FAUCONNET

Décomposition harmonique des fonctions aléatoires stationnaires du second ordre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1964-1965
« Seminaire d'initiation aux probabilités », , exp. n° 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1964-1965____A10_0>

DECOMPOSITION HARMONIQUE DES FONCTIONS ALEATOIRES

STATIONNAIRES DU SECOND ORDRE

I - Définitions et premières propriétés [1] chap X

- Une covariance qui ne dépend que de la différence se ses arguments est dite stationnaire :

$$\Gamma(t, t - \tau) = C(\tau)$$

$C(\tau)$ est appelée fonction de corrélation.

- Une fonction aléatoire $X(t)$ est stationnaire du 1° ordre si $E(X(t)) = m$ où m est indépendant du temps.

- Une fonction aléatoire est stationnaire d'ordre 2, ou stationnaire au sens de Khintchine si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) Elle est stationnaire du 1° ordre.

(2) Elle est de covariance stationnaire.

(3) $X(t)$ est continue en moyenne quadratique.

Remarques: la propriété (3) est équivalente à la suivante : la fonction $\Gamma(t, t')$ est continue en tout point de la diagonale Δ (d'équation $t' = t$).

Si on suppose que la covariance est stationnaire :

$$\Gamma(t, t') = C(t - t')$$

la continuité de Γ sur Δ est équivalente à la continuité de la fonction C en 0.

On peut donc remplacer les propriétés (2) et (3) par la suivante :

la fonction aléatoire $X(t)$ est à fonction de corrélation continue en 0.

La continuité en 0 entraîne d'ailleurs la continuité sur $\mathbb{R}$ car la continuité de Γ sur Δ entraîne la continuité sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarques sur la fonction de corrélation :

$C(u) = \Gamma(t + u, t)$

Γ étant la covariance de $X(t)$ est une fonction de deux variables, de type non-négatif.

Rappelons ce que cela signifie.

Pour tout nombre entier n, pour toute suite $T_n \subset \mathbb{R}$ et pour toute fonction h définie sur T_n on a :

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} \Gamma(u, v)\, h(u)\, \bar{h}(v) \geq 0.$$

Donc pour la fonction de corrélation nous avons les inégalités suivantes :

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} C(u - v)\, h(u)\, \bar{h}(v) \geq 0.$$

Elles expriment que la fonction de corrélation est une fonction définie non-négative sur $\mathbb{R}$ (définition dans [3] P. 206)

Théorème de Bochner [3] chap. IV § 14.

Une fonction g sur $\mathbb{R}$ est définie non-négative et continue si et seulement si c'est une fonction caractéristique, c'est-à-dire s'il existe une fonction G non décroissante continue à gauche et bornée telle que : $g(u) = \int e^{iux}\, d\,G(x)$

Donc si $X(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire du second ordre il existe une fonction de répartition $G(s)$ bornée telle que $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t - t')s}\, d\,G(s)$.

On peut alors associer à $G(s)$ une fonction $g(s, s')$ à va-

riation bornée telle que $\Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts - t's')} dd'g(s, s')$
Cette fonction g est particulière : c'est-à-dire une constante d'addition près la covariance d'une fonction aléatoire x(s) orthogonale à ses accroissements. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

II - Fonctions aléatoires à accroissements orthogonaux [3]p. 479-481

Définition 1 : Une fonction aléatoire x(t) définie sur $\mathbb{R}$ est à accroissements orthogonaux si quels que soient les intervalles disjoints $[a, b)$ et $[a', b')$

$$E\; x[a, b)\; \bar{x}[a', b') = 0$$

On pose $x[a, b) = x(b) - x(a)$.

Propriété 1 :

$E|x[a, b)|^2$ est alors une fonction additive d'intervalles. On peut l'associer à une fonction F(t) en posant, pour a fixé : $F(t') = E|x[a, t')|^2$ Si $t' > a$

$-F(t) = E|x[t, a)|^2$ Si $t < a$

En effet si $[a, b)$ et $[a', b')$ sont disjoints

$$E|x[a, b) \pm x[a', b')|^2 = E|x[a, b]|^2 + E|x[a', b')|^2$$

En particulier pour $a < b < c$

$$E|x[a, b)|^2 + E|x[b, c)|^2 = E|x[a, c)|^2.$$

Par suite pour $t' > t$ on a : $E|x[t, t')|^2 = F(t') - F(t)$

Propriété 2 :

Si la fonction aléatoire x(t) à accroissements orthogonaux a ses moments du second ordre bornés on peut la prolonger à $\bar{\mathbb{R}}$ par continuité : $x(+\infty) = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ m.q.}} x(t)$

On utilise le fait que la fonction $F(t)$, définie ci-desus, non décroissante, est bornée.

Propriété 3.

Sous les mêmes hypothèses que pour la propriété 2 la fonction aléatoire $x(t)$ est décomposable en somme de 2 fonctions aléatoires à accroissements mutuellement orthogonaux :

$$x(t) = x_d(t) + x_c(t)$$

$x_d(t)$ est une somme de variables aléatoires orthogonales (convergente en m. q. quand elle est dénombrable)

$x_c(t)$ est continue en m. q.

$t' > t$: $E|x_d[t, t')|^2 = F_d(t') - F_d(t)$ $\quad E|x_c[t, t')|^2 = F_c(t') - F_c(t)$

F_d et F_c sont les parties respectivement purement discontinues et continues de $F(t)$.

Définition 2

Une fonction aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, de covariance $g(t,t')$, est orthogonale à ses accroissements si :

$$\text{pour } t<t' \quad E\, x(t)(\bar{x}(t') - \bar{x}(t)) = 0.$$

$$\text{ou} \quad g(t, t') = g(t, t)$$

Posons alors $g(t, t) = G(t)$. Il en résulte $G(t) \geq 0$ et par suite, pour $t \leq t'$: $g(t, t') = \overline{g(t', t)}$

$$\text{donc} \quad g(t, t') = g(t, t) = g(t', t) = G(t)$$

$$\text{et} \quad E\,|x\,[t, t')|^2 = G(t') - G(t)$$

La fonction $G(t)$ est positive non décroissante.

Il est immédiat que la définition 2 peut être remplacée par la suivante :

Définition 2'.

Une fonction aléatoire définie sur $\mathbb{R}$, de covariance $g(t,t')$, est orthogonale à ses accroissements, s'il existe une fonction $G(t)$ positive non décroissante telle que pour $t \leq t'$ $g(t, t') = G(t)$.

Propriété 4.

Une fonction aléatoire orthogonale à ses accroissements est à accroissements orthogonaux.

Soient $[a, b)$ et $[a', b')$ deux intervalles disjoints, par exemple $a < b \leq a' < b'$

$$E\, x\,[a, b)\, \bar{x}\,[a', b') = E\, x(b)\, \bar{x}\,[a', b') - E\, x(a)\, \bar{x}\,[a', b')$$
$$= 0$$

Propriété 5.

Une fonction aléatoire $x(t)$, à accroissements orthogonaux sur R et moments du second ordre bornés, peut être rendue orthogonale à ses accroissements par un changement d'origine de ses valeurs aléatoires.

D'après la propriété 2 on peut prolonger $x(t)$ à $\bar{\mathbb{R}}$. Posons
$\xi(t) = x(t) - x(-\infty)$

pour $t \leq t'$ $\quad E\, \xi(t)\, [\bar{\xi}(t') - \bar{\xi}(t)] = E\, [x(t) - x(-\infty)][\bar{x}(t') - \bar{x}(t)]$
$$= 0$$

car les intervalles $[-\infty, t)$ et $[t, t')$ sont disjoints.

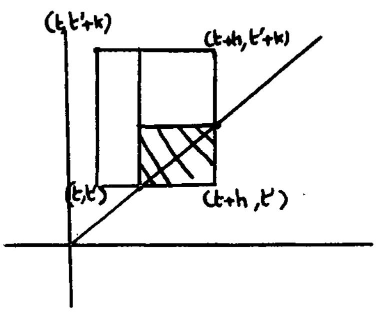
Propriété 6.

Soit $x(t)$ fonction aléatoire orthogonale à ses accroissements, $g(t, t')$ sa covariance et $G(t)$ la fonction positive non décroissante telle que $G(t) = g(t, t)$.

L'accroissement $\Delta_h \Delta'_k g(t, t')$ de la covariance, sur le rectangle $J = (t, t' ; t+h, t'+k)$, est égale à son accroissement sur le carré dont une diagonale est la partie de Δ $(t = t')$ qui appartient à J.
En particulier : 1°) - $\Delta_h \Delta'_k g(t, t') = 0$ si $\mathring{J} \cap \Delta = \emptyset$

2°) - sur le carré $(t, t ; t', t')$ l'accroissement est $G(t') - G(t)$

En effet : si $\mathring{J} \cap \Delta = \emptyset$ les intervalles $(t, t+h)$ et $t', t'+k$ sont disjoints



- Si $\mathring{J} \cap \Delta \neq \emptyset$ il n'y a qu'à décomposer J en la réunion de rectangles ne coupant pas Δ et d'un carré dont une diagonale appartient à Δ .

III - <u>Décomposition harmonique</u> [3] p. 482-484

<u>Lemme 1.</u>

Soit $x(s)$ une fonction aléatoire du second ordre orthogonale à ses accroissements et soit $G(s) = E\,|x(s)|^2$ (fonction supposée bornée).
La fonction aléatoire du second ordre $X(t)$ est telle que :

$$X(t) = \int e^{its}\, dx(s) \qquad \text{i.m.q.}$$

si et seulement si sa covariance $r(t, t')$ est telle que

$$r(t, t') = \int e^{i(t - t')s}\, d\,G(s)$$

Démonstration :

- Si $X(t) = \int e^{its}\, dx(s)$, $x(s)$ étant orthogonale à ses accroissements alors $E(X(t)\, \overline{X}(t')) = E(\int e^{its}\, dx(s) \int e^{-it's'}\, dx(s'))$

$$= \iint e^{i(ts - t's')}\, dd'\, g(s, s')$$

avec les notations utilisées jusqu'à présent, $g(s, s')$ étant la covariance de $x(s)$.

Cette intégrale double existe (critère d'intégration en moyenne quadratique).

Considérons seulement les subdivisions S réalisées au moyen de subdivisions égales sur les deux axes : S_s et $S_{s'}$, et cela pour tout carré J ayant une diagonale portée par $\Delta (J=(a,a;b,b)$

La limite des sommes de Riemann relatives à ces subdivisions (en prenant somme norme : $|S| = |S_s|$) existe et c'est l'intégrale double ci-dessus.

Soit $S_s = (a = s_0 < \sigma_1 < S_1 \dots < s_j < \sigma_j < S_{j+1} \dots < s_n = b)$ $|S_s| = \sup_j |s_{j+1} - s_j|$

Donc $\Gamma(t, t') = \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim\limits_{|S_s| \to 0} \sum\limits_j \sum\limits_k e^{i(t\sigma_j - t'\sigma_k)} \Delta_{\delta_j} \Delta'_{\delta_k} g(s_j, s_k)$

on pose $\delta_j = s_{j+1} - s_j$.

Or si $j \neq k$ $\Delta_{\delta_j} \Delta'_{\delta_k} g(s_j, s_k) = 0$

et si $j = k$ $\Delta_{\delta_k} \Delta'_{\delta_k} g(s_k, s_k) = G(s_{k+1}) - G(s_k)$

Par suite $\Gamma(t, t') = \lim\limits_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim\limits_{|S_s| \to 0} \sum\limits_k e^{i(t - t')\sigma_k} [G(s_{k+1}) - G(s_k)]$.

Cette limite existe et c'est $\int e^{i(t - t')s}\, d\, G(s)$ car la fonction $e^{i(t - t')s}$ est une fonction continue et bornée de s, et G(s) est une fonction monotone à variation bornée.

Supposons qu'il existe une fonction aléatoire x(s) de covariance $g(s, s') = G(s)$ bornée, telle que $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t - t')s}\, d\, G(s)$.

l'intégrale double $\iint e^{i(ts - t's')}\, dd'\, g(s, s')$ existe car $e^{i(ts - t's')}$ est une fonction continue et bornée de (s, s') et g(s, s') est une fonction à variation bornée.

Le calcul précédent montre que $\Gamma(t, t') = \iint e^{i(ts-t's')} dd' g(ss'$

Donc $X(t) = \int e^{its}\, dx(s)$ d'après le théorème du paragraphe III (décomposition harmonique des fonctions aléatoires).

Lemme 2.

Etant donnée une fonction positive non décroissante G(s) il existe une covariance g(s, s') telle que pour $s \leq s'$ $g(s,s') = G(s)$

En effet il suffit de démontrer la propriété caractéristique des covariances : pour tout entier n

pour toute suite T_n de n nombres réels et pour toute fonction h définie sur T_n

$$\sum_{u \in T_n} \sum_{v \in T_n} g(u, v)\, h(u)\, \bar{h}(v) \geq 0.$$

Dans le cas présent on démontre ceci par récurrence.

Pour n = 2 : Soit $T_n = \{u, v\}$ avec $u < v$

$$g(u,u)\, h(u)\, \bar{h}(u) + g(u,v)\, h(u)\, \bar{h}(v) + g(v,u)\, h(v)\, \bar{h}(u) + g(v,v)\, |h(v)|^2$$

$$= G(u)\, |h(u) + h(v)|^2 + [G(v) - G(u)]\, |h(v)|^2$$

$$\geq G(u)\, |h(u) + h(v)|^2 \geq 0.$$

Si pour n-1 et $T_{n-1} = \{ t_1, t_2 \dots t_{n-1}\}$ $t_i < t_{i+1}$

$$\sum_{u\in T_{n-1}} \sum_{v\in T_{n-1}} g(u, v)\, h(u)\, h(v) \geq G(t_1) \Big| \sum_{u\in T_{n-1}} h(u) \Big|^2$$

alors pour n et $T_n = \{t_o, t_1, t_2 \dots t_{n-1}\}$ $t_o < t_1 \dots$

$$\sum_{u\in T_n} \sum_{v\in T_n} g(u,v)\, h(u)\, \bar{h}(v) \geq G(t_o) \Big| \sum_{u\in T_n} h(u) \Big|^2$$

Lemme 3.

Une covariance $\Gamma(t, t')$ est telle que $\Gamma(t, t') = \int e^{i(t - t')s}\, d\, G(s)$ où G est une fonction positive non décroissante à variation bornée si et seulement si elle ne dépend que de $t - t'$ et si elle est de plus continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cela résulte immédiatement du théorème de Bochner rappelé ci-dessus (paragraphe I)

Théorème de décomposition harmonique.

Une fonction aléatoire du second ordre sur R, X(t), a une décomposition harmonique orthogonale $X(t) = \int e^{its}\, dx(s)$ où $E(x(s)\, x(s')) = g(s, s') = G(s)$ pour $s \leq s'$ avec var. $G < +\infty$ Si et seulement si elle est continue en moyenne quadratique et stationnaire du second ordre.

La covariance se réduit alors à une fonction de corrélation $\Gamma(t + u, t) = C(u) = \int e^{ius}\, dG(s)$

Corollaire

Une fonction aléatoire X(t) stationnaire du second ordre et continue en moyenne quadratique est décomposable en deux parties stationnaires du second ordre et mutuellement orthogonales

$$X(t) = X_d(t) + X_c(t)$$

et $$X_d(t) = \int e^{its} \, dx_d(s) \qquad X_c(t) = \int e^{its} \, dx_c(s).$$

(La première intégrale se réduit d'ailleurs à une somme convergent en moyenne quadratique).

Ceci résulte de la propriété 3 paragraphe II.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blanc-Lapierre et Fortet : Théorie des fonctions aléatoires
Masson édition 1953.

[2] Hildebrandt : Introduction to the Theory of Integration.
Academic Press 1963.

[3] Loève : Probability Theory ; 3^{e} édition.
D. Van Nostrand Company-Line