(\Omega))'$, alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle T,\varphi\rangle_{(L^p_\alpha(\Omega))',\ L^p_\alpha(\Omega)} &= \langle T,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\ \mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \langle \rho^{-\alpha}T,\ \rho^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\,\mathcal{D}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Mais : $u \longmapsto \rho^\alpha u : L^p_\alpha(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ est une isométrie linéaire, on en déduit que l'on peut identifier $\rho^{-\alpha}\,T$ avec un élément $g \in L^{p'}(\Omega)$, et un seul. Donc $\rho^\alpha\, g$ appartient à $L^{p'}_{-\alpha}(\Omega)$ et de plus on peut vérifier que :

$$||T||_{(L^p_\alpha(\Omega))'} = ||g||_{L^{p'}(\Omega)} = ||\rho^\alpha\, g||_{L^{p'}_{-\alpha}(\Omega)}.$$

Or, pour $\ell \geq 1$, $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\Omega)$ est aussi un espace normal de distributions dans Ω, on pose alors (en accord avec l'isomorphisme précédent) par définition

$$W^{-\ell,p'}_{-\alpha}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\Omega))'.$$

Cette définition donnée, on a :

Corollaire 2.1.

(i) pour ℓ entier, $1 < p < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha + \frac{1}{p}$, et $\alpha - \beta + \frac{1}{p} \neq 1,2,\ldots,\ell$ l'application : $u \longmapsto \rho^{\beta} u$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ sur $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)$, dont l'isomorphisme inverse est : $v \longrightarrow \rho^{-\beta} v$,

(ii) pour ℓ entier, $1 < p < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec : $-\alpha + \frac{1}{p'}$, $-\alpha + \beta + \frac{1}{p'} \neq 1,2,\ldots,\ell$ l'application : $u \longrightarrow \rho^{\beta} u$ est un isomorphisme algébrique et topologique de $W^{-\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ sur $W^{-\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)$; c'est l'isomorphisme transposé de l'isomorphisme algébrique et topologique : $\varphi \longrightarrow \rho^{\beta} \varphi$: $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{-\alpha+\beta}(\Omega)$ sur $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p'}_{-\alpha}(\Omega)$, l'isomorphisme inverse étant : $v \longrightarrow \rho^{-\beta} v$.

Démonstration de (i). Pour $\ell = 0$, l'assertion est triviale.

Pour $\ell \geq 1$, soit $u \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$, on a alors :

pour $|\gamma| \leq \ell$, $$D^{\gamma}(\rho^{\beta} u) = \sum_{\delta \leq \gamma} \binom{\lambda}{\delta} D^{\delta}(\rho^{\beta}).(D^{\gamma-\delta} u)$$

donc :

$$\rho^{\alpha-\beta-\ell+|\gamma|} D^{\gamma}(\rho^{\beta} u) = \sum_{\delta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\delta} D^{\delta}(\rho^{\beta})\rho^{|\delta|-\beta} \rho^{\alpha-\ell+|\gamma|-|\delta|} D^{\gamma-\delta} u$$

Or $$D^{\delta}(\rho^{\beta}) = \sum_{j=1}^{|\delta|} a_j(x) \rho^{\beta-j} .$$

Donc : $|\rho^{|\delta|-\beta} D^{\delta}(\rho^{\beta})| \leq C$. Par suite, $\rho^{\alpha-\beta-\ell+|\gamma|} D^{\gamma}(\rho^{\beta} u) \in L^p(\Omega)$

et de plus :

$$|\gamma| \leq \ell \text{ , } ||\rho^{\alpha-\beta-\ell+|\gamma|} D^{\gamma}(\rho^{\beta} u)||_{L^p(\Omega)} \leq C \, ||u||_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)} .$$

De même, nous montrerions que si $v \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha-\beta}$ alors : $\rho^{-\beta} v \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ et

$$||\rho^{-\beta}\, v||_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)} \leq C\, ||v||_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)}.$$

Démonstration de (ii) : on peut supposer $\ell \geq 1$. On part de l'isomorphisme :

$$\phi_\beta : \varphi \longrightarrow \rho^\beta \varphi : \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p'}_{-\alpha+\beta}(\Omega) \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p'}_{-\alpha}(\Omega)$$

on en déduit un isomorphisme ${}^t\phi_\beta : W^{-\ell,p}_{\alpha}(\Omega) \longrightarrow W^{-\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)$. Il nous reste à interpréter ${}^t\phi_\beta$. Soient $u \in W^{-\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors :

$$<{}^t\phi_\beta\, u, \varphi>_{W^{-\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p'}_{-\alpha+\beta}(\Omega)} = <u, \phi_\beta\, \varphi>_{W^{-\ell,p}_{\alpha}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p'}_{-\alpha}(\Omega)}$$

i.e. $$<{}^t\phi_\beta\, u, \varphi>_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = <u, \rho^\beta \varphi>_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}$$

donc ${}^t\phi_\infty\, u = \rho^\beta\, u$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.2. Pour ℓ entier, $1 < p < +\infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1, 2, \ldots, \ell$. L'application : $u \longmapsto \rho^\beta\, u$ est continue de $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha-\beta}(\Omega)$.

Il suffit, d'après le corollaire 2.1 de montrer la continuité dans le cas où $\alpha - \beta + \frac{1}{p} \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. Posons $\alpha - \beta + \frac{1}{p} = k$.

D'après le théorème 2.3, il faut montrer que :

pour $|\gamma| \leq \ell - k$, $||\rho^{\alpha-\beta-\ell+|\gamma|}\, \mathrm{Log}^{-1}\frac{R}{\rho}\; D^\gamma(\rho^\beta\, u)||_{L^p(\Omega)} \leq C\, ||u||_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)}$,

Pour γ tel que $|\gamma| \geq \ell - k + 1$,

$$||\rho^{\alpha-\beta-\ell+|\gamma|}\, D^\gamma(\rho^\beta\, u)||_{L^p(\Omega)} \leq C\, ||u||_{\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_{\alpha}(\Omega)}.$$

Cette dernière inégalité a été prouvée dans le corollaire 2.1 ; pour l'autre inégalité il suffit de remarquer que $|\mathrm{Log}^{-1}\frac{R}{\rho}| \leq C$.

III - UN THEOREME DE DENSITE.

Théorème 3.1. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$ et $0 < \alpha + \frac{1}{p}$. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$) est dense dans $W^{\ell,p}_\alpha(\Omega)$ (resp. $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$).

Par cartes locales, on se ramène à établir le théorème pour $\mathbb{R}^n_+$. La démonstration résulte de plusieurs lemmes.

Lemme 3.1. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 < p < +\infty$. Alors $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)$ est dense dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour cela on utilise la méthode de tronquature employée dans la démonstration du lemme 2.2., 1ère étape.

Lemme 3.2. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$ et $\alpha \geq 0$. Alors $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \wedge \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)$ pour la topologie de $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Soit u appartenant à $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \wedge \overline{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)}$. Pour h appartenant à $\mathbb{R}_+$ on pose :

$$u_h(x',x_n) = u(x',x_n+h) \quad \text{pour } (x',x_n) \in \mathbb{R}^n_+ .$$

On vérifie que u_h appartient à $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \wedge \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)$. De plus u_h tend vers u dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ quand h tend vers zéro. En effet :

$$||x_n^\alpha \ D^\beta u_h - x_n^\alpha \ D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||(x_n+h)^\alpha \ D^\beta u_h - x_n^\alpha \ D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$+ ||((x_n+h)^\alpha - x_n^\alpha) \ D^\beta u_h||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} .$$

D'après la continuité de la translation dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, le premier terme tend vers zéro. D'autre part u étant à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, il existe deux constantes positives k et k' telles que :

$$\|((x_n+h)^{\alpha}-x_n{}^{\alpha})D^{\beta}\,u_h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{|x'|\leq k} dx' \int_0^{k'} (1-(\frac{x_n}{x_n+h})^{\alpha})^p (x_n+h)^{\alpha p}|D^{\beta}u(x',x_n+h)|^p\,dx_n$$

$$\leq \int_{|x'|\leq k} dx' \int_0^{\delta} (x_n+h)^{\alpha p}|D^{\beta}u(x',x_n+h)|^p\,dx_n +$$

$$+ \sup_{\delta\leq x_n\leq k'} (1-(\frac{x_n}{x_n+h})^{\alpha})^p \int_{|x'|\leq k} dx' \int_{\delta}^{k'} (x_n+h)^{\alpha p}|D^{\beta}\,u(x',x_n+h)|^p\,dx_n$$

où δ est un nombre de $]0,k']$ que l'on choisira par la suite. Or,

$$\int_{|x'|\leq k} dx' \int_0^{\delta} (x_n+h)^{\alpha p}|D^{\beta}\,u(x',x_n+h)|^p\,dx_n = \int_{|x'|\leq k} dx' \int_h^{h+\delta} x_n{}^{\alpha p}|D^{\beta}u(x',x_n)|^p\,dx_n,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma_1 > 0$ tel que

$$\int_{|x'|\leq k} dx' \int_0^{\gamma_1} x_n{}^{\alpha p}\,|D^{\beta}\,u(x',x_n)|^p\,dx_n < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si l'on se restreint à h et δ appartenant à $]0,\frac{\gamma_1}{2}]$ on a :

$$\int_{|x'|\leq k} \int_h^{h+\delta} x_n{}^{\alpha p}\,|D^{\beta}\,u(x)|^p\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On fixe maintenant δ ainsi choisi. Il existe $\gamma_2 > 0$ tel que pour $0 < h < \gamma_2$,

$$\sup_{\delta\leq x_n\leq k'} (1-(\frac{x_n}{x_n+h})^{\alpha})^p = (1-(\frac{\delta}{\delta+h})^{\alpha})^p \leq \frac{\varepsilon}{2\|x_n{}^{\alpha}\,D^{\beta}\,u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}}$$

Ainsi u_h tend vers u dans $W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, quand h tend vers zéro.

Il suffit maintenant d'approcher u_h par des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Pour cela on utilise le procédé de régularisation. Auparavant on remarque que $D^{\beta}\,u_h \in L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times]-\frac{h}{2},+\infty[)$.

Soit $(j_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante sur $\mathbb{R}^n$. On pose pour x appartenant à $\mathbb{R}^n$:

$$J_\varepsilon\, u_h(x) = \int_{\Omega_h} j_\varepsilon\,(x-y)\, u_h(y)\, dy$$

où $\Omega_h = \{x,\ x \in \mathbb{R}^{n-1} \times]-\frac{h}{2}, +\infty[\}$. Comme dans [1] on déduit que $J_\varepsilon\, u_h|_{\mathbb{R}^n_+}$ converge vers $u_h|_{\mathbb{R}^n_+}$ dans $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$, et comme u_h est à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ et $\alpha \geq 0$, on en déduit que $J_\varepsilon\, u_h|_{\mathbb{R}^n_+}$ converge vers $u_h|_{\mathbb{R}^n_+}$ dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$. Il suffit enfin de remarquer que $J_\varepsilon\, u_h|_{\mathbb{R}^n_+}$ appartient à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

<u>Lemme 3.3.</u> Soit $\ell \in \mathbb{N}$, $1 < p < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $-\frac{1}{p} < \alpha \leq 0$. Alors $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ pour la topologie de $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

On va donner ici une méthode générale d'approximation (qui complète la méthode utilisée dans le lemme 3.2).

<u>1ère étape</u>. On régularise d'abord par rapport à la variable x'. Pour cela soit une famille régularisante $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On pose alors pour presque tout x_n appartenant à $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{G}_\varepsilon\, u(x',x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(t')\, u\,(x'-t',x_n)\, dt' = (g_\varepsilon \underset{t'}{*} u\,(.,x_n))\,(x')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(x'-t')\, u\,(t',x_n)\, dt'$$

et pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_{n-1},0)$, $|\beta| \leq \ell$ on a :

$$D^\beta\,(\mathcal{G}_\varepsilon\, u)(x',x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon\,(t')\, D^\beta\, u(x'-t',x_n)\, dt'.$$

Pour les dérivées par rapport à x_n, on vérifie que pour $0 \leq j \leq \ell$, pour presque tout x_n appartenant à $\mathbb{R}_+$ on a :

$$\frac{\partial^j \mathcal{G}_\varepsilon\, u}{\partial x_n^{\,j}}\,(x',x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(t')\, \frac{\partial^j u}{\partial x_n^{\,j}}\,(x'-t',x_n)\, dt'.$$

Regroupant ces deux résultats on obtient que pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq \ell$:

$$D^\beta \mathcal{G}_\varepsilon u(x',x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon (t')\, D^\beta u(x'-t',x_n)\, dt'.$$

On vérifie enfin que $\mathcal{G}_\varepsilon$ u converge vers u dans $W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ quand ε tend vers zéro. En effet, soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq \ell$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \,|\, D^\beta \mathcal{G}_\varepsilon u - D^\beta u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \,\left|\, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(t')(D^\beta u(x'-t',x_n) - D^\beta u(x',x_n))dt'\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(t') \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \,|\, D^\beta u(x'-t',x_n) - D^\beta u(x',x_n)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dt'.$$

La translation étant continue dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$,

$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \,|\, D^\beta u(x'-t',x_n) - D^\beta u(x',x_n)|^p\, dx\right)^{1/p}$ tend vers zéro quand $|t'|$ tend vers zéro. Comme le diamètre du support de g_ε tend vers zéro quand ε tend vers zéro et que $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_\varepsilon(t')\, dt' = 1$, on en déduit que

$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \,|\, D^\beta \mathcal{G}_\varepsilon u - D^\beta u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ tend vers zéro quand ε tend vers zéro.

<u>2ème étape</u>. On doit approcher maintenant $\mathcal{G}_\varepsilon$ u, qui est de classe C^∞ par rapport à x', par des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Pour simplifier l'écriture $\mathcal{G}_\varepsilon$ u sera remplacée par la notation u.

Pour $0 \leq j \leq \ell$ et pour presque tout x_n appartenant à $\mathbb{R}_+$, $\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(\cdot,x_n)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Pour $0 \leq j \leq \ell-1$ et pour $\ell' \in \mathbb{N}$ on vérifie que :

$$\begin{cases} x_n^\alpha \dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L^p\ (0,+\infty\ ;\ W^{\ell',p}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ x_n^\alpha \dfrac{\partial^{j+1} u}{\partial x_n^{j+1}} \in L^p\ (0,+\infty\ ;\ W^{\ell',p}(\mathbb{R}^{n-1})) \end{cases}$$

Comme par hypothèse $0 < \alpha + \dfrac{1}{p} < 1$; on en déduit que pour $0 \leq j \leq \ell-1$ et pour $\ell' \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in C^0\ ([0,+\infty[\ ;\ W^{\ell',p}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

Donc $\dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\ (.,0)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ et même à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ pour $0 \leq j \leq \ell-1$.

Soit φ_j une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^j \varphi_j}{\partial x_n^j}\ (0) = 1 \\ \dfrac{\partial^k \varphi_j}{\partial x_n^k}\ (0) = 0 \quad \text{pour } k = 0,1,..,j-1,\ j+1,...,\ell-1. \end{cases}$$

On pose :

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x',x_n) = u(x',x_n) - \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\ (x',0)\ \varphi_j(x_n).$$

Comme $\displaystyle\sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\ (x',0)$ appartient à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, il suffit d'approcher $\tilde{u}$ par des éléments de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$. De plus $\tilde{u}$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in W_\alpha^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{E}'(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \\ \dfrac{\partial^j \tilde{u}}{\partial x_n^j}\ (.,0) = 0 \quad , \quad j = 0,1,..,\ell-1. \end{cases}$$

<u>Remarque 3.1.</u> Pour $-1 < \alpha p$, $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \subset W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>3ème étape</u>. On doit approcher maintenant $\tilde{u}$ par des fonctions de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$. Pour $h > 0$, on pose :

$$\tilde{u}_h(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x',x_n-h) & \text{pour } h \leq x_n \\ 0 & \text{pour } 0 < x_n < h. \end{cases}$$

Grâce aux propriétés de $\tilde{u}$, on vérifie que pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq \ell$:

$$D^\beta \tilde{u}_h(x) = \begin{cases} D^\beta u(x',x_n-h) & \text{pour } h \leq x_n \\ 0 & \text{pour } 0 < x_n < h. \end{cases}$$

$\tilde{u}_h$ converge vers $\tilde{u}$ dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ quand h tend vers zéro. En effet soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leq \ell$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}_h - D^\beta \tilde{u}|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_h^{+\infty} x_n^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}(x',x_n-h) - D^\beta \tilde{u}(x',x_n)|^p \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^h x_n^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}(x',x_n)|^p \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} (x_n+h)^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}(x',x_n) - D^\beta \tilde{u}(x',x_n+h)|^p \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^h x_n^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}(x',x_n)|^p \, dx. \end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée la deuxième intégrale tend vers zéro, quand h tend vers zéro. Pour la première intégrale on utilise la majoration suivante :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} (x_n+h)^{\alpha p} \mid D^\beta \tilde{u}(x',x_n+h) - D^\beta \tilde{u}(x',x_n)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \|(x_n+h)^\alpha D^\beta \tilde{u}(x',x_n+h) - x_n^\alpha D^\beta \tilde{u}(x',x_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ \|((x_n+h)^\alpha - x_n^\alpha) D^\beta \tilde{u}(x',x_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Le premier terme tend vers zéro quand h tend vers zéro d'après la continuité de la translation dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, et le second terme tend vers zéro quand h tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée.

4ème étape. On régularise maintenant $\tilde{u}_h$. Soit $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante sur $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$(J_\varepsilon \tilde{u}_h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} j_\varepsilon(x-y) \tilde{u}_h(y) \, dy.$$

En utilisant une démonstration analogue à celle employée dans le lemme 2.2. 3ème étape on montre que $J_\varepsilon \tilde{u}_h|_{\mathbb{R}^n_+}$, qui appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$, converge vers $\tilde{u}_h$ dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ quand h tend vers zéro.

Corollaire 3.1. Soient ℓ entier ≥ 1, $1 < p < +\infty$; alors on a :

$$W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) = \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \text{ pour } \alpha + \frac{1}{p} \leq 0 \text{ ou } \ell < \alpha + \frac{1}{p} .$$

Pour cela, on commence par appliquer le lemme 3.1 ; puis, on applique la méthode de démonstration utilisée dans le théorème 2.2.

Corollaire 3.2. Soient ℓ entier ≥ 1, $1 < p < +\infty$; alors on a :

$$W^{\ell,p}_\alpha(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\Omega) \quad \text{pour } \alpha + \frac{1}{p} = \ell.$$

On a le même résultat en remplaçant Ω par $\mathbb{R}^n_+$.

Comme $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ est dense dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ d'après le théorème 3.1, il suffit d'approcher tout élément **u** appartenant à $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ par des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ dans $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

On reprend la démonstration du lemme 2.2 2ème étape ; soit (avec les notations de ce paragraphe) $u_\lambda = \eta_\lambda\, u$, u_λ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

On a :

$$||x_n^\alpha\, D^\beta(u_\lambda - u)||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq ||x_n^\alpha\,(1-\eta_\lambda)\, D^\beta u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} +$$

$$+ C \sum_{j=1}^{\beta_n} \{|\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{2}{\lambda}} x_n^{\alpha p}\, \lambda^{jp}\, |\eta^{(j)}(\lambda x_n)|^p\, dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^{(\beta_1,\ldots,\beta_n - j)} u|^p\, dx'\}$$

Or :

$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} D^{(\beta_1,\ldots,\beta_n-j)} u|^p\, dx' \leq C$, C étant une constante indépendante de x_n, puisque u appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

Par ailleurs :

$$\lambda^{jp} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{2}{\lambda}} x_n^{\alpha p}\, |\eta^{(j)}(\lambda x_n)|^p\, dx_n \leq C\, \lambda^{jp} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\frac{2}{\lambda}} x_n^{\alpha p}\, dx_n \leq C,$$ C étant indépendante de λ, puisque $\alpha + \frac{1}{p} = \ell$.

Par suite, $x_n^\alpha\, \lambda^j\, \eta^{(j)}(\lambda x_n)\, D^{(\beta_1,\ldots,\beta_n - j)} u$ reste dans un borné de $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, on peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente vers W_j, W_j appartenant à $L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Mais, il est facile de voir que $x_n^\alpha\, \lambda^j\, \eta^{(j)}(\lambda x_n)\, D^{(\beta_1,\ldots,\beta_n - j)} u$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$, donc :

$W_j = 0$ pour $j = 1,\ldots,\beta_n$.

D'autre part :

$||x_n^{\alpha}\,(1-\eta_\lambda)\,D^{\beta}\,u||_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}$ tend vers 0 avec $\frac{1}{\lambda}$ d'après le théorème de la convergence dominée.

Il existe donc une sous-suite $(\lambda_m)_m$ telle que $x_n^{\alpha}\,D^{\beta}(u_{\lambda_m} - u)$ converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, et ceci pour $|\beta| \leq \ell$.

Finalement, il existe une sous-suite, encore notée $(\lambda_m)_m$, telle que u_{λ_m} converge faiblement dans $W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$; et d'après un théorème classique on peut approcher u fortement dans $W_{\alpha}^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$ par des combinaisons convexes de u_{λ_m} , lesquelles appartiennent à $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

IV - COMPACITE.

On a le théorème suivant :

Théorème 4.1. Soient $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tels que $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha + \frac{1}{p}$, $\alpha + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}$. Soit A un ensemble de fonctions de $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ ayant leur support contenu dans un compact fixe K de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Pour que A soit relativement compact dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$, il suffit que :

(i) si il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $j \leq \alpha < j+1 - \frac{1}{p}$, que A soit un ensemble borné de $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$ et en outre que $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)}$ tende vers zéro quand h tend vers zéro dans $\mathbb{R}^n_+$, uniformément pour φ dans A.

(ii) si il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $j - \frac{1}{p} < \alpha < j$, que A soit un ensemble borné de $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$ et en outre que $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{h_n}^{+\infty} x_n^{(\alpha-j)p} |\varphi(x-h) - \varphi(x)|^p \, dx_n$ tende vers zéro quand h tend vers zéro dans $\mathbb{R}^n_+$, uniformément pour φ dans A.

Démonstration.

(i) soit une fonction η appartenant à $C^\infty_o(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ telle que

$$\eta(x) \geq 0$$

$$\eta(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta(x)\, dx = 1$$

et pour $k = 1,2,\ldots.,$ on pose $\eta_k(x) = k^n \eta(kx)$.

Soit φ appartenant à A, on pose :

$$\varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\, \varphi(x+y)\, dy, \text{ ce qui a bien un sens car :}$$

$\mathbb{R}^n_+ + \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n_+$. Par ailleurs $\varphi_k \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$. En effet : soit $\Psi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n_+)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha}\,\varphi_k(x)\,\Psi(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\,\varphi(x+y)\,dy\right)\Psi(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha}\,\varphi(x+y)\,\Psi(x)\,dx\right|$$

Fixons $y \in \mathbb{R}^n_+$, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha}\,\varphi(x+y)\,\Psi(x)\,dx\right| \leq \|\varphi(x+y)\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\,\|\Psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n_+)}$$

donc, pour tout $\Psi \in L^{p'}(\mathbb{R}^n_+)$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha}\,\varphi_k(x)\,\Psi(x)\,dx\right| \leq \|\Psi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n_+)} \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\,\|\varphi(x+y)\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}dy$$

d'où : $$\|\varphi_k\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\,\|\varphi(x+y)\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\,dy.$$

Mais :

$$\|\varphi(x+y)\|^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p}\,|\varphi(x+y)|^p\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{y_n}^{+\infty} (x_n-y_n)^{\alpha p}\,|\varphi(x)|^p\,dx_n$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{y_n}^{+\infty} x_n^{\alpha p}\,|\varphi(x)|^p\,dx_n \quad (\text{car } \alpha \geq 0)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p}\,|\varphi(x)|^p\,dx = \|\varphi\|^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\,.$$

Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\,\|\varphi(x+y)\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\,dy \leq \|\varphi\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}$$

Par suite $\varphi_k \in L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ et de plus $\|\varphi_k\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq \|\varphi\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}$

avec $k = 1,2,\ldots,n,\ldots$.

Par ailleurs on a :

$$\varphi_k(x) - \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y) \ (\varphi(x+y) - \varphi(x))\, dy ,$$

donc, d'après de qui précède :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} |\varphi_k(x) - \varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y) ||\varphi(x+y) - \varphi(x)||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \, dy$$

$$\leq \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n_+ \\ |y| \leq \frac{1}{k}}} ||\varphi(x+y) - \varphi(x)||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}$$

$$\leq C \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n_+ \\ |y| \leq \frac{1}{k}}} ||\varphi(x+y) - \varphi(x)||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)}$$

où $C = \sup_{x\in K} x_n^{jp}$, est une constante indépendante de φ et k.

Par suite, d'après l'hypothèse (i) :

(4.1) $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon$ tel que : $\forall \varphi \in A$ on ait : $||\varphi_{k_\varepsilon} - \varphi||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} < \varepsilon/3.$

Soit alors $A_\varepsilon = \{\varphi_{k_\varepsilon} \mid \varphi \in A\}$. A_ε est borné dans $C^\circ(K_\varepsilon)$ où K_ε est le compact :

$$K_\varepsilon = \{x \mid x\in\mathbb{R}^n_+ \ , d(x,K) \leq \frac{1}{k_\varepsilon}\} .$$ En effet, on a :

$$\varphi_{k_\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_{k_\varepsilon}(y)\ \varphi(x+y)\, dy$$

donc : si $d(x,K) > \frac{1}{k_\varepsilon}$, on a alors $\varphi(x+y) = 0$ pour tout y tel que $|y| \leq \frac{1}{k_\varepsilon}$, et par suite $\varphi_{k_\varepsilon}(x) = 0$, ce qui prouve que : supp $\varphi_{k_\varepsilon} \subset K_\varepsilon$.

Par ailleurs :

$$\varphi_{k_\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} y_n^{-(\alpha-j)}\, \eta_{k_\varepsilon}(y)\; y_n^{(\alpha-j)}\, \varphi(x+y)\, dy$$

$$|\varphi_{k_\varepsilon}(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} y_n^{(\alpha-j)p}\, |\varphi(x+y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} y_n^{-(\alpha-j)p'}\, |\eta_{k_\varepsilon}(y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Or $\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} y_n^{(\alpha-j)p} |\varphi(x+y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||\varphi||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)}$ (car $\alpha \geq j$),

et par hypothèse A est borné dans $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$, donc : $||\varphi||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C$

où C est indépendante de φ dans A.

De plus :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} y_n^{-(\alpha-j)p'}\, |\eta_{k_\varepsilon}(y)|^{p'} dy < +\infty$$

car : $(\alpha-j)p' < 1$ puisque $\alpha - j < 1 - \frac{1}{p}$.

Finalement, il existe une constante M telle que :

$|\varphi_{k_\varepsilon}(x)| \leq M < +\infty$, pour $x \in K_\varepsilon$ et $\varphi \in A$.

De plus A_ε est uniformément équicontinu. Soit en effet, $x \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$ $h \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$, on a :

$$|\varphi_{k_\varepsilon}(x+h) - \varphi_{k_\varepsilon}(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_{k_\varepsilon}(y)\, (\varphi(x+y+h) - \varphi(x+y))\, dy\right|$$

$$\leq C||\varphi(x+h) - \varphi(x)||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

d'après les calculs précédents. Or par hypothèse, le second membre tend vers 0 avec h uniformément en φ dans A.

Par suite, l'ensemble A_ε contenu dans $C^\circ(K_\varepsilon)$ est un ensemble relativement compact d'après le théorème d'Ascoli. Or : $C^\circ(K_\varepsilon) \hookrightarrow L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$ car $\alpha + \frac{1}{p} > 0$ (cf. Remarque 3.1). On peut alors recouvrir A_ε par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/3$ dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$. D'après la relation (4.1), on peut alors recouvrir A par les boules de mêmes centres et de rayon ε dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$; $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on en déduit que A est précompact dans l'espace complet $L^p_\alpha(R^n_+)$ donc A est relativement compact dans $L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Démontrons (ii) : soit $j \in \mathbb{N}$ tel que : $j - \frac{1}{p} < \alpha < j$. On pose alors, pour $\varphi \in A$:

$$\varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} \eta_k(y)\, \varphi(x-y)\, dy_n$$

où η_k est la fonction introduite précédemment. On peut encore écrire :

$$\varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} \eta_k(x-y)\, \varphi(y)\, dy_n .$$

On a : $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K_k = \{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} ; d(x,K) \leq \frac{1}{k}\}$. Par ailleurs :

$$\|\varphi_k\|^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{\alpha p} |\varphi_k(x)|^p\, dx$$

$$= \int_{K_k} x_n^{jp}\, x_n^{(\alpha-j)p} |\varphi_k(x)|^p\, dx .$$

Mais $|x_n^{jp}| \leq C$ sur K_k où C est une constante que l'on peut d'ailleurs prendre indépendante de k. Donc :

$$\|\varphi_k\|^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq C \|\varphi_k\|^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n)}$$

or

$$\|\varphi_k\|^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \int_{K_k} x_n^{(\alpha-j)p} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} \eta_k(x-y)\, \varphi(y) dy_n \right|^p dx$$

$$\leq \int_{K_k} x_n^{(\alpha-j)p} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} y_n^{-(\alpha-j)}\, \eta_k(x-y)\, y_n^{(\alpha-j)} \varphi(y)\, dy \right|^p dx$$

$$\leq ||\varphi||^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \int_{K_k} x_n^{(\alpha-j)p} \left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} y_n^{-(\alpha-j)p'} |\eta_k(x-y)|^{p'} dy_n\right|^{\frac{p}{p'}} dx$$

$$\leq ||\varphi||^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \cdot C \int_{K_k} x_n^{(\alpha-j)p} \left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} |\eta_k(x-y)|^{p'} dy_n\right|^{\frac{p}{p'}} dx$$

car $0 \leq y_n \leq x_n$ et $x_n^{-(\alpha-j)p'} \leq C$ car : $\alpha - j \leq 0$ et x_n est borné sur K_k.

Finalement, on obtient :

$$||\varphi_k||^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq C||\varphi||^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)}$$

car $\int_{K_k} x_n^{(\alpha-j)p} dx < +\infty$ puisque $\alpha - j > -\frac{1}{p}$.

Posons alors $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \\ 0 \quad \text{ si } x \in \mathbb{R}^n, \quad x_n < 0 \end{cases}$

On a alors :

$$\varphi_k(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} \eta_k(y)\varphi(x-y)\, dy_n = \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\tilde{\varphi}(x-y)\, dy$$

donc :

$$||\varphi_k - \varphi||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} \eta_k(y)\, ||\tilde{\varphi}(x-y) - \varphi(x)||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}\, dy$$

$$\leq \sup_{\substack{|y| \leq \frac{1}{k} \\ y_n > 0}} ||\tilde{\varphi}(x-y) - \varphi(x)||_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)}$$

Or :

$$||\tilde{\varphi}(x-y) - \varphi(x)||^p_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^{y_n} x_n^{\alpha p} |\varphi(x)|^p dx_n +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{y_n}^{+\infty} x_n^{\alpha p} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p dx_n .$$

Examinons chaque terme :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^{y_n} x_n^{\alpha p} |\varphi(x)|^p \, dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_0^{y_n} x_n^{jp} \, x_n^{(\alpha-j)p} |\varphi(x)|^p dx$$

$$\leq y_n^{jp} \, \|\varphi\|^p_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Comme φ est dans un ensemble borné de $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$ et que $jp \geq 0$, ce terme tend vers 0, uniformément par rapport à φ dans A quand y tend vers 0, $y \in \mathbb{R}^n_+$.

D'autre part :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{y_n}^{+\infty} x_n^{\alpha p} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p \, dx_n \leq$$

$$\leq \sup_{x \in K \cup (K-y)} x_n^{jp} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{y_n}^{+\infty} x_n^{(\alpha-j)p} |\varphi(x-y) - \varphi(x)|^p \, dx_n .$$

Or $K \cup (K-y)$ est borné donc : $\sup\limits_{x \in K \cup (K-y)} x_n^{jp} \leq C$ où C est une constante que l'on peut prendre indépendante de y. Tenant compte de l'hypothèse (ii), on en déduit que cette expression tend vers 0 avec y, $y \in \mathbb{R}^n_+$.

Par suite :

(4.2) $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon$ tel que : $\forall \varphi \in A$, on ait : $\|\varphi_{k_\varepsilon} - \varphi\|_{L^p_\alpha(\mathbb{R}^n_+)} < \varepsilon/3$.

Posons $A_\varepsilon = \{ \varphi_{k_\varepsilon} \mid \varphi \in A \}$.

A_ε est borné dans $C^\circ(K_\varepsilon)$. En effet :

$$\varphi_{k_\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int_0^{x_n} y_n^{(\alpha-j)} \varphi(y) \; y_n^{-(\alpha-j)} \; \eta_{k_\varepsilon}(x-y) \, dy_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times K \cap [0, x_n]} y_n^{(\alpha-j)} \varphi(y) \; y_n^{-(\alpha-j)} \; \eta_{k_\varepsilon}(x-y) \, dy$$

donc :

$$|\varphi_{k_\varepsilon}(x)| \leq ||\varphi||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \left(\int_K y_n^{-(\alpha-j)p'} |\eta_{k_\varepsilon}(x-y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Or $-(\alpha-j)p' + 1 = -(\alpha-j)\frac{p}{p-1} + 1 > 0$ car $\alpha-j \leq 0$, donc :

$$\left(\int_K y_n^{-(\alpha-j)p'} |\eta_{k_\varepsilon}(x-y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} < +\infty.$$

On utilise ensuite le fait que A est borné dans $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$.

A_ε est uniformément équicontinu. Soient x et $h \in \mathbb{R}^n_+$, on a :

$$|\varphi_{k_\varepsilon}(x+h) - \varphi_{h_\varepsilon}(x)| = \left|\int_K [\eta_{h_\varepsilon}(x+h-y) - \eta_{h_\varepsilon}(x-y)]\, \varphi(y)\, dy\right|$$

$$\leq ||\varphi||_{L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)} \left(\int_K y_n^{-(\alpha-j)p'} |\eta_{k_\varepsilon}(x+h-y) - \eta_{k_\varepsilon}(x-y)|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}},$$

mais $|y_n^{-(\alpha-j)p'}| \leq C$ sur K. Or x décrit le compact $K_\varepsilon = K_{k_\varepsilon}$, et y décrit K, donc d'après la continuité uniforme de η_{k_ε} on en déduit que :

$\int_K |\eta_{k_\varepsilon}(x+h-y) - \eta_{k_\varepsilon}(x-y)|^{p'} dy$ tend vers 0 quand h tend vers 0, $h \in \mathbb{R}^n_+$.

Or φ décrit un borné de $L^p_{\alpha-j}(\mathbb{R}^n_+)$, par suite :

$|\varphi_{k_\varepsilon}(x+h) - \varphi_{k_\varepsilon}(x)|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, $h \in \mathbb{R}^n_+$, uniformément en $x \in K_\varepsilon$, et $\varphi \in A$.

On conclut alors comme dans le (i).

<u>Théorème 4.2.</u> Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$ et $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1, 2, \ldots, \ell+1$.

Alors l'injection de $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}_\alpha(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\Omega)$ est compacte.

<u>1ère étape</u>. $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}(\Omega)$, l'injection étant compacte.

On va montrer que la boule unité de $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans

$W^{\ell,p}(\Omega)$, donc a fortiori dans $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}(\Omega)$ car il est clair que : $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}(\Omega)$ est contenu $\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}(\Omega)$ avec injection continue.

Par cartes locales, on se ramène à $\mathbb{R}^n_+$. Il faut donc montrer que si A est un sous-ensemble borné d'éléments de $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ à supports contenus dans K, où K est un compact de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, alors A est relativement compact dans $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Il suffit pour cela, d'établir que pour $|\beta| \leq \ell$, $\{D^\beta u,\ u \in A\}$, est un sous-ensemble de $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ relativement compact.

Or pour $|\beta| \leq \ell$, on a : $\frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ $i = 1,2,\ldots,n$, on peut donc écrire pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n_+$ et pour tout h dans $\mathbb{R}^n_+$.

$$(4.3)\quad \begin{aligned} &D^\beta u(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n) - D^\beta u(x_1,\ldots,x_n) = \int_{x_1}^{x_1+h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} D^\beta u(\zeta_1,\ldots,x_n)d\zeta_1 \\ &\vdots \\ &D^\beta u(x_1+h_1,\ldots,x_n+h_n) - D^\beta u(x_1+h_1,\ldots,x_n) = \\ &\qquad = \int_{x_n}^{x_n+h_n} \frac{\partial}{\partial x_n} D^\beta u(x_1+h_1,\ldots,\zeta_n)\, d\zeta_n . \end{aligned}$$

Par suite pour presque tout x dans $\mathbb{R}^n_+$ et pour tout h dans $\mathbb{R}^n_+$ on a :

$$|D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\left|\int_0^{h_i} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u(\ldots,\zeta_i+x_i,\ldots)\right|^p d\zeta_i\right|\right)^{\frac{1}{p}} |h_i|^{\frac{1}{p'}}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, d'où :

$$|D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x)| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\int_0^{h_i} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u(\ldots,\zeta_i+x_i,\ldots)\right|^p d\zeta_i\right|\right)^{\frac{1}{p}} |h|^{\frac{1}{p'}}$$

donc :

$$\|D^\beta u(x+h) - D^\beta u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|u\|_{W^{\ell+1,p}(\mathbb{R}^n_+)} |h|$$

et comme $u \in A$, on déduit alors du théorème 4.1 (i) que A est relativement compact dans $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n_+)$. C.Q.F.D.

Remarque 4.1. On vient de démontrer un résultat plus fort que celui cherché, à savoir que :

$$W^{\ell+1,p}(\Omega) \text{ est inclus dans } W^{\ell,p}(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Dans la démonstration précédente, le fait que Ω soit borné apparaît de manière explicite.

2ème étape. Puisque $\alpha + \frac{1}{p}$ est différent de $1,2,\ldots,\ell+1$ d'après le corollaire 2.1

$\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell+1,p}(\Omega)$ est isomorphe à $\overset{\circ}{W}{}^{\ell+1,p}(\Omega)$ par la multiplication par ρ^{α} et

$\overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}(\Omega)$ est isomorphe à $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ par la multiplication par $\rho^{-\alpha}$.

D'où, d'après la 1ère étape, on déduit que $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell+1,p}(\Omega)$ est inclus $\overset{\circ}{W}{}_{\alpha}^{\ell,p}(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 4.3. Soient $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que, $1 < p < +\infty$, et $0 < \alpha + \frac{1}{p} \leq \ell$ avec $\alpha + \frac{1}{p} \neq 1,2,\ldots,\ell$. Alors on a :

$$W_{\alpha}^{\ell+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-[\alpha+\frac{1}{p}]_-}^{\ell-[\alpha+\frac{1}{p}]_-,p}(\Omega), \text{ avec injection compacte.}$$

Remarquons que pour $\alpha = 0$, ce résultat résulte de la remarque 4.1.

On commence par appliquer le théorème 2.1 (ii) (après s'être ramené par cartes locales à $\mathbb{R}^n_+$) qui donne :

$$W_{\alpha}^{\ell+1,p}(\mathbb{R}^n_+) \hookrightarrow W_{\alpha-[\alpha+\frac{1}{p}]_-}^{\ell+1-[\alpha+\frac{1}{p}]_-,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

et nous sommes ramenés à démontrer qu'un sous-ensemble A de $W_{\alpha-[\alpha+\frac{1}{p}]_-}^{\ell+1-[\alpha+\frac{1}{p}]_-,p}(\mathbb{R}^n_+)$ borné dans cet espace, et dont les éléments sont à support dans un même compact

K de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ est relativement compact dans $W^{\ell-[\alpha+\frac{1}{p}]}_{\alpha-[\alpha+\frac{1}{p}]_-}(\mathbb{R}^n_+)$.

Pour cela, on reprend la démonstration du théorème 4.2 1ère étape, en remarquant que les relations (4.2) sont encore valables (on remarquera que $D^\beta u$ appartient à $L^p(\Omega_1)$ pour tout ouvert Ω_1) $\Omega_1 \Subset \mathbb{R}^n_+$, d'après la proposition 1.2).

Remarque 4.2. On ne peut rien dire a priori sur l'injection suivante :

$$W^{\ell+1,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow W^{\ell-j,p}_{\alpha-j} \qquad \text{pour } j = 1,2,\ldots [\alpha+\tfrac{1}{p}]_- - 1 .$$

Ceci provient du fait que l'on se ramène, dans la démonstration du théorème 4.3, à appliquer le théorème 4.1 (i) (ou (ii)) qui implique nécessairement à prendre $j = [\alpha+\frac{1}{p}]_-$.

V - TRACES.

On a besoin, auparavant, d'introduire les espaces $W^{s,p}(\Gamma)$ avec s réel positif.

Soit T le foncteur "Trace" (cf. [3]) on pose alors les définitions suivantes :

Définition 5.1. Soient $p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$, $\theta = \frac{1}{p} + \alpha$, $0 < \theta < 1$, on définit l'espace $W^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ par :

$$W^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1}) = T(p,\alpha \; ; \; W^{1,p}(\mathbb{R}^{n-1}),\; W^{0,p}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})} = \operatorname*{Inf}_{\substack{f \\ f(0)=u}} \{\operatorname{Max}\left[\left(\int_0^{+\infty} ||t^\alpha f(t)||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{p}},\right.$$

$$\left.\left(\int_0^{+\infty} ||t^\alpha \frac{df}{dt}(t)||^p_{W^{0,p}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\}$$

Définition 5.2. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que $s \geq 0$, $1 < p < +\infty$, s non entier et $s = [s] + \sigma$, $\sigma \in]0,1[$ on définit l'espace $W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ par :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1}) = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}),\; u \in W^{[s],p}(\mathbb{R}^{n-1}),\; D^k u \in W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ pour } |h| = [s]\}$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(||u||^p_{W^{[s],p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{|k|=[s]} ||D^k u||^p_{W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a alors les résultats suivants (cf. [7]).

Proposition 5.1. Soient $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} + \alpha = \theta$, l'espace $T(p,\alpha : W^{s+1,p}(\mathbb{R}^{n-1}),\; W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1}))$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'espace $W^{s+1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

<u>Proposition 5.2.</u> Soient $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} + \alpha$, $0 < \theta < 1$. L'espace $W^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'espace $\tilde{W}^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ défini par :

$$\tilde{W}^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1}) = \{u \mid u \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ telle que : } \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+(1-\theta)p-1}}\, dx\, dy < +\infty\}$$

muni de la norme :

$$||u||_{\tilde{W}^{1-\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1})} = (||u||^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+(1-\theta)p-1}}\, dx\, dy)^{\frac{1}{p}} .$$

Ces résultats admis, on définit alors les espaces $W^{s,p}(\Gamma)$ pour s réel positif (cf. [7]).

On peut maintenant établir le théorème de Traces suivants :

<u>Théorème 5.1.</u> Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\ell \geq 1$, $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha + \frac{1}{p} < 1$, l'application : $u \longmapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{\ell-1} u\}$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $(\mathcal{D}(\Gamma))^\ell$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée,

$$u \longmapsto \gamma u : W^{\ell,p}_\alpha(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{\ell-1} W^{\ell-j-\alpha-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \quad \text{de noyau } \overset{\circ}{W}{}^{\ell,p}_\alpha(\Omega) \text{ ; de plus}$$

cette application est surjective.

On se ramène par cartes locales à l'espace $W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+)$.

Cet espace est isomorphe à l'espace :

$$\{u \mid u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \text{ , } \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j} \in L^p_\alpha \; (0,+\infty \text{ ; } W^{\ell-j}(\mathbb{R}^{n-1}))\} .$$

Utilisant le foncteur trace T ([3]), on en déduit que pour $0 \leq j \leq \ell-1$, l'application :

$$u \longmapsto \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x',0) : W^{\ell,p}_\alpha(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow T(p,\alpha \text{ ; } W^{\ell-j}(\mathbb{R}^{n-1}), W^{\ell-j-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

est linéaire, continue et surjective pour $0 < \alpha + \frac{1}{p} < 1$.

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 5.1 qui donne l'identité des espaces $T(p,\alpha\ ;\ W^{\ell-j}(\mathbb{R}^{n-1}),\ W^{\ell-j-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$ et $W^{\ell-j-\alpha-\frac{1}{p}}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Remarque 5.1. Pour des compléments concernant le théorème 5.1 on renvoie à [6].

VI - UNE APPLICATION DE LA THEORIE DES ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS.

On donne ici une application de la théorie des espaces de Sobolev avec poids aux problèmes elliptiques. Celle-ci est tirée de [8].

1. Une généralisation de la méthode variationnelle.

Théorème 6.1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, B une forme bilinéaire sur $H_1 \times H_2$ telle qu'il existe trois constantes M, α_1, α_2 positives telles que :

(i) $\forall u \in H_2, \quad \forall v \in H_1, \qquad |B(v,u)| \leq M||v||_{H_1} \; ||u||_{H_2}$

(ii) $\forall u \in H_2, \quad \sup\limits_{\substack{v \in H_1 \\ ||v||_{H_1} \leq 1}} |B(v,u)| \geq \alpha_2 \; ||u||_{H_2}$

(iii) $\forall v \in H_1, \quad \sup\limits_{\substack{u \in H_2 \\ ||u||_{H_2} \leq 1}} |B(v,u)| \geq \alpha_1 \; ||v||_{H_1}$.

Alors, étant donnée une forme linéaire continue sur H_1, il existe un élément u de H_2, et un seul tel que :

$$\forall v \in H_1, \quad B(v,u) = L(v).$$

De plus, il existe une constante C positive telle que

$||u||_{H_2} \leq C||L||$.

Démonstration. Pour tout u appartenant à H_2, il existe Z(u) unique, appartenant à H_1 tel que

$$\forall v \in H_1, \; B(v,u) = (v, Z(u))_{H_1}.$$

D'après la linéarité de B par rapport à u, l'application $Z : u \longmapsto Z(u) : H_2 \longrightarrow H_1$ est linéaire. De plus d'après la condition (i), il vient :

$$||Z(u)||_{H_1} \leq M||u||_{H_2} \quad ,$$

donc Z est continue.

Par ailleurs, d'après (ii) on a :

$$\sup_{\substack{v \in H_1 \\ ||v||_{H_1} \leq 1}} |B(v,u)| = ||Z(u)||_{H_1} \geq \alpha_2 ||u||_{H_2}$$

donc Z est injective et de plus $Z(H_2)$ est fermé dans H_1. Supposons que $Z(H_2)$ soit strictement contenu dans H_1, il existe alors $v_\circ$ appartenant à H_1, non nul et vérifiant :

$$\forall u \in H_2 \ , \ (v_\circ, \ Z(u))_{H_1} = 0$$

c'est-à-dire

$\forall u \in H_2$, $B(v,u) = 0$, ce qui est contraire à la condition (iii).

Il est clair que la conclusion du théorème 6.1 est encore vraie si on remplace (iii) par :

(iv) $Z(H_2)$ est dense dans H_1.

Ce qui nous permet d'énoncer :

Théorème 6.2. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, B une forme bilinéaire sur $H_1 \times H_2$, satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iv). Alors étant donnée une forme linéaire continue L sur H_1, il existe un élément u de H_2 et un seul tel que :

$$\forall v \in H_1, \quad B(v,u) = L(v).$$

De plus il existe une constante C positive, telle que :

$$||u||_{H_2} \leq C||L|| \ .$$

Remarque 6.1. Si $H_1 = H_2 = V$ et si B est une forme bilinéaire continue et coercive sur V, les hypothèses du théorème 6.1 sont évidemment satisfaites, de sorte que le théorème 6.1, fournit une généralisation de la théorie variationnelle classique.

2. Une application aux problèmes aux limites elliptiques.

1°) Notations.

Soit l'opérateur différentiel suivant :

(6.1) $$Au = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} (-1)^{|\beta|} D^{\beta} (a_{\alpha\beta} D^{\alpha} u),$$

(6.2) les fonctions $a_{\alpha\beta}$ appartenant à $L^{\infty}(\Omega)$.

On désigne par a la forme bilinéaire associée à A, c'est-à-dire :

(6.3) $$a(u,v) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta} (x) D^{\alpha} u(x) \overline{D^{\beta} v(x)} dx .$$

On suppose enfin que la forme a est $H_o^m(\Omega)$-coercive, c'est-à-dire il existe une constante α_o positive telle que pour tout u appartenant à $H_o^m(\Omega)$ ($= \overset{\circ}{W}{}_o^{m,2}(\Omega)$) on ait :

(6.4) $$|a(u,u)| \geq \alpha_o ||u||^2_{H_o^m(\Omega)} .$$

2°) Inégalités fondamentales.

Théorème 6.3. Sous les hypothèses suivantes :

(i) l'ensemble des nombres réels α inférieurs à $\frac{1}{2}$, pour lesquels il existe une constante $C(\alpha)$ positive, telle que :

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\exists \Psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $||\Psi||_{W^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)} = 1$ tel que

$|a(\Psi,\varphi)| \geq C(\alpha)\, ||\varphi||_{W^{m,2}_{\alpha}(\Omega)}$ est non vide et contient un voisinage de zéro,

(ii) l'ensemble des nombres réels α supérieurs à $-\frac{1}{2}$, pour lesquels il existe une constante $C'(\alpha)$ positive, telle que :

$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\exists \Psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $||\Psi||_{W^{m,2}_{\alpha}(\Omega)} = 1$ tel que

$|a(\varphi,\Psi)| \geq C'(\alpha)||\varphi||_{W^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)}$ est non vide et contient un voisinage de zéro.

Soit φ appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$ et soit $\Psi = \varphi\rho^{2\alpha}$. On a :-

$$a(\Psi,\varphi) = \sum_{\substack{|\delta|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\delta\beta}\; D^\delta \Psi \;\overline{D^\beta \varphi}\; dx$$

$$= \sum_{\substack{|\delta|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\delta\beta}\; D^\delta (\varphi\, \rho^{\frac{2\alpha}{2}})\; \overline{D^\beta (\varphi\, \rho^{\frac{2\alpha}{2}})}\, dx + B_\alpha$$

où B_α est égal à :

$$B_\alpha = \sum_{\substack{|\delta|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\delta\beta}\; (D^\delta(\varphi\rho^{2\alpha})\; \overline{D^\beta \varphi}) - D^\delta(\varphi\rho^\alpha)\; \overline{D^\beta(\varphi\rho^\alpha)})\, dx.$$

Ceci amène à considérer les termes de la forme :

$$\int_\Omega a_{\delta\beta}\; D^p\varphi \; D^q(\rho^{2\alpha})\; \overline{D^\beta\varphi}\; dx$$

avec $|q| \geq 1$, $|p| + |q| = |\delta|$, $|\beta| \leq m$, $p \leq \delta$, $q \leq \delta$.

et les termes de la forme :

$$\int_\Omega a_{\delta\beta} \quad D^p\varphi \quad D^q(\rho^\alpha) \quad \overline{D^s\varphi} \quad \overline{D^t(\rho^\alpha)} \quad dx$$

avec $|q| + |t| \geq 1$, $|p| + |q| = |\delta|$, $|s| + |t| = |\beta|$, $p \leq \delta$, $q \leq \delta$, $s \leq \beta$, $t \leq \beta$.

Or on a :

$$|D^q(\rho^{2\alpha})| \leq C|\alpha| \ \rho^{2\alpha-|q|} \qquad \text{et} \quad |D^q(\rho^\alpha)| \leq C|\alpha| \quad \rho^{\alpha-|q|} \ ,$$

(on le vérifie par récurrence en utilisant le fait que ρ appartient à $C^\infty(\bar{\Omega})$).

L'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée aux relations précédentes montre que :

$$\left| \int_\Omega a_{\delta\beta} \quad D^p\varphi \quad D^q \ (\rho^{2\alpha}) \ \overline{D^r\varphi} \ dx \right| \leq C|\alpha| \int_\Omega |D^p\varphi| \ |D^r\varphi| \quad \rho^{2\alpha-|q|} \ dx$$

$$\leq C|\alpha| \ \left(\int_\Omega |D^p\varphi|^2 \ \rho^{2(\alpha-|q|)} \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D^\beta\varphi|^2 \quad \rho^{2\alpha} \ dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Par ailleurs on a le résultat suivant :

<u>Lemme 6.1.</u> Soient $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $1 < p < +\infty$, $0 < \alpha + \frac{1}{p} < 1$ $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m-j,p}_{\alpha-j}(\Omega)$ avec $j = 0,1,\ldots,m$.

En effet, d'après le théorème 2.1, pour $\alpha + \frac{1}{p} < 1$, $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\Omega) = X^{m,p}_\alpha(\Omega)$ donc pour $j = 0,1,\ldots,m$ on a :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m-j,p}_{\alpha-j}(\Omega) = X^{m-j,p}_{\alpha-j}(\Omega).$$

<u>Remarque 2.2.</u> La démonstration précédente montre que le lemme 6.1 est valable sous la seule condition $\alpha + \frac{1}{p} < 1$ et même sous la seule condition $\alpha + \frac{1}{p}$ différent de $1,2,\ldots,m$.

Ceci étant on a donc :

$$\left(\int_\Omega |D^p \varphi|^2 \quad \rho^{2(\alpha-|q|)} \ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C||\varphi||_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} \ .$$

C étant une constante que l'on peut prendre indépendante de α, pour $|\alpha| < \frac{1}{2}$, d'après l'inégalité de Hardy.

Par suite :

$$|\int_\Omega a_{\delta\beta} \; D^p\varphi \; D^q(\rho^{2\alpha}) \; \overline{D^r\varphi} \; dx| \leq C|\alpha| \; ||\varphi||^2_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)}$$

$$|\int a_{\delta\beta} \; D^p\varphi \; D^q(\rho^\alpha) \; \overline{D^s\varphi} \; \overline{D^t(\rho^\alpha)} dx| \leq C|\alpha|^2 \int_\Omega |D^p\varphi| \rho^{\alpha-|q|} |D^s\varphi| \rho^{\alpha-|t|} dx$$

$$\leq C|\alpha|^2 \left(\int_\Omega |D^p\varphi|^2 \rho^{2(\alpha-|q|)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D^s\varphi|^2 \rho^{2(\alpha-|t|)} dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

D'après le lemme 6.1. :

$$|\int_\Omega a_{\delta\beta} \; D^p\varphi \; D^q(\rho^\alpha) \; \overline{D^s\varphi} \; \overline{D^t(\rho^\alpha)} \; dx| \leq C|\alpha|^2 \quad ||\varphi||^2_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)}$$

et pour $|\alpha| < \frac{1}{2}$, on a la majoration suivante :

$$|\int_\Omega a_{\delta\beta} \; D^p\varphi \; D^q(\rho^\alpha) \; \overline{D^s\varphi} \; \overline{D^t(\rho^\alpha)} \; dx| \leq C|\alpha| \; ||\varphi||^2_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} \quad .$$

D'après l'hypothèse de coercivité (6.4.) on a :

$$\left| \sum_{\substack{|\delta|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\delta\beta} \quad D^\delta(\varphi\rho^\alpha) \; \overline{D^\beta(\varphi\rho^\alpha)} \; dx \right| \geq \alpha_0 \; ||\varphi\rho^\alpha||^2_{W^{m,2}(\Omega)} \quad .$$

D'après le corollaire 2.1, la multiplication par $\rho^{-\alpha}$ est continue de $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}_\alpha(\Omega)$, donc :

$$||\varphi||_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} \leq C(\alpha) \; ||\rho^\alpha\varphi||_{W^{m,2}(\Omega)} \quad .$$

Mais si l'on suppose α borné, ce qui est le cas ici, la constante $C(\alpha)$ peut être choisie indépendante de α. Donc :

$$\Big| \sum_{\substack{|\delta|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega a_{\delta\beta}\ D^\delta(\varphi\rho^\alpha)\ \overline{D^\beta(\varphi\rho^\alpha)}\ dx\Big| \geq (\alpha_0\ C)\quad \|\varphi\|^2_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} .$$

De même la multiplication par $\rho^{2\alpha}$ est continue de $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}_\alpha(\Omega)$ dans $W^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)$; pour $|\alpha| < \frac{1}{2}$, il existe donc une constante indépendante de α telle que :

$$\|\varphi\ \rho^{2\alpha}\|_{W^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} .$$

Regroupant les résultats précédents il existe trois constantes C, C', C'' indépendantes de α telles que :

$$\frac{|a(\Psi,\varphi)|}{\|\Psi\|_{W^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)}} \geq \frac{C-C'|\alpha|}{C''}\ \|\varphi\|_{W^{m,2}_\alpha(\Omega)} .$$

Choisissant α assez petit, on obtient un coefficient $\frac{C-C'|\alpha|}{C''}$ qui est positif.

On en déduit donc (i).

Pour (ii) la démonstration est analogue en posant cette fois $\Psi = \varphi\ \rho^{-2\alpha}$.

3°) <u>Quelques remarques concernant les espaces $W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$, m entier ≥ 1.</u>

Rappelons que $W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$ est, par définition, le dual de $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ avec : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < +\infty$.

<u>Théorème 6.4.</u> Toute forme linéaire L continue sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ s'écrit, de manière non unique :

$$\forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \qquad L(v) = \sum_{|i|\leq m} \int_\Omega g_i\ D_i\ v\ dx \quad \text{avec } g_i \in L^p_\alpha(\Omega),$$

i.e. : $L = \sum_{|i|\leq m} (-1)^{|i|}\ D_i\ g_i$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

. Si $L = \sum_{|i|\leq m} (-1)^{|i|} D_i g_i$, avec $g_i \in L^p_\alpha(\Omega)$, alors il est clair que $L \in W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$.

. Si $L \in W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, L se prolonge en une forme linéaire continue sur $W^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$. Or, on peut identifier $W^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$ à un sous-espace formé de $(L^{p'}_{-\alpha}(\Omega))^N$, N étant un exposant convenable. Comme $(L^{p'}_{-\alpha}(\Omega))'$ est isomorphe à $L^p_\alpha(\Omega)$, on en déduit le théorème 6.4.

<u>Théorème 6.5.</u> Soit $L = \sum_{|i|\leq m} (-1)^{|i|} D_i g_i$ avec $g_i \in L^p_{\alpha+m-|i|}(\Omega)$, $-(\alpha + \frac{1}{p}) \neq 0,1,\dots,m-1$, alors : $L \in W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$.

En effet, il suffit de remarquer que : $-(\alpha + \frac{1}{p}) \neq 0,1,\dots,m-1$ implique que :

$$-\alpha + \frac{1}{p'} = -(\alpha + \frac{1}{p}) + 1 \neq 1,2,\dots,m$$

et donc dans ce cas : $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) = X^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$.

On applique ensuite le raisonnement du théorème 6.4. à l'espace $X^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega)$.

<u>Théorème 6.6.</u> Soit $1 < p < +\infty$ et p' tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(i) si $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} < 0 \end{cases}$ ou bien si $\begin{cases} \alpha < 0, \ \alpha + \frac{1}{p} > 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} < \alpha \end{cases}$

alors si μ est une mesure sur Ω, on a : $v \longmapsto \mu(v) : \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \longmapsto \mathbb{C}$ appartient à $W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$;

(ii) si $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} = 0 \end{cases}$ ou bien si $\begin{cases} \alpha < 0, \ \alpha + \frac{1}{p} > 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} = \alpha \end{cases}$

alors pour $q \in]1,+\infty[$, on a : $L^q(\Omega) \hookrightarrow W^{-m,p}_\alpha(\Omega)$.

(iii) si $\begin{cases} \alpha \geq 0 & \text{et } \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{m}{n} \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} > 0 \end{cases}$; alors : $L^q(\Omega) \hookrightarrow W_\alpha^{-m,p}(\Omega)$

(iv) si $\begin{cases} \alpha < 0,\ \alpha + \dfrac{1}{p} > 0 \text{ et } \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{p} + \alpha + \dfrac{m}{n} \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} > \alpha . \end{cases}$; alors $L^q(\Omega) \hookrightarrow W_\alpha^{-m,p}(\Omega)$

Montrons (i) : les conditions $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} < 0 \end{cases}$ impliquent : $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}(\Omega)$.

Or, d'après le théorème de Sobolev : $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}(\Omega) \hookrightarrow C^\circ(\overline{\Omega})$, d'où le résultat cherché.

Par ailleurs, les conditions $\begin{cases} \alpha > 0,\ \alpha + \dfrac{1}{p} > 0 \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} < \alpha \end{cases}$ impliquent $\dfrac{1}{p'} - \alpha < \dfrac{m}{n}$

et $\dfrac{1 - \alpha' p'}{p'} < \dfrac{m}{n}$. Soit $q > 1$ tel que : $\dfrac{1 - \alpha p'}{p'} < \dfrac{1}{q} < \dfrac{m}{n}$. D'après le théorème 6.3 et le théorème de Sobolev, il vient :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,q}(\Omega) \hookrightarrow C^\circ(\overline{\Omega}),$$

d'où le résultat.

Montrons (ii) : les conditions $\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} = 0 \end{cases}$ impliquent d'après le théorème de Sobolev :

$$\forall q' \in]1,+\infty[, \quad \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega),$$

d'où le résultat cherché.

Par ailleurs, les conditions $\begin{cases} \alpha < 0,\ \alpha + \dfrac{1}{p} > 0 \\ \dfrac{1}{p'} - \dfrac{m}{n} = \alpha \end{cases}$ impliquent, d'après le (i) :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,q'}(\Omega)$$

pour tout q' tel que : $\frac{m}{n} < \frac{1}{q'} < 1$. Et, d'après le théorème de Sobolev, on a :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^{q''}(\Omega) \quad \text{avec } 0 < \frac{1}{q'} - \frac{m}{n} = \frac{1}{q''} < 1.$$

Par suite on a :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega) \qquad \text{pour } \frac{m}{n} < \frac{1}{q'} < 1$$

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{q''}(\Omega) \qquad \text{pour } 0 < \frac{1}{q''} < 1 - \frac{m}{n}.$$

Il en résulte que : $\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$, pour tout q appartenant à $]1,+\infty[$, d'où le résultat.

Montrons (iii) : du théorème de Sobolev et des conditions $\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} > 0 \end{cases}$

on déduit que :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,p'}(\Omega) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega)$$

avec $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p'} - \frac{m}{n}$, d'où le résultat.

Montrons (iv) : les conditions $\begin{cases} \alpha < 0,\ \alpha + \frac{1}{p} > 0 \\ \frac{1}{p'} - \frac{m}{n} > \alpha \end{cases}$ impliquent :

$$\overset{\circ}{W}{}^{m,p'}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,q'}(\Omega) \qquad \text{pour } \frac{m}{n} < \frac{1 - \alpha p'}{p'} < \frac{1}{q'}.$$

Or on a : $\overset{\circ}{W}{}^{m,q'}(\Omega) \hookrightarrow L^{q''}(\Omega)$ avec $\frac{1}{q''} = \frac{1}{q} - \frac{m}{n}$. Ce qui achève la démonstration.

<u>Théorème 6.7.</u> Si $-(\alpha + \frac{1}{p}) \neq 0,1,\ldots,(m-1)$, alors on a :

$$L^p_{\alpha+m}(\Omega) \hookrightarrow W^{-m,p}_{\alpha}(\Omega).$$

Ce théorème est un cas particulier du théorème 6.5.

<u>Remarque 6.3.</u> Pour $\alpha + \frac{1}{p} < 0$, on obtiendrait de manière analogue des théorèmes d'immersion pour $W^{-m,p}_{\alpha}(\Omega)$.

4°) Applications.

Désignons par I le plus grand intervalle ouvert contenant 0 obtenu au théorème 6.3 (i) et par I^* celui obtenu au (ii).

On peut remarquer que si $a(\Psi,\varphi) = \overline{a(\varphi,\Psi)}$ pour tout φ et Ψ appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$, alors :

$$\operatorname{Sup} I = - \operatorname{Inf} I^* \quad \text{et } \operatorname{Inf} I = - \operatorname{Sup} I^*.$$

Ceci étant on a :

Théorème 6.8. Soit A l'opérateur défini par (6.1) avec les conditions (6.2) et (6.4). Soit α tel que :

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad \alpha \in I.$$

Soient $(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\alpha-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$, $f \in W_\alpha^{-m,2}(\Omega)$; alors : le problème :

$$(I) \qquad \begin{cases} u \in W_\alpha^{m,2}(\Omega) \\ Au = f \quad \text{dans } W_\alpha^{-m,2}(\Omega) \\ \gamma_j\, u = g_j \quad j = 0,\ldots,m-1, \text{ dans } W^{m-j-\alpha-\frac{1}{2},2}(\Gamma) \end{cases}$$

admet une solution et une seule qui dépend continûment des données f et $(g_0,\ldots,g_{m-1})$ dans les espaces considérés.

Il s'agit ici d'un problème de Dirichlet non homogène qu'il nous faut tout d'abord justifier.

Tout d'abord puisque : $0 < \alpha + \frac{1}{2} < 1$, d'après le théorème 5.1, il existe un relèvement linéaire continu

$$R : \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{2}-\alpha,2}(\Gamma) \longmapsto W_\alpha^{m,2}(\Omega).$$

Posons donc : $u_\circ = R(g_\circ, g_1, \dots, g_{m-1})$. Ainsi, le problème (I) se ramène au problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} v \in \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{\alpha}(\Omega) & (v = u - u_\circ) \\ \\ Av = f - Au_\circ \quad \text{dans } W^{-m,2}_{\alpha}(\Omega) \end{cases}$$

ce qui a un sens, car si u appartient à $W^{m,2}_{\alpha}(\Omega)$, d'après l'expression de Au et la condition (6.2) d'une part, et d'autre part d'après le théorème 6.4, on déduit que $Au \in W^{-m,2}_{\alpha}(\Omega)$.

Il nous reste à mettre le problème (II) sous forme variationnelle. Soit donc φ appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$, le problème (II) devient alors équivalent au problème suivant :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} v \in \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{\alpha}(\Omega) \\ \\ a(\varphi, v) = \langle \bar{f} - \overline{Au_\circ}, \varphi \rangle_{W^{-m,2}_{\alpha}(\Omega), \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \end{cases}$$

Posons alors : $H_2 = \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{\alpha}(\Omega)$

$H_1 = \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)$.

En revenant aux théorèmes 6.1 et 6.2, les conditions (i) et (ii) du théorème 6.1 sont trivialement satisfaites d'après le théorème 6.3.

On va montrer que l'on a la condition (iv) du théorème 6.2 ce qui achèvera la démonstration du théorème 6.8.

Il faut montrer que $Z(H_2)$ est dense dans H_1. Soit alors h appartenant à H_1. $\mathfrak{D}(\Omega)$ étant dense dans $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{-\alpha}(\Omega)$, il existe une suite (h_k), h_k appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$ telle que : h_k tende vers h dans H_1 quand k tend vers $+\infty$.

Soit $L_k : \varphi \longrightarrow (\varphi, h_k)_{H_1} \quad : \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{-\alpha}(\Omega) = H_1 \longrightarrow \mathbb{C}$.

Comme : $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{-\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega)$ avec densité et comme h_k appartient à $\mathfrak{D}(\Omega)$, la forme L_k admet un prolongement linéaire continu à $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega)$. La forme $a(v,u)$ étant coercive sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega)$, il existe donc u_k appartenant à $\overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{\alpha}(\Omega)$ telle que :

$$a(\varphi, u_k) = (\varphi, h_k)_{H_1} \quad , \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Mais alors on a :

$$Z(u_k) = h_k \text{ tend vers } h, \text{ dans } H_1 \text{ quand } k \text{ tend vers } +\infty.$$

Théorème 6.9. Soit A l'opérateur défini par (6.1) avec les conditions (6.2) et (6.4). Soit α tel que :

$$\alpha \leq 0 \qquad \alpha + \frac{1}{2} > 0, \quad \alpha \in I \cap I^*.$$

Soient $(g_0, g_1, \dots, g_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} \in W^{m-j-\alpha-\frac{1}{2},2}(\Gamma)$, $f \in W^{-m,2}_{\alpha}(\Omega)$; alors :

le problème :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} u \in W^{m,2}_{\alpha}(\Omega) \\ Au = f \text{ dans } W^{-m,2}_{\alpha}(\Omega) \\ \gamma_j u = g_j \text{ dans } W^{m-j-\alpha-\frac{1}{2},2}(\Gamma) \qquad j = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

admet une solution et une seule qui dépend continûment des données f et $(g_0, \dots, g_{m-1})$ dans les espaces considérés.

Ce problème a bien un sens pour les mêmes raisons que dans le théorème 6.8. On se ramène de la même façon à un problème de Dirichlet homogène et on observe cette fois que l'on peut appliquer directement le théorème 6.1.

Remarque 6.4. La régularité du problème de Dirichlet est donnée par :

1 - Les théorèmes d'immersion des espaces $W_{\alpha}^{m,p}(\Omega)$.

2 - Les théorèmes classiques de la régularité pour les opérateurs elliptiques.

Remarque 6.5. En observant les théorèmes 6.8 et 6.9 avec $\alpha > 0$, on obtient ainsi une classe de conditions aux limites plus larges que celle formée des traces des fonctions de $W^{m,2}(\Omega)$.

De même pour $\alpha > 0$, la classe des seconds membres f est plus large que celle obtenue pour le cas $\alpha = 0$.

Remarque 6.6. Soit maintenant $\alpha < 0$ avec $\alpha \in I \cap I^*$. Prenons f dans $L^2(\Omega)$. Comme $\alpha + \frac{1}{2} > 0$ et $m \geq 1$, on a aussi $f \in W_{\alpha}^{-m,2}(\Omega)$.

On obtient alors que la solution du problème classique :

$$\begin{cases} Au = f \in L^2(\Omega) \\ u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,2}(\Omega) \end{cases}$$

satisfait en fait à : $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,2}_{+\alpha}(\Omega)$, ce qui est un résultat de régularité meilleur au voisinage de la frontière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON — Lectures onelliptic boundary value problems ; Van Nostrand Mathematical Studies.

[2] G. GEYMONAT et P. GRISVARD — Problemi ai limiti lineari ellitici negli spazi di Sobolev con peso ; Le Matematiche, XXII fasc. 2 (1967).

[3] P. GRISVARD — Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids ; Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa 17 (1963).

[4] HARDY - LITTLEWOOD - POLYA — Inégalités (1934).

[5] KADLEC et KUFNER — Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions (I and II) ; Casopis pro pestovani matematiky, 92 (1967).

[6] J.L. LIONS — Théorèmes de traces et d'interpolation ; Mathema. Ann. 151 (1963).

[7] J.L. LIONS et E. MAGENES — Problemi ai limiti non omogenei ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1961).

[8] J. NECAS — Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle ; Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa VI. Vol. XVI, fasi. IV (1962).

[9] L. SCHWARTZ — Distributions, Hermann (1967).

TABLE DES MATIERES