

R. THEODORESCU

Propriétés ergodiques des processus stochastiques généraux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1966-1967
« Séminaires de probabilités et statistiques », , exp. n° 14, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1966-1967___A14_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

par

R. THEODORESCU (Université de BUCAREST).

I - Situation - Définitions :

(W, \mathcal{W}) - espace mesurable, espace des paramètres.

(X, \mathcal{F}) espace des états.

$(X^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)})$ espace mesurable produit.

Définitions :

(1) $P_{1,1}^{(m,1)} : W \times X^{(m)} \longrightarrow X$ avec condition $m = 0 \implies W \times X^{(0)} = W$.

(2)
$$P_{1,\ell}^{(m,1)}(c; x^{(m)}; A^{(\ell)}) = \int_X P_{1,1}^{(m,1)}(c; x^{(m)}; dy_1) P_{1,1}^{(m+1,1)}(c; x^{(m)} + y_1; dy_2) \dots \int P_{1,1}^{(m+\ell-1,1)}(c; x^{(m)} + y_1 \dots + y_{\ell-1}; dy_{\ell}) 1_A^{(\ell)}$$

(3)
$$P_{1,\ell}^{(m,n)}(c; x^{(m)}; A^{(\ell)}) = \int_X P_{1,1}^{(m,1)}(c; x^{(m)}; dy) P_{1,\ell}^{(m+1,n-1)}(c; x^{(m)} + y; A^{(\ell)})$$

Equation fonctionnelle fondamentale :

Elle résulte des définitions :

$$P_{1,\ell}^{(m,n)}(c; x^{(m)}; A^{(\ell)}) = \int_{X^{(k)}} P_{1,k}^{(m,1)}(c; x^{(m)}; dy^{(k)}) P_{1,\ell}^{(m+k,n-k)}(c; x^{(m)} + y^{(k)}; A^{(\ell)})$$

Coefficient de dépendance :

Fonction réelle $I(k, \ell, m, n, s)$ définie sur $W \times \mathbb{N}^* \times Z \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$I(k, \ell, m, n, s) = \sup_{\substack{c', c'' \in W \\ x^{(k)}, y^{(s)}}} \left| \left| P_{1,\ell}^{(k,n)}(c'; x^{(k)}; \cdot) - P_{1,\ell}^{(s, k+n+m-s)}(c''; y^{(s)}; \cdot) \right| \right|$$

Propriétés des coefficients de dépendance :

$$I(k, \mathcal{P}, m, n, s) = I(s, \mathcal{P}, -m, k+n+m-s, k)$$

$$I(k, \mathcal{P}, m, n+1, s) \leq I(k+1, \mathcal{P}, m, n, s+1)$$

$$I(k, \mathcal{P}, m, n, s) \leq I(k, \mathcal{P}, m, n, s+1)$$

II - Notions d'ergodicité :

k - semi ergodicité au sens fort :

$$P_{1, \mathcal{P}}^{(k, n)}(c; x^{(k)}; \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{1, \mathcal{P}}^{(k, \infty)}(c; x^{(k)}; \cdot) \quad \text{convergence en norme des}$$

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbb{N}^*$$

k - ergodicité au sens fort :

$$P_{1, \mathcal{P}}^{(k, n)}(c; x^{(k)}; \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_{1, \mathcal{P}}^{(k, \infty)}(\cdot) \quad \text{convergence en norme des mesures}$$

$$\forall \mathcal{P} \in \mathbb{N}, \text{ limite indépendante de } c \text{ et } x^{(k)}.$$

k - ergodicité faible :

$$\text{si } I(k, \mathcal{P}, 0, n, k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Lorsque k-semi ergodicité au sens fort ou k-ergodicité au sens fort est vraie $\forall k$, on parle de semi ergodicité au sens fort ou ergodicité au sens fort.

Théorème

$$k' \leq k''$$

k'' ergodicité au sens fort $\implies k'$ ergodicité au sens fort et

$$P_{1, \mathcal{P}}^{(k', \infty)} = P_{1, \mathcal{P}}^{(k'', \infty)}.$$

III - Quelques théorèmes ergodiques.

Nous définissons un nouveau coefficient de dépendance.

$$I^*(k'+k'', \mathcal{P}, m, n, s' \dagger k'') = \sup_{c', c''} \left\| P_{1, \mathcal{P}}^{(k'+k'', n)}(c'; x^{(k')} + z^{(k'')}; \cdot) \right. \\ \left. - P_{1, \mathcal{P}}^{(s'+k'', k'+n+m-s')}(c''; y^{(s')} + z^{(k'')}; \cdot) \right\| \\ x^{(k')}, y^{(s')}, z^{(k'')}$$

on a trivialement :

$$I^* \leq I \text{ et} \\ I^*(k+n, \mathcal{P}, 0, 1, k+n) \leq \sum_{j=0}^{n+\mathcal{P}-1} I^*(k+j, 1, 0, 1, k+j)$$

1 - Ergodicité faible.

Théorème

$I(k, \mathcal{P}, 0, 1, k) \leq 1 - \eta$ $\eta > 0$ est nécessaire pour la
k ergodicité faible.

Si ceci est vrai, la condition suivante est suffisante pour
l'ergodicité faible ;

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} I^*(k+n, 1, 0, 1, k+n) < + \infty.$$

Théorème

Supposer que $I(k, \mathcal{P}, 0, n+1, k) \leq I(k, 1, 0, 1, k) I(k+1, \mathcal{P}, 0, n, k+1)$
(condition vérifiée par chaînes de Markov et chaînes à liaisons complètes
à nombre fini d'états)

et $I(k, \mathcal{P}, 0, 1, k) \leq 1 - \eta$

alors le processus est faiblement ergodique.

2 - Ergodicité forte

Théorème

un processus est k -fortement ergodique si et seulement si

$$I(k, \mathcal{F}, m, n, k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ uniformément par rapport à } m.$$

Théorème

La condition $I(k, \mathcal{F}, 0, 1, s) \leq 1 - \eta$ pour $\eta > 0 \quad \forall s$ est nécessaire pour la k -ergodicité forte.

la condition $\sum_{n \in \mathbb{N}} I^*(k+n, 1, 0, 1, s+n) < \infty \quad \forall s$ est suffisante si la condition précédente est vraie également.

Posons :

$$\sup_{\substack{c', c'' \\ x^{(k)}}} \left\| P_{1, \mathcal{F}}^{(k, n)}(c'; x^{(k)}; A(\mathcal{F})) - P_{1, \mathcal{F}}^{(0, k+n+m)}(c''; A(\mathcal{F})) \right\| = I_1(m, n)$$

$$\sup_{\substack{c', c'' \\ x^{(k)}}} \left\| P_{1, \mathcal{F}}^{(k, n)}(c'; x^{(k)}; A(\mathcal{F})) - P_{1, \mathcal{F}}^{(0, k+n)}(c''; A(\mathcal{F})) \right\| = I_2(n)$$

Si $I_2(n) \longrightarrow 0$ on a des processus analogues à ceux considérés par Ibragimov.

Théorème

Si $I_2(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ le processus est 0-ergodique faible (on dit aussi normal au sens faible).

La condition $I_2(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ est nécessaire pour que le processus soit ergodique au sens faible.

Théorème

Pour une chaîne à liaison complète $I_2(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ est nécessaire et suffisante pour l'ergodicité au sens faible.

BIBLIOGRAPHIE

- DOBRUTHIN Theo. Vera. 1956 n° 1 Théorème limite central
pour chaînes de Markov non homogènes.
- UENO Journal Fac Sci. Université de Tokyo. Sect I. 1957. 7
- IBRAGUNOV Prob. Theory and its applications - 1962 . 7
- HAJNAL
- KOZNIEROSKA Coll. Math. 1962 Vol. 9. p 333-346 Suite dans Coll. Maths.
1964.
- CHUNG Zeitschrift für Warscheinlichkeits theorie und Ver. Geb.
1964 - On the Doeblin Condition.
- BOTEZ et THEODORESCU On the ergodie Behaviour of discrete Random
processus. Rev. Roum. Maths. Pures et appli. 1965 tome X
n° 7 p 991-1010