MÉTIVIER

Probabilités conditionnelles régulières

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 2, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A2_0>

PROBABILITES CONDITIONNELLES REGULIERES

I - Espérance conditionnelle - Notations.

Soient (Ω , $\mathcal{F}$) et (X, $\mathcal{B}$) deux espaces probabilisables, φ une application mesurable de Ω sur X, P une probabilité sur $\mathcal{F}$ et ν la probabilité image de P par φ .

Nous noterons $\mathcal{L}^{\circ}_{+}$ (Ω , $\mathcal{F}$) le cône positif des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^{+}$, par L°_{+} (P) le cône quotient de $\mathcal{L}^{\circ}_{+}(\Omega, \mathcal{F})$ constitué par les classes de fonctions P-équivalentes.

On définit de même $\mathcal{L}^{\circ}_{+}$ (X,$\mathcal{B}$) et $L^{\circ}_{+}(\nu)$.

Nous rappelons que l'espérance conditionnelle par rapport à φ (ou à $\mathcal{B}$) d'une fonction f $\in$ $\mathcal{L}^{\circ}_{+}$ (Ω, $\mathcal{F}$) est l'élément de $L^{\circ}_{+}(\nu)$, noté E^{φ} f ou $E^{\mathcal{B}}$ f, tel que :

Pour tout B $\in \mathcal{B}$ $$\int_{\varphi^{-1}(B)} f \, dP = \int_B E^{\mathcal{B}} f \, d\nu$$

L'application f $\rightsquigarrow E^{\mathcal{B}}f$ possède les propriétés suivantes, analogues à celles d'une intégrale sur $\mathcal{L}^{\circ}_{+}$ (Ω, $\mathcal{F}$) :

1° - Il s'agit d'une application linéaire croissante du cône $\mathcal{L}^{\circ}_{+}(\Omega, \mathcal{F})$ dans le cône L°_{+} (ν)

2° - Pour toute suite croissante (f_n) extraite de $\mathcal{L}^{\circ}_{+}$ (Ω, $\mathcal{F}$), convergeant simplement vers f, la suite ($E^{\mathcal{B}} f_n$) converge presque sûrement vers $E^{\mathcal{B}}$ f.

2 - Problèmes

Choisissons dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} f$ un élément que nous noterons encore $E^{\mathcal{B}} f$ par commodité. Les propriétés 1° et 2° ci-dessus donnent :

(1') a) Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$:

$$E^{\mathcal{B}}(\alpha_1 f_1)(x) + E^{\mathcal{B}}(\alpha_2 f_2)(x) = E^{\mathcal{B}}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) \quad \nu\text{-p-s.}$$

b) $f_1 \leq f_2 \implies E^{\mathcal{B}} f_1(x) \leq E^{\mathcal{B}} f_2(x) \quad \nu\text{-p-s.}$

(2') Pour toute suite croissante (f_n) extraite de $\mathcal{L}^0_+(\Omega, \mathcal{F})$; convergeant presque sûrement vers f on a :

$$\lim_n . \; E f_n^{\mathcal{B}}(x) = E^{\mathcal{B}} f \qquad \nu\text{-p-s.}$$

Le problème qui se pose alors est le suivant ; peut-on choisir dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} f$ un représentant tel que les relations (1') et (2') puissent être vraies pour tout x ?

S'il en est ainsi en posant $P(x, F) = E^{\mathcal{B}} 1_F$ on obtient pour chaque x une mesure $F \rightsquigarrow P(x, F)$, notée $P(x, .)$ telle que l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}} f(x)$ soit une espérance au sens ordinaire ;

(2 - 1)

$$E^{\mathcal{B}} f(x) = \int f(y) \; P(x, dy)$$

On déduit d'ailleurs des propriétés 1° et 2° ci-dessus et des propriétés de l'intégrale que, si l'on a pu choisir dans chaque classe $E^{\mathcal{B}} 1_F$ un représentant $P(\;, F)$ tel que $P(x, .)$ soit pour chaque x une probabilité sur $\mathcal{F}$, la fonction de x définie par le second membre de (2 . 1) est un élément de la classe $E^{\mathcal{B}} f$.

Le problème posé est donc le suivant : est-il possible de trouver une fonction P, définie sur X x $\mathcal{F}$, telle que :

(P. C. R_1) Pour tout F $\in \mathcal{F}$ P (. , F) $\in$ $E^{\mathcal{B}} 1_F$

(P. C. R_2) Pour tout x $\in$ X P (x, .) est une mesure sur $\mathcal{F}$?

Comme $E^{\mathcal{B}} 1_{\Omega} = 1_X$ ν- p - s , on voit que P (x, .) a ν- presque sûrement pour norme 1. En remplaçant P (x, .) par la mesure nulle sur un ensemble de mesure ν- nulle, on voit qu'on peut s'imposer, sans se restreindre, de supposer que les mesures P (x, .) sont des probabilités ou sont nulles.

La fonction P (. , .) lorsqu'elle existe est appelée une probabilité conditionnelle régulière.

On sait qu'une telle probabilité conditionnelle régulière n'existe pas toujours. cf. [1] et [3]

La suite de cet exposé est consacrée à donner deux cas importants d'existence.

3 - Définitions et lemmes relatifs aux Classes compactes et aux mesures.

3 - 1 - Classe compacte. (cf. [9])

Un ensemble $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble E est appelé classe compacte s'il possède la propriété :

Pour toute suite (C_n) extraite de $\mathcal{C}$ l'implication suivante est vraie :

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset \right) \Longrightarrow \left((\exists N) \bigcap_{n=1}^{N} C_n = \emptyset \right).$$

3 - 2 - Définition.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau booléen de parties de E, et soit $\mathcal{C}$ une classe compacte avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et soit $\mathcal{A}'$ un anneau booléen avec $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Une fonction réelle positive α, définie sur $\mathcal{A}$ est dite régulière sur $\mathcal{A}'$ relativement à $\mathcal{C}$, si pour tout $A' \in \mathcal{A}'$ on a $\alpha(A') = \sup\{\alpha(C) : C \in \mathcal{C}, \ C \subset A'\}$.

3 - 3 - Lemme 1.

Si α est une fonction additive réelle positive définie sur $\mathcal{A}$ et régulière sur $\mathcal{A}'$ relativement à la classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, alors α est σ- additive sur $\mathcal{A}'$.

3 - 4 - Lemme 2. (cf. [11] p. 228 et 229)

Soient T un espace topologique séparé, $\mathcal{T}$ la tribu de ses Boréliens, $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts. Soit λ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^+$, possédant les propriétés :

a) λ est croissante

b) Pour tout couple $(K_1, K_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ on a :

$$\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$$

c) Pour tout couple $(K_1, K_2) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ tel que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ on a

$$\lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$$

Alors il existe sur $\mathcal{T}$ une mesure μ telle que :

(3 - 4 - 1) Pour tout ouvert O :

$$\mu(O) = \sup\{\lambda(K) : K \in \mathcal{K}, \ K \subset O\} = \sup\{\mu(K) : K \in \mathcal{K}, \ K \subset O\}$$

(3 - 4 - 2) Pour tout Borélien $M \in \mathcal{C}$:

$\mu(M) = \inf \{\mu(O) : O \text{ ouvert}, O \supset M\}$.

4 - Théorèmes de relèvement -

4 - 1 - Théorème 1 -

Supposons que la tribu $\mathcal{F}$ sur Ω admette un système dénombrable $\mathcal{G}$ de générateurs et qu'il existe une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = \sup\{P(C) : C \in \mathcal{C}, C \subset F\}$.

Soit $F \leadsto \tilde{h}_F$ une application croissante additive de $\mathcal{F}$ dans $L^1_+(X, \mathcal{B}, \nu)$, telle que $\lim_n P(F \setminus F \cap F_n) = 0 \Rightarrow \lim_n \tilde{h}_{F \cap F_n} = \tilde{h}_F$ (dans L^1).

Alors il existe une application $h : x \leadsto h(x, .)$ de X dans le cône $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{F})$ des mesures positives sur $\mathcal{F}$ telle que pour tout x, $h(x, .)$ soit régulière relativement à $\mathcal{C}$, et telle en outre que pour tout $F \in \mathcal{F}$ on ait $h(., F) \in \tilde{h}_F$.

Démonstration -

Désignons par $\mathcal{D}'$ l'algèbre booléenne engendrée par $\mathcal{G}$ sur Ω. Comme $\mathcal{D}'$ est dénombrable, posons $\mathcal{D}' = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ Pour chaque n, soit $(C_n^i)_i$ une suite extraite de $\mathcal{C}$ telle que $P(D_n) = \sup_i P(C_n^i)$. Désignons par $\mathcal{D}$ l'algèbre booléenne engendrée par $\mathcal{G}$ et par $\{C_n^i\}_{n, i}$, et choisissons un représentant h de chaque classe h_D, $D \in \mathcal{D}$. Pour tout couple (D_1, D_2) tel que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ on a $h_{D_1}(x) + h_{D_2}(x) = h_{D_1 \cup D_2}(x)$ ν- p. p. L'ensemble des couples (D_1, D_2) étant dénombrable, il existe un ensemble N de mesure $\nu(N) = O$ tel que pour tout $x \in X \setminus N$ et tout couple $(D_1, D_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ on ait :

$$h_{D_1}(x) + h_{D_2}(x) = h_{D_1 \cup D_2}(x).$$

Le fait que $P(D_n) = P(\bigcup_i C_n^i)$ entraine, un vertu des hypothèses du lemme, que $\lim_i \tilde{h}\, C_n^i = \tilde{h}_{D_n}$.

On a donc :

$$\lim_i h_{C_n^{i}}(x) = h_{D_n}(x) \qquad \nu\text{ - p - p.}$$

Il existe donc un ensemble ν - négligeable M tel que :

$$x \notin M \Rightarrow \lim_i h_{C_n^i}(x) = h_{D_n}(x) \text{ pour tout n.}$$

pour tout $x \in X \setminus (M \cup N)$ l'application $D \rightsquigarrow h_D(x)$ est donc une fonction réelle simplement additive sur $\mathcal{D}$, et régulière relativement à la classe compacte $\{C_n^i\}_{n,\, i}$ sur $\mathcal{D}'$. La restriction de $D \rightsquigarrow h_D(x)$ à $\mathcal{D}'$ est donc σ- additive d'après le lemme 1. Elle admet donc un prolongement en une mesure sur $\mathcal{F}$. Pour tout $x \in X \setminus M \cup N$ nous désignons par $h(x, .)$ la mesure précédente. Enfin pour $x \in M \cup N$ nous pouvons prendre la mesure $h(x, .) = P$.

Pour tout $D \in \mathcal{D}'$ la fonction $x \rightsquigarrow h(x, D)$ est un élément de $\tilde{h}_D$, $\mathcal{B}$-mesurable. Si nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}$ tels que $x \rightsquigarrow h(x, F)$ soit un élément de $\tilde{h}_F$, $\mathcal{B}$-mesurable, nous voyons immédiatement que $\mathcal{M}$ est une classe monotone (également un λ-système) contenant $\mathcal{D}'$, donc contenant $\mathcal{F}$. D'où $h(.\,, F) \in \tilde{h}_F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Enfin, le fait que pour tout x la mesure $h(x, .)$ soit régulière relativement à $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}'$ engendrant $\mathcal{F}$, entraine, comme il est bien connu (voir [9]) que $h(x, .)$ est régulière par rapport à $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{F}$.

4 - 2 - Théorème 2.

Soient Ω un espace topologique séparé, $\mathcal{F}$ la tribu de ses Boréliens et $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts. Soit $(T, \mathcal{T}, \nu)$ un espace probabilisé, tel que la tribu $\mathcal{T}$ admette un système dénombrable $\mathcal{G}$ de générateurs. Soit $\hat{\nu}$ la mesure complètée de ν sur la tribu $\mathcal{T}^{\nu}$.

Soit $F \leadsto \tilde{h}_F$ une application croissante σ- additive de $\mathcal{F}$ dans $L^1_+ (T, \mathcal{T}, \nu) = L^1_+ (T, \mathcal{T}^\nu, \hat{\nu})$, et régulière relativement à $\mathcal{K}$.

Alors il existe une application $h : t \leadsto h(t, .)$ de T dans le cône positif $\mathcal{M}^+ (\Omega, \mathcal{F})$ des mesures sur $\mathcal{F}$, telle que pour tout t, $h(t, .)$ soit régulière relativement à la famille des compacts, et telle que pour tout $F \in \mathcal{F}$ $h(., F) \in \mathcal{L}^1 (T, \mathcal{T}^\nu, \hat{\nu})$ avec $h(., F) \in \tilde{h}_F$.

Démonstration.

1° - Définition $h(t, .)$ additive sur $\mathcal{F}$ pour tout x

Considérons l'anneau $\mathcal{A}$ d'unité T engendrée par $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions finies de T, formées d'éléments de $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est filtrant à droite pour la relation d'ordre définie par $(\mathcal{P}' \ll \mathcal{P}'') \Longleftrightarrow$ tout élément de $\mathcal{P}'$ est réunion d'éléments de $\mathcal{P}''$. Comme $\mathcal{P}$ est dénombrable on peut extraire une suite $(\mathcal{P}_n)$ cofinale à $\mathcal{P}$. Comme tout élément de $\mathcal{A}$ appartient à une partition $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$, il est réunion finie d'éléments d'une partition $\mathcal{P}_n$, D'où $\bigcup_n \mathcal{P}_n$ engendre la tribu $\mathcal{T}$.

Pour tout n et tout $F \in \mathcal{F}$, posons

$$D_n \tilde{h}_F = \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\nu(A)} \int_A \tilde{h}_F \, d\nu \; . \; 1_A$$

Avec la convention $\dfrac{1}{\nu(V)} \displaystyle\int_V \tilde{h}_F \, d = 0$ si $\nu(V) = 0$

Il résulte d'un théorème classique de dérivation (voir [12] p 155 ou [2] p 345) que la suite $D_n h_F$ converge ν - presque partout vers un représentant quelconque de $\tilde{h}_F$.

Considérons alors un ultra-filtre $\mathcal{U}(n)$ sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet ; pour tout t $\lim_{\mathcal{U}(n)} D_n \tilde{h}_F(t)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ avec :

$$\lim_{\mathcal{U}(n)} D_n \tilde{h}_F(t) = \lim_n D_n \tilde{h}_F(t)$$ lorsque cette deuxième limite existe.

Posons alors :

(4 - 2 - 1) $$h_F(t) = \lim_{\mathcal{U}(n)} D_n \tilde{h}_F(t)$$

Pour ν- presque tout t on a :

$$h_F(t) = \lim_n D_n \tilde{h}_F(t)$$

d'où :

(4 - 2 - 2) $$h_F \in \tilde{h}_F$$

L'égalité $h_\Omega \in \tilde{h}_\Omega \in L^1(T, \mathcal{C}, \nu)$ implique que $\nu\{t : h_\Omega(t) = +\infty\} = 0$.
Soit $N = \{t : h_\Omega(t) = +\infty\}$

Posons alors :

(4 - 2 - 3) $$\begin{cases} k(t, F) = h_F(t) & \text{si } t \notin N \\ k(t, F) = 0 & \text{si } t \in N \end{cases}$$

L'additivité de chaque $k(t, .)$ résulte immédiatement de la formule (4 - 2 - 1) et de l'additivité des applications $F \rightsquigarrow D_n \tilde{h}_F(t)$ facilement vérifiable.

2° - Définition de $h(t, F)$

Considérons la restriction $K \rightsquigarrow k(t, K)$ de $k(t, .)$ à $\mathcal{K}$ pour tout t; Nous désignerons par $h(t, .)$ la mesure sur $\mathcal{F}$ engendrée par $k(t, .)$ au sens du lemme 2. Nous avons seulement à montrer que pour tout $F \in \mathcal{F}$ on a $h(., F) \in \tilde{h}_F$.

Pour tout ouvert O on a (voir le lemme 2) :

(4 - 2 - 4) $$h(t, O) = \sup\{k(t, K) ; K \in \mathcal{K}, K \subset O\} \leq k(t, O)$$

En vertu de la régularité relativement à $\mathcal{K}$ de $F \rightsquigarrow \tilde{h}_F$, il existe une suite (K_n) croissante de compacts inclus dans O telle que :

$$\lim_n \int |h_O - h_{K_n}| \, d\nu = 0$$

D'où en vertu de (4 - 2 - 2) :

$$\lim_n \int \left| k(\,.\,,0) - k(\,.\,,K_n) \right| \, d\nu = 0$$

D'où pour ν- presque tout t :

$$h(t,0) \geq \lim_n k(t,K_n) = k(t,0) \geq h(t,0)$$

Soit :

$$h(t,0) = k(t,0) \text{ pour } \nu \text{ presque tout } t .$$

La relation : $h(\,.\,,F) \in \widetilde{h}_F$ est donc vraie pour tout F ouvert.
Il est évident, en raison de la σ- additivité de $F \rightsquigarrow \widetilde{h}_F$ et de $F \rightsquigarrow h(t,F)$ pour tout t, que l'ensemble $\mathcal{M}$ des $F \in \mathcal{F}$ pour lequel la relation $h(\,.\,,F) \in$ $\in \widetilde{h}_F$ est un λ système. Ce λ système contenant le π- système des ouverts qui engendre la tribu $\mathcal{F}$, $\mathcal{M} = \mathcal{F}$. D'où l e théorème .

5 - Les théorèmes d'existence de probabilités conditionnelles régulières.

5 - 1 - Théorème 1.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $\mathcal{F}$ admettant un système dénombrable de générateurs. Soit P une probabilité sur $\mathcal{F}$, régulière relativement à une classe compacte $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Pour tout espace probabilisable $(X, \mathcal{B})$ et toute application mesurable $\mathcal{T}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(X, \mathcal{B})$ il existe une probabilité conditionnelle régulière sur $\mathcal{F}$, relativement à T.

DEMONSTRATION.

Soit $\nu = T(P)$. L'application $F \rightsquigarrow E^{\mathcal{B}} 1_F$ vérifie les hypothèses du théorème 1 comme on s'en assure facilement. La fonction $h(\,.\,,\,.\,)$du théorème 1, fournit donc une version de la probabilité régulière cherchée

5 - 2 - Théorème 2. (Jirina).

Soient Ω un espace topologique séparé, $\mathcal{F}$ la tribu de ses Boréliens $\mathcal{K}$ l'ensemble de ses compacts, et soit P une probabilité sur $\mathcal{F}$, régulière:re relativement à $\mathcal{K}$.

Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace probabilisé, tel que la tribu $\mathcal{T}$ admette un système dénombrable de générateurs et soit φ une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(T, \mathcal{T})$. Alors il existe une version $\mathcal{T}^{\nu}$ mesurable régulière de la probabilité conditionnelle P^{φ}.

DEMONSTRATION.

Soit $\nu = T(P)$. L'application $F \rightsquigarrow E^{\mathcal{T}} 1_F$ vérifie les hypothèses du théorème 2, comme on s'en assure facilement à partir de la relation :

$$(\forall F) \quad (F \in \mathcal{F}) \qquad P(F) = \int E^{\mathcal{T}} 1_F \, d\nu .$$

-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

- BIBLIOGRAPHIE -

I DIEUDONNE. J. sur le Théorème de Lebesgue Nikodym; Ann. de l'Université de Grenoble. t. XXIII 1947 - 1948 - p. 25-53.

2 DOOB. J. L. Stochastic processes - New-York. 1950.

3 HALMOS. P. R. Measure Theory. New-York. 1950.

4 " The decomposition of Measures - Duke Math. J. juin 1941. p. 386-392.

5 " On a theorem of Dieudonné - Proc. Nat. Acad. Sc. p. 38-42.

6 IONESCU-TULCEA - A et C. On the lifting property - Bull. Amer. Math. Soc. Janvier 64.

7 JIRINA. M. On regular conditional probabilities. Czech. Math. J. t. 9 (84). N 3 . p 445-452-

8 MAHARAM. D. Decomposition of measure algebras and spaces. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 69 (1950) p. 142-160.

9 MARCZEWSKI. E. On compact measures. Fund Math. 40 (1953) p. 113-124.

10 METIVIER M. Sur la désintégration des mesures. C.R. Acad. Sc. Paris T. 254 (1962) p. 207-209

11 METIVIER M. Limites projectives de mesures - Annali. di. Mat. Pura ed. Ap. (IV). Vol. LXIII (1963) p. 225-352.

12 SAKS. S. Theory of the integral - NEW-YORK.
