A. BRUNEL

Théorème ergodique en moyenne d'Eberlein

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n^{o} 3, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967____A3_0>

THEOREME ERGODIQUE EN MOYENNE D'EBERLEIN

(cf. Transactions of Ann. Math. Soc. (67) p. 217-240. Abstract Ergodic theorem) exposé par A. BRUNEL.

1. Situation et notations.

E : espace localement convexe séparé,

G : sous semi-groupe de l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E,

G^* : enveloppe convexe de G dans $\mathcal{L}(E)$.

$\forall x \in E$ $\quad O(x)$ désigne l'orbite de x sous G

$O^*(x)$ " " " " G^*.

$\overline{O^*(x)}$ adhérence de $O^*(x)$ dans E.

Définition 1.

Le semi groupe G est dit ergodique s'il existe une famille $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, I ordonné filtrant telle que :

1°) $\forall \alpha \in I \quad T_\alpha \in \mathcal{L}(E)$

2°) $\forall \alpha \in I \quad \forall x \in E \quad T_\alpha x \in \overline{O}^*(x)$

3°) $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est équicontinu

4°) $\forall x \in E \quad \forall T \in G \quad \lim\limits_{\alpha} (T_\alpha Tx - T_\alpha x) = 0$ (limite dans E)

et $\lim\limits_{\alpha} (T\,T_\alpha x - T_\alpha x) = 0$

2. Théorème ergodique d'Eberlein.

Théorème 1.

Si G *est ergodique relativement à* $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\forall\, x \in E$ *les conditions suivantes pour un* $y \in E$ *sont équivalentes*

1°) $y \in \overline{O^*}(x)$ *et* $Ty = y \quad \forall\, T \in G$

2°) $y = \lim\limits_{\alpha} T_\alpha x$ *(limite pour top. donnée sur* E*)*

3°) $y = \lim\limits_{\alpha}$ faible $T_\alpha x$

4°) y *est valeur d'adhérence pour la topologie faible de la famille* $(T_\alpha x)_{\alpha \in I}$ *suivant l'ordonné filtrant* I.

Démonstration.

Les implications 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) sont trivialles.

Montrons que 1) $\Longrightarrow$ 2) :

Soit U voisinage convexe équilibré de O dans E. Montrons $\exists\, \beta$ tel que $\forall\, \alpha \geq \beta \qquad T_\alpha x - y \in U$.

Soit V et W voisinages convexes équilibrés de O dans E tels que : $V+V \subset U$ et $\bigcup\limits_{\alpha \in I} T_\alpha(W) \subset U$ (hypothèse d'équicontinuité).

Par hypothèse $\exists\, T^* \in G^*$ tel que $y - T^*(x) \in W$. En outre l'orbite de y étant réduite à y (hypothèse 1)) on a $T_\alpha y = y$ d'après la propriété 2) de la famille $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Ecrivons :

$$(1) \quad \begin{aligned} T_\alpha x - y &= T_\alpha x - T_\alpha T^* x + T_\alpha T^* x - T_\alpha y \\ &= T_\alpha x - T_\alpha T^* x + T_\alpha (T^* x - y). \end{aligned}$$

Comme $y - T^* x \in W$ l'hypothèse sur W et l'équicontinuité impliquent

$T_\alpha(T^* x - y) \in U$, $\forall \alpha$

En outre d'après la propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, il existe β tel que $\forall \alpha > \beta$, $T_\alpha x - T_\alpha T^* x \in V$.

La famille 1) montre alors que $T_\alpha x - y \in U$.

Montrons que 4) $\Longrightarrow$ 1)

Comme $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est continu dans le convexe $O^*(x)$ d'après l'hypothèse 2) sur $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, l'adhérence faible de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est contenue dans l'adhérence faible (ou forte) de $O^*(x)$. Donc 4) $\Longrightarrow$ $y \in \overline{O^*(x)}$.

Pour montrer que $Ty = y$ nous montrons que $\forall z' \in E'$, $\langle y - Ty, z' \rangle = 0$, ou encore que $\forall \varepsilon > 0$ $|\langle y - Ty, z' \rangle| \leq \varepsilon$. Or d'après la propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\exists \beta$ tel que $\forall \alpha > \beta$, $|\langle T T_\alpha x - T_\alpha x, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après 4) on peut maintenant trouver $\alpha > \beta$:

$$|\langle y - T_\alpha x, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\langle y - T_\alpha x, {}^t T z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Pour un tel α en écrivant :

$$y - Ty = y - T_\alpha x + T_\alpha x - T\, T_\alpha x + T\, T_\alpha x - Ty$$

On a :

$$|\langle y - Ty, z' \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

D'où le théorème.

Définition 2.

Si G est ergodique, x est dit ergodique avec point fixe limite y, si et seulement si il existe y satisfaisant l'une des quatre conditions équivalentes du théorème.

Notons que si un tel y existe il est unique : ceci résulte en effet de la propriété 2).

Notons de même que si la limite exprimée par la condition 2) existe pour une famille ergodique $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$, la limite existe et est la même pour toute autre famille ergodique $\{T_{\alpha'}\}_{\alpha' \in I'}$ d'après la condition 1).

La notion d'ergodicité pour un point $x \in E$, ne dépend donc pas de la famille ergodique $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ considérée .

En outre l'application $x \rightsquigarrow y$ définie pour les éléments ergodiques est notée T_∞.

Théorème 2.

Supposons que E *soit un Banach. Si* G *est ergodique les éléments ergodiques de* E *forment un sous-espace vectoriel* Γ *fermé et invariant par le* semi *groupe* G *de* E. *L'application* T_∞ *est linéaire bornée de* Γ *dans* Γ *et possède des propriétés :*

$\|T_\infty\| \leq M$ *(avec* $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| \leq M$). *En outre* $T_\infty = T_\infty^2 = T_\infty U = U\, T_\infty$ *pour tout* $U \in (\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}) \cup \overline{G^*}$.

Démonstration.

- Le fait que Γ soit un sous-espace vectoriel résulte trivialement de 2).

- $\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\| \leq M$ exprime l'équicontinuité des $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$. D'où $\|T_\infty\| \leq M$ résulte de 2).

- Montrons que $x \in \Gamma \implies Tx \in \Gamma \quad \forall\, T \in G$.

Or $x \in \Gamma \implies T_\alpha x \to y$ (condition 2)).

Comme (propriété 4°) de $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$) $(T_\alpha Tx)_{\alpha \in I}$ converge également vers y. D'où $Tx \in \Gamma$ par définition de Γ.

- Montrons que Γ est fermé

$$\text{Soit } x_n \in \Gamma \qquad \lim_n x_n = x \in E$$
$$x_n \in \Gamma \implies T_\alpha x_n = y_n \in E$$

comme

$$y_n - y_m = \lim_\alpha T_\alpha(x_n - x_m)$$
$$\|y_n - y_m\| \leq M \|x_n - x_m\|.$$

La suite (y_n) étant aussi de Cauchy, et converge vers un $y \in E$. On en déduit immédiatement que $\lim T_\alpha x = y$. D'où $x \in \Gamma$. La fin du théorème résulte directement du lemme suivant :

<u>Lemme</u>.

Si Γ *est un sous-espace vectoriel fermé, invariant sous* G, *tel que* $\forall\, x \in \Gamma$, $\overline{O^*(x)}$ *possède un unique point fixe* Sx, *alors pour tout endomorphisme* U *satisfaisant la condition* $Ux \in \overline{O^*(x)}$, $\forall\, x \in E$, *alors* $Sx = S^2x = S\,U\,x = U\,Sx$.

<u>Démonstration</u>.

Si $x \in \Gamma$, $\overline{O^*(x)} \subset \Gamma$ par hypothèse, d'où $Sx \in \Gamma$. Donc S applique Γ dans Γ. Comme $\overline{O^*(Sx)} = \{Sx\}$, mais $Sx \in \Gamma \implies$ Sx est le seul point fixe de $\overline{O^*(Sx)}$. D'où $Sx = S^2x$.

Maintenant la condition $Ux \in \overline{O^*(x)}$ implique $Ux \in \Gamma$ et $\overline{O^*(Ux)} \subset \subset \overline{O^*(x)}$, d'où $S\,Ux = Sx$, puisque $\overline{O^*(Ux)}$ a un point fixe unique.

3. Application à la situation classique.

Hypothèse. E : Banach T endomorphisme borné de E tel que

$$\sup_n \|T^n\| \leq C.$$

Pour une famille $(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ on prend les moyennes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$T_n = \frac{1}{n}(T + \ldots + T^n).$$

On vérifie immédiatement les conditions 1° à 4° de la définition 1.