GEORGES TOURNEMINE

# Comportement asymptotique de l'écoulement sonique autour d'un corps de révolution de dimensions finies, en aval de l'onde de choc

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1967-1968
« Publications des séminaires du département de mathématiques », , exp. n° 2, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1967-1968____A2_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE L'ECOULEMENT SONIQUE AUTOUR D'UN CORPS DE REVOLUTION DE DIMENSIONS FINIES, EN AVAL DE L'ONDE DE CHOC.

par Georges TOURNEMINE

Un corps de révolution est plongé dans un écoulement de fluide non dissipatif à chaleurs spécifiques constantes. L'écoulement à l'infini amont est parallèle à l'axe de révolution pris pour axe des x.

D. EUVRARD [1] a trouvé pour potentiel des vitesses en amont de l'onde de choc

$$(1)\quad \varphi = x+y^{-2/7} f^{*}(\zeta)+y^{-6/7} f^{**}(\zeta)+y^{-8/7} f^{***}(\zeta)+y^{\frac{3-\sqrt{145}}{7}} f^{****}(\zeta)+y^{-\frac{10}{7}} f^{*****}(\zeta) + O(y^{-\frac{12}{7}})$$

avec $\zeta = (\gamma+1)^{-1/3}\, x\, y^{-4/7}$

En aval, une étude au premier ordre montre que, pour $\zeta$ fixé ($\zeta>\zeta_c$) et y grand, le tourbillon est d'ordre $y^{-\frac{25}{7}}$. Une tentative toute naturelle consiste à chercher un développement asymptotique du potentiel sur les mêmes fonctions de jauge qu'en amont mais valable jusqu'à $y^{-2}$. Un calcul rapide montre que la traînée est alors certainement nulle. La question soulevée est la suivante : Existe-t-il en aval, des termes nouveaux n'ayant pas leur équivalent en amont ?

L'équation d'évolution jointe aux conditions aux limites, en particulier l'équation de Prandtl et la continuité du potentiel à travers le choc nous apprennent qu'il existe un seul terme nouveau de puissance comprise entre $-\frac{2}{7}$ et $-\frac{6}{7}$

Le potentiel s'écrit :

(2) $\varphi = x+y^{-2/7}\ f_o(\zeta) + y^{-4/7}\ f_1(\zeta) + y^{-6/7}\ f_2(\zeta) + O(y^{-8/7})$

Nous avons paramétré explicitement les fonctions intervenant en (2). Le choc a pour équation :

(3) $\zeta = \zeta_c\ [1 + \lambda_1\ y^{-2/7} + \lambda_2\ y^{-4/7} + O(y^{-6/7})]$

où $\lambda_1$, et $\lambda_2$ sont des constantes déterminées.

Dans le sillage, l'écoulement a pour trait dominant l'irrotationalité, nous recherchons le champ des vitesses sous la forme

(4) $u = U(y) + \sum_{j=1}^{\infty} x^{-p_j}\ \bar{f}_j(y)$ (5) $v = \sum_{j=1}^{\infty} x^{-r_j}\ \bar{g}_j(y)$

où U(y) est une fonction arbitraire, soumise, à cause du deuxième principe de la thermodynamique et du raccordement, aux seules conditions

(6) $U(y) < 1 \quad \forall y,\ U(y) = 1 + O(y^{-\frac{18}{7}})$ quand $y \to \infty$

U(y) représente en quelque sorte l'image à l'infini du choc.

Justification de l'introduction du développement intérieur :

a) si $\zeta > \zeta_c$ et $y \to +\infty$, le tourbillon tend vers zéro assez vite pour qu' existe au moins un terme potentiel, ce terme étant la solution homogène.

b) pour y fini et $x \to +\infty$ le tourbillon est différent de zéro et la solution homogène n'est plus le terme dominant.

Nous avons donc un problème de perturbation singulière, le petit paramètre est la coordonnée $\left[X = \frac{(\gamma+1)^{1/3}}{x}\right]^{1/4}$, la variable extérieure $\xi = \zeta^{-1/4}$ et la variable intérieure $Y = \frac{\xi}{X}$

La substitution des développements (4) et (5) dans les équations :

$$(6)\quad \vec{rot} \left| \frac{\vec{rot}\ \vec{q} \wedge \vec{q}}{(1-\mu^2 q^2)} \right| = \vec{0} \qquad ; \qquad (7)\quad \mathrm{div}\left[(1-\mu^2 q^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \vec{q}\right] = 0$$

fournit : (8) $\qquad p_j + 1 = r_j \qquad \forall j$

Les trois premiers couples $(\bar{f}_j, \bar{g}_j)$ devant satisfaire un système différentiel linéaire est homogène.

$$(9)\quad \begin{cases} (1-\mu^2 U^2)\bar{g}_j' - \dfrac{2\mu^2}{\gamma-1} UU'\bar{g}_j = p_j(1-U^2)\bar{f}_j - (1-\mu^2 U^2)\dfrac{\bar{g}_j}{y} & (a) \\[2ex] (1-\mu^2 U^2)(U'\bar{g}_j)' + 2\mu^2 UU'^2 \bar{g}_j = p_j\left[(1+\mu^2 U^2)U' \bar{f}_j + (1-\mu^2 U^2)U \bar{f}_j'\right] & (b) \end{cases}$$

La solution générale vérifiant la condition de glissement sur l_axe s'écrit

$$(10)\quad \begin{cases} \bar{f}_j(y) = K\left\{\dfrac{U'(y)}{y}\left[\displaystyle\int_0^y \dfrac{1-U^2(\eta)}{U^2(\eta)}\,\eta\, d\eta\right] + \dfrac{1-\mu^2 U^2(y)}{U(y)}\right\} & (a) \\[3ex] \bar{g}_j(y) = \dfrac{K\, p\, U(y)}{y}\left[\displaystyle\int_0^y \dfrac{1-U^2(\eta)}{U^2(\eta)}\,\eta\, d\eta\right] \end{cases}$$

L'application du principe de raccordement de KAPLUN-LAGERSTRÖM (cf. Van Dyke [8]) donne :

$$(11)\quad \begin{cases} u = U(y) + x^{-3/2}\bar{f}_o(y) + x^{-2}\bar{f}_1(y) + x^{-5/2}\bar{f}_2(y) + O(x^{-3}) \\[2ex] v = \qquad\quad + x^{-5/2}\bar{g}_o(y) + x^{-3}\bar{g}_1(y) + x^{-7/2}\bar{g}_2(y) + O(x^{-4}) \end{cases}$$

Les couples $(\bar{f}_o, \bar{g}_o)$ ; $(\bar{f}_1, \bar{g}_1)$ et $(\bar{f}_2, \bar{g}_2)$ sont calculés explicitement.

On démontre [7] le théorème d'unicité :

Le développement extérieur du potentiel et les développements intérieurs des composantes de la vitesse obtenus précédemment en (2) et (1), sont les seuls possibles.

Remarque : On voit apparaître dans le développement extérieur du potentiel un terme $y^{-\frac{10}{7}} f(\zeta)$ ; $f(\zeta)$ comportant un logarithme.

L'équation des lignes de courant s'écrit

$$(12) \quad \psi = y - y^{-5/7} G_\circ(\zeta) - y^{-1} G_1(\zeta) - y^{-9/7} G_2(\zeta) + O(y^{-11/7})$$

Les fonctions $G_\circ(z)$, $G_1(z)$ et $G_2(z)$ ont été déterminées explicitement à l'aide de $U(y)$. Pour la traînée, nous trouvons

$$(14) \qquad T = 4\pi \int_0^\infty \frac{U(y)\ (1-U(y))}{(\gamma+1)-(\gamma-1)U^2}\, y\, dy.$$

Elle est bien positive.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] D. EUVRARD — Journal de Mécanique vol. 7 n° 4 (1967)
vol. 8 n° 1 et 2 (1968)

[2] J. HUBERT — Journal de Mécanique vol. 8 n° 1 (1968)

[3] P. GERMAIN — "Ecoulements transsoniques homogènes", Progress in Aeronantical Sciences, V, Pergamon Press. p.143 (1964)

[4] D.T. BARISH et K.G. GUDERLEY — "Asymptotic forms of shoks waves in flows over symmetrical bodies at Mach number one" J. A. s 20, p. 491 (1953)

[5] S.V. FAL'KOVICH et I.A. CHERNOV — "Flow of a sonic gaz stream past a Body of revolution" P.M.M, n° 2 p. 342 (1964)

[6] E.A. MÜLLER et K. MATSCHAT — "Ahnlichkeitslösungen der transsonischen gleichungen bei der Anström-Machzahl 1". Proc. of the 11 th. international Congress of applied mechanics. MÜNCHEN (1964)

[7] G. TOURNEMINE — Journal de Mécanique vol. 8 n° 2 (1968)

[8] M. VAN DYKE — "Perturbation methods in fluid mechanics". Appl. math. and Mech. vol. 8, Academic Press (1964).