PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS-XAVIER DEHON
JEAN LANNES

**Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif**

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 89 (1999), p. 127-177
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__89__127_0>

# SUR LES ESPACES FONCTIONNELS DONT LA SOURCE EST LE CLASSIFIANT D'UN GROUPE DE LIE COMPACT COMMUTATIF

*par* François-Xavier DEHON *et* Jean LANNES [(1)]

RÉSUMÉ

Nous montrons dans cet article comment les connaissances acquises sur les espaces fonctionnels de source le classifiant du groupe $\mathbf{Z}/p$ ([La2], [DS]) et l'utilisation de MU-résolutions instables permettent d'obtenir des résultats sur les espaces fonctionnels de source le classifiant d'un $p$-groupe abélien fini ou d'un tore si l'on impose au but d'avoir une cohomologie à coefficients $p$-adiques sans torsion. Nous montrons notamment que l'ensemble des classes d'homotopie d'applications du classifiant X d'un tore dans un espace Y simplement connexe dont l'homologie entière est nulle en degré impair et un groupe abélien libre de dimension finie en chaque degré pair, et dont la cohomologie rationnelle est polynomiale, s'identifie à l'ensemble des applications de la K-théorie de Y dans la K-théorie de X qui préservent la structure de $\lambda$-anneau.

*Mots clés :* espaces fonctionnels, classes d'homotopie d'applications, foncteur T, conjecture de Sullivan, espaces classifiants, MU-théorie.

ABSTRACT

We show in this paper how the acquired knowledge on the mapping spaces with source the classifying space of $\mathbf{Z}/p$ ([La2], [DS]) and the use of unstable MU-resolutions give results on the mapping spaces with source the classifying space of a finite abelian $p$-group or a torus if the target space is required to have a torsion free $p$-adic cohomology. We prove among other things that the set of homotopy classes of maps from the classifying space X of a torus to some simply connected space Y whose ordinary homology is null in odd degrees and a finite-dimensional free abelian group in each even degree, and whose rational cohomology is polynomial, identifies with the set of maps from the K-theory of Y to the K-theory of X which preserve the $\lambda$-ring structure.

*Keywords :* mapping spaces, homotopy classes of maps, T-functor, Sullivan conjecture, classifying spaces, MU-theory.

## 0. Introduction

La question ci-dessous, posée par W. G. Dwyer et C. W. Wilkerson, est à l'origine du présent travail.

Soient $p$ un nombre premier fixé, $\pi$ un $p$-groupe abélien cyclique (c'est-à-dire isomorphe à $\mathbf{Z}/p^n$, pour un certain entier $n$), $B\pi$ son classifiant, et Y un espace. La question de Dwyer et Wilkerson concerne l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\pi, Y)$ (c'est-à-dire l'espace des applications de $B\pi$ dans Y).

*Question* **0.0.** — Si la cohomologie modulo $p$ de Y est nulle en degré impair (et si Y vérifie en outre quelques propriétés techniques que nous ne précisons pas pour l'instant) alors la cohomologie modulo $p$ de $\mathbf{hom}(B\pi, Y)$ est-elle aussi nulle en degré impair?

Nous montrons dans cet article que la réponse est oui. Par ailleurs, les techniques mises en œuvre pour parvenir à la solution conduisent à des résultats qui nous paraissent intéressants. Quelques-uns de ces résultats sont énoncés ci-après.

---

(1) Le premier auteur a bénéficié pendant l'achèvement de ce travail d'une allocation de recherche de l'École Polytechnique.

Voici pour commencer une version, parmi d'autres, d'une réponse précise à la question de Dwyer et Wilkerson :

*Théorème* **0.1.** — *Soit* $\pi$ *un* $p$*-groupe abélien fini. Soit* Y *un espace possédant les propriétés suivantes :*

— *la cohomologie* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair;*

— *la cohomologie* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p)$ *est nœthérienne;*

— *l'espace* Y *est* $p$*-complet.*

*Alors l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{Y})$ *possède également ces trois propriétés.*

Signalons que les deux dernières hypothèses faites ci-dessus sur l'espace Y servent essentiellement à obtenir un énoncé d'apparence moins technique que celle de l'énoncé du théorème 3.1 qui est la « bonne » réponse à la question 0.0. Signalons aussi que le théorème 3.1 possède une variante, le théorème 7.14, dans laquelle l'hypothèse « cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair » est remplacée par l'hypothèse « cohomologie entière $p$-adique sans torsion ». Signalons enfin que le cas où $\pi$ est cyclique d'ordre $p$ du théorème 7.14 est dû à N. J. Kuhn et M. Winstead [KW].

En posant la question 0.0, Dwyer et Wilkerson avaient en tête des énoncés du type de l'énoncé 0.2 ci-dessous. Celui-ci implique, par exemple, que tout $p$-sous-groupe abélien fini d'un groupe $p$-compact connexe G avec $\mathrm{H}^*(\mathrm{BG};\mathbf{Z}/p)$ en degrés pairs est contenu dans un tore maximal (la référence sur la théorie des groupes $p$-compacts est [DW2]).

*Théorème* **0.2.** — *Soient* $\pi$ *un* $p$*-groupe abélien fini et* $\kappa$ *un sous-groupe; soit* Y *un espace* $p$*-complet dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair. Alors toute application de* $\mathrm{B}\kappa$ *dans* Y *se prolonge à* $\mathrm{B}\pi$.

Comme pour le théorème 3.1, on peut remplacer dans le théorème 0.2 l'hypothèse « cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair » par « cohomologie entière $p$-adique sans torsion ».

Les trois autres énoncés que nous voulons mettre en avant concernent les applications dont la source est le classifiant d'un tore, le mot « tore » désignant dans cet article un groupe de Lie compact commutatif connexe.

*Théorème* **0.3.** — *Soit* T *un tore. Soit* Y *un espace simplement connexe vérifiant :*

— $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})$ *est nul pour* $n$ *impair et un* $\mathbf{Z}$*-module libre de dimension finie pour* $n$ *pair,*

— $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q})$ *est une algèbre de polynômes.*

*Alors l'application naturelle*

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(\mathrm{K}(\mathrm{Y}), \mathrm{K}(\mathrm{BT})),$$

$[-,-]$ *désignant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications,* $\mathrm{K}(-)$ *la* K*-théorie complexe et* $\mathscr{L}$ *la catégorie des* $\lambda$*-anneaux, est bijective.*

L'énoncé suivant est moins précis que le précédent mais plus facile à appliquer :

*Théorème* **0.4.** — *Soient* T *et* Y *comme précédemment. Alors deux applications* $f, g$ : BT $\rightarrow$ Y *sont homotopes si et seulement si l'on a l'égalité* $H^*(f; \mathbf{Q}) = H^*(g; \mathbf{Q})$.

Enfin, si l'on n'a pas peur des fantômes, on peut modifier l'énoncé 0.4 en supposant simplement que l'homologie entière de Y est en chaque degré un **Z**-module libre de dimension finie et en supprimant l'hypothèse concernant la cohomologie rationnelle de Y :

*Théorème* **0.5.** — *Soient* T *un tore et* Y *un espace simplement connexe dont l'homologie entière est en chaque degré un* **Z***-module libre de dimension finie. Soient* $f$ *et* $g$ *deux applications de* BT *dans* Y. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les restrictions de* $f$ *et* $g$ *à tout sous-complexe fini de* BT *sont homotopes;*

(ii) $H^*(f; \mathbf{Q}) = H^*(g; \mathbf{Q})$.

Après cette liste d'énoncés, voici maintenant le plan de l'article :

## 1. Rappels sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe cyclique d'ordre premier

Ce paragraphe contient notamment :

— quelques généralités sur les pro-espaces,

— la définition, due à F. Morel [Mo2], d'une version rigide de la $p$-complétion de Sullivan,

— un rappel succinct des résultats de [La2] concernant la cohomologie modulo $p$ de l'espace des points fixes homotopiques de l'action d'un groupe cyclique d'ordre $p$.

## 2. Sur les points fixes homotopiques d'une action d'un groupe cyclique d'ordre premier sur un pro-espace dont la cohomologie limite est nulle en degré impair

Soit $\sigma$ un groupe cyclique d'ordre premier $p$. L'objet essentiel de ce paragraphe est de démontrer la proposition 2.1 qui dit, *grosso modo*, que si X est un espace muni d'une action de $\sigma$ tel que :

— l'action de $\sigma$ sur $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ est triviale,

— la cohomologie $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ est nulle en degré impair,

— l'espace X est non vide,

alors l'espace $X^{h\sigma}$ vérifie également les deux dernières propriétés ci-dessus.

La proposition 2.1 est la clef de la réponse à la question 0.0. Sa démonstration utilise un lemme (Lemme 2.5 ou 2.6) gracieusement fourni par Dwyer et Wilkerson.

**3.** Sur les (pro-)espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif et dont le but est le (pro-)$p$-complété d'un espace à cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair

On répond positivement à la question 0.0 et on démontre le théorème 0.2. Puis on étend « par passage à la limite » les résultats aux espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif.

**4.** Propriétés d'« exactitude » des (pro-)espaces fonctionnels considérés dans le paragraphe précédent

Le titre de ce paragraphe renvoie par exemple à l'énoncé 4.5 qui dit, là encore *grosso modo*, la chose suivante :

Si une application $f : Y \rightarrow Y'$ entre deux espaces dont la cohomologie modulo $p$ est nulle en degré impair induit une application surjective (resp. injective) en cohomologie modulo $p$ alors il en est de même pour l'application $\mathbf{hom}(BC, f)$ pour tout groupe de Lie compact commutatif C.

**5.** Introduction de MU-résolutions instables

Si la cohomologie modulo $p$ d'un espace Y est nulle en degré impair alors il en est de même pour celle de l'espace $\Omega^\infty(MU \wedge Y_+)$ : ceci est la conséquence des résultats de S. Wilson qui a montré au début des années 70 que l'homologie entière des espaces $\Omega^\infty\Sigma^{2n}MU$ est nulle en degré impair [Wils]. On peut donc spécialiser les résultats du paragraphe 4 au « début de MU-résolutions instables » de Y; c'est ce que l'on fait dans ce paragraphe.

Il nous faut mentionner ici que l'idée d'utiliser dans notre travail les résultats de Wilson évoqués ci-dessus provient de l'article [KW] déjà cité.

**6.** Démonstration des théorèmes 0.3 et 0.4

Soit Y un espace vérifiant les hypothèses de ces théorèmes. Le paragraphe 5 nous conduit, *via* un argument de « carré arithmétique », à l'énoncé suivant :

L'application naturelle $[BT, Y] \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*BT, MU_*Y)$ est une bijection, $\mathscr{K}_{MU}$ désignant la catégorie des $MU_*MU$-coalgèbres instables introduite par M. Bendersky, E. B. Curtis et H. R. Miller dans [BCM] (la MU-homologie d'un espace dont l'homologie entière est en chaque degré un $\mathbf{Z}$-module libre est l'exemple type d'un objet de $\mathscr{K}_{MU}$).

On montre ensuite, à l'aide du théorème de Stong-Hattori (sous la forme décrite par J. F. Adams dans [Ad1]), que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*BT, MU_*Y)$ est à son tour naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(Y), K(BT))$. Il est à noter qu'un énoncé de ce type, avec une démonstration similaire, se trouve déjà dans le fameux article [Nov] de S. P. Novikov.

**7.** Remplacement de l'hypothèse « cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair » par l'hypothèse « cohomologie $p$-adique sans torsion »

On montre que l'on peut effectuer ce remplacement dans la plupart des énoncés des paragraphes 3, 4 et 5. On utilise à nouveau les résultats de Wilson. A nouveau l'influence de [KW] est indéniable. On conclut en démontrant le théorème 0.5.

Appendice. On y trouve, en petits caractères, la démonstration promise dans le corps du texte de trois points techniques.

Suites...

Les résultats des paragraphes 4, 5, 6 et 7 de cet article (voir en particulier les commentaires à la fin du paragraphe 6) amènent à penser que la MU-cohomologie (resp. la K-théorie) $p$-complétée $MU^*(BT; \mathbf{Z}_p)$ (resp. $K(BT; \mathbf{Z}_p)$) possède, dans la catégorie où vit $MU^*(Y; \mathbf{Z}_p)$ (resp. $K(Y; \mathbf{Z}_p)$) pour Y un espace avec $H^*(Y, \mathbf{Z}_p)$ sans torsion, des propriétés d'injectivité analogues à celles que possède $H^*(BV; \mathbf{Z}/p)$, V désignant un $p$-groupe abélien élémentaire, dans la catégorie des A-algèbres instables.

Le cas de $MU^*(BT; \mathbf{Z}_p)$ (ou plutôt de $BP^*(BT; \mathbf{Z}_p)$) vient d'être traité par le premier auteur dans [De].

La conjecture concernant $K(BT; \mathbf{Z}_p)$, esquissée ci-dessus, est en accord avec les résultats obtenus par Wilkerson dans [Wilk].

Conventions

La théorie homotopique utilisée dans cet article est celle des ensembles simpliciaux. Le mot « espace » signifiera presque toujours « ensemble simplicial » (le plus souvent fibrant... même s'il nous arrivera de ne pas le préciser) et tout espace topologique devra être implicitement remplacé par son ensemble simplicial singulier.

Soient X et Y deux espaces. *L'espace fonctionnel* $\mathbf{hom}(X, Y)$ est la version simpliciale de l'espace des applications de X dans Y; le foncteur $Y \mapsto \mathbf{hom}(X, Y)$ est donc l'adjoint à droite du foncteur $Z \mapsto X \times Z$.

Comme nous l'avons déjà dit, la notation $[X, Y]$ désignera l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y, c'est-à-dire l'ensemble des composantes connexes de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(X, Y)$ (voir [La2], 1.3.1).

## 1. Rappels sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe cyclique d'ordre premier

Soient $p$ un nombre premier fixé, $\sigma$ un groupe cyclique d'ordre $p$, $B\sigma$ son classifiant, et Y un espace.

L'étude de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\sigma, Y)$ fait naturellement intervenir la $p$-complétion de l'espace Y; c'est pourquoi nous commençons par traiter de cette notion.

## 1.1. La notion de $p$-complétion

La $p$-complétion de Bousfield-Kan [BK]

Bousfield et Kan définissent le $p$-complété d'un espace Y, noté $\widehat{Y}^{BK}$ ci-après, comme l'espace total d'une résolution cosimpliciale « canonique » de Y par des $\mathbf{F}_p$-espaces affines simpliciaux :

$$\widehat{Y}^{BK} = \mathrm{Tot}\mathrm{Rés}^\bullet Y.$$

On dispose par construction d'une application naturelle $Y \to \widehat{Y}^{BK}$.

On peut voir cet espace total comme la limite d'une tour d'espaces (fibrants) $\mathrm{Tot}_0\mathrm{Rés}^\bullet Y \leftarrow \mathrm{Tot}_1\mathrm{Rés}^\bullet Y \leftarrow \mathrm{Tot}_2\mathrm{Rés}^\bullet Y \leftarrow \ldots$ :

$$\widehat{Y}^{BK} = \lim_{s\in\mathbf{N}} \mathrm{Tot}_s\mathrm{Rés}^\bullet Y.$$

Soit $\widehat{Y}^{BK}(s)$ la $s$-troncature de Postnikov de l'espace $\mathrm{Tot}_s\mathrm{Rés}^\bullet Y$; il est manifeste que $\widehat{Y}^{BK}$ est encore la limite de la tour d'espaces (fibrants) $\widehat{Y}^{BK}(0) \leftarrow \widehat{Y}^{BK}(1) \leftarrow \widehat{Y}^{BK}(2) \leftarrow \ldots$ :

$$\widehat{Y}^{BK} = \lim_{s\in\mathbf{N}} \widehat{Y}^{BK}(s).$$

Si la cohomologie modulo $p$ de Y est finie en chaque degré, alors les espaces $\widehat{Y}^{BK}(s)$ sont « $p$-$\pi_*$-finis » :

*Définition* **1.1.1.** — On dit qu'un espace Y est *$p$-$\pi_*$-fini* s'il possède les propriétés suivantes :

— $\pi_0 Y$ est fini;

et pour tout choix du point base :

— $\pi_n Y$, $n \geqslant 1$, est un $p$-groupe fini;

— il existe un entier $q$ tel que $\pi_n Y$ est trivial pour $n > q$.

On en déduit que si la cohomologie modulo $p$ de Y est finie en chaque degré et si X est un espace (ensemble simplicial) avec un nombre fini de simplexes non dégénérés alors les ensembles $[X, \widehat{Y}^{BK}(s)]$ sont finis. Il en résulte que si la cohomologie modulo $p$ de Y est finie en chaque degré, alors les ensembles $[X, \widehat{Y}^{BK}(s)]$ et $[X, \widehat{Y}^{BK}]$ ont, pour tout espace X, des structures profinies naturelles et que l'application canonique

$$[X, \widehat{Y}^{BK}] \to \lim_{s\in\mathbf{N}} [X, \widehat{Y}^{BK}(s)]$$

est un homéomorphisme.

En fait, on peut définir une $p$-complétion pour laquelle la propriété ci-dessus est vérifiée sans hypothèse de finitude sur $H^*(Y, \mathbf{Z}/p)$; le prix à payer est de considérer des systèmes projectifs d'espaces $p$-$\pi_*$-finis plus généraux que des tours :

### La $p$-complétion de Sullivan (Artin-Mazur) revue par Morel [Mo2]

Soit Y un ensemble simplicial. On considère les relations d'équivalence simpliciales R sur Y telles que l'ensemble simplicial quotient Y/R est fini en chaque degré simplicial. On note $\mathscr{R}$ (Y) l'ensemble de ces relations; $\mathscr{R}$ (Y) est ordonné par inclusion. On pose enfin $\widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s) = \widehat{\mathrm{Y}/\mathrm{R}}^{\mathrm{BK}}(s)$; on observe que ces espaces sont $p$-$\pi_*$-finis (et fibrants). Morel définit le $p$-complété de Y, noté $\widehat{\mathrm{Y}}$ ci-après (ou parfois $\widehat{\mathrm{Y}_p}$), comme la limite des $\widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s)$, (R, $s$) décrivant l'ensemble ordonné produit $\mathscr{R}(\mathrm{Y}) \times \mathbf{N}^{\mathrm{op}}$ :

$$\widehat{\mathrm{Y}} = \lim_{(\mathrm{R},\, s)} \widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s).$$

C'est cette définition de la $p$-complétion que nous adoptons dans cet article.

A nouveau les ensembles $[\mathrm{X}, \widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s)]$ et $[\mathrm{X}, \widehat{\mathrm{Y}}]$ ont, pour tout espace X, des structures profinies naturelles et l'application canonique

$$[\mathrm{X}, \widehat{\mathrm{Y}}] \to \lim_{(\mathrm{R},\, s)} [\mathrm{X}, \widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s)]$$

est un homéomorphisme (on peut s'en convaincre, par exemple, à l'aide de la proposition 1.1.3 que l'on trouvera à la fin de ce paragraphe).

On vérifie également que l'application canonique $\widehat{\mathrm{Y}}^{\mathrm{BK}} \to \widehat{\mathrm{Y}}$, induite par les applications $\widehat{\mathrm{Y}}^{\mathrm{BK}}(s) \to \widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s)$, est une équivalence d'homotopie dans le cas où $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p)$ est de dimension finie en chaque degré.

Le diagramme des $\widehat{\mathrm{Y}}(\mathrm{R}, s)$ est un exemple de « pro-espace » :

### Pro-espaces

Un pro-espace est un foncteur $\mathrm{Y}(-)$, $i \mapsto \mathrm{Y}(i)$, défini sur une petite catégorie filtrante $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}(-)}$ et à valeurs dans la catégorie des espaces. L'ensemble des morphismes d'un pro-espace $\mathrm{Y}(-)$ dans un pro-espace $\mathrm{Z}(-)$ est par définition l'ensemble $\lim_{\mathscr{I}_{\mathrm{Z}(-)}} \operatorname{colim}_{\mathscr{I}_{\mathrm{Y}(-)}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}(-), \mathrm{Z}(-))$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}(i), \mathrm{Z}(j))$ désignant l'ensemble des applications de l'espace $\mathrm{Y}(i)$ dans l'espace $\mathrm{Z}(j)$.

Nous appellerons pro-$p$-complété de Y le pro-espace $\widehat{\mathrm{Y}}(-)$ introduit ci-dessus. La correspondance $\mathrm{Y} \mapsto \widehat{\mathrm{Y}}(-)$ est un foncteur de la catégorie des espaces dans celle des pro-espaces. Il en résulte que la correspondance $\mathrm{Y} \mapsto \widehat{\mathrm{Y}}$ est également fonctorielle; cette « rigidité » est l'une des contributions de [Mo2].

### Cohomologie « continue » ou « limite » des pro-espaces

Soient $\mathrm{Y}(-)$ un pro-espace et $\pi$ un groupe abélien. On pose :

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{Y}(-); \pi) = \operatorname*{colim}_i \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}(i); \pi).$$

Cette notation peut être justifiée de la façon suivante : si pour tout $i$ l'espace $Y(i)$ est fini en chaque degré simplicial, alors $H^*_c(Y(-);\pi)$ est l'homologie du complexe des cochaînes continues de l'ensemble profini simplicial $\lim_i Y(i)$ à valeurs dans le groupe abélien discret $\pi$. Suivant le contexte, nous appellerons $H^*_c(Y(-);\pi)$ la cohomologie *continue*, la cohomologie *limite*, ou simplement la cohomologie du pro-espace $Y(-)$ à coefficients dans $\pi$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du vieux résultat de Dror [Dr] qui dit que pour tout espace Y l'application naturelle

$$\operatorname{colim}_s H^*(\mathrm{Tot}_s \mathrm{Rés}^\bullet Y; \mathbf{Z}/p) \to H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$$

est un isomorphisme.

*Proposition* **1.1.2.** — *Pour tout espace* Y *l'application naturelle :*

$$H^*_c(\widehat{Y}(-); \mathbf{Z}/p) \to H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme.*

Nous achevons notre exposé sur la notion de $p$-complétion en dégageant l'énoncé élémentaire qui permet de se convaincre de ce que l'application canonique $[X, \widehat{Y}] \to \lim [X, \widehat{Y}(-)]$ est une bijection (en fait un homéomorphisme d'ensembles profinis).

Relation entre $\pi_0 \lim Y(-)$ et $\lim \pi_0 Y(-)$ pour certains pro-espaces $Y(-)$

Soit Y un espace (ensemble simplicial). Disons que Y est 1*-fini* si les ensembles de simplexes $Y_0$ et $Y_1$ sont finis; disons que Y est 1*-fibrant* si l'image de l'application $d_1 \times d_0 : Y_1 \to Y_0 \times Y_0$ est une relation d'équivalence sur $Y_0$.

*Proposition* **1.1.3.** — *Soit* $Y(-)$ *un pro-espace. Si les espaces* $Y(i)$ *sont* 1*-finis et* 1*-fibrants pour tout i alors l'application canonique*

$$\pi_0 \lim Y(-) \to \lim \pi_0 Y(-)$$

*est une bijection (et l'espace* $\lim Y(-)$ *est* 1*-fibrant).*

(Pour vérifier cet énoncé utiliser deux fois qu'une limite filtrante d'ensembles finis non vides est encore non vide.)

L'ensemble $\pi_0 \lim Y(-)$ possède donc une structure naturelle d'ensemble profini, sous les hypothèses de la proposition précédente.

*Scholie* **1.1.4.** — *Soient* $Y(-)$ *un pro-espace et* $\pi$ *un groupe abélien. Si* $Y(-)$ *vérifie les hypothèses de la proposition précédente alors* $H^0_c(Y(-);\pi)$ *s'identifie au groupe des applications continues de* $\pi_0 \lim Y(-)$*, muni de sa topologie profinie, dans* $\pi$*, muni de sa topologie discrète.*

## 1.2. Sur la cohomologie modulo $p$ des espaces $\mathbf{hom}(B\sigma, Y)$

(Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter les références [DS], [La2], [Mo1] et [Sc].)

On note $\mathcal{K}$ la catégorie des A-algèbres instables (A désigne l'algèbre de Steenrod); on rappelle que $H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$ est l'exemple type d'une telle algèbre.

On pose $H_\sigma = H^*(B\sigma; \mathbf{Z}/p)$. Le foncteur $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $L \mapsto H_\sigma \otimes L$ admet un adjoint à gauche que l'on note $T_\sigma : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

L'application d'évaluation $B\sigma \times \mathbf{hom}(B\sigma, Y) \to Y$ induit, par passage à la cohomologie modulo $p$ et adjonction, un $\mathcal{K}$-morphisme naturel

$$T_\sigma H^*(Y; \mathbf{Z}/p) \to H^*(\mathbf{hom}(B\sigma, Y); \mathbf{Z}/p).$$

*Théorème* **1.2.1.** — *Pour tout espace (fibrant) $p$-$\pi_*$-fini* Y *l'application naturelle*

$$T_\sigma H^*(Y; \mathbf{Z}/p) \to H^*(\mathbf{hom}(B\sigma, Y); \mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme.*

Soient X un espace et $Y(-)$ un pro-espace; on note $\mathbf{hom}(X, Y(-))$ le pro-espace $i \mapsto \mathbf{hom}(X, Y(i))$. L'énoncé suivant est obtenu en combinant les énoncés 1.1.2 et 1.2.1 et en observant que le foncteur $T_\sigma$ préserve les colimites :

*Théorème* **1.2.2.** — *Pour tout espace* Y *l'application naturelle*

$$T_\sigma H^*(Y; \mathbf{Z}/p) \to H^*_c(\mathbf{hom}(B\sigma, \hat{Y}(-)); \mathbf{Z}/p),$$

$\hat{Y}(-)$ *désignant le pro-$p$-complété de* Y, *est un isomorphisme.*

Le fait que cette application naturelle est un isomorphisme en degré zéro se traduit par :

*Corollaire* **1.2.3.** — *Pour tout espace* Y *l'application naturelle*

$$[B\sigma, \hat{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(Y; \mathbf{Z}/p), H_\sigma),$$

$\hat{Y}$ *désignant le $p$-complété de* Y, *est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).*

Les énoncés précédents possèdent des variantes, que l'on trouvera ci-après, concernant les espaces de points fixes homotopiques des actions d'un groupe cyclique d'ordre premier.

Soit X un espace muni d'une action de $\sigma$. L'espace des points fixes homotopiques de cette action est l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}_\sigma(E\sigma, X)$ des applications $\sigma$-équivariantes de $E\sigma$ dans X, $E\sigma$ désignant le revêtement universel de $B\sigma$; cet espace est également noté $X^{h\sigma}$. En particulier $\mathbf{hom}(B\sigma, Y)$ est l'espace des points fixes homotopiques de l'action triviale de $\sigma$ sur Y. En fait, comme $X^{h\sigma}$ est la fibre en l'identité de l'application $\mathbf{hom}(B\sigma, E\sigma\times_\sigma X) \to \mathbf{hom}(B\sigma, B\sigma)$ induite par la projection $E\sigma\times_\sigma X \to B\sigma$, l'étude des points fixes d'une action quelconque se ramène à celle d'une action triviale. L'espace $E\sigma\times_\sigma X$ (qu'il faut voir comme le quotient homotopique de l'action de $\sigma$) est également noté $X_{h\sigma}$.

On note $H_\sigma \downarrow \mathcal{K}$ la catégorie des A-algèbres instables au-dessous de $H_\sigma$ (un objet de $H_\sigma \downarrow \mathcal{K}$ est donc la donnée d'une A-algèbre instable K et d'un homomorphisme de A-algèbres instables $H_\sigma \to K$); l'exemple type d'une telle algèbre est $H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$.

Le foncteur $\mathcal{K} \to H_\sigma \downarrow \mathcal{K}$, $L \mapsto H_\sigma \otimes L$ admet encore un adjoint à gauche que l'on note $\mathrm{Fix}_\sigma : H_\sigma \downarrow \mathcal{K} \to \mathcal{K}$.

On dispose cette fois d'un $\mathcal{K}$-morphisme naturel

$$\mathrm{Fix}_\sigma H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H^*(X^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p).$$

*Théorème* **1.2.4.** — *Pour tout espace (fibrant) $p$-$\pi_*$-fini* X *muni d'une action de* $\sigma$, *l'application naturelle*

$$\mathrm{Fix}_\sigma H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H^*(X^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme.*

Nous dirons qu'un pro-espace est muni d'une action de $\sigma$ si le foncteur correspondant se factorise à travers la catégorie des espaces munis d'une action de $\sigma$; pour faire court, nous parlerons aussi de *pro-$\sigma$-espaces*. La définition des morphismes de pro-$\sigma$-espaces est simplement obtenue en remplaçant « espace » par « $\sigma$-espace » (espace muni d'une action de $\sigma$) dans celle des morphismes de pro-espaces. On observera que la rigidité de la construction de Morel fait que si un espace est muni d'une action de $\sigma$ alors son pro-$p$-complété l'est tout autant.

Soit $X(-)$ un pro-espace muni d'une action de $\sigma$; on note $X(-)^{h\sigma}$ le pro-espace $i \mapsto X(i)^{h\sigma}$.

*Théorème* **1.2.5.** — *Pour tout espace* X *muni d'une action de* $\sigma$ *l'application naturelle*

$$\mathrm{Fix}_\sigma H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H^*_c(\widehat{X}(-)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p),$$

$\widehat{X}(-)$ *désignant le pro-$p$-complété de* X, *est un isomorphisme.*

*Corollaire* **1.2.6.** — *L'application naturelle*

$$\pi_0((\widehat{X})^{h\sigma}) \to \mathrm{Hom}_{H_\sigma\downarrow\mathcal{K}}(H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p), H_\sigma),$$

$\widehat{X}$ *désignant le $p$-complété de* X, *est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).*

### 1.3. Rappels sur les versions « linéaires » des foncteurs $\mathrm{T}_\sigma$ et $\mathrm{Fix}_\sigma$

Il existe des versions « linéaires » des foncteurs $\mathrm{T}_\sigma$ et $\mathrm{Fix}_\sigma$, compatibles avec les versions « non linéaires » introduites plus haut, dont nous rappelons ci-dessous la définition en vue de futures références.

On note $\mathcal{U}$ la catégorie des A-modules instables.

Le foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{H}_\sigma \otimes \mathrm{N}$ admet un adjoint à gauche que l'on note toujours $\mathrm{T}_\sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Ce choix de notation est justifié par le fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "\mathrm{T}_\sigma"] \arrow[d, "\text{oubli}"] & \mathcal{K} \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\mathrm{T}_\sigma"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

est commutatif ([La2], 2.3.4).

Voici maintenant l'analogue « équivariant » (voir [La2], 4.4) de ce qui précède.

On note $\mathrm{H}_\sigma - \mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules instables M munis d'une structure de $\mathrm{H}_\sigma$-module définie par une application $\mathrm{H}_\sigma \otimes \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ qui est A-linéaire.

Le foncteur $\mathcal{U} \to \mathrm{H}_\sigma - \mathcal{U}$, $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{H}_\sigma \otimes \mathrm{N}$ admet un adjoint à gauche que l'on note toujours $\mathrm{Fix}_\sigma : \mathrm{H}_\sigma - \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. À nouveau ce choix de notation est justifié par le fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_\sigma \downarrow \mathcal{K} \arrow[r, "\mathrm{Fix}_\sigma"] \arrow[d, "\text{oubli}"] & \mathcal{K} \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ \mathrm{H}_\sigma - \mathcal{U} \arrow[r, "\mathrm{Fix}_\sigma"] & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

est commutatif ([La2], 4.6.3).

## 2. Sur les points fixes homotopiques d'une action d'un groupe cyclique d'ordre premier sur un pro-espace dont la cohomologie limite est nulle en degré impair

Comme au paragraphe précédent, $p$ désigne un nombre premier fixé et $\sigma$ un groupe cyclique d'ordre $p$.

La clef de la réponse à la question 0.0 est la proposition 2.1 ci-dessous.

(Cet énoncé s'intitule Proposition-Définition parce que les propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ des pro-espaces, et $(\mathcal{Q})$ des pro-espaces munis d'une action de $\sigma$, y sont définies.)

*Proposition-Définition* **2.1.** — *Soit* $\mathrm{X}(-)$ *un pro-espace. On suppose que* $\mathrm{X}(-)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

($\mathscr{P}_1$) *Pour tout objet i de* $\mathscr{I}_{X(-)}$, *l'espace* $X(i)$ *est* $p$-$\pi_*$-*fini (et fibrant).*
($\mathscr{P}_2$) *La cohomologie* $H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair.*

*On suppose que* $X(-)$ *est muni d'une action de* $\sigma$ *telle que la propriété suivante est satisfaite :*
($\mathscr{Q}$) *L'action de* $\sigma$ *sur* $H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p^v)$ *est triviale pour tout entier* $v \geqslant 1$.

*Alors le pro-espace* $X(-)^{h\sigma}$ *vérifie* ($\mathscr{P}_1$) *et* ($\mathscr{P}_2$).

*Si le pro-espace* $X(-)$ *vérifie en outre la propriété suivante :*
($\mathscr{P}_3$) *La cohomologie* $H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p)$ *est non nulle,*
*alors il en est de même pour le pro-espace* $X(-)^{h\sigma}$.

*Remarque* **2.2.** — Il est clair que l'hypothèse ($\mathscr{P}_3$) est équivalente à la suivante :
($\mathscr{P}_3$-*bis*) Le groupe de cohomologie $H^0_c(X(-);\mathbf{Z}/p)$ est non nul.

Le scholie 1.1.4 implique donc que, sous l'hypothèse ($\mathscr{P}_1$), l'hypothèse ($\mathscr{P}_3$) est encore équivalente à la suivante :
($\mathscr{P}_3$-*ter*) L'espace $\lim X(-)$ est non vide.

*Remarque* **2.3.** — On peut montrer facilement que, sous l'hypothèse ($\mathscr{P}_2$), l'hypothèse ($\mathscr{Q}$) est équivalente à l'hypothèse ($\mathscr{Q}$-*bis*) ci-dessous. On doit distinguer les cas $p = 2$ et $p > 2$.

Pour $p = 2$ :

($\mathscr{Q}$-*bis*) L'action de $\sigma$ sur $H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/4)$ est triviale.

Pour $p > 2$ :

($\mathscr{Q}$-*bis*) L'action de $\sigma$ sur $H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p)$ est triviale.

*Remarque* **2.4.** — L'hypothèse ($\mathscr{Q}$) est vérifiée en particulier si l'action du groupe discret $\sigma$ se prolonge en une action d'un groupe connexe (par exemple $S^1$).

*Démonstration de la proposition* **2.1.** — Il est immédiat que si $X(-)$ vérifie ($\mathscr{P}_1$) alors il en est de même pour $X(-)^{h\sigma}$. Ce fait est indépendant de ($\mathscr{P}_2$) et ($\mathscr{Q}$).

On montre maintenant que si $X(-)$ vérifie ($\mathscr{P}_1$), ($\mathscr{P}_2$) et ($\mathscr{Q}$) alors $X(-)^{h\sigma}$ vérifie ($\mathscr{P}_2$).

On traite d'abord du cas où l'action de $\sigma$ sur $X(-)$ est triviale; on a alors $X(-)^{h\sigma} = \mathbf{hom}(B\sigma, X(-))$. Le fait que $H^*_c(\mathbf{hom}(B\sigma, X(-));\mathbf{Z}/p)$ est nul en degré impair résulte des deux points suivants :

— Le $\mathscr{K}$-morphisme naturel $T_\sigma H^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p) \to H^*_c(\mathbf{hom}(B\sigma, X(-));\mathbf{Z}/p)$ est un isomorphisme (c'est une conséquence du théorème 1.2.1).

— Si une A-algèbre instable K est nulle en degré impair alors il en est de même pour $T_\sigma K$ (cette propriété est conséquence de son analogue linéaire, au sens de 1.3, dont on peut se convaincre à l'aide de la proposition 2.1.3 de [La2]; elle sera généralisée en 2.9).

Le cas général est plus subtil mais se traite essentiellement de la même façon.

On pose $K = H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$; K est donc un objet de la catégorie $H_\sigma \downarrow \mathcal{K}$ (voir 1.2). Le théorème 1.2.4 nous dit que, sous l'hypothèse $(\mathcal{P}_1)$, le $\mathcal{K}$-morphisme naturel

$$\mathrm{Fix}_\sigma K \to H_c^*(X(-)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$$

est un isomorphisme (observer que le foncteur $\mathrm{Fix}_\sigma$ préserve les colimites).

Il faut donc montrer que la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_\sigma K$ est nulle en degré impair. Nous le ferons en invoquant des propriétés de K qui découlent du lemme 2.6 ci-après, variante du lemme suivant dû à Dwyer et Wilkerson :

*Lemme* **2.5.** — *Soit* X *un espace muni d'une action de* $\sigma$. *On suppose :*

(a) *La cohomologie* $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair.*

(b) *L'action de* $\sigma$ *sur* $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ *est triviale.*

*Alors la suite spectrale de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans* $\mathbf{Z}_p$ *ou* $\mathbf{Z}/p$, *de la fibration* $X \to X_{h\sigma} \to B\sigma$ *dégénère au terme* $E_2$.

(La notation $\mathbf{Z}_p$ désigne comme à l'ordinaire l'anneau des entiers $p$-adiques.)

*Remarque.* — Les remarques 2.3 et 2.4 valent, *mutatis mutandis*, pour l'énoncé ci-dessus.

L'extension de 2.5 aux pro-espaces ne présente pas de difficultés.

Soit $X(-)$ un pro-espace muni d'une action de $\sigma$; on note $X(-)_{h\sigma}$ le pro-espace $i \mapsto X(i)_{h\sigma}$. Soit $\pi$ un groupe abélien; on introduit la suite spectrale colimite des suites spectrales de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans $\pi$, des fibrations $X(i) \to X(i)_{h\sigma} \to B\sigma$. Le terme $E_2$ et l'aboutissement de cette suite spectrale s'identifient respectivement à $H^*(\sigma; H_c^*(X(-); \pi))$ et $H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \pi)$.

*Lemme* **2.6.** — *Soit* $X(-)$ *un pro-espace muni d'une action de* $\sigma$, *vérifiant les hypothèses* $(\mathcal{P}_2)$ *et* $(\mathcal{Q})$. *Alors, pour tout entier* $v \geqslant 1$, *la suite spectrale colimite des suites spectrales de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans* $\mathbf{Z}/p^v$, *des fibrations* $X(i) \to X(i)_{h\sigma} \to B\sigma$ *dégénère au terme* $E_2$.

*Démonstration du lemme* 2.5. — Compte tenu des hypothèses (a) et (b), les termes $E_2^{s,t}$ de la suite spectrale de Serre pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ de la fibration $X \to X_{h\sigma} \to B\sigma$ sont nuls si $s$ ou $t$ sont impairs. Cette suite spectrale dégénère donc au terme $E_2$. Il en résulte que l'homomorphisme $H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}_p) \to H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ est surjectif. L'homomorphisme $H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ est également surjectif puisque l'homomorphisme $H^*(X; \mathbf{Z}_p) \to H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ est surjectif, compte tenu de (a). Il en résulte à nouveau que la suite spectrale de Serre pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$ de la fibration $X \to X_{h\sigma} \to B\sigma$ dégénère au terme $E_2$. □

*Démonstration du lemme* 2.6. — On note $\{E_r^{s,t}(v)\}$ la suite spectrale colimite des suites spectrales de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p^v$, des fibrations $X(i) \to X_{h\sigma}(i) \to B\sigma$. Les hypothèses $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{Q})$ impliquent :

— le terme $E_2^{s,t}(v)$ est nul si $t$ est impair;

— l'homomorphisme $\rho_v : E_2^{s,t}(v+1) \to E_2^{s,t}(v)$, induit par la surjection canonique $\mathbf{Z}/p^{v+1} \to \mathbf{Z}/p^v$, est nul si $s$ est impair.

Il est clair que ces deux propriétés sont encore vérifiées si l'on remplace $E_2$ par $E_r$. On montre alors, par récurrence sur $r$, en contemplant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_r^{0,t}(v+1) & \xrightarrow{d_r} & E_r^{r,t-r+1}(v+1) \\ \downarrow \rho_v & & \downarrow \rho_v \\ E_r^{0,t}(v) & \xrightarrow{d_r} & E_r^{r,t-r+1}(v) \end{array}$$

que pour tout $r \geqslant 2$, tout $t \geqslant 0$ et tout $v \geqslant 1$ :

— l'homomorphisme $\rho_v : E_r^{0,t}(v+1) \to E_r^{0,t}(v)$ est surjectif et la différentielle $d_r : E_r^{0,t}(v) \to E_r^{r,t-r+1}(v)$ est nulle.

On en conclut que la suite spectrale $\{E_r^{s,t}(1)\}$ dégénère au terme $E_2$ en invoquant sa structure de $H^*(B\sigma; \mathbf{Z}/p^v)$-module. □

Le lemme 2.6 implique les propriétés ci-dessous de K.

On note respectivement $P_\sigma$ et $K'$ les sous-algèbres de $H_\sigma$ et K constituées des éléments de degré pair; on observe que $P_\sigma$ est aussi un sous-A-module de $H_\sigma$.

*Scholie* **2.7.**

(a) *L'homomorphisme canonique de* A*-algèbres instables* $H_\sigma \to K$ *fait de* K *un* $H_\sigma$*-module libre.*

(b) *L'application canonique* $\mathbf{Z}/p \otimes_{H_\sigma} K \to H_c^*(X(-); \mathbf{Z}/p)$ *est un isomorphisme* ($\mathbf{Z}/p$ *est considéré comme un* $H_\sigma$*-module via l'augmentation* $H_\sigma \to \mathbf{Z}/p$).

(c) *Si la* A*-algèbre instable* K *est non nulle alors l'homomorphisme* $H_\sigma \to K$ *est injectif.*

(d) *La sous-algèbre* $K'$ *est aussi un sous-*A*-module de* K *et l'application* $P_\sigma \to K'$ *est un homomorphisme de* A*-algèbres instables.*

(e) *L'application canonique* $H_\sigma \otimes_{P_\sigma} K' \to K$ *est un isomorphisme de* A*-algèbres instables au-dessous de* $H_\sigma$.

*Démonstration.* — Les points (a), (b) et (c) découlent du cas $v = 1$ du lemme 2.6. Le point (d) est équivalent au suivant :

(d - *bis*) L'homomorphisme de Bockstein $\beta : K^{2n} \to K^{2n+1}$ est trivial pour tout entier $n$.

Celui-ci découle des cas $v = 1$ et $v = 2$ du lemme 2.6. En effet la dégénérescence au terme $E_2$ des suites spectrales $\{E_r^{s,t}(v)\}$, $v = 1, 2$, implique que l'homomorphisme $H_c^{2n}(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p^2) \to H_c^{2n}(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$, induit par la réduction modulo $p$, est surjectif.

Le fait que l'application canonique du point (e) est un isomorphisme de $H_\sigma$-modules résulte de (a) et (b); le fait qu'elle est un $(H_\sigma \downarrow \mathscr{K})$-morphisme résulte de (d). □

*Remarque* **2.8.** — Lorsque l'action de $\sigma$ sur $X(-)$ s'étend en une action de $S^1$, la A-algèbre instable $K'$ s'identifie à $H_c^*(X(-)_{hS^1}; \mathbf{Z}/p)$ (la notation $X(-)_{hS^1}$ désigne le pro-espace $i \mapsto X(i)_{hS^1} \overset{\text{def}}{=} ES^1 \times_{S^1} X(i)$) et l'isomorphisme du point (e) est un avatar de l'isomorphisme

$$H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \cong H^*(B\sigma; \mathbf{Z}/p) \otimes_{H^*(BS^1; \mathbf{Z}/p)} H_c^*(X(-)_{hS^1}; \mathbf{Z}/p).$$

Celui-ci est à nouveau conséquence de la dégénérescence au terme $E_2$ de la suite spectrale colimite des suites spectrales de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$, des fibrations $X(i) \to X(i)_{hS^1} \to BS^1$, qui est immédiate pour des raisons de degré.

Compte tenu de (e), le fait que la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_\sigma K$ est nulle en degré impair résulte du lemme 2.9 ci-après dont l'énoncé nécessite l'introduction préalable de quelques notations (une version « linéaire » de cet énoncé apparaît déjà dans le paragraphe 2.6.2 de [LZ2]).

On note $\mathscr{K}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{K}$ dont les objets sont les A-algèbres instables nulles en degré impair et $P_\sigma \downarrow \mathscr{K}'$ la catégorie des objets de $\mathscr{K}'$ au-dessous de $P_\sigma$. À nouveau le foncteur $\mathscr{K}' \to P_\sigma \downarrow \mathscr{K}'$, $L' \mapsto P_\sigma \otimes L'$ admet un adjoint à gauche que l'on note $\mathrm{Fix}'_\sigma : P_\sigma \downarrow \mathscr{K}' \to \mathscr{K}'$. On note enfin $E : P_\sigma \downarrow \mathscr{K}' \to H_\sigma \downarrow \mathscr{K}$ le foncteur $K' \mapsto H_\sigma \otimes_{P_\sigma} K'$ et $I : \mathscr{K}' \to \mathscr{K}$ le foncteur inclusion.

*Lemme* **2.9.** — *Les foncteurs* $\mathrm{Fix}_\sigma \circ E$ *et* $I \circ \mathrm{Fix}'_\sigma$ *sont naturellement équivalents.*

*Démonstration.* — Soient $\mathscr{U}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}$ dont les objets sont les A-modules instables nuls en degré impair, $O : \mathscr{U}' \to \mathscr{U}$ le foncteur inclusion et $\tilde{O} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ son adjoint à droite. Soit M un A-module instable; $O\tilde{O}M$ est simplement le plus grand sous-A-module de M nul en degré impair. On rappelle que l'on a un isomorphisme naturel

$$\tilde{O}(H_\sigma \otimes M) \cong P_\sigma \otimes \tilde{O}M$$

(c'est, par exemple, un cas particulier de la proposition 8.3 de [LZ1]).

Soit maintenant L une A-algèbre instable; il est clair que le sous-A-module instable $\mathrm{O}\tilde{\mathrm{O}}\mathrm{L}$ de L est aussi une sous-algèbre. On constate que le foncteur $\mathscr{K} \to \mathscr{K}'$ qui envoie L sur $\tilde{\mathrm{O}}\mathrm{L}$ muni de la $\mathscr{K}'$-structure induite est adjoint à droite de I; on le note $\tilde{\mathrm{I}}$.

Soit enfin K′ une A-algèbre instable nulle en degré impair. L'isomorphisme naturel évoqué ci-dessus conduit au suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}_\sigma\downarrow\mathscr{K}}(\mathrm{H}_\sigma \otimes_{\mathrm{P}_\sigma} \mathrm{K}', \mathrm{H}_\sigma \otimes \mathrm{L}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{P}_\sigma\downarrow\mathscr{K}'}(\mathrm{K}', \mathrm{P}_\sigma \otimes \tilde{\mathrm{I}}\mathrm{L}).$$

Ce dernier isomorphisme fournit bien une équivalence naturelle

$$\mathrm{Fix}_\sigma \circ \mathrm{E} \cong \mathrm{I} \circ \mathrm{Fix}'_\sigma. \qquad \square$$

Pour que la démonstration de la proposition 2.1 soit complète il nous reste à montrer que si X(−) vérifie ($\mathscr{P}_1$), ($\mathscr{P}_2$), ($\mathscr{P}_3$) et ($\mathscr{Q}$) alors $\mathrm{X}(-)^{\mathrm{h}\sigma}$ vérifie ($\mathscr{P}_3$).

Il faut cette fois se convaincre de ce que la A-algèbre instable $\mathrm{Fix}_\sigma\mathrm{K}$ est non nulle. Ceci résulte du point (c) du scholie 2.7. Soit $\eta : \mathrm{H}_\sigma \to \mathrm{K}$ le $(\mathrm{H}_\sigma \downarrow \mathscr{K})$-morphisme canonique; si $\eta$ est injectif alors il en est de même pour

$$\mathrm{Fix}_\sigma(\eta) : \mathbf{Z}/p = \mathrm{Fix}_\sigma\mathrm{H}_\sigma \to \mathrm{Fix}_\sigma\mathrm{K}$$

puisque la version « linéaire » du foncteur $\mathrm{Fix}_\sigma$ (voir 1.3) est exacte ([La2], 4.6.1). On peut également invoquer le fait que $\mathrm{H}_\sigma$ est « injectif » en tant qu'objet de $\mathscr{K}$ ([La1], Corollaire 3.6). □

Les propositions 2.1 et 1.1.2 entraînent :

*Corollaire* **2.10.** — *Soit* X *un espace muni d'une action de* σ. *On suppose :*

— *la cohomologie* $\mathrm{H}^*(\mathrm{X};\mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair;*

— *l'action de* σ *sur* $\mathrm{H}^*(\mathrm{X};\mathbf{Z}_p)$ *est triviale.*

*Alors la cohomologie* $\mathrm{H}^*_c(\widehat{\mathrm{X}}(-)^{\mathrm{h}\sigma};\mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair et non (identiquement) nulle si* X *est non vide.*

(On rappelle que la notation $\widehat{\mathrm{X}}(-)$ désigne le pro-$p$-complété de l'espace X.)

Pour remplacer la cohomologie continue d'un pro-espace qui apparaît dans l'énoncé 2.10 par la cohomologie ordinaire d'un espace il suffit de supposer

— que $\mathrm{H}^*(\mathrm{X};\mathbf{Z}/p)$ est de dimension finie en chaque degré,

— et que $\mathrm{Fix}_\sigma\mathrm{H}^*(\mathrm{X}_{\mathrm{h}\sigma};\mathbf{Z}/p)$ est de dimension finie en chaque degré et nul en degré un

(voir le théorème 4.9.3 de [La2]; pour s'affranchir de la condition de finitude portant sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{X};\mathbf{Z}/p)$, voir le théorème 2.3.1 de [Mo1]).

Les conditions de finitude ci-dessus sont remplies par exemple si l'on suppose que la cohomologie $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ est *nœthérienne*, c'est-à-dire engendrée, comme $\mathbf{Z}/p$-algèbre graduée commutative, par un nombre fini d'éléments. En effet, dans ce cas, les algèbres $H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ et $\mathrm{Fix}_\sigma H^*(X_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ sont également nœthériennes, la première à cause du point (b) du scholie 2.7, la seconde à cause du théorème 1.4 de [DW1] qui entraîne que si une A-algèbre instable K au-dessous de $H_\sigma$ est nœthérienne alors il en est de même pour $\mathrm{Fix}_\sigma K$.

Ce qui précède conduit à l'énoncé suivant :

*Corollaire* **2.11.** — *Soit* X *un espace muni d'une action de* $\sigma$ *tel que l'action de* $\sigma$ *sur* $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ *est triviale. On suppose que l'espace* X *possède les propriétés suivantes :*

— *la cohomologie* $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair;*

— *la cohomologie* $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ *est nœthérienne;*

— *l'espace* X *est p-complet;*

— *l'espace* X *est non vide.*

*Alors l'espace* $X^{h\sigma}$ *possède également ces quatre propriétés.*

(On rappelle que l'on dit qu'un espace X est *p-complet* si l'application canonique $X \to \widehat{X}$ est une équivalence d'homotopie. Pour se convaincre de ce que $X^{h\sigma}$ est $p$-complet, utiliser par exemple le corollaire 4.9.2 de [La2].)

## 3. Sur les (pro-)espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un groupe de Lie compact commutatif et dont le but est le (pro-)$p$-complété d'un espace à cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair

Voici, comme promis dans l'introduction, la « bonne » réponse à la question 0.0 :

*Théorème* **3.1.** — *Soit* $\pi$ *un p-groupe abélien fini; soit* Y *un espace. Si la cohomologie* $H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair alors il en est de même pour la cohomologie* $H^*_c(\mathbf{hom}(B\pi, \widehat{Y}(-)); \mathbf{Z}/p)$.

(On rappelle que la notation $\widehat{Y}(-)$ désigne le pro-$p$-complété de l'espace Y.)

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur le cardinal de $\pi$. Le cas $\pi = 1$ est trivial. Soit $\kappa$ un sous-groupe d'indice $p$ de $\pi$; on pose $\sigma = \pi/\kappa$. Le pas de récurrence consiste à montrer, en utilisant la proposition 2.1, que si l'énoncé 3.1 est vérifié pour $\kappa$ alors il l'est aussi pour $\pi$.

Pour la commodité de l'exposition on choisit un modèle explicite du foncteur $\pi \mapsto B\pi$. On note $E\pi$ le groupe simplicial (contractile) $\{0, 1, \ldots, n\} \mapsto \pi^{\{0, 1, \ldots, n\}}$. Le groupe $\pi$, vu comme un groupe simplicial « constant », est un sous-groupe simplicial de $E\pi$. On pose $B\pi = E\pi/\pi$; puisque $\pi$ est abélien, $B\pi$ est un groupe abélien simplicial (tout comme $E\pi$ et $\pi$) et l'on a une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux $0 \to \pi \to E\pi \to B\pi \to 0$.

Soit Z un espace; on rappelle maintenant l'analyse classique du type d'homotopie de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\pi, Z)$ en termes de points fixes homotopiques d'une action de $\sigma$ sur un espace ayant le type d'homotopie de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(B\kappa, Z)$ :

— L'application canonique $B\kappa = E\kappa/\kappa \to E\pi/\kappa$ est une équivalence d'homotopie (on a en fait ici une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux $0 \to B\kappa \to E\pi/\kappa \to E\sigma \to 0$). Elle induit une équivalence d'homotopie $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, Z) \cong \mathbf{hom}(B\kappa, Z)$.

— Le groupe $\sigma$ agit sur $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, Z)$ *via* son action sur $E\pi/\kappa$ (on a une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux $0 \to \sigma \to E\pi/\kappa \to B\pi \to 0$). L'espace des points fixes homotopiques $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, Z)^{h\sigma}$ s'identifie à l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}((E\sigma \times (E\pi/\kappa))/\sigma, Z)$ (le groupe $\sigma$ se plonge diagonalement dans $E\sigma \times (E\pi/\kappa)$ et l'on a une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux $0 \to \sigma \to E\sigma \times (E\pi/\kappa) \to (E\sigma \times (E\pi/\kappa))/\sigma \to 0$).

— L'application canonique $(E\sigma \times (E\pi/\kappa))/\sigma \to (E\pi/\kappa)/\sigma = B\pi$ est une équivalence d'homotopie (on a une suite exacte de groupes abéliens simpliciaux $0 \to E\sigma \to (E\sigma \times (E\pi/\kappa))/\sigma \to B\pi \to 0$). On a donc une équivalence d'homotopie $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, Z)^{h\sigma} \cong \mathbf{hom}(B\pi, Z)$.

Ayant en tête ce que l'on vient de rappeler, on franchit le pas de récurrence en appliquant la proposition 2.1 au pro-$\sigma$-espace $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, \widehat{Y}(-))$. La propriété $(\mathscr{P}_2)$ est vérifiée par hypothèse de récurrence. La propriété $(\mathscr{Q})$ est vérifiée à cause de l'observation suivante qui illustre la remarque 2.4 :

— L'action par translation du groupe abélien simplicial connexe $E\pi/\kappa$ sur lui-même induit une action de ce groupe sur $\mathbf{hom}(E\pi/\kappa, Z)$ qui prolonge celle de $\sigma$. □

*Remarque.* — Soit $0 \to L_1 \to L_0 \to \sigma \to 0$ une résolution libre de $\sigma$ comme $\mathbf{Z}$-module avec $L_0$ (et $L_1$) de dimension 1; le monomorphisme de groupes abéliens simpliciaux $\sigma \hookrightarrow E\pi/\kappa$ considéré ci-dessus est composé du monomorphisme $\sigma \hookrightarrow EL_0/L_1$ et d'un homomorphisme $EL_0/L_1 \to E\pi/\kappa$. Comme le groupe abélien simplicial $EL_0/L_1$ est un avatar de $S^1$, on se trouve dans le domaine de validité de la remarque 2.8.

En remplaçant dans la démonstration du théorème 3.1 la proposition 2.1 par son corollaire 2.11, on obtient :

*Théorème* **3.2.** (Théorème 0.1). — *Soit* $\pi$ *un p-groupe abélien fini. Soit* Y *un espace possédant les propriétés suivantes :*

— *la cohomologie* $H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair;*

— *la cohomologie* $H^*(Y; \mathbf{Z}/p)$ *est nœthérienne;*

— *l'espace* Y *est p-complet.*

*Alors l'espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{Y})$ *possède également ces trois propriétés.*

*Théorème* **3.3.** — *Soient* $\pi$ *un* $p$*-groupe abélien fini et* $\kappa$ *un sous-groupe; soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair. Alors toute application de* $\mathrm{B}\kappa$ *dans* $\hat{\mathrm{Y}}$ *se prolonge à* $\mathrm{B}\pi$.

(On rappelle que la notation $\hat{\mathrm{Y}}$ désigne le $p$-complété de l'espace Y.)

*Démonstration.* — Puisqu'il existe une suite finie de sous-groupes :

$$\kappa = \pi_0 \subset \pi_1 \subset \dots \subset \pi_{i-1} \subset \pi_i \subset \dots \subset \pi_r = \pi$$

avec $\pi_i/\pi_{i-1}$ cyclique d'ordre $p$ pour tout $i \geqslant 1$, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $\pi/\kappa$ est cyclique d'ordre $p$.

On se place dans ce cas; on pose alors $\sigma = \pi/\kappa$.

Soit $f$ une application de $\mathrm{B}\kappa$ dans $\hat{\mathrm{Y}}$; soit $[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}; f]$ le sous-ensemble de $[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}]$ formé des classes d'homotopie d'applications de $\mathrm{B}\pi$ dans $\hat{\mathrm{Y}}$ dont la restriction à $\mathrm{B}\kappa$ est homotope à $f$ ($[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}; f]$ est en fait un fermé de l'ensemble profini $[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}]$). Étant donné que $\hat{\mathrm{Y}}$ est fibrant, on est ramené à montrer que $[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}; f]$ est non vide.

Soit $i$ un objet de la catégorie $\mathscr{T}_{\hat{\mathrm{Y}}(-)}$ (voir 1.1); on note $f_i$ l'application composée de $f$ et de l'application canonique $\hat{\mathrm{Y}} \to \hat{\mathrm{Y}}(i)$, et $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i); f)$ le sous-espace de $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i))$ image réciproque de la composante connexe de $f_i$ par l'application $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i)) \to \mathbf{hom}(\mathrm{B}\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i))$ considérée dans la démonstration précédente. Compte tenu de l'observation faite à la fin de cette démonstration, l'action de $\sigma$ sur $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i))$ préserve $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i); f)$. Le foncteur $i \mapsto \mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(i); f)$ est donc un pro-$\sigma$-espace; on le note $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f)$.

On démontre le théorème 3.3 en appliquant la dernière partie de la proposition 2.1 au pro-$\sigma$-espace $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f)$. Détaillons un peu. La vérification de l'hypothèse $(\mathscr{P}_1)$ ne pose pas de problème. L'hypothèse $(\mathscr{P}_2)$ est vérifiée parce que $\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f); \mathbf{Z}/p)$ est quotient de $\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p) \cong \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p)$ qui est nul en degré impair d'après 3.1. Pour $(\mathscr{Q})$ on peut invoquer la même raison (ou reprendre l'argument de la démonstration de 3.1). L'hypothèse $(\mathscr{P}_3)$ est vérifiée puisque, par construction, $\mathrm{H}^0_c(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f); \mathbf{Z}/p)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p$. La proposition 2.1 nous dit donc que $\mathrm{H}^0_c(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ est non nul (voir 2.2). Or $\mathrm{H}^0_c(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \hat{\mathrm{Y}}(-); f)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ s'identifie à l'algèbre des applications continues de $[\mathrm{B}\pi, \hat{\mathrm{Y}}; f]$, muni de sa topologie profinie, dans $\mathbf{Z}/p$, muni de sa topologie discrète (voir 1.1.3 et 1.1.4). □

*Corollaire* **3.4.** — *Soit* T *un tore et soit* V *le sous-groupe de* T *formé des éléments* $t$ *vérifiant* $t^p = 1$*; soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair. Alors toute application de* BV *dans* $\hat{\mathrm{Y}}$ *se prolonge à* BT.

Ce corollaire découle du théorème 3.3 et du lemme suivant :

*Lemme* **3.5.** — *Soit* T *un tore et soit* $\theta(n)$, $n \in \mathbf{N}$, *le sous-groupe de* T *formé des éléments* $t$ *vérifiant* $t^{p^n} = 1$. *Alors pour tout espace* Y *l'application naturelle*

$$[\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}] \to \lim_{n \in \mathbf{N}} [\mathrm{B}\theta(n), \widehat{\mathrm{Y}}]$$

*est une bijection (homéomorphisme d'ensembles profinis).*

Comme les ensembles profinis $[\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}]$ et $\lim_{n \in \mathbf{N}} [\mathrm{B}\theta(n), \widehat{\mathrm{Y}}]$ sont respectivement les spectres des algèbres $p$-booléennes

$$\mathrm{H}^0_c(\mathbf{hom}(\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p) \quad \text{et} \quad \mathrm{colim}_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{H}^0_c(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\theta(n), \widehat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p)$$

(voir le paragraphe 1.8.1 de [La2] et le paragraphe 1.1 du présent article), le lemme 3.5 peut être vu comme un cas particulier du lemme suivant :

*Lemma* **3.6.** — *Soit* T *un tore et soit* $\theta(n)$, $n \in \mathbf{N}$, *le sous-groupe de* T *formé des éléments* $t$ *vérifiant* $t^{p^n} = 1$. *Alors pour tout espace* Y *l'application naturelle*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\theta(n), \widehat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme (de* A-*algèbres instables).*

Compte tenu de la définition même de la cohomologie continue d'un pro-espace, le lemme 3.6 résulte enfin du lemme suivant :

*Lemme* **3.7.** — *Soit* T *un tore et soit* $\theta(n)$, $n \in \mathbf{N}$, *le sous-groupe de* T *formé des éléments* $t$ *vérifiant* $t^{p^n} = 1$. *Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{H}^*(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\theta(n), \mathrm{Y}); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*(\mathbf{hom}(\mathrm{BT}, \mathrm{Y}); \mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme (de* A-*algèbres instables) si* Y *est* $p$-$\pi_*$-*fini (et fibrant).*

*Démonstration.* — On note $\nu_{\mathrm{Y}}$ l'application naturelle ci-dessus. On vérifie par inspection que $\nu_{\mathrm{Y}}$ est un isomorphisme dans le cas où Y est un espace d'Eilenberg-Mac Lane du type $\mathrm{K}(\mathbf{Z}/p, m)$; le cas général se traite en utilisant une décomposition à la Postnikov d'un espace $p$-$\pi_*$-fini. Précisons un petit peu. Soit Y un espace $p$-$\pi_*$-fini (et fibrant) que l'on suppose connexe (il est clair que cette restriction n'est pas gênante ici); il existe une suite finie de fibrations, $\mathrm{Y}_s \to \mathrm{Y}_{s-1} \to \mathrm{K}(\mathbf{Z}/p, m_s)$ $(m_s \geqslant 2)$, $0 \leqslant s \leqslant r$, $\mathrm{Y}_{-1}$ étant un point et $\mathrm{Y}_r$ ayant le type d'homotopie de Y. On vérifie que $\nu_{\mathrm{Y}_s}$ est un isomorphisme par récurrence sur $s$ en considérant les suites spectrales d'Eilenberg-Moore des applications $\mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \mathrm{Y}_{s-1}) \to \mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \mathrm{K}(\mathbf{Z}/p, m_s))$ convergeant vers la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$ de la fibre $\mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \mathrm{Y}_s)$ au-dessus du point base (l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \mathrm{K}(\mathbf{Z}/p, m_s))$ est naturellement pointé), avec $\mathrm{C} = \mathrm{T}$ et $\mathrm{C} = \theta(n)$ (on copie ce que font Dror et Smith dans [DS]). □

*Corollaire* **3.8.** — *Soit* T *un tore; soit* Y *un espace dont la cohomologie modulo p est nulle en degré impair. Alors l'application naturelle*

$$[\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p), \mathrm{H}^*(\mathrm{BT}; \mathbf{Z}/p))$$

*est une surjection.*

*Démonstration.* — On considère le diagramme commutatif d'applications naturelles suivant :

$$\begin{array}{ccc} [\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p), \mathrm{H}^*(\mathrm{BT}; \mathbf{Z}/p)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathrm{BV}, \widehat{\mathrm{Y}}] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p), \mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbf{Z}/p)) \end{array}$$

(la notation V est introduite dans 3.4). Le corollaire 3.8 découle des points suivants :

— La flèche verticale de droite est une bijection. C'est une conséquence de l'isomorphisme $\widetilde{\mathrm{O}}\mathrm{H}^*(\mathrm{BV}; \mathbf{Z}/p) \cong \mathrm{H}^*(\mathrm{BT}; \mathbf{Z}/p)$ (notation introduite dans la démonstration de 2.9) que l'on vérifie par récurrence sur $\dim_{\mathbf{Z}/p}\mathrm{V}$ à partir de l'isomorphisme $\widetilde{\mathrm{O}}(\mathrm{H}_\sigma \otimes \mathrm{M}) \cong \mathrm{P}_\sigma \otimes \widetilde{\mathrm{O}}\mathrm{M}$ (voir à nouveau la démonstration de 2.9).

— La flèche horizontale du bas est une bijection pour tout espace Y. C'est la variante du théorème 3.1.1 de [La2] dans laquelle la $p$-complétion de Bousfield-Kan est remplacée par celle de Sullivan; la méthode de démonstration est la même que celle du cas particulier 1.2.3.

— La flèche verticale de gauche est une surjection (Corollaire 3.4). □

*Remarque.* — L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p), \mathrm{H}^*(\mathrm{BT}; \mathbf{Z}/p))$ possède une topologie profinie canonique (voir [La2], 1.7.7) et l'application naturelle de l'énoncé 3.8 est continue.

Le théorème 3.1 et le lemme 3.6 impliquent immédiatement :

*Théorème* **3.9.** — Soit T un tore; soit Y un espace. Si la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p)$ est nulle en degré impair, alors il en est de même pour la cohomologie $\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{BT}, \widehat{\mathrm{Y}}(-)); \mathbf{Z}/p)$.

On achève ce paragraphe en condensant les théorèmes 3.1 et 3.9 en un seul énoncé (il ne faut pas prendre cette unification trop au sérieux!) :

*Théorème* **3.10.** — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif; soit* Y *un espace. Si la cohomologie* $H^*(Y;\mathbf{Z}/p)$ *est nulle en degré impair alors il en est de même pour la cohomologie* $H_c^*(\mathbf{hom}(BC,\widehat{Y}(-));\mathbf{Z}/p)$.

On obtient cet énoncé en généralisant les lemmes 3.6 et 3.7 :

*Lemme* **3.11.** — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif et soit* $\gamma(n)$, $n\in\mathbf{N}$, *le sous-groupe de* C *formé des éléments* $c$ *vérifiant* $c^{p^n}=1$. *Alors :*

(a) *L'application naturelle*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbf{N}} H^*(\mathbf{hom}(B\gamma(n),Y);\mathbf{Z}/p)\to H^*(\mathbf{hom}(BC,Y);\mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme (de* A*-algèbres instables) si* Y *est* $p$-$\pi_*$*-fini (et fibrant).*

(b) *L'application naturelle*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbf{N}} H_c^*(\mathbf{hom}(B\gamma(n),\widehat{Y}(-));\mathbf{Z}/p)\to H_c^*(\mathbf{hom}(BC,\widehat{Y}(-));\mathbf{Z}/p)$$

*est un isomorphisme (de* A*-algèbres instables) pour tout espace* Y.

*Démonstration (du point (a)).* — Soit $C_0$ la composante connexe de l'élément neutre de C. Le groupe de Lie C est isomorphe au produit $C_0\times\pi_0C$ et le groupe abélien fini $\pi_0C$ est lui-même produit d'un $p$-groupe abélien fini $\rho$ et d'un groupe abélien fini $\rho'$ dont le cardinal n'est pas divisible par $p$. On écrit

$$\mathbf{hom}(BC,Y)=\mathbf{hom}(BC_0\times B\rho,\mathbf{hom}(B\rho',Y)).$$

On observe que si Y est $p$-$\pi_*$-fini (et fibrant) alors « l'évaluation en zéro » $\mathbf{hom}(B\rho',Y)\to Y$ est une équivalence d'homotopie. On a donc une équivalence d'homotopie

$$\mathbf{hom}(BC,Y)\simeq\mathbf{hom}(BC_0\times B\rho,Y)=\mathbf{hom}(BC_0,\mathbf{hom}(B\rho,Y)).$$

On observe cette fois que si Y est $p$-$\pi_*$-fini (et fibrant) alors $\mathbf{hom}(X,Y)$ est $p$-$\pi_*$-fini (et fibrant) pour tout espace X dont la cohomologie modulo $p$ est de dimension finie en chaque degré. On conclut en appliquant le lemme 3.7. □

## 4. Propriétés d'« exactitude » des (pro-)espaces fonctionnels considérés dans le paragraphe précédent

Ce titre renvoie aux propositions 4.5 et 4.6 que l'on trouvera à la fin de ce paragraphe. La démonstration de ces propositions consiste à reprendre, à la lumière des scholies 4.1 et 4.4, les énoncés correspondants du paragraphe 3; nous n'infligerons pas les détails au lecteur. Les scholies 4.1 et 4.4 s'obtiennent quant à eux en méditant sur la démonstration de la proposition 2.1.

*Scholie* **4.1.** — *Soit* $f : X(-) \to X'(-)$ *un morphisme de pro-*$\sigma$*-espaces, vérifiant les hypothèses* $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ *et* $(\mathscr{Q})$. *Si l'application* $H_c^*(X'(-); \mathbf{Z}/p) \to H_c^*(X(-); \mathbf{Z}/p)$ *induite par* $f$ *est surjective (resp. injective) alors il en est de même pour l'application* $H_c^*((X'(-)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H_c^*((X(-)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ *(toujours induite par* $f$*).*

*Démonstration.* — On utilise :

— le fait que le $\mathscr{K}$-morphisme naturel

$$\mathrm{Fix}_\sigma H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H_c^*((X(-)^{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$$

est un isomorphisme,

— l'exactitude du foncteur $\mathrm{Fix}_\sigma$ (version linéaire),

— et le lemme 4.2 ci-dessous auquel conduisent le lemme 2.6 et son scholie 2.7 :

*Lemme* **4.2.** — *Soit* $f : X(-) \to X'(-)$ *un morphisme de pro-*$\sigma$*-espaces, vérifiant les hypothèses* $(\mathscr{P}_2)$ *et* $(\mathscr{Q})$. *Si l'application* $H_c^*(X'(-); \mathbf{Z}/p) \to H_c^*(X(-); \mathbf{Z}/p)$ *induite par* $f$ *est surjective (resp. injective) alors il en est de même pour l'application* $H_c^*(X'(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$ *(toujours induite par* $f$*).*

*Démonstration.* — Compte tenu des points (b) et (a) de 2.7, ce lemme est conséquence des deux assertions ci-après dont la vérification est laissée au lecteur. Soit $\phi : M' \to M$ un homomorphisme de $H_\sigma$-modules $\mathbf{N}$-gradués; soit $\bar{\phi} : \mathbf{Z}/p \otimes_{H_\sigma} M' \to \mathbf{Z}/p \otimes_{H_\sigma} M$ l'homomorphisme induit de $\mathbf{Z}/p$-espaces vectoriels $\mathbf{N}$-gradués. Alors $\phi$ est surjectif si et seulement si $\bar{\phi}$ est surjectif. Quand M est libre comme $H_\sigma$-module $\mathbf{N}$-gradué alors $\phi$ est injectif si $\bar{\phi}$ est injectif. □ □

Le scholie 4.4 ci-après est obtenu comme ci-dessus en invoquant la variante *ad hoc* du lemme 4.2 et le lemme 4.3 ci-dessous qui montre que dans certains cas les coégalisateurs dans les catégories $\mathscr{U}$ et $\mathscr{K}$ « coïncident ». Avant d'énoncer ce scholie et ce lemme, nous rappelons la terminologie des diagrammes égalisateurs et coégalisateurs.

Soit $E \to E^0 \rightrightarrows E^1$ un diagramme dans la catégorie des ensembles; on dit que ce diagramme est égalisateur si la flèche de gauche est injective et si son image est l'égalisateur des deux flèches de droite. Suivant l'usage habituel, on dit donc qu'un diagramme $C \to C^0 \rightrightarrows C^1$ dans une catégorie $\mathscr{C}$ est égalisateur si pour tout objet D de $\mathscr{C}$, le diagramme induit dans la catégorie des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C^0) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D, C^1)$ est égalisateur. La notion de diagramme coégalisateur est définie de façon duale (au sens des catégories).

Nous dirons qu'un diagramme $C \to C^0 \leftrightarrows C^1$ dans une catégorie $\mathscr{C}$ est égalisateur *augmenté* si le diagramme sous-jacent $C \to C^0 \rightrightarrows C^1$ est égalisateur et si les deux morphismes composés $C^0 \rightrightarrows C^1 \to C^0$ sont l'identité de $C^0$. La notion de diagramme coégalisateur *coaugmenté* est définie de façon duale.

*Lemme* **4.3.** — *Soit* $K \leftarrow K_0 \rightleftarrows K_1$ *un diagramme de* A-*algèbres instables. Un tel diagramme est coégalisateur coaugmenté si et seulement si le diagramme sous-jacent de* A-*modules instables l'est.*

*Démonstration.* — Soient $d_0$ et $d_1$ les deux morphismes de $K_1$ dans $K_0$; l'existence d'un morphisme $s_0 : K_0 \to K_1$ avec $d_0 \circ s_0 = \mathrm{Id}$ et $d_1 \circ s_0 = \mathrm{Id}$ entraîne que le sous-A-module $(d_0 - d_1)(K_1)$ est aussi un idéal de $K_0$. Le lemme en résulte. □

*Scholie* **4.4.** — *Soit* $X(-) \to X^0(-) \rightrightarrows X^1(-)$ *un diagramme de pro-*$\sigma$*-espaces vérifiant les hypothèses* $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ *et* $(\mathscr{Q})$. *Si le diagramme induit dans la catégorie des* A-*algèbres instables*

$$\mathrm{H}^*_c(X(-);\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*_c(X^0(-);\mathbf{Z}/p) \leftleftarrows \mathrm{H}^*_c(X^1(-);\mathbf{Z}/p)$$

*est coégalisateur coaugmenté alors il en est de même pour le diagramme*

$$\mathrm{H}^*_c((X(-)^{h\sigma};\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*_c((X^0(-)^{h\sigma};\mathbf{Z}/p) \leftleftarrows \mathrm{H}^*_c((X^1(-)^{h\sigma};\mathbf{Z}/p).$$

Voici maintenant les énoncés promis au début de ce paragraphe. On rappelle que l'introduction d'un groupe de Lie compact commutatif C sert essentiellement à condenser en un seul les énoncés que l'on aurait en remplaçant C par un un $p$-groupe abélien fini ou un tore.

*Proposition* **4.5.** — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif; soit* $f : Y \to Y'$ *une application entre deux espaces dont la cohomologie modulo p est nulle en degré impair. Si l'application* $f^* : \mathrm{H}^*(Y';\mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*(Y;\mathbf{Z}/p)$ *est surjective (resp. injective) alors il en est de même pour l'application (induite par* $f$*)* $\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y'}(-));\mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y}(-));\mathbf{Z}/p)$.

*En particulier l'application (toujours induite par* $f$*)* $[BC, \widehat{Y}] \to [BC, \widehat{Y'}]$ *est injective (resp. surjective).*

*Proposition* **4.6.** — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif; soit* $Y \to Y^0 \rightrightarrows Y^1$ *un diagramme dans la catégorie des espaces dont la cohomologie modulo p est nulle en degré impair. Si le diagramme induit dans la catégorie des* A-*algèbres instables*

$$\mathrm{H}^*(Y;\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*(Y^0;\mathbf{Z}/p) \leftleftarrows \mathrm{H}^*(Y^1;\mathbf{Z}/p)$$

*est coégalisateur coaugmenté alors il en est de même pour le diagramme*

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y}(-));\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y^0}(-));\mathbf{Z}/p)\\ &\leftleftarrows \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y^1}(-));\mathbf{Z}/p).\end{aligned}$$

*En particulier le diagramme (induit dans la catégorie des ensembles ou des ensembles profinis)*

$$[BC, \widehat{Y}] \to [BC, \widehat{Y^0}] \rightrightarrows [BC, \widehat{Y^1}]$$

*est égalisateur.*

## 5. Introduction de MU-résolutions instables

Soit Y un espace. On obtient des diagrammes $Y \to Y^0 \rightrightarrows Y^1$ du type de ceux qui apparaissent dans le paragraphe précédent en considérant le début de « résolutions instables » de Y associées à certains spectres. La référence à ce sujet est [BCM]. Rappelons brièvement de quoi il s'agit.

Soit E un spectre-anneau unitaire (« homotopy associative ring spectrum with unit »). On pose $R_E^{nr}Y = \Omega^\infty(E \wedge Y_+)$ (nr est pour « non réduit »). Le foncteur $Y \mapsto R_E^{nr}Y$ admet une structure de monade, tout du moins si on le considère comme un endofoncteur de la catégorie homotopique. Il existe aussi une version « réduite » $R_E$ du foncteur $R_E^{nr}$. L'idéal serait ici de s'inspirer de ce que font Bousfield et Kan dans le cas du foncteur $Y \mapsto \Lambda[Y]$ ([BK], I, 2.1), $\Lambda[Y]$ désignant le module simplicial sur un anneau commutatif $\Lambda$ engendré par Y, et de définir $R_EY$ comme la fibre au-dessus de « point » de l'application $R_E^{nr}Y \to R_E^{nr}(\text{point})$. Mais la mise au point d'une telle définition se heurte à des difficultés techniques causées par le manque de « rigidité » du foncteur $R_E^{nr}$. Une façon de contourner ces difficultés est de supposer que Y est pointé et de poser $R_EY = \Omega^\infty(E \wedge Y)$. C'est ce que nous ferons par la suite; cette introduction assez artificielle d'un point base nous obligera à quelques contorsions disgracieuses. À nouveau le foncteur $Y \mapsto R_EY$, considéré comme un endofoncteur de la catégorie homotopique pointée, admet une structure de monade. On obtient à l'aide de cette structure un objet cosimplicial coaugmenté qu'on appelle la E-résolution instable de Y, noté ci-après $\widetilde{\text{Rés}}_E^\bullet Y$. Le « début » de $\widetilde{\text{Rés}}_E^\bullet Y$ est donc un diagramme de la forme

$$Y \to R_EY \rightrightarrows R_ER_EY.$$

La proposition 5.2 ci-dessous montre en particulier que le diagramme de A-algèbres instables

$$H^*(Y; \mathbf{Z}/p) \leftarrow H^*(R_EY; \mathbf{Z}/p) \leftleftarrows H^*(R_ER_EY; \mathbf{Z}/p)$$

est coégalisateur coaugmenté si l'application $H_0(S; \mathbf{Z}/p) \to H_0(E; \mathbf{Z}/p)$ induite par l'unité de E, S désignant le spectre des sphères, est injective.

*Proposition* **5.1.** — *Soit* E *un spectre-anneau unitaire; soit* $\Lambda$ *un anneau commutatif. Si l'application* $H^0(E; \Lambda) \to H^0(S; \Lambda)$ *induite par l'unité de* E *est surjective alors l'homomorphisme de* $\Lambda$*-modules gradués (induit par l'unité de* E*)* $H_*(Y; \Lambda) \to H_*(R_EY; \Lambda)$ *possède une rétraction fonctorielle en l'espace pointé* Y.

*Démonstration.* — Il revient au même de montrer que l'homomorphisme de $\Lambda$-modules gradués $\widetilde{H}_*(Y; \Lambda) \to \widetilde{H}_*(R_EY; \Lambda)$ possède une rétraction fonctorielle en l'espace pointé Y ($\widetilde{H}_*(-; \Lambda)$ désigne l'homologie réduite à coefficients dans $\Lambda$).

On note $H\Lambda$ le spectre d'Eilenberg-Mac Lane, représentant la cohomologie à coefficients dans $\Lambda$. Soient $\eta_E$ et $\eta_{H\Lambda}$ les unités respectives de E et $H\Lambda$; l'hypothèse faite sur $\eta_E$ équivaut à supposer qu'il existe une application $\theta : E \to H\Lambda$ avec $\theta \circ \eta_E = \eta_{H\Lambda}$. Disposant d'un tel $\theta$, on exhibe une rétraction fonctorielle de $\Lambda$-modules gradués $\rho_E : \widetilde{H}_*(R_E Y; \Lambda) \to \widetilde{H}_*(Y; \Lambda)$ de la façon suivante :

Dans le cas $E = H\Lambda$, $\rho_{H\Lambda}$ est un avatar de l'application $\pi_* R_{H\Lambda} R_{H\Lambda} Y \to \pi_* R_{H\Lambda} Y$ donnée par la structure de monade de $R_{H\Lambda}$ (on observera que le foncteur $R_{H\Lambda}$ est une version « molle » du foncteur $Y \mapsto \Lambda[Y]/\Lambda[\text{point}]$ qui admet lui une structure de monade « rigide »). Dans le cas général, $\rho_E$ est juste la composée de la transformation naturelle $\widetilde{H}_*(R_E Y; \Lambda) \to \widetilde{H}_*(R_{H\Lambda} Y; \Lambda)$ induite par $\theta$ et de $\rho_{H\Lambda}$. □

*Proposition* **5.2.** — *Soit* E *un spectre-anneau unitaire; soit* $\Lambda$ *un anneau commutatif. Si l'application* $H^0(E; \Lambda) \to H^0(S; \Lambda)$ *induite par l'unité de* E *est surjective, alors le* $\Lambda$*-module gradué cosimplicial coaugmenté* $H_*(\widetilde{\text{Rés}_E^\bullet} Y; \Lambda)$ *est acyclique pour tout espace pointé* Y.

(Par acyclique on entend acyclique pour la différentielle, de degré +1, obtenue de la façon habituelle à partir des cofaces.)

*Démonstration.* — L'objet cosimplicial coaugmenté $R_E \widetilde{\text{Rés}_E^\bullet} Y$ possède une contraction à gauche (voir dans [DMN] la définition 6.1 et l'exemple (1) qui suit le lemme 6.2); il en résulte que le $\Lambda$-module gradué cosimplicial coaugmenté $H_*(R_E \widetilde{\text{Rés}_E^\bullet} Y; \Lambda)$ est acyclique. Il en est de même pour $H_*(\widetilde{\text{Rés}_E^\bullet} Y; \Lambda)$ à cause de la proposition précédente. □

Nous utiliserons la proposition ci-dessus dans les cas $E = MU$, $\Lambda = \mathbf{Z}/p$ et $\Lambda = \mathbf{Q}$. Dans le premier de ces deux cas la proposition 5.3 ci-dessous montre que si la cohomologie modulo $p$ de Y est nulle en degré impair alors le diagramme

$$Y \to R_{MU} Y \rightrightarrows R_{MU} R_{MU} Y$$

vérifie les hypothèses de la proposition 4.6.

*Proposition* **5.3.** — *Soit* Y *un espace pointé. Si la cohomologie modulo p de l'espace* Y *est nulle en degré impair alors il en est de même pour celle de l'espace* $R_{MU} Y$.

*Démonstration.* — Cette proposition est une variante technique du point (e) de la proposition 5.4 ci-après; pour les détails, voir l'appendice. □

Avant d'énoncer cette proposition, introduisons les notations suivantes :

— Comme à l'ordinaire, on pose $MU_* = MU_*(\text{point}) = \pi_* MU$ ($MU_*$ est donc un anneau $\mathbf{N}$-gradué commutatif).

— On note $\mathbf{MU}_n$ l'espace $\Omega^\infty \Sigma^n MU$.

— Étant donné un espace pointé X et un ensemble I, on note $X^{(I)}$ le sous-espace de $X^I$ formé des I-uples dont les coordonnées distinctes du point base sont en nombre fini.

*Proposition* **5.4.** — *Soit* Y *un espace pointé dont l'homologie entière est en chaque degré un* $\mathbf{Z}$*-module libre; soit* $\mathrm{B}_n$ *une base de* $\widetilde{\mathrm{H}}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})$.

(a) *La* MU*-homologie* $\widetilde{\mathrm{MU}}_*\mathrm{Y}$ *est un* $\mathrm{MU}_*$*-module libre.*

(b) *Il existe un isomorphisme de spectre-modules sur* MU

$$\mathrm{MU}\wedge\mathrm{Y}\simeq\bigvee_{n\in\mathbf{N}}(\Sigma^n\mathrm{MU})^{\vee\mathrm{B}_n},$$

$(\Sigma^n\mathrm{MU})^{\vee\mathrm{B}_n}$ *désignant le bouquet de copies, indexées par* $\mathrm{B}_n$, *du spectre* $\Sigma^n\mathrm{MU}$.

(c) *Il existe une équivalence d'homotopie*

$$\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}\simeq\prod_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$$

*telle que l'homomorphisme* $\widetilde{\mathrm{H}}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})\to\widetilde{\mathrm{H}}_n(\mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)};\mathbf{Z})$ *induit par la composée de l'application canonique* $\mathrm{Y}\to\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$, *de cette équivalence d'homotopie et de la projection sur le facteur* $\mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$, *s'identifie à l'isomorphisme* $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}^{(\mathrm{B}_n)}$.

(d) *L'homologie entière de l'espace* $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$ *est en chaque degré un* $\mathbf{Z}$*-module libre.*

(e) *Si l'homologie entière de* Y *est nulle en degré impair alors il en est de même pour celle de l'espace* $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$.

(f) *Si* Y *est connexe et si son homologie entière est en chaque degré un* $\mathbf{Z}$*-module libre de dimension finie alors il en est de même pour celle de l'espace* $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$.

*Démonstration.* — Le point (a) est conséquence de la dégénérescence de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch convergeant vers $\widetilde{\mathrm{MU}}_*\mathrm{Y}$. Le point (b) en découle par un argument standard (voir par exemple [Ad1], Part II, Lemma 11.1). Il est clair que l'on peut préciser l'énoncé du point (b) comme on l'a fait pour le point (c); celui-ci est alors simplement obtenu en appliquant le foncteur $\Omega^\infty$. Les points (d), (e) et (f) coûtent plus cher; compte tenu de (c), ils sont conséquences de [Wils]. En effet, W. S. Wilson montre dans cet article que l'homologie entière des espaces $\mathbf{MU}_n$, $n\geqslant 1$, et de la composante connexe du point base de l'espace $\mathbf{MU}_0$, est en chaque degré un $\mathbf{Z}$-module libre de dimension finie et que cette homologie est nulle en degré impair pour $n$ pair. □

*Remarque.* — On observera que le point (f) n'est plus vrai si l'on remplace $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$ par $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}^{\mathrm{nr}}\mathrm{Y}$.

La proposition suivante est maintenant une spécialisation de la proposition 4.6 :

*Proposition* **5.5.** — *Soient* C *un groupe de Lie compact commutatif et* Y *un espace pointé dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair. Alors le diagramme (d'ensembles ou d'ensembles profinis)*

$$[\mathrm{BC},\mathrm{Y}\widehat{_p}]\to[\mathrm{BC},(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y})\widehat{_p}]\rightrightarrows[\mathrm{BC},(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y})\widehat{_p}]$$

*est égalisateur.*

La proposition 5.5 est la clef de la démonstration du théorème 0.3 à laquelle est consacré l'essentiel du prochain paragraphe. Les conséquences de cette proposition (ou plutôt de sa variante 7.17) sont analysées plus finement dans [De].

## 6. Démonstration des théorèmes 0.3 et 0.4

La démonstration du théorème 0.3 se fait en deux temps. On montre tout d'abord que le diagramme d'ensembles

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}]$$

est égalisateur. On vérifie ensuite que l'égalisateur de la double flèche s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(\mathrm{K}(\mathrm{Y}), \mathrm{K}(\mathrm{BT}))$. Chemin faisant, on démontre le théorème 0.4.

*Proposition* **6.1.** — *Soit* T *un tore; soit* Y *un espace pointé. On fait les hypothèses suivantes :*

— Y *est simplement connexe;*

— $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})$ *est nul pour n impair et un* **Z**-*module libre de dimension finie pour n pair;*

— $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q})$ *est une algèbre de polynômes.*

*Alors le diagramme d'ensembles*

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}]$$

*est égalisateur.*

*Démonstration.* — Celle-ci utilise essentiellement la proposition 5.5 et un argument de « carré arithmétique » ([BK], VI, 8.1); l'hypothèse sur la cohomologie rationnelle de Y sert à régler à peu de frais les questions correspondant au sommet « **Q**-local » de ce carré et à éviter l'apparition de « phénomènes fantomatiques ».

Passons aux détails. La démonstration de la proposition 6.1 s'appuie sur les lemmes 6.4, 6.5 et 6.6 ci-après; la démonstration des lemmes 6.4 et 6.6 fait intervenir quant à elle le lemme 6.2 et le scholie 6.3. Ces énoncés nécessitent l'introduction de quelques notations :

— Nous notons $\mathrm{Y}_{\mathbf{Q}}$ le **Q**-localisé d'un espace Y (plus précisément, comme les espaces dont nous aurons à considérer la **Q**-localisation sont simplement connexes, nous posons $\mathrm{Y}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_\infty \mathrm{Y}$, voir [BK], Ch. V, §4).

— On rappelle que la notation $\widehat{\mathbf{Z}}$ désigne le complété profini de **Z** (et que l'on a $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod_p \mathbf{Z}_p$). Nous posons $\mathrm{Y}_{\widehat{\mathbf{Z}}} = \prod_p \mathrm{Y}_{\widehat{p}}$.

— Nous posons $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\widehat{\mathbf{Z}}$ (**A** est l'anneau des adèles finies de **Q**) et $\mathrm{Y}_{\mathbf{A}} = (\mathrm{Y}_{\widehat{\mathbf{Z}}})_{\mathbf{Q}}$.

— Soit $\pi_*$ un groupe abélien **N**-gradué; nous notons $\mathrm{K}(\pi_*)$ le produit, indexé par **N**, des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $\mathrm{K}(\pi_n, n)$.

*Lemme* **6.2.** — *Soit* Y *un espace vérifiant les hypothèses de la proposition* 6.1. *Alors il existe un* $\mathbf{Z}$*-module* $\mathbf{N}$*-gradué* $L_*$, *nul en degré impair et en degré zéro, libre de dimension finie en chaque degré pair (strictement positif), et une application* $u : Y \to K(L_*)$ *telle que l'homomorphisme* $u_* : H_n(Y; \mathbf{Z}) \to H_n(K(L_*); \mathbf{Z})$ *est un isomorphisme pour* $n \leqslant 3$ *et a un noyau et un conoyau finis pour* $n \geqslant 4$.

*Démonstration.* — On peut par exemple procéder comme suit. Soit $E_*$ le sous-espace des primitifs de $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Q})$ (le noyau du coproduit $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Q}) \to \widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Q}) \otimes \widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Q})$). Soit $L_*$ l'intersection dans $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Q})$ de ce sous-espace et de $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Z})$; $L_*$ est donc un $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{N}$-gradué, nul en degré impair et nul en degré zéro, libre de dimension finie en chaque degré pair (strictement positif), qui est facteur direct dans $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Z})$. Soit $u$ une application de Y dans $K(L_*)$ « représentant » une rétraction $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Z}) \to L_*$ (observer qu'un homomorphisme de degré zéro de $\widetilde{H}_*(Y; \mathbf{Z})$ dans $L_*$ s'identifie à une suite de classes de cohomologie de Y à coefficients dans $L_n$, $n$ parcourant $\mathbf{N}$) alors l'homomorphisme $u_* : H_*(Y; \mathbf{Z}) \to H_*(K(L_*); \mathbf{Z})$ a les propriétés requises. □

*Scholie* **6.3.** — *Soit* Y *un espace vérifiant les hypothèses de la proposition* 6.1. *Alors il existe un* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel* $\mathbf{N}$*-gradué* $E_*$, *nul en degré impair et en degré zéro, de dimension finie en chaque degré pair (strictement positif), et un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & Y_{\mathbf{A}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(E_*) & \longrightarrow & K(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Q}} E_*) \end{array}$$

*dans lequel les flèches verticales sont des équivalences d'homotopie (les flèches horizontales étant les flèches évidentes).*

*Démonstration.* Le diagramme ci-dessus est un avatar du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & Y_{\mathbf{A}} \\ {\scriptstyle u_{\mathbf{Q}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_{\mathbf{A}}} \\ (K(L_*))_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & (K(L_*))_{\mathbf{A}}. \end{array} \quad \square$$

*Lemme* **6.4.** — *Soit* Y *un espace vérifiant les hypothèses de la proposition 6.1; soit* X *un espace dont l'homologie entière est nulle en degré impair et est en chaque degré pair un* $\mathbf{Z}$*-module libre. Alors le diagramme d'ensembles*

$$\begin{array}{ccc} [X, Y] & \longrightarrow & [X, Y_{\widehat{\mathbf{Z}}}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X, Y_{\mathbf{Q}}] & \longrightarrow & [X, Y_{\mathbf{A}}] \end{array}$$

*est cartésien.*

*Démonstration.* — Elle découle des deux points suivants :

— Le « carré arithmétique »

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y_{\hat{\mathbf{Z}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & Y_{\mathbf{A}} \end{array}$$

est homotopiquement cartésien ([BK], VI, 8.1).

— D'après le scholie 6.3, chaque composante connexe de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(X, Y_{\mathbf{A}})$ a le type d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{A}, 2n)$, avec $n \geqslant 1$, et est donc en particulier simplement connexe. □

*Lemme* **6.5.** — *Soit* Y *un espace pointé. Si :*

— Y *est simplement connexe,*

— $H_n(Y; \mathbf{Z})$ *est nul pour n impair et un* **Z***-module libre de dimension finie pour n pair, alors l'espace* $R_{MU}Y$ *vérifie aussi ces deux propriétés et en outre :*

— $H^*(R_{MU}Y; \mathbf{Q})$ *est une algèbre de polynômes.*

*Démonstration.* — Pour la première partie du lemme, appliquer la proposition 5.4. Pour la seconde, observer par exemple que $R_{MU}Y$ est un espace de lacets. □

*Lemme* **6.6.** — *Soit* Y *un espace pointé vérifiant les hypothèses de la proposition* 6.1. *Alors pour tout espace* X *:*

(a) *le diagramme d'ensembles*

$$[X, Y_{\mathbf{Q}}] \to [X, (R_{MU}Y)_{\mathbf{Q}}] \rightrightarrows [X, (R_{MU}R_{MU}Y)_{\mathbf{Q}}]$$

*est égalisateur;*

(b) *l'application* $[X, Y_{\mathbf{A}}] \to [X, (R_{MU}Y)_{\mathbf{A}}]$ *est injective.*

*Démonstration du point (a).* — Soit $\mathscr{K}_{\mathbf{Q}}$ la catégorie des **Q**-coalgèbres graduées cocommutatives. L'application naturelle

$$[X, Y_{\mathbf{Q}}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{\mathbf{Q}}}(H_*(X; \mathbf{Q}), H_*(Y; \mathbf{Q}))$$

est une bijection (voir Scholie 6.3) et il en est de même si l'on remplace Y par $R_{MU}Y$ et $R_{MU}R_{MU}Y$ (voir Lemme 6.5). On conclut en observant que la proposition 5.2 et la variante *ad hoc* du lemme 4.3 impliquent que le diagramme

$$H_*(Y; \mathbf{Q}) \to H_*(R_{MU}Y; \mathbf{Q}) \rightrightarrows H_*(R_{MU}R_{MU}Y; \mathbf{Q})$$

est coégalisateur dans la catégorie $\mathscr{K}_{\mathbf{Q}}$. □

*Démonstration du point (b).* — On considère à nouveau l'application $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{K}(\mathrm{L}_*)$ du lemme 6.2. Puisque l'homomorphisme $\mathrm{H}^*(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y};\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Z})$ est surjectif (c'est une conséquence de la proposition 5.1), il existe une application $v : \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y} \to \mathrm{K}(\mathrm{L}_*)$ qui fait commuter (à homotopie près) le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[rr] \arrow[dr, "u"'] & & \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathrm{K}(L_*) & \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $(-)_{\mathbf{A}}$ à ce diagramme, on constate que $\mathrm{Y}_{\mathbf{A}}$ est rétracte (à homotopie près) de $(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y})_{\mathbf{A}}$. □

*Remarque.* — Il est probable que la version « adélique » du point (a) est satisfaite; cependant le point (b) suffit pour démontrer la proposition 6.1.

*Fin de la démonstration de la proposition* 6.1. — On pose $\mathrm{Y}^{-1} = \mathrm{Y}$, $\mathrm{Y}^0 = \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$ et $\mathrm{Y}^1 = \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$.

D'après les lemmes 6.4 et 6.5 les diagrammes d'ensembles

$$\begin{tikzcd} {[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^i]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^i_{\hat{\mathbf{Z}}}]} \arrow[d] \\ {[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^i_{\mathbf{Q}}]} \arrow[r] & {[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^i_{\mathbf{A}}]} \end{tikzcd}$$

sont cartésiens pour $i = -1, 0, 1$.

D'après la proposition 5.5 et le point (a) du lemme 6.6 les diagrammes d'ensembles

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{-1}_{\hat{\mathbf{Z}}}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{0}_{\hat{\mathbf{Z}}}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{1}_{\hat{\mathbf{Z}}}]$$

et

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{-1}_{\mathbf{Q}}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{0}_{\mathbf{Q}}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{1}_{\mathbf{Q}}]$$

sont égalisateurs et d'après le point (b) du lemme 6.6 la flèche de gauche du diagramme d'ensembles

$$[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{-1}_{\mathbf{A}}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{0}_{\mathbf{A}}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{Y}^{1}_{\mathbf{A}}]$$

est injective.

La proposition 6.1 résulte donc d'une « interversion des limites ». □

Comme nous l'avons déjà dit, on achève la démonstration du théorème 0.3 en identifiant l'égalisateur de la double flèche $[\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}]$. Mais avant d'effectuer cette identification, on montre comment la proposition 6.1 implique immédiatement le théorème 0.4.

*Démonstration du théorème* 0.4. — Le cas où Y est vide est trivial; on peut donc supposer que Y est pointé. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} [BT, Y] & \longrightarrow & [BT, R_{MU}Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [BT, Y_{\mathbf{Q}}] & \longrightarrow & [BT, (R_{MU}Y)_{\mathbf{Q}}]. \end{array}$$

Il faut montrer que la flèche verticale de gauche est injective. Puisque la flèche horizontale du haut est injective il suffit de montrer que la flèche verticale de droite l'est aussi. Ceci résulte de la proposition 5.4. □

*Remarque.* — On observera que la démonstration ci-dessus fournit un exemple d'application de la proposition 4.5.

On revient maintenant à l'identification de l'égalisateur de la double flèche

$$[BT, R_{MU}Y] \rightrightarrows [BT, R_{MU}R_{MU}Y].$$

Nous commençons par décrire cet égalisateur en termes de MU-homologie; pour cela nous faisons référence à [BCM].

Soient X et Y deux espaces, avec Y pointé; nous notons F(X, Y) l'égalisateur de la double flèche $[X, R_{MU}Y] \rightrightarrows [X, R_{MU}R_{MU}Y]$.

Nous notons $\mathscr{K}_{MU}$ la catégorie des $MU_*MU$-coalgèbres (counitaires) instables, version « non pointée » de la catégorie introduite par Bendersky, Curtis et Miller (la MU-homologie d'un espace dont l'homologie entière est en chaque degré un **Z**-module libre est l'exemple type d'un objet de $\mathscr{K}_{MU}$).

Précisons un peu. Notons $\mathscr{E}_{MU}$ la catégorie dont les objets sont les $MU_*$-modules **N**-gradués libres et dont les morphismes sont les applications $MU_*$-linéaires de degré zéro. La catégorie $\mathscr{K}_{MU}$ est la catégorie des G-coalgèbres de $\mathscr{E}_{MU}$ pour une certaine comonade $G : \mathscr{E}_{MU} \to \mathscr{E}_{MU}$ vérifiant $G(MU_*Y) = MU_*(R^{nr}_{MU}Y)$.

Compte tenu de la définition de $\mathscr{K}_{MU}$, l'énoncé suivant est presque tautologique :

*Proposition* **6.7.** — *Soient* X *et* Y *deux espaces, avec* Y *pointé, dont l'homologie entière est en chaque degré un* **Z**-*module libre. Alors l'ensemble* F(X, Y) *est naturellement en bijection avec l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$.

*Démonstration.* — L'ensemble $[X, R_{MU}Y]$ est naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{MU}}(MU_*X, \widetilde{MU_*Y})$ (voir par exemple [Ad1], Part III, Proposition 13.5), donc avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{MU(G)}}(MU_*X, G(\widetilde{MU_*Y}))$ et on vérifie que $MU_*Y$ est égalisateur dans $\mathscr{E}_{MU}(G)$ du diagramme $G(\widetilde{MU_*Y}) \rightrightarrows G(\widetilde{MU_*R_{MU}Y})$. □

La proposition 6.1 peut donc être reformulée de la façon suivante (observer que l'espace Y n'a plus besoin d'être pointé!) :

*Proposition* **6.8.** — *Soit* T *un tore. Soit* Y *un espace simplement connexe vérifiant :*

— $H_n(Y; \mathbf{Z})$ *est nul pour n impair et un* **Z***-module libre de dimension finie pour n pair;*

— $H^*(Y; \mathbf{Q})$ *est une algèbre de polynômes.*

*Alors l'application naturelle*

$$[BT, Y] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*BT, MU_*Y)$$

*est bijective.*

Nous allons montrer ci-après que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*BT, MU_*Y)$ est naturellement en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(Y), K(BT))$, $\mathscr{L}$ désignant la catégorie des $\lambda$-anneaux.

Soient à nouveau X et Y deux espaces dont l'homologie entière est en chaque degré un **Z**-module libre.

Il ressort de [BCM] (Remarque 7.3) que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ formé des morphismes préservant MU-opérations, coproduit et counité.

Nous notons $\mathscr{M}_{MU}$ la catégorie des $MU_*MU$-comodules (stables). Le **Z**-module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ est donc dans le cas présent le sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ formé des morphismes préservant les MU-opérations.

Soyons plus concret (on ne peut pas dire que l'introduction d'une terminologie et d'une notation ait fait avancer notre compréhension de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$!). Soit $\iota_{MU} : H_*(-; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} MU_*(-)$ la transformation naturelle injective avatar de la transformation naturelle $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \pi_*(S \wedge (-)_+) \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \pi_*(MU \wedge (-)_+)$ induite par l'unité de MU; alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ est le sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ formé des morphismes $\alpha$ qui vérifient :

$(1_{MU})$ le morphisme $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \alpha : \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} MU_*X \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} MU_*Y$ préserve l'image de $\iota_{MU}$; en clair

$$(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \alpha)(\iota_{MU}(H_*(X; \mathbf{Q}))) \subset \iota_{MU}(H_*(Y; \mathbf{Q})),$$

et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}_*\mathrm{X}, \mathrm{MU}_*\mathrm{Y})$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}_*\mathrm{X}, \mathrm{MU}_*\mathrm{Y})$ formé des morphismes $\alpha$ qui vérifient en outre

($2_{\mathrm{MU}}$) le morphisme $\mathrm{H}_*(\mathrm{X};\mathbf{Q}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{Y};\mathbf{Q})$, induit par la restriction de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\alpha$, préserve le coproduit et la counité.

Nous expliquons maintenant comment le théorème de Stong-Hattori (voir ci-après) permet de décrire $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{MU}_*\mathrm{X}, \mathrm{MU}_*\mathrm{Y})$ en termes de K-homologie, K désignant le spectre de la K-théorie complexe.

Nous notons $\mathscr{M}_{\mathrm{K}}$ la catégorie des $\mathrm{K}_*\mathrm{K}$-comodules (stables). L'application $\mathrm{MU} \to \mathrm{K}$, fournie par la classe de Thom, en K-théorie, de MU, induit un foncteur $\mathscr{M}_{\mathrm{MU}} \to \mathscr{M}_{\mathrm{K}}$, $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{MU}_*} \mathrm{M}$; on considère la transformation naturelle

$$\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{\mathrm{K}}}(\mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{MU}_*} \mathrm{M}, \mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{MU}_*} \mathrm{N}).$$

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application de spectres; on observera que d'après Conner et Floyd [CF] le morphisme $\nu_{\mathrm{MU}_*\mathrm{X},\mathrm{MU}_*\mathrm{Y}}(\mathrm{MU}_*f)$ s'identifie à $\mathrm{K}_*f$ (on notera également que cette observation n'est pas très subtile quand X et Y sont des « espaces » dont l'homologie entière est en chaque degré un **Z**-module libre).

*Proposition* **6.9.** — *Soient* M *et* N *deux* $\mathrm{MU}_*\mathrm{MU}$*-comodules; on suppose que* M *et* N *sont libres comme* $\mathrm{MU}_*$*-modules gradués et que* M *est borné inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe un entier* $n_0$ *tel que* M *est nul en degré strictement inférieur à* $n_0$. *Alors l'application naturelle*

$$\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{\mathrm{MU}}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{\mathrm{K}}}(\mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{MU}_*} \mathrm{M}, \mathrm{K}_* \otimes_{\mathrm{MU}_*} \mathrm{N})$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Le théorème de Stong-Hattori, reformulé par J. F. Adams (voir [Ad1], Part II, Theorem 14.1, ou [Sw], Theorem 20.34), affirme que $\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ est un isomorphisme pour $\mathrm{M} = \Sigma^n\mathrm{MU}_*$ et $\mathrm{N} = \mathrm{MU}_*\mathrm{MU}$. Le cas général en résulte par des arguments standards que l'on développe ci-après.

Soient M un $\mathrm{MU}_*\mathrm{MU}$-comodule et $(\mathrm{N}_\lambda)$ une famille de tels objets. Si M est de type fini comme $\mathrm{MU}_*$-module gradué et si $\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}_\lambda}$ est un isomorphisme pour tout $\lambda$ alors $\nu_{\mathrm{M},\bigoplus_\lambda \mathrm{N}_\lambda}$ est aussi un isomorphisme. En particulier $\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ est un isomorphisme si M est une suspension de $\mathrm{MU}_*$ et si N est « colibre », c'est-à-dire isomorphe à une somme directe de suspensions de $\mathrm{MU}_*\mathrm{MU}$.

Soit N un $\mathrm{MU}_*\mathrm{MU}$-comodule qui est libre comme $\mathrm{MU}_*$-module gradué. Alors il existe une suite exacte $0 \to \mathrm{N} \xrightarrow{\eta} \mathrm{N}^0 \xrightarrow{d} \mathrm{N}^1$ dans $\mathscr{M}_{\mathrm{MU}}$, avec $\mathrm{N}^0$ et $\mathrm{N}^1$ colibres, qui est « scindée » comme suite exacte de $\mathrm{MU}_*$-modules gradués, c'est-à-dire qu'il existe des applications $\mathrm{MU}_*$-linéaires de degré zéro $s^0 : \mathrm{N}^0 \to \mathrm{N}$ et $s^1 : \mathrm{N}^1 \to \mathrm{N}^0$ telles que l'on a $s^0 \circ \eta = 1_{\mathrm{N}}$ et $\eta \circ s^0 + s^1 \circ d = 1_{\mathrm{N}^0}$. Ce « scindage » fait que la suite

$0 \to K_* \otimes_{MU_*} N \to K_* \otimes_{MU_*} N^0 \to K_* \otimes_{MU_*} N^1$ est encore exacte dans $\mathscr{M}_K$. On en déduit qu'il suffit de vérifier la proposition 6.9 dans le cas où N est colibre.

Soit M un $MU_*MU$-comodule qui est libre comme $MU_*$-module gradué et qui est nul en degré strictement inférieur à un certain entier $n_0$. Alors il existe une filtration croissante de M par des sous-$MU_*MU$-comodules $Sk_nM$, $n \in \mathbf{Z}$, (qu'il faut voir comme une filtration « squelettale ») telle que

— $Sk_nM$ est nul pour $n < n_0$,

— $Sk_nM$ est égal à M en degré inférieur ou égal à $n$,

— pour tout $n$, le quotient $Sk_nM/Sk_{n-1}M$ est isomorphe à une somme directe de copies de $\Sigma^n MU_*$.

Soit maintenant N un $MU_*MU$-comodule colibre. On montre que $\nu_{Sk_nM,\, N}$ est un isomorphisme par récurrence sur $n$ en utilisant le fait que l'on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}_{MU}}(L, N) = 0$ si L est libre comme $MU_*$-module gradué et on en déduit que $\nu_{M,N}$ est un isomorphisme par passage à la limite en $n$. $\square$

*Remarque.* — Le théorème 8.2 de [Nov] est essentiellement équivalent au cas $N = MU_*MU$ de la proposition 6.9 ci-dessus; notre méthode de démonstration est la même que celle employée par Novikov.

*Scholie* **6.10.** — *Soient* X *et* Y *deux espaces dont l'homologie entière est en chaque degré un* **Z**-*module libre. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_K}(K_*X, K_*Y)$$

*est un isomorphisme.*

Soit $\iota_K : H_*(-; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} K_*(-)$ la transformation naturelle injective induite par l'unité de K. Comme précédemment, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}_K}(K_*X, K_*Y)$ est le **Z**-module formé des applications $K_*$-linéaires de degré zéro $\beta : K_*X \to K_*Y$ qui vérifient

($1_K$) l'application $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \beta : \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} K_*X \to \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} K_*Y$ préserve l'image de $\iota_K$, en clair

$$(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \beta)(\iota_K(H_*(X; \mathbf{Q}))) \subset \iota_K(H_*(Y; \mathbf{Q})).$$

Puisque le diagramme de transformations naturelles

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} MU_*(-) \arrow[d] \\ H_*(-; \mathbf{Q}) \arrow[ur, "\iota_{MU}"] \arrow[r, "\iota_K"'] & \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} K_*(-) \end{tikzcd}$$

est commutatif, on constate que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ s'identifie à l'ensemble des applications $K_*$-linéaires de degré zéro $\beta : K_*X \to K_*Y$ qui en plus de ($1_K$) vérifient

($2_K$) l'application $H_*(X;\mathbf{Q}) \to H_*(Y;\mathbf{Q})$ induite par la restriction de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\beta$ préserve le coproduit et la counité.

C'est maintenant le moment opportun pour rappeler que l'injection $\iota_K$ induit un isomorphisme naturel de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_*$-coalgèbres graduées

$$(\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_*)\otimes_{\mathbf{Q}} H_*(-;\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_*(-)$$

donc un isomorphisme de $\mathbf{Q}$-coalgèbres $\oplus_n H_{2n}(-;\mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_0(-)$ et en particulier une graduation de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} K_0(-)$.

Supposons que l'homologie entière de X et Y est nulle en degré impair; alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ s'identifie encore à l'ensemble des applications $\mathbf{Z}$-linéaires $\gamma : K_0X \to K_0Y$ qui vérifient

($1_{K_0}$) l'application $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}}\gamma$ préserve la graduation;
($2_{K_0}$) l'application $\gamma$ préserve le coproduit et la counité.

On considère enfin la K-théorie complexe des espaces $K(-) = K^0(-)$. On a pour tout espace X dont l'homologie entière est en chaque degré un $\mathbf{Z}$-module libre un isomorphisme canonique $K(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(K_0X, \mathbf{Z})$. Si l'on suppose en outre que l'homologie entière de X est de dimension finie en chaque degré, alors on a aussi l'isomorphisme $K_0(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(K(X), \mathbf{Z})$ (l'application canonique d'un $\mathbf{Z}$-module libre de base dénombrable dans son bidual est un isomorphisme! : voir par exemple [Bo], chap. VII, §3, exc. 9). Les opérations $\psi^k$ d'Adams définies sur K(X) sont en particulier duales d'opérations $\psi_k$ définies sur $K_0(X)$ et on vérifie facilement que la condition ($1_{K_0}$) est équivalente à la condition

($1'_{K_0}$) l'application $\gamma$ commute aux opérations $\psi_k$.

On voit donc, au bout du compte, que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y)$ s'identifie à l'ensemble des applications $\mathbf{Z}$-linéaires de K(Y) dans K(X) qui

($1_{K^0}$) commutent aux opérations d'Adams,
($2_{K^0}$) préservent le produit et l'unité.

La structure de $\lambda$-anneau de la K-théorie des espaces permet d'unifier ces deux conditions (on utilise le fait que K(X) est sans torsion) :

*Proposition* **6.11.** — *Soient* X *et* Y *deux espaces dont l'homologie entière est nulle en degré impair et est un* $\mathbf{Z}$*-module libre de dimension finie en chaque degré pair. Alors l'application naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}_{MU}}(MU_*X, MU_*Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(Y), K(X)),$$

$\mathscr{L}$ *désignant la catégorie des* $\lambda$*-anneaux, est bijective.*

Les propositions 6.8 et 6.11 impliquent bien le théorème 0.3.

Exemples d'application des théorèmes 0.3 et 0.4

Voici une première illustration du théorème 0.4. On prend $T = S^1$ et $Y = \Omega S^3$. Dans ce cas les deux $\mathbf{Q}$-algèbres graduées $H^*(Y;\mathbf{Q})$ et $H^*(BT;\mathbf{Q})$ sont isomorphes; cependant le théorème 0.4 montre que toute application de $BS^1$ dans $\Omega S^3$ est homotopiquement triviale, car tout homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres graduées $H^*(\Omega S^3;\mathbf{Z}) \to H^*(BS^1;\mathbf{Z})$ est trivial.

Nous donnons maintenant un exemple un peu plus substantiel d'application du théorème 0.4.

Soient T un tore et G un groupe de Lie compact. Notbohm montre dans [Not] que l'application naturelle

$$\mathrm{Rep}(T, G) \to [BT, BG]$$

est une bijection. On rappelle que la notation $\mathrm{Rep}(T, G)$ désigne l'ensemble des représentations de T dans G, c'est-à-dire le quotient de l'ensemble $\mathrm{Hom}(T, G)$ des homomorphismes de T dans G par l'action par conjugaison de G.

Nous allons expliquer comment on peut retrouver ce résultat, dans le cas où G est connexe et a une homologie entière sans torsion, comme conséquence du théorème 0.4 (dont les hypothèses sont alors vérifiées par BG) et des résultats de [AM].

On note $r : \mathrm{Rep}(T, G) \to [BT, BG]$ l'application naturelle évoquée ci-dessus; on note $h : [BT, BG] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^{\mathbf{Q}}}(H^*(BG;\mathbf{Q}), H^*(BT, \mathbf{Q}))$ l'application $f \mapsto H^*(f;\mathbf{Q})$, $\mathscr{K}^{\mathbf{Q}}$ désignant la catégorie des $\mathbf{Q}$-algèbres graduées commutatives.

Le théorème 1.1 de [AM] nous dit que les applications $h$ et $h \circ r$ ont même image.

Le théorème 1.7 de [AM] entraîne que l'application $h \circ r$ est injective. En effet, on sait que l'application canonique $\mathrm{Hom}(T, T_G) \to \mathrm{Rep}(T, G)$, $T_G$ désignant « le » tore maximal de G, est surjective et que l'application induite $W_G\backslash\mathrm{Hom}(T, T_G) \to \mathrm{Rep}(T, G)$ est bijective, $W_G\backslash\mathrm{Hom}(T, T_G)$ désignant le quotient de l'action évidente du groupe de Weyl $W_G$ de G sur l'ensemble $\mathrm{Hom}(T, T_G)$.

Comme le théorème 0.4 nous dit que $h$ est injective, ce qui précède entraîne que $r$ est bien bijective.

Nous nous proposons maintenant d'illustrer le théorème 0.3.

On considère à nouveau l'ensemble $[BT, BG]$, G étant un groupe de Lie compact connexe dont l'homologie entière est sans torsion. On note

$$k : [BT, BG] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(BG), K(BT))$$

l'application naturelle. Pour se convaincre de ce que l'application $r : \mathrm{Rep}(T, G) \to [BT, BG]$ est une bijection, il suffit, d'après le théorème 0.3, de vérifier que l'application composée $k \circ r$ en est une.

Il est possible de montrer que $k \circ r$ est une bijection, en fait pour tout groupe de Lie compact connexe G, à l'aide des références [AM], [Wilk] et [NS]. Nous nous limitons ci-dessous au cas $G = U(n)$ et nous expliquons comment l'un des principaux résultats de [Ad2] permet alors de montrer que $k \circ r$ est une bijection.

On note $R(G)$ l'anneau des représentations unitaires (virtuelles) d'un groupe de Lie compact $G$ et $\alpha_G : R(G) \to K(BG)$ l'homomorphisme de $\lambda$-anneaux canonique. On rappelle que M. F. Atiyah et G. B. Segal ont montré que $\alpha_G$ induit un isomorphisme de $\lambda$-anneaux $\widehat{R(G)} \cong K(BG)$, $\widehat{R(G)}$ désignant le complété de $R(G)$ par rapport aux puissances de l'idéal d'augmentation [AS]. Le lemme ci-dessous est un sous-produit du théorème d'Atiyah-Segal :

*Lemme* **6.12.** — *Soit* G *un groupe de Lie compact. Alors l'application*

$$\alpha_G{}^\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(BG), K(BT)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(R(G), K(BT)),$$

*induite par* $\alpha_G$, *est une bijection.*

*Démonstration.* — Tout homomorphisme de $\lambda$-anneaux de $R(G)$ dans $K(BT)$ préserve automatiquement l'augmentation parce l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(R(G), \mathbf{Z})$ ne contient qu'un élément. Cette observation et le théorème d'Atiyah-Segal permettent d'exhiber un inverse à $\alpha_G{}^\sharp$. □

On prend maintenant $G = U(n)$. La description classique de $R(U(n))$ (voir par exemple [Ad3], Theorem 7.3) peut être présentée de la façon suivante :

Soient $\iota$ l'élément de $R(U(n))$ correspondant à l'identité de $U(n)$ et L un $\lambda$-anneau arbitraire, alors l'application $f \mapsto f(\iota)$ induit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(R(U(n)), L)$ sur le sous-ensemble de L, disons $S_n(L)$, formé des éléments $x$ vérifiant

— $\lambda^k x$ est nul pour $k > n$,
— $\lambda^n x$ est inversible.

On note $e_L$ cette bijection.

Or le théorème 1.14 de [Ad3] implique que l'application canonique, disons $c$, de $\mathrm{Rep}(T, U(n))$ dans $S_n(K(BT))$, induite par $\alpha_T$, est surjective; comme $\alpha_T$ est injective il en est de même pour $c$. On se convainc alors de ce que $k \circ r$ est bijective en vérifiant que $c$ coïncide avec la composée $e_{K(BT)} \circ \alpha_{U(n)}{}^\sharp \circ k \circ r$.

Commentaires

Notbohm et Smith montrent dans [NS] que l'application

$$[(BT)\widehat{{}_p}, (BG)\widehat{{}_p}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(K(BG; \mathbf{Z}_p), K(BT; \mathbf{Z}_p))$$

est bijective pour tout groupe de Lie compact connexe G. Nous aurions pu énoncer une version « $p$-complétée » de la proposition 6.8 (voir par exemple [De, Corollaire 2.3.3]) et du théorème de Stong-Hattori et ainsi retrouver leur résultat lorsque BG a une homologie entière sans torsion.

Soit G un groupe de Lie compact. L'isomorphisme

$$\mathrm{Rep}(\mathrm{T}, \mathrm{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(\mathrm{K}(\mathrm{BG}), \mathrm{K}(\mathrm{BT}))$$

évoqué dans l'exemple d'application du théorème 0.3 (l'hypothèse, « $G$ connexe » que nous avions alors faite est probablement inutile) est à comparer avec l'isomorphisme

$$\mathrm{Rep}(\mathrm{V}, \mathrm{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(\mathrm{H}^*\mathrm{BG}, \mathrm{H}^*\mathrm{BV}),$$

V désignant un $p$-groupe abélien élémentaire, que l'on obtient en utilisant la $\mathscr{K}$-injectivité de la cohomologie modulo $p$ de BV [La1] [La2]. Le résultat de Wilkerson concernant $\mathrm{K}(\mathrm{BT}; \mathbf{Z}_p)$ [Wilk] utilisé dans [NS] est le pendant de cette injectivité. Ceci justifie un peu la conjecture esquissée à la fin de l'introduction.

## 7. Remplacement de l'hypothèse « cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair » par l'hypothèse « cohomologie entière $p$-adique sans torsion »

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'on peut remplacer, dans les énoncés des paragraphes 3, 4 et 5, l'hypothèse « cohomologie modulo $p$ nulle en degré impair » par l'hypothèse « cohomologie entière $p$-adique sans torsion ».

Nous commençons par expliciter ce qu'est l'analogue de cette condition dans le contexte des pro-espaces.

### La notion de pro-espace sans $p$-torsion

*Proposition-Définition* **7.1.** — *Soit* Y *un espace. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout entier* $v \geqslant 2$, *l'homomorphisme* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p^v) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p)$, *induit par la réduction modulo p, est surjectif.*

(ii) *La cohomologie* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}_p)$ *est sans torsion.*

(iii) *La p-torsion de l'homologie* $\mathrm{H}_*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z})$ *est p-divisible.*

*Si ces conditions sont vérifiées nous dirons que l'espace* Y *est sans p-torsion.*

*Définition* **7.2.** — *Soit* $\mathrm{Y}(-)$ *un pro-espace. Nous dirons que* $\mathrm{Y}(-)$ *est sans p-torsion si la condition suivante est vérifiée :*

*Pour tout entier* $v \geqslant 2$, *l'homomorphisme* $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{Y}(-); \mathbf{Z}/p^v) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{Y}(-); \mathbf{Z}/p)$, *induit par la réduction modulo p, est surjectif.*

Soit Y un espace; le lecteur observera que nous avons fait en sorte que les deux conditions suivantes soient équivalentes :

— Y est sans $p$-torsion;

— son pro-$p$-complété $\widehat{\mathrm{Y}}(-)$ est sans $p$-torsion.

Les deux propositions suivantes, qui nous seront utiles par la suite, sont conséquences immédiates de la définition 7.2 :

*Proposition* **7.3.** — *Soit* $f : \mathrm{Y}(-) \to \mathrm{Y}'(-)$ *un morphisme de pro-espaces tel que l'application* $f^* : \mathrm{H}^*_c(\mathrm{Y}'(-); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_c(\mathrm{Y}(-); \mathbf{Z}/p)$ *est surjective. Si le pro-espace* $\mathrm{Y}'(-)$ *est sans* $p$*-torsion alors il en est de même du pro-espace* $\mathrm{Y}(-)$.

*Proposition* **7.4.** — *Soient* $\mathrm{Y}(-)$ *et* $\mathrm{Y}'(-)$ *deux pro-espaces; on suppose que le* $\mathbf{Z}/p$*-espace vectoriel gradué* $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}(i); \mathbf{Z}/p)$ *est de dimension finie en chaque degré pour tout objet* $i$ *de* $\mathscr{I}_{\mathrm{Y}(-)}$. *Si les pro-espaces* $\mathrm{Y}(-)$ *et* $\mathrm{Y}'(-)$ *sont sans* $p$*-torsion alors il en est de même du pro-espace* $\mathrm{Y}(-) \times \mathrm{Y}'(-)$.

Nous continuons à dégager les énoncés (7.3 et 7.4 ci-dessus, 7.5 à 7.12 ci-dessous), *ad hoc* pour la plupart, qui nous permettront d'étendre aux (pro-)espaces sans $p$-torsion les résultats des paragraphes 3, 4 et 5.

ESPACES SANS $p$-TORSION ET ESPACES DONT LA COHOMOLOGIE MODULO $p$ EST NULLE EN DEGRÉ IMPAIR

La proposition suivante jouera un rôle important :

*Proposition* **7.5.** — *Soit* Y *un espace sans* $p$*-torsion. Alors il existe un espace* W *dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair et une application* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{W}$ *tels que l'application* $f^* : \mathrm{H}^*(\mathrm{W}; \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Z}/p)$ *est surjective en degré pair.*

*Démonstration.* — Le cas général sera traité en appendice. Nous nous limitons ici au cas particulier où l'on suppose que l'homologie entière de Y est en chaque degré un $\mathbf{Z}$-module libre. La proposition 7.5 est alors un corollaire de la proposition 5.4 (dont on utilise les notations ci-après) appliquée à l'espace pointé $\mathrm{Y}_+$ (cette notation désigne la réunion disjointe de Y et d'un point base), et des résultats de Wilson évoqués lors de sa démonstration : il suffit de prendre pour W l'espace $\prod_{n \text{ pair}} \mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$ et pour $f$ l'application composée de l'application naturelle $\mathrm{Y} \to \mathrm{R}^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y} = \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}(\mathrm{Y}_+)$, de l'équivalence d'homotopie $\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}(\mathrm{Y}_+) \simeq \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$ du point (c) de 5.4, et de la projection $\prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)} \to \prod_{n \text{ pair}} \mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$. □

*Corollaire* **7.6.** — *Soit* Y *un espace sans* $p$*-torsion. Alors il existe deux espaces* W *et* W′ *dont la cohomologie modulo* $p$ *est nulle en degré impair et deux applications* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{W}$ *et* $f' : \Sigma\mathrm{Y}_+ \to \mathrm{W}'$ *tels que l'application induite par* $f$ *et* $f'$, $\mathrm{H}^*(\Sigma\mathrm{W}_+; \mathbf{Z}/p) \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{W}'; \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*(\Sigma\mathrm{Y}_+; \mathbf{Z}/p)$, *est surjective.*

(La notation $\Sigma\mathrm{Y}_+$ désigne la suspension de l'espace pointé $\mathrm{Y}_+$.)

POINTS FIXES HOMOTOPIQUES D'UNE ACTION D'UN GROUPE CYCLIQUE D'ORDRE $p$ ET SUSPENSION

Soit $\sigma$ un groupe cyclique d'ordre $p$. Le fait que le foncteur $\mathrm{Fix}_\sigma$ (version linéaire) commute au foncteur suspension (algébrique; c'est une conséquence du corollaire 4.6.2.2 de [La2]) entraîne, *grosso modo*, que le foncteur « points fixes homotopiques » de $\sigma$ commute au foncteur suspension (topologique). La proposition 7.7 ci-dessous (et son corollaire 7.8) donne un sens à ce slogan.

Avant d'énoncer cette proposition, précisons quelques points (c'est le cas de le dire !).

Un pro-espace est pointé si le foncteur correspondant se factorise à travers la catégorie des espaces pointés. Un pro-$\sigma$-espace est pointé si l'action de $\sigma$ sur le pro-espace sous-jacent préserve le point base. La définition des morphismes de pro-espaces pointés et de pro-$\sigma$-espaces pointés n'est pas plus mystérieuse. La suspension $\Sigma \mathrm{X}(-)$ d'un pro-espace pointé ou d'un pro-$\sigma$-espace pointé $\mathrm{X}(-)$ est le foncteur $i \mapsto \Sigma \mathrm{X}(i)$. Soit $\mathrm{X}(-)$ un pro-$\sigma$-espace pointé; on observera que l'on dispose d'un morphisme naturel évident de pro-espaces pointés $\Sigma(\mathrm{X}(-)^{\mathrm{h}\sigma}) \to (\Sigma \mathrm{X}(-))^{\mathrm{h}\sigma}$.

*Proposition* **7.7.** — *Soient* $\mathrm{X}(-)$ *et* $\mathrm{X}'(-)$ *deux pro-$\sigma$-espaces pointés vérifiant la propriété* $(\mathscr{P}_1)$ *(introduite au paragraphe 2). Soit* $f : \Sigma \mathrm{X}(-) \to \mathrm{X}'(-)$ *un morphisme de pro-$\sigma$-espaces pointés; soit* $g : \Sigma(\mathrm{X}(-)^{\mathrm{h}\sigma}) \to \mathrm{X}'(-)^{\mathrm{h}\sigma}$ *le morphisme de pro-espaces pointés composé du morphisme naturel évident* $\Sigma(\mathrm{X}(-)^{\mathrm{h}\sigma}) \to (\Sigma \mathrm{X}(-))^{\mathrm{h}\sigma}$ *et du morphisme* $(\Sigma \mathrm{X}(-))^{\mathrm{h}\sigma} \to \mathrm{X}'(-)^{\mathrm{h}\sigma}$ *induit par $f$. Si l'application*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{X}'(-); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\Sigma \mathrm{X}(-); \mathbf{Z}/p)$$

*induite par $f$ est un isomorphisme alors il en est de même pour l'application*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{X}'(-)^{\mathrm{h}\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\Sigma(\mathrm{X}(-)^{\mathrm{h}\sigma}); \mathbf{Z}/p)$$

*induite par $g$.*

*Corollaire* **7.8.** — *Soit* $\mathrm{X}$ *un espace pointé muni d'une action de $\sigma$ préservant le point base. Alors le morphisme naturel de pro-espaces pointés*

$$\Sigma(\widehat{\mathrm{X}}(-)^{\mathrm{h}\sigma}) \to (\widehat{\Sigma \mathrm{X}}(-))^{\mathrm{h}\sigma}$$

*induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}((\widehat{\Sigma \mathrm{X}}(-))^{\mathrm{h}\sigma}; \mathbf{Z}/p) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\Sigma(\widehat{\mathrm{X}}(-)^{\mathrm{h}\sigma}); \mathbf{Z}/p).$$

La proposition 7.7 conduit aussi, par une récurrence semblable à celle de la démonstration du théorème 3.1, au corollaire suivant (on observera qu'il n'est pas ici nécessaire de supposer que le $p$-groupe fini $\pi$ est abélien) :

*Corollaire* **7.9.** — *Soit* $\pi$ *un* $p$*-groupe fini; soit* Y *un espace pointé. Alors le morphisme naturel de pro-espaces pointés*

$$\Sigma\mathbf{hom}(B\pi, \widehat{Y}(-)) \to \mathbf{hom}(B\pi, \widehat{\Sigma Y}(-))$$

*induit un isomorphisme*

$$H_c^*(\mathbf{hom}(B\pi, \widehat{\Sigma Y}(-)); \mathbf{Z}/p) \cong H_c^*(\Sigma\mathbf{hom}(B\pi, \widehat{Y}(-)); \mathbf{Z}/p).$$

SUITE SPECTRALE DE SERRE DE LA CONSTRUCTION DE BOREL D'UNE ACTION D'UN GROUPE CYCLIQUE D'ORDRE $p$ ET SUSPENSION

Soit $X(-)$ un pro-$\sigma$-espace. Pour abréger, nous désignons dans ce dernier paragraphe par SSS de $X(-)$ la suite spectrale colimite des suites spectrales de Serre, pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}/p$, des fibrations $X(i) \to X(i)_{h\sigma} \to B\sigma$; nous dirons simplement que cette SSS est triviale si elle dégénère au terme $E_2$.

*Proposition* **7.10.** — *Soit* $X(-)$ *un pro-*$\sigma$*-espace pointé. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La* SSS *de* $X(-)$ *est triviale.*

(ii) *La* SSS *de* $\Sigma X(-)$ *est triviale.*

Voici enfin les deux derniers énoncés que nous invoquerons :

*Proposition* **7.11.** — *Soit* $f : X(-) \to X'(-)$ *un morphisme de pro-*$\sigma$*-espaces tel que l'application* $f^* : H_c^*(X'(-); \mathbf{Z}/p) \to H_c^*(X(-); \mathbf{Z}/p)$ *est surjective. Si la* SSS *de* $X'(-)$ *est triviale alors il en est de même de la* SSS *de* $X(-)$ *et l'application* $H_c^*(X'(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to H_c^*(X(-)_{h\sigma}; \mathbf{Z}/p)$, *induite par* $f$, *est encore surjective.*

*Proposition* **7.12.** — *Soient* $f : X(-)$ *et* $X'(-)$ *deux pro-*$\sigma$*-espaces. Si les* SSS *de* $X'(-)$ *et* $X'(-)$ *sont triviales alors il en est de même de la* SSS *de* $X(-) \times X'(-)$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les variantes « sans $p$-torsion » des énoncés des paragraphes 3, 4 et 5.

*Théorème* **7.13.** (variante du théorème 3.10). — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif; soit* Y *un espace. Si l'espace* Y *est sans* $p$*-torsion alors il en est de même du pro-espace* $\mathbf{hom}(BC, \widehat{Y}(-))$.

Compte tenu du lemme 3.11, ce théorème découle du :

*Théorème* **7.14.** (variante du théorème 3.1). — *Soit* $\pi$ *un* $p$*-groupe abélien fini; soit* Y *un espace. Si l'espace* Y *est sans* $p$*-torsion alors il en est de même du pro-espace* $\mathbf{hom}(B\pi, \widehat{Y}(-))$.

Rappelons que le cas où $\pi$ est cyclique d'ordre $p$ de ce théorème est dû à Kuhn et Winstead [KW]; notre stratégie pour démontrer le théorème 7.14 est d'ailleurs assez proche de celle qu'ils utilisent dans ce cas particulier.

*Démonstration du théorème* 7.14. — On reprend les notations du corollaire 7.6. On note $\mathrm{P}(-)$ le pro-espace $\widehat{\Sigma\mathrm{W}_+}(-) \times \widehat{\mathrm{W}'}(-)$ et $g : \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-) \to \mathrm{P}(-)$ le morphisme de pro-espaces induit par $f$ et $f'$; on observe que le corollaire 7.6 nous dit que l'application $g^* : \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{P}(-); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-); \mathbf{Z}/p)$ est surjective.

La démonstration, toujours semblable à celle de 3.1, consiste essentiellement en une récurrence sur le cardinal de $\pi$. Les étapes sont détaillées ci-dessous.

Soit $\kappa$ un sous-groupe d'indice $p$ de $\pi$; on note $\sigma$ le quotient $\pi/\kappa$.

(1) On suppose que l'application

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\kappa, \mathrm{P}(-)); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\kappa, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-)); \mathbf{Z}/p)$$

induite par $g$ est surjective.

(2) D'après la proposition 2.1 et le théorème 3.1, les SSS des pro-$\sigma$-espaces $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\mathrm{W}}(-))$ et $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\mathrm{W}'}(-))$ sont triviales.

(3) D'après 7.10 la SSS de $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\Sigma\mathrm{W}_+}(-))$ est triviale.

(4) D'après 7.12 la SSS de $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \mathrm{P}(-))$ est triviale.

(5) D'après (1) et 7.11 la SSS de $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-))$ est triviale et l'application

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \mathrm{P}(-))_{\mathrm{h}\sigma}; \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-))_{\mathrm{h}\sigma}; \mathbf{Z}/p)$$

induite par $g$ est surjective.

(6) D'après le théorème 1.2.4 et l'exactitude à droite du foncteur $\mathrm{Fix}_\sigma$ (version linéaire) l'application

$$\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{P}(-)); \mathbf{Z}/p) \to \mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-)); \mathbf{Z}/p)$$

induite par $g$ est surjective. L'implication (1) $\Rightarrow$ (6) entraîne par récurrence que (6) est vérifiée pour tout $p$-groupe abélien $\pi$.

(7) D'après le théorème 3.1, $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\mathrm{W}}(-))$ et $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\mathrm{W}'}(-))$ sont sans $p$-torsion.

(8) D'après 7.9, $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\Sigma\mathrm{W}_+}(-))$ est sans $p$-torsion.

(9) D'après 7.4, $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \mathrm{P}(-))$ est sans $p$-torsion.

(10) D'après 7.3 et (6), $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-))$ est sans $p$-torsion.

(11) D'après 7.9, $\mathbf{hom}(\mathrm{B}\pi, \widehat{\mathrm{Y}}(-))$ est sans $p$-torsion, ce qui achève la démonstration du théorème 7.14. □

On a appris au cours de la démonstration précédente que la SSS du pro-$\sigma$-espace $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\Sigma\mathrm{Y}_+}(-))$ est triviale; on a donc, compte tenu de 7.10, le scholie suivant :

*Scholie* **7.15.** — *Soient* $\pi$ *un* $p$*-groupe abélien fini,* $\kappa$ *un sous-groupe d'indice* $p$ *de* $\pi$ *et* $\sigma$ *le quotient de* $\pi$ *par* $\kappa$*; soit* Y *un espace sans* $p$*-torsion. Alors la* SSS *du pro-*$\sigma$*-espace* $\mathbf{hom}(\mathrm{E}\pi/\kappa, \widehat{\mathrm{Y}}(-))$ *est triviale.*

Comme au paragraphe 4, ce scholie conduit à la proposition suivante :

*Proposition* **7.16.** (variante de la proposition 4.6). — *Soit* C *un groupe de Lie compact commutatif; soit* $\mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Y}^0 \rightrightarrows \mathrm{Y}^1$ *un diagramme dans la catégorie des espaces sans* $p$*-torsion. Si le diagramme induit dans la catégorie des* A*-algèbres instables*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}^0;\mathbf{Z}/p) \leftleftarrows \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}^1;\mathbf{Z}/p)$$

*est coégalisateur coaugmenté alors il en est de même pour le diagramme*

$$\mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{B}C, \widehat{\mathrm{Y}}(-));\mathbf{Z}/p) \leftarrow \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \widehat{\mathrm{Y}^0}(-));\mathbf{Z}/p)$$
$$\leftleftarrows \mathrm{H}^*_c(\mathbf{hom}(\mathrm{BC}, \widehat{\mathrm{Y}^1}(-));\mathbf{Z}/p).$$

*En particulier le diagramme (induit dans la catégorie des ensembles ou des ensembles profinis)*

$$[\mathrm{BC}, \widehat{\mathrm{Y}}] \rightarrow [\mathrm{BC}, \widehat{\mathrm{Y}^0}] \rightrightarrows [\mathrm{BC}, \widehat{\mathrm{Y}^1}]$$

*est égalisateur.*

Toujours comme au paragraphe 4, on en déduit la :

*Proposition* **7.17.** (variante de la proposition 5.5). — *Soient* C *un groupe de Lie compact commutatif et* Y *un espace pointé sans* $p$*-torsion. Alors le diagramme (d'ensembles ou d'ensembles profinis)*

$$[\mathrm{BC}, \mathrm{Y}\widehat{_p}] \rightarrow [\mathrm{BC}, (\mathrm{R_{MU}Y})\widehat{_p}] \rightrightarrows [\mathrm{BC}, (\mathrm{R_{MU}R_{MU}Y})\widehat{_p}]$$

*est égalisateur.*

Celà, dès que l'on dispose de la :

*Proposition* **7.18.** (variante de la proposition 5.3). — *Soit* Y *un espace pointé. Si l'espace* Y *est sans* $p$*-torsion alors il en est de même de l'espace* $\mathrm{R_{MU}Y}$.

Dans le cas particulier où l'on suppose que l'homologie entière de Y est en chaque degré un $\mathbf{Z}$-module libre, cette proposition est conséquence du point (d) de la proposition 5.4; le cas général sera traité en appendice.

On démontre maintenant le théorème 0.5 et la variante, dans l'esprit de ce paragraphe, du théorème 0.3. On suit fidèlement le paragraphe 6; la différence essentielle est que les composantes connexes de l'espace fonctionnel $\mathbf{hom}(\mathrm{BT}, \mathrm{Y}_{\mathbf{A}})$ ne sont plus simplement connexes et qu'apparaissent donc des « phénomènes fantomatiques » (voir les exemples à la fin de ce paragraphe). On calcule ci-dessous les classes d'homotopie d'applications de BT dans Y « aux fantômes près ».

Soit T un tore et Y un espace (fibrant). On note $[[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}]$ l'ensemble quotient de $[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}]$ obtenu en identifiant deux applications dont les restrictions à tout sous-complexe fini de BT sont homotopes; $[[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}]$ est donc aussi l'ensemble $\lim_n [\mathrm{Sk}_n \mathrm{BT}, \mathrm{Y}]$, $\mathrm{Sk}_n\mathrm{BT}$ désignant le $n$-squelette de BT, c'est-à-dire le sous-ensemble simplicial de BT engendré par les simplexes non dégénérés de dimension inférieure ou égale à $n$.

*Proposition* **7.19.** — *Soit* T *un tore et* Y *un espace pointé. On fait les hypothèses suivantes :*

— Y *est simplement connexe;*

— $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y}; \mathbf{Z})$ *est un* **Z**-*module libre de dimension finie pour tout n;*

— $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathbf{Q})$ *est libre comme* **Q**-*algèbre graduée (c'est-à-dire produit tensoriel d'une algèbre polynomiale en des générateurs de degré pair et d'une algèbre extérieure en des générateurs de degré impair).*

*Alors le diagramme d'ensembles*

$$[[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}] \to [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}] \rightrightarrows [\mathrm{BT}, \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}]$$

*est égalisateur.*

*Démonstration.* — On invoque, comme pour la proposition 6.1, un argument de carré arithmétique. Les lemmes 6.4 et 6.5 se transposent tels quels; par contre le lemme 6.3 doit être modifié (voir le point (a) ci-après). On utilise les points suivants :

(a) Si Y est un espace simplement connexe dont les groupes d'homotopie sont de type fini alors le diagramme d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} [[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}] & \longrightarrow & [[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}_{\hat{\mathbf{Z}}}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}_{\mathbf{Q}}] & \longrightarrow & [[\mathrm{BT}, \mathrm{Y}_{\mathbf{A}}] \end{array}$$

est un diagramme cartésien dans lequel la flèche horizontale du haut est injective.

(C'est une conséquence du lemme 8.1 de [BK, ch. VI].)

(b) L'application canonique $[\mathrm{BT}, \mathrm{Z}] \to [[\mathrm{BT}, \mathrm{Z}]$ est une bijection dans les cas suivants :

— $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}_{\hat{\mathbf{Z}}}$, pour tout espace Y;

— $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}_{\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{Y}_{\mathbf{A}}$, Y vérifiant les hypothèses de la proposition;

— $\mathrm{Z} = \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y}$, Y étant un espace dont l'homologie entière est en chaque degré un **Z**-module libre de dimension finie.

(On s'en convainc dans le deuxième cas en observant que l'on a $\lim_n^1 \mathrm{H}^q(\mathrm{Sk}_n\mathrm{BT};\Lambda) = 0$, pour $\Lambda = \mathbf{Q}$ et $\Lambda = \mathbf{A}$, et pour tout $q$; dans le troisième cas on observe que l'on a $\lim_n^1 \mathrm{MU}^q(\mathrm{Sk}_n\mathrm{BT}) = 0$ pour tout $q$.) □

La proposition 7.19 implique :

*Théorème* **7.20.** — *Soit* T *un tore. Soit* Y *un espace simplement connexe vérifiant :*

— $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z})$ *est un* $\mathbf{Z}$*-module libre de dimension finie pour tout* $n$*;*

— $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q})$ *est libre comme* $\mathbf{Q}$*-algèbre graduée.*

*Alors l'application naturelle*

$$[\,[\mathrm{BT},\mathrm{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{L}}(\mathrm{K}(\mathrm{Y}),\mathrm{K}(\mathrm{BT}))$$

*est bijective.*

L'application ci-dessus est encore injective si on supprime l'hypothèse concernant $\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q})$ :

*Théorème* **7.21.** (Théorème 0.5). — *Soit* T *un tore. Soit* Y *un espace simplement connexe dont l'homologie entière est libre et de dimension finie en chaque degré. Alors l'application naturelle*

$$[\,[\mathrm{BT},\mathrm{Y}] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^{\mathbf{Q}}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q}),\mathrm{H}^*(\mathrm{BT};\mathbf{Q}))$$

*est injective.*

*Démonstration.* On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
[\,[\mathrm{BT},\mathrm{Y}] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^{\mathbf{Q}}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q}),\mathrm{H}^*(\mathrm{BT};\mathbf{Q})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_p [\mathrm{BT},\mathrm{Y}\widehat{_p}] & \longrightarrow & \prod_p \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^{\mathbf{Q}_p}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{Y};\mathbf{Q}_p),\mathrm{H}^*(\mathrm{BT};\mathbf{Q}_p)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\prod_p [\mathrm{BT},(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y})\widehat{_p}] & \longrightarrow & \prod_p \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^{\mathbf{Q}_p}}(\mathrm{H}^*(\mathrm{R}_{\mathrm{MU}}\mathrm{Y};\mathbf{Q}_p),\mathrm{H}^*(\mathrm{BT};\mathbf{Q}_p))
\end{array}$$

dans lequel la notation $\mathscr{K}^{\mathbf{Q}_p}$ désigne la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-algèbres graduées. On conclut en observant que les applications verticales de gauche et l'application horizontale du bas sont injectives. □

EXEMPLES D'APPLICATION DES THÉORÈMES 7.20 ET 7.21

On peut illustrer ces théorèmes en faisant respectivement $Y = S^3$ et $Y = S^2$; on obtient dans les deux cas que l'ensemble [[BT, Y] est trivial.

(Bien sûr le résultat ci-dessus est aussi une conséquence directe de la solution par H. R. Miller de la conjecture de Sullivan [Mi]. D'autre part en menant jusqu'à son terme l'argument de carré arithmétique on obtient $[BT, S^3] \cong H^2(BT; \mathbf{A}/\mathbf{Q})$; enfin il est clair que la fibration de Hopf induit une bijection $[BT, S^3] \cong [BT, S^2]$.)

## Appendice

DÉMONSTRATION DES PROPOSITIONS 5.3, 7.5 ET 7.18

On commence par rappeler ce qu'est une décomposition homologique d'un espace simplement connexe. Nos références sur le sujet sont [BC] et [Hi]; la théorie des décompositions homologiques est la version « duale » de la théorie de Postnikov. Vu l'usage que nous en ferons, il est probable qu'une version « stable » de cette théorie suffirait à notre bonheur.

Soient $\pi$ un groupe abélien et $n \geqslant 2$ un entier, la notation $M(\pi, n)$ désigne ci-après l'espace de Moore, pointé simplement connexe, caractérisé par

$$\widetilde{H}_q(M(\pi, n); \mathbf{Z}) = \begin{cases} \pi & \text{pour } q = n \\ 0 & \text{pour } q \neq n. \end{cases}$$

Soit X un espace pointé simplement connexe. La théorie évoquée ci-dessus nous dit que X a le type d'homotopie d'un espace pointé $X_\infty$ munie d'une filtration

$$X_2 \subset X_3 \subset X_4 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n \subset \ldots$$

telle que :

— $X_2$ est l'espace $M(H_2(X; \mathbf{Z}), 2)$;
— $X_n$, $n \geqslant 3$, est le cône d'une application $\phi_n : M(H_n(X; \mathbf{Z}), n-1) \to X_{n-1}$ avec $H_{n-1}(\phi_n; \mathbf{Z}) = 0$;
— $X_\infty$ est la réunion des $X_n$.

Ces propriétés impliquent également que :

— le quotient $X_n/X_{n-1}$, $n \geqslant 3$, est l'espace $M(H_n(X; \mathbf{Z}), n)$;
— l'on a

$$H_q(X_n; \mathbf{Z}) \cong \begin{cases} H_q(X_\infty; \mathbf{Z}) & \text{pour } q \leqslant n \\ 0 & \text{pour } q > n \end{cases}$$

(l'isomorphisme dans le cas $q \leqslant n$ étant induit par l'inclusion de $X_n$ dans $X_\infty$).

La donnée d'une équivalence d'homotopie pointée de X sur un espace pointé $X_\infty$ munie de la structure décrite ci-dessus est appelée une décomposition homologique de X; abusivement, nous appellerons encore ainsi la donnée $\{X_n; \phi_n\}$.

Ces rappels étant faits, on s'attaque à la démonstration des propositions 5.3, 7.5 et 7.18.

Soit E un spectre-anneau unitaire. Soient X un espace pointé simplement connexe et $\{X_n; \phi_n\}$ une décomposition homologique de X.

On note $\phi_{n,E} : S \wedge M(H_n(X; \mathbf{Z}), n-1) \to E \wedge X_{n-1}$ le morphisme de spectres induit par l'unité de E et l'application $\phi_n$. La proposition suivante est immédiate :

*Proposition* **A.1.** — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme $\phi_{n,E}$ est trivial.*

(ii) *Il existe un morphisme $\rho_{n,E} : E \wedge X_n \to E \wedge X_{n-1}$ de spectres-modules sur E tel que le composé du morphisme $E \wedge X_{n-1} \to E \wedge X_n$ induit par l'inclusion de $X_{n-1}$ dans $X_n$ et de $\rho_{n,E}$ est l'identité de $E \wedge X_{n-1}$.*

*Exemple.* — Par définition même de ce qu'est une décomposition homologique, le morphisme $\phi_{n,\mathbf{HZ}}$ est trivial pour tout $n \geqslant 3$. La proposition A.1 implique que l'on a une suite d'isomorphismes de spectres-modules sur $\mathbf{HZ}$

$$\mathbf{HZ} \wedge X_n \simeq \mathbf{HZ} \wedge X_{n-1} \vee \mathbf{HZ} \wedge M(H_n(X;\mathbf{Z}), n)$$

et donc un isomorphisme de spectres-modules sur $\mathbf{HZ}$

$$\mathbf{HZ} \wedge X \simeq \bigvee_{n \geqslant 2} \mathbf{HZ} \wedge M(H_n(X;\mathbf{Z}), n),$$

ce qui est un cas particulier du lemme 6.1 de la partie II de [Ad].

Plus généralement :

*Proposition* **A.2.** — *Soit* X *un espace pointé simplement connexe; soit* E *un spectre-anneau unitaire connexe. Soit* $\{X_n;\phi_n\}$ *une décomposition homologique de* X. *Si les groupes d'homologie (réduite) entière de* X *sont divisibles et si les groupes d'homotopie de* E *sont sans torsion, alors il existe une suite d'isomorphismes de spectres-modules sur* E

$$\alpha_n : E \wedge X_n \simeq \bigvee_{2 \leqslant k \leqslant n} E \wedge M(H_k(X;\mathbf{Z}), k)$$

*telle que*

— $\alpha_n$ *prolonge* $\alpha_{n-1}$,

— *l'isomorphisme induit* $E \wedge X_n / E \wedge X_{n-1} \simeq E \wedge M(H_n(X;\mathbf{Z}), n)$ *est compatible avec l'égalité* $X_n/X_{n-1} = M(H_n(X;\mathbf{Z}), n)$ *(en convenant que* $X_1$ *est le sous-espace de* $X_2$ *réduit au point base).*

*En particulier il existe un isomorphisme de spectres-modules sur* E

$$E \wedge X \simeq \bigvee_{n \geqslant 2} E \wedge M(H_n(X;\mathbf{Z}), n).$$

*Démonstration.* — On montre par récurrence sur $n$ que la propriété suivante est satisfaite :

$(\mathscr{D}_n)$ L'application $\phi_{k,E}$ est triviale pour $3 \leqslant k \leqslant n$.

La vérification de $(\mathscr{D}_2)$ n'est pas très difficile! On suppose donc que $(\mathscr{D}_{n-1})$ est satisfaite et on montre qu'il en est de même pour $(\mathscr{D}_n)$.

Pour alléger la notation, on pose $\pi = H_n(X;\mathbf{Z})$, $M = S \wedge M(\pi, n-1)$ et $D = E \wedge X_{n-1}$. Soit $\eta : S \to \mathbf{HZ}$ l'unité du spectre-anneau $\mathbf{HZ}$; on note $S\langle 0\rangle$ le spectre fibre de $\eta$ (cette notation est justifiée par le fait que $S\langle 0\rangle$ est le revêtement 0-connexe du spectre S). On considère la suite exacte de groupes abéliens

$$[M, S\langle 0\rangle \wedge D] \to [M, D] \to [M, \mathbf{HZ} \wedge D]$$

(la notation $[-,-]$ désigne ici le groupe des classes d'homotopie d'applications de spectres, en d'autres termes, le groupe des morphismes de spectres). On observe que l'image de $\phi_{n,E}$ (qui est un élément de $[M, D]$) dans $[M, \mathbf{HZ} \wedge D]$ est $\phi_{n,\mathbf{HZ}\wedge E}$. Comme la trivialité de $\phi_{n,\mathbf{HZ}}$ entraîne celle de $\phi_{n,\mathbf{HZ}\wedge E}$, on voit que $\phi_{n,E}$ est dans l'image de l'homomorphisme $[M, S\langle 0\rangle \wedge D] \to [M, D]$. On considère alors le diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} [M, S\langle 0\rangle \wedge D] & \longrightarrow & [M, D] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi, \pi_{n-1}(S\langle 0\rangle \wedge D)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi, \pi_{n-1}D) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales associent à un morphisme de spectres $f$ l'homomorphisme de groupes abéliens $\pi_{n-1}(f)$; comme M est un spectre de Moore, ces flèches verticales sont toujours surjectives, mais nous n'utiliserons pas ce fait. La trivialité de $\phi_{n,E}$ résulte des deux points suivants :

(1) l'homomorphisme $[M, D] \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi, \pi_{n-1}D)$ est injectif;

(2) le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi, \pi_{n-1}(S\langle 0\rangle \wedge D))$ est nul.

Vérification de (1). Le noyau de l'homomorphisme en question s'identifie au groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\pi, \pi_n \mathrm{D})$. Ce groupe est nul parce que l'hypothèse de récurrence implique que le groupe $\pi_n \mathrm{D}$ est divisible puisqu'il en est ainsi des groupes $\pi_n(\mathrm{E} \wedge \mathrm{M}(\mathrm{H}_k(\mathrm{X};\mathbf{Z}), k))$ pour tout $n$ et tout $k$ (on utilise ici que les groupes d'homotopie de E sont sans torsion).

Vérification de (2). Tout homomorphisme de $\pi$ dans $\pi_{n-1}(\mathrm{S}\langle 0\rangle \wedge \mathrm{D}))$ est trivial parce que le groupe $\pi$ est divisible et que le groupe $\pi_{n-1}(\mathrm{S}\langle 0\rangle \wedge \mathrm{D}))$ est de torsion bornée, c'est-à-dire annulé par la multiplication par un entier non nul. On se convainc de ce dernier point grâce au lemme ci-dessous et à son scholie.

*Lemme* **A.3.** — *Soit* F *un spectre connectif dont les groupes d'homotopie sont finis. Alors pour tout entier $q$, il existe un entier $\delta(q) > 0$ tel que le morphisme $\delta(q)\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ se factorise à travers le revêtement $q$-connexe $\mathrm{F}\langle q\rangle$ du spectre* F.

(On rappelle que l'on dit qu'un spectre F est connectif s'il existe un entier $q_0$ tel que l'on a $\pi_q \mathrm{F} = 0$ pour $q < q_0$. Les notations $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ et $\delta(q)\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$ désignent ci-dessus respectivement le morphisme identité de F et l'action de l'entier $\delta(q)$ sur cet élément dans le $\mathbf{Z}$-module $[\mathrm{F}, \mathrm{F}]$.)

*Scholie* **A.4.** — *Soit* C *un spectre connectif; alors chaque groupe d'homotopie du spectre* $\mathrm{F} \wedge \mathrm{C}$ *est de torsion bornée. Plus précisément, soient $r_0$ et $s$ deux entiers; si l'on a $\pi_r \mathrm{C} = 0$ pour $r < r_0$, alors le groupe $\pi_s(\mathrm{F} \wedge \mathrm{C})$ est annulé par la multiplication par $\delta(s - r_0)$.* □

On vérifie les énoncés 5.3, 7.5 et 7.18 à l'aide de la proposition A.2 en prenant pour X l'espace $\mathrm{M}(\mathbf{Z}/p^\infty, 2) \wedge \mathrm{Y}_+$ (voir ci-après) et pour E le spectre MU.

On pose $\mathbf{Z}/p^\infty = \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbf{Z}$ (on peut voir encore $\mathbf{Z}/p^\infty$ comme la composante $p$-primaire de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ou la colimite du diagramme $\mathbf{Z}/p \hookrightarrow \mathbf{Z}/p^2 \hookrightarrow \ldots$).

Soit Y un espace. On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{M}(\mathbf{Z}/p^\infty, 2) \wedge \mathrm{Y}_+$; Z est un espace pointé simplement connexe. On fait les constatations suivantes :

— Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}_{n+2}(\mathrm{Z};\mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p^\infty)$; cet isomorphisme montre en particulier que les groupes d'homologie (réduite) entière de Z sont de torsion $p$-primaire.

— Soit $f : \mathrm{Z} \to \Sigma^3 \mathrm{Y}_+$ l'application pointée induite par l'application pointée canonique $\mathrm{M}(\mathbf{Z}/p^\infty, 2) \to \mathrm{M}(\mathbf{Z}, 3)$; l'homomorphisme $f_* : \widetilde{\mathrm{H}}_*(\mathrm{Z};\mathbf{Z}/p) \to \widetilde{\mathrm{H}}_*(\Sigma^3\mathrm{Y}_+;\mathbf{Z}/p)$ est un isomorphisme.

— Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
  — L'espace Y est sans $p$-torsion.
  — Les groupes d'homologie (réduite) entière de Z sont $p$-divisibles.

On suppose désormais que Y est sans $p$-torsion. D'après la proposition A.2, on a un isomorphisme de spectres-modules sur MU

$$g : \mathrm{MU} \wedge \mathrm{Z} \simeq \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{MU} \wedge \mathrm{M}(\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p^\infty), n+2).$$

Soit $\mathrm{B}_n$ une base du $\mathbf{Z}/p$-espace vectoriel $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p)$. Celui-ci s'identifie au noyau de la multiplication par $p : \mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p^\infty) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p^\infty)$, et l'isomorphisme $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p) \cong \mathbf{Z}/p^{(\mathrm{B}_n)}$ se prolonge en un isomorphisme $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y};\mathbf{Z}/p^\infty) \simeq \mathbf{Z}/p^{\infty(\mathrm{B}_n)}$. On note $h : \mathrm{MU} \wedge \mathrm{Z} \to \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (\Sigma^{n+3}\mathrm{MU})^{\vee \mathrm{B}_n}$ le morphisme de spectres-modules sur MU induit par $g$, l'isomorphisme précédent et les applications pointées canoniques $\mathrm{M}(\mathbf{Z}/p^\infty, n+2) \to \mathrm{M}(\mathbf{Z}, n+3)$. Enfin, on pose $\mathrm{C} = \Sigma^{-3}\mathrm{MU} \wedge \mathrm{Z}$ et on note $k : \mathrm{C} \to \mathrm{MU} \wedge \mathrm{Y}_+$ et $l : \mathrm{C} \to \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (\Sigma^n \mathrm{MU})^{\vee \mathrm{B}_n}$ les morphismes de spectres-modules sur MU respectivement induits par $f$ et $h$. On dispose donc d'un diagramme de spectres-modules sur MU

$$\mathrm{MU} \wedge \mathrm{Y}_+ \xleftarrow{k} \mathrm{C} \xrightarrow{l} \bigvee_{n \in \mathbf{N}} (\Sigma^n \mathrm{MU})^{\vee \mathrm{B}_n}$$

tel que les homomorphismes $\mathrm{H}_*(k;\mathbf{Z}/p)$ et $\mathrm{H}_*(l;\mathbf{Z}/p)$ sont des isomorphismes. En appliquant le foncteur $\Omega^\infty$, on obtient un diagramme d'espaces

$$\Omega^\infty(\mathrm{MU} \wedge \mathrm{Y}_+) \xleftarrow{\Omega^\infty k} \Omega^\infty \mathrm{C} \xrightarrow{\Omega^\infty l} \prod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{MU}_n^{(\mathrm{B}_n)}$$

tel que les homomorphismes $H_*(\Omega^\infty k; \mathbf{Z}/p)$ et $H_*(\Omega^\infty l; \mathbf{Z}/p)$ sont des isomorphismes. En effet le lecteur se convaincra aisément du :

*Lemme* **A.5.** — *Soit* $\phi : E \to F$ *un morphisme entre spectres connectifs. Si* $\phi$ *induit un isomorphisme en homologie modulo* $p$ *alors il en est de même pour* $\Omega^\infty \phi$.

Les propositions 5.3 et 7.18 sont donc, comme les points (d), (e) et (f) de 5.4, conséquences des résultats de Wilson concernant l'homologie entière des espaces $\mathbf{MU}_n$.

Le point (c) de la proposition 5.4 a aussi un analogue dans le contexte de cet appendice. En effet la première partie de la proposition A.2 montre que, pour un choix « naturel » de $g$, l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} &H_n(Y; \mathbf{Z}/p) \to H_n(\Omega^\infty(MU \wedge Y_+); \mathbf{Z}/p) \xrightarrow{\iota} H_n\Big(\prod_{m \in \mathbf{N}} \mathbf{MU}_m^{(B_m)}; \mathbf{Z}/p\Big) \\ &\to H_n(\mathbf{MU}_m^{(B_m)}; \mathbf{Z}/p), \end{aligned}$$

$\iota$ désignant l'isomorphisme $H_*(\Omega^\infty l; \mathbf{Z}/p) \circ H_*(\Omega^\infty k; \mathbf{Z}/p)^{-1}$, s'identifie à l'isomorphisme $H_n(Y; \mathbf{Z}/p) \cong \mathbf{Z}/p^{(B_n)}$.

Cette observation faite, on démontre la proposition 7.5 de la façon suivante. On considère la cofibre, que l'on note P, du morphisme de spectres

$$\Sigma^{-3} \bigvee_{n \text{ impair}} MU \wedge M(H_n(Y; \mathbf{Z}/p^\infty), n+2) \to MU \wedge Y_+$$

induit par $g$ et $k$, et le morphisme de spectres canonique $q : MU \wedge Y_+ \to P$. On prend pour W l'espace $\Omega^\infty P$ et pour $f$ l'application composée de l'application canonique $Y \to \Omega^\infty(MU \wedge Y_+)$ et de $\Omega^\infty q$; d'après ce qui précède W et $f$ font bien l'affaire.

## RÉFÉRENCES


[Ad1] J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalized Homology*, University of Chicago Press, 1974.

[Ad2] J. F. Adams, Maps between classifying spaces II, *Invent. Math.*, **49** (1978), 1-65.

[Ad3] J. F. Adams, *Lectures on Lie Groups*, *Mathematics Lecture Note Series*, 1969.

[AM] J. F. Adams et Z. Mahmud, Maps between classifying spaces, *Invent. Math.*, **35** (1976), 1-41.

[AS] M. F. Atiyah et G. B. Segal, Equivariant K-theory and completion, *J. Diff. Geom.*, **3** (1969), 1-18.

[BC] E. H. Brown et A. H. Copeland, Homology analogue of Postnikov systems, *Mich. Math. Journ.* **6** (1959), 313-330.

[BCM] M. Bendersky, E. B. Curtis et H. R. Miller, The unstable Adams spectral sequence for generalized homology, *Topology*, **3** (1978), 229-248.

[BK] A. K. Bousfield et D. M. Kan, *Homotopy limits, Completions, and Localizations, Springer LNM*, **304**, 1972.

[Bo] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitres 4 à 7*, Masson 1981.

[CF] Conner et Floyd, *The relation of cobordism to K-theories, Springer LNM*, **28**, 1966.

[De] F.-X. Dehon, Espaces fonctionnels de source le classifiant de $S^1$ et de but un espace sans $p$-torsion, Thèse, Paris 7 (1999).

[DMN] W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. A. Neisendorfer, Fibrewise completion and unstable Adams spectral sequence, *Israël J. Math.*, **66** (1989), 160-178.

[Dr] E. Dror Farjoun, Pro-nilpotent representation of homology types, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 657-660.

[DS] E. Dror Farjoun et J. Smith, A Geometric Interpretation of Lannes' Functor T, *Théorie de l'Homotopie, Astérisque*, **191** (1990), 87-95.

[DW1] W. G. Dwyer et C. W. Wilkerson, Smith theory and the functor T, *Comm. Math. Helv.*, **66** (1991), 1-17.

[DW2] W. G. Dwyer et C. W. Wilkerson, Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces, *Annals of Math.*, **139** (1994), 395-442.

[DZ] W. G. DWYER et A. ZABRODSKY, Maps between classifying spaces, Algebraic Topology, Barcelona 1986 (proceedings), *Springer LNM*, **1298** (1987), 106-119.

[KW] N. J. KUHN et M. WINSTEAD, On the torsion in the cohomology of certain mapping spaces, *Topology*, **35** (1996), 875-881.

[Hi] P. HILTON, *Homotopy Theory and Duality*, *Notes on mathematics and its applications*, 1965.

[La1] J. LANNES, Sur la cohomologie modulo $p$ des $p$-groupes abéliens élémentaires, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory 1985, *London Math. Soc. LNS*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 97-116.

[La2] J. LANNES, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un $p$-groupe abélien élémentaire, *Publ. Math. IHES*,**75** (1992), 135-244.

[LZ1] J. LANNES et S. ZARATI, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **19** (1986), 1-31.

[LZ2] J. LANNES et S. ZARATI, Théorie de Smith algébrique et classification des $\mathrm{H}^*\mathrm{V}-\mathcal{U}$-injectifs, *Bull. Soc. Math. France*, **123** (1995), 189-223.

[Mi] H. R. MILLER, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.

[Mo1] F. MOREL, Quelques remarques sur la cohomologie modulo $p$ des pro-$p$-espaces et les résultats de Jean Lannes concernant les espaces fonctionnels $\mathbf{hom}(\mathrm{BV}, \mathrm{X})$, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **26** (1993), 309-360.

[Mo2] F. MOREL, Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T, *Bull. Soc. Math. France*, **124** (1996), 347-373.

[Not] D. NOTBOHM, Maps between classifying spaces, *Math. Z.*, **207** (1991), 153-168.

[Nov] S. P. NOVIKOV, The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theories, *Math. USSR, Izv.*, **1** (1967), 827-913.

[NS] D. NOTBOHM et L. SMITH, Fake Lie groups and maximal tori I, *Math. Ann.*, **288** (1990), 637-661.

[Sc] L. SCHWARTZ, *Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture*, University of Chicago Press, 1994.

[Sw] R. M. SWITZER, *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, *Grundlehren*, **212** (1975).

[Wilk] C. W. WILKERSON, lambda-ring, binomial domains, and vector bundles over $\mathbf{CP}^\infty$, *Commun. Algebra*, **10** (1982), 311-328.

[Wils] W. S. WILSON, The $\Omega$-spectrum for Brown-Peterson cohomology, Part I, *Comm. Math. Helv.*, **48** (1973), 45-55.



Centre de Mathématiques,
UMR 7640 du CNRS,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau, cedex, France
*E-mail address:* dehon@math.polytechnique.fr
lannes@math.polytechnique.fr


*Manuscrit reçu le 2 février 1999.*