PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

CÉCILE DEWITT-MORETTE

Des ponts

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome S88 (1998), p. 53-66

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1998__S88__53_0>

DES PONTS

par CÉCILE DEWITT-MORETTE

Entre la physique et les mathématiques, il y a des ponts, c'est-à-dire des architectes, des maçons, et aussi des promeneurs.

Maçon, ou promeneur, j'ai parfois trébuché pour ne pas avoir pris les précautions mathématiques nécessaires – précautions qui semblaient sans importance à une physicienne.

On m'excusera de n'offrir à la fête des quarante ans de l'Institut des Hautes Études Scientifiques que des anecdotes personnelles, mais je ne résiste pas au plaisir de partager des souvenirs avec la grande équipe de l'IHÉS – sans hésiter à confesser des erreurs. Voici donc trois anecdotes :

1. Un isomorphisme qui n'est pas canonique.
2. Une clause « insignifiante » du premier axiome de Stiefel-Whitney.
3. Une phase non triviale.

1. Un isomorphisme qui n'est pas canonique

Le groupe fondamental $\Pi_1(\mathrm{M}, a)$ d'une variété M au point a est isomorphe à $\Pi_1(\mathrm{M}, b)$ au point b. Je savais que cet isomorphisme n'est pas canonique, mais je n'en tenais pas compte, jusqu'au jour où cela me mit en mauvaise posture.

Un excellent article de L. S. Schulman, « A Path Integral for Spin », ouvrait en 1968 une nouvelle perspective sur l'intégration fonctionnelle. Schulman considérait des chemins à valeur dans SO(3), un espace multiplement connexe, et obtenait explicitement les propagateurs d'une particule libre non relativiste à spin entier, ou à spin demi-entier. Il séparait l'intégrale sur les chemins en sommes partielles « homotopiquement distinctes », et affectait chaque somme partielle d'une phase à déterminer par « d'autres conditions ». Soit $\mathrm{K}(b, t_b; a, t_a)$ le propagateur d'une particule au point $a \in \mathrm{SO}(3)$ au temps t_a et au point $b \in \mathrm{SO}(3)$ au temps t_b, et soit $\mathrm{K}^{(\alpha)}(b, t_b; a, t_a)$ la somme partielle obtenue en intégrant sur les chemins d'une même classe d'homotopie, les propagateurs de Schulman sont de la forme

$$\mathrm{K} = \sum_{\alpha} \chi(\alpha)\mathrm{K}^{(\alpha)}, \text{ somme sur toutes les classes d'homotopie.}$$

Schulman calculait $K^{(\alpha)}$ explicitement par intégration fonctionnelle et obtenait $\chi(\alpha)$ en comparant K avec le résultat obtenu par la mécanique quantique en termes d'opérateurs. Ce procédé, avec en particulier les incertitudes de l'époque (choix du propagateur infinitésimal sur un espace riemannien), est un tour de force, et modestement Schulman doutait de l'utilité de sa technique ([1]). En effet, obtenir $\chi(\alpha)$ en calculant $K^{(\alpha)}$ explicitement pour chaque système et en comparant K avec un résultat explicite obtenu par une autre méthode ne semblait possible que pour des systèmes particulièrement simples.

Je cherchais donc à discerner dans le calcul de Schulman la raison fondamentale de son résultat afin d'identifier les $\chi(\alpha)$ simplement pour tous les systèmes. Par un raisonnement alambiqué je conclus que les $\chi(\alpha)$ forment une représentation du groupe fondamental ([2]). Je demandais alors à R. Bott, en séjour aux Houches comme consultant pour les participants qui auraient besoin de ses services, de m'aider à améliorer mon raisonnement. Sa réaction fut immédiate : «Votre formule $K = \Sigma\chi(\alpha)K^{(\alpha)}$ n'a pas de sens»; vous ne pouvez pas faire correspondre un élément du groupe fondamental avec une classe d'homotopie pour des chemins de a à b, lorsque $a \neq b$. La conversation semblait terminée, mais Y. Choquet-Bruhat présente à cette discussion encouragea Bott à poursuivre la preuve d'une formule qui lui semblait correcte et intéressante. Quant à moi, pour ne pas perdre les bons conseils de Bott, je lui offris de choisir un point c dans le même espace que a et b et de choisir deux chemins de c à a et de c à b, puis de travailler avec des lacets $c\,a\,b\,c$. Je fus surprise que cette simple concession suffise à satisfaire Bott. Bien formée par la relativité générale, je décidais, en mon for intérieur, que le résultat physique ne dépendrait pas du choix des chemins $c\,a$, et $c\,b$. Or cette condition suffit pour obtenir la formule suivante :

$$|K| = \left|\sum_{\alpha}\chi(\alpha)K^{(\alpha)}\right| . \tag{1}$$

Plus précisément la preuve de cette formule n'utilise que les arguments suivants :

- Correspondance bi-univoque entre les états d'un système et son espace de configuration.
- Additivité des amplitudes de probabilité.
- Composition des sommes partielles $K^{(\beta)}(c, t_c; b, t_b)$ et $K^{(\alpha)}(b, t_b; a, t_a)$.
- La valeur absolue du propagateur K ne dépend pas du choix du réseau homotopique (choix des chemins $c\,a$ et $c\,b$ décrit précédemment).

La formule (1) a été appliquée à un grand nombre de systèmes, et généralisée à des propagateurs bivectoriels [I-S, S-I-I]. Elle fut appliquée d'abord à un système de

---

([1]) «It is unlikely (to say the least) that the techniques described here can compete in utility with the customary Pauli spin formalism» [LS1], p. 1559.

([2]) Indépendamment, et dans un article [LS2] intitulé «Approximate Topologies», Schulman montre dans deux exemples que les coefficients $\{\chi(\alpha)\}$ déterminent un prolongement autoadjoint de l'hamiltonien du système; il remarque incidemment, dans un des exemples, que ces coefficients forment une représentation du groupe fondamental.

particules indiscernables [L-D]. L'espace de configuration de n particules dans un espace de dimension D est [1]

$$\mathrm{M} = (\mathbb{R}^{nd} - \Delta)/S_n$$

avec

$$\mathbb{R}^{nd} - \Delta = \left\{\text{points de } \mathbb{R}^{nd} \text{ tels que } x_i \neq x_j \text{ avec } x_i, x_j \in \mathbb{R}^d\right\}$$

S_n le groupe symétrique d'ordre n.

S_n agit effectivement sur $\mathbb{R}^{nd} - \Delta$; on rappelle que

pour $d = 1$, $\mathbb{R}^{nd} - \Delta$ n'est pas connexe,
pour $d = 2$, $\mathbb{R}^{nd} - \Delta$ est multiplement connexe,
pour $d \geqslant 3$, $\mathbb{R}^{nd} - \Delta$ est simplement connexe.

Pour $d \geqslant 3$, $\Pi_1(\mathrm{M})$ est isomorphe à S_n et suivant le choix fait pour la représentation de S_n, la formule (1) donne le propagateur pour les bosons ou le propagateur pour les fermions. Pour $d = 2$, $\Pi_1(\mathrm{M})$ n'est pas isomorphe [2] à S_n.

Cette anecdote met en évidence les ingrédients de l'un des mortiers que peut utiliser un maçon construisant un pont de la physique aux mathématiques :

- un calcul explicite d'un phénomène physique,
- une idée mathématique simple responsable du résultat physique,
- une collaboration entre physiciens et mathématiciens. Un physicien ne peut pas connaître toutes les mathématiques dont il a besoin avec suffisamment de précision pour en utiliser correctement les concepts puissants; un mathématicien ne peut pas, généralement, faire un long calcul explicite d'un phénomène physique complexe.

Le point de départ de l'anecdote suivante n'est plus un problème physique, mais un problème mathématique. La solution de ce problème conduit à une classification des fermions plus fine que la classification courante. Ce pont des mathématiques à la physique ne sera achevé que lorsque les implications de cette classification auront été observées. J'entre dans les détails de ces implications parce qu'elles ne sont généralement pas familières aux physiciens.

2. Une clause « insignifiante » du premier axiome de Stiefel-Whitney

Je rédigeais un problème (obstruction à la construction de spineurs sur une variété) pour un livre écrit en collaboration avec Yvonne Choquet-Bruhat, et je vérifiais que la classe

---

(1) G. A. Goldin a montré qu'enlever la diagonale est une conséquence de la théorie des groupes.

(2) Ultérieurement, G. A. Goldin a reconnu que $\Pi_1(\mathrm{M}^d)$ pour $d = 2$ est le groupe de tresse. Les particules dont les fonctions d'onde ne sont pas nécessairement totalement symétriques (bosons) ou totalement antisymétriques (fermions) furent appelées «anyons». On trouvera dans un article de *Physics To-Day* **[B-L-S-W]** l'historique de ces développements.

de cohomologie du fibré vectoriel considéré satisfaisait aux quatre axiomes des classes Stiefel-Whitney – mais j'ignorais une « petite » condition incluse dans le premier axiome, ou plutôt je l'imposais. Le premier axiome, je cite [M-S], dit :

Axiom 1. To each vector bundle ξ there corresponds a sequence of cohomology classes

$$w_i(\xi) \in \mathrm{H}^i\left(\mathrm{B}(\xi);\mathbb{Z}/2\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

called the *Stiefel-Whitney classes* of ξ. The class $w_0(\xi)$ is equal to the unit element

$$1 \in \mathrm{H}^0\left(\mathrm{B}(\xi);\mathbb{Z}/2\right),$$

and $w_i(\xi)$ ***equals zero for i greater than n if*** ξ ***is an n-plane bundle.***

Ignorant la condition en caractères gras ci-dessus, je conclus que le critère d'obstruction à la construction des spineurs est la trivialité de la seconde classe Stiefel-Whitney w_2. « Non, dit A. Lichnerowicz, le critère est la trivialité de $w_2 + w_1 \cup w_1$. » Suit une longue période de perplexités et de consultations. En proportion à peu près égale, mes savants amis me disaient que Lichnerowicz avait raison ou que j'avais raison. Si je comprenais leurs raisons, je n'étais pas capable d'arriver à une conclusion, jusqu'au jour où Y. Choquet-Bruhat m'écrit : « Travailles-tu avec $\mathrm{O}(n, 0)$ ou $\mathrm{O}(0, n)$? » (les groupes orthonormaux qui laissent invariants $\Sigma(x^i)^2$ ou $-\Sigma(x^i)^2$). Ces groupes étant isomorphes, n'eût été la confiance que je porte à Yvonne qui sait aller droit au cœur du problème, j'aurais répondu « Et alors? ». J'ai donc refait mes calculs, partant une fois de $\mathrm{O}(n, 0)$, et une seconde fois de $\mathrm{O}(0, n)$. J'arrivais, suivant les cas, à l'un ou l'autre des criteria en compétition. La raison est simple mais était alors (1987) fort peu connue (1) : Soit Spin (s, t) le recouvrement double de $\mathrm{SO}(s, t)$, soit

---

(1) Une lettre de Simone Gutt qui connaît bien le sujet attira notre attention sur le travail de Karoubi *Algèbres de Clifford et* K*-théorie*. Le mot «Pin» (attribué à J.P. Serre, mais non confirmé par lui) apparaît dans l'article de Atiyah, Bott, et Shapiro «Clifford Modules». Les auteurs utilisent la même notation «Pin (k)» pour ce qui serait dénoté ici «Pin $(k, 0)$» et «Pin $(0, k)$» et je n'avais pas lu leur article soigneusement.

Pourquoi la différence entre les 2 Pin groupes est-elle passée inaperçue si longtemps? Peut-être parce que, à la première page de son livre sur les spineurs, Elie Cartan introduit la forme fondamentale

$$\Phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-h}^2 - x_{n-h+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

et dit «nous supposons, *sans perte de généralité,* que $n - h \geqslant h$ », autrement dit, il ne considère, dans nos notations, que $\mathrm{Pin}(n - h, h)$ et affirme qu'il n'a rien négligé d'important.

Une notation qui permet d'éviter les confusions :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pin}(n,0) & & \mathrm{Pin}(0,n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{O}(n,0) & \approx & \mathrm{O}(0,n) \end{array}$$

plutôt que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pin}(n,0) & & \mathrm{Pin}(0,n) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{O}(n)\,. & \end{array}$$

Pin(s, t) le recouvrement double de O(s, t) ; les groupes O(s, t) et O(t, s) sont isomorphes, les groupes Spin(s, t) et Spin(t, s) sont isomorphes, mais les groupes Pin(s, t) et Pin(t, s) sont totalement différents ([1]). Les groupes étant différents, les critères d'obstruction sont naturellement différents.

Si j'avais vérifié la «petite» clause, me dit mon consultant à l'Université du Texas, Gary Hamrick, j'aurais remarqué que la classe de cohomologie que j'avais construite n'était pas identiquement nulle pour les fibrés vectoriels dont la fibre est de dimension $n < 2$. J'aurais dû identifier la classe de cohomologie trouvée non pas avec w_2 mais avec

$$a\, w_2 + b\, w_1 \cup w_1 ,$$

puis déterminer a et b en fonction du groupe de structure du fibré. J'aurais alors (peut-être?) remarqué qu'il y avait deux possibilités, $(a = 1,\ b = 0)$ et $(a = 1,\ b = 1)$.

Jusqu'ici je n'ai parlé que mathématiques. Quelle relation cette anecdote a-t-elle avec la physique? Comme a dit Feynman ([2]) «... it is always a good idea to try to see how much or how little of our theoretical knowledge actually goes into the analysis of those situations which have been experimentally checked». Ayant identifié la différence entre Pin(s, t) et Pin(t, s) comme explication des différents critères d'obstruction, il était naturel de chercher les conclusions à tirer en physique de l'existence de deux Pin groupes Pin$(3, 1)$ et Pin$(1, 3)$. Deux études s'imposaient :

i) Simplifier et clarifier les discussions relatives à la parité et au renversement du temps, par exemple simplifier CPT.

ii) Étudier les conséquences observables de la classification des fermions tenant compte de l'existence de deux groupes Pin.

Détaillons un peu ces deux sujets :

i) «CPT». Le besoin de clarifier la situation apparaît si l'on remarque, par exemple, que dans l'excellent livre de Björken et Drell l'opérateur parité et l'opérateur renversement du temps anticommutent dans le volume I et commutent dans le volume II. Dans le livre de Streater et Wightman *PCT and all that*, l'opérateur parité est parfois linéaire et parfois antilinéaire.

Remarquons, tout d'abord, qu'il existe deux définitions du renversement du temps; par exemple, les équations de Maxwell peuvent s'écrire de deux façons différentes, mais

---

([1]) Par exemple, les tables de multiplication des générateurs de Pin$(1, 0)$ et de Pin$(0, 1)$ sont isomorphes, respectivement, à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{Z}_4$:

$$\text{les générateurs de Pin}(1,0) \text{ sont } \pm \mathbb{1}, \quad \pm\gamma \text{ avec } \gamma^2 = 1 ,$$
$$\text{les générateurs de Pin}(0,1) \text{ sont } \pm \mathbb{1}, \quad \pm\gamma \text{ avec } \gamma^2 = -1 .$$

([2]) Je n'ai pas retrouvé la référence de cette citation (seulement la date 1961) que j'avais notée comme utile en physique mathématique.

totalement équivalentes, soit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0\,, & \operatorname{curl} \vec{E} + \dot{\vec{H}} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = \rho\,, & \operatorname{curl} \vec{H} - \dot{\vec{H}} = 0 \end{cases} \qquad \text{(équations « physiques »)}$$

si l'on pense d'abord à leur utilité expérimentale; soit, si l'on veut mettre en évidence leur invariance relativiste, et leur beauté mathématique :

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \delta F + J = 0\,. \end{cases} \qquad \text{(équations « mathématiques »)}$$

Dans le contexte physique, il est utile de considérer le renversement du temps Θ_{MR} (MR abréviation de *motion reversal*) qui ne change par le signe de la charge électrique. Par contre, dans une transformation de Lorentz T qui change le temps t en $-t$, la composante charge électrique du quadrivecteur covariant J change de signe. Soit C un opérateur qui change le signe de la charge électrique, on a :

$$T = \Theta_{MR} C\,.$$

On peut, de même, considérer deux opérateurs renversement du temps opérant sur un pineur Ψ, l'un Λ_T est unitaire, l'autre Θ est antiunitaire. L'opérateur unitaire Λ_T est défini par l'équation

(2) $$\Psi'(T^\alpha{}_\beta x^\beta) = \Lambda_T \Psi(x^\alpha) \qquad \text{avec} \quad \Lambda_T \Gamma_\alpha \Lambda_T^{-1} = \Gamma_\beta T^\beta{}_\alpha\,;$$

les $\{\Gamma_\alpha\}$ sont les matrices Γ et $[T^\alpha{}_\beta]$ est la matrice de Lorentz T que change t en $-t$. L'opérateur antiunitaire Θ est défini par

$$\Psi'(T^\alpha{}_\beta x^\beta) = \Theta \Psi^*(x^\alpha) \qquad \text{(une étoile pour complexe conjugué).}$$

On montre que

$$\Lambda_T = \Theta D_+^{-1}, \qquad \text{avec} \quad D_\pm^{-1} \Gamma_\alpha D_\pm = \pm \Gamma_\alpha^*\,.$$

L'opérateur Θ permet d'éviter les états d'énergie négative : la composante énergie du quadrivecteur énergie – impulsion ne change pas de signe dans le renversement du temps Θ.

Par contre, si l'on veut classer des particules par les représentations du groupe de Poincaré (produit semidirect du groupe de translations et du groupe de Lorentz) il est *nécessaire* de travailler avec l'un ou l'autre des groupes Pins, c'est-à-dire soit avec Pin(3,1), soit avec Pin(1,3). Posons

$$\Lambda_T \in \mathrm{Pin}(3,1) \qquad \text{et} \qquad \hat{\Lambda}_T \in \mathrm{Pin}(1,3)\,.$$

L'opérateur parité Λ_P est de même défini par

$$\Psi'(P^\alpha{}_\beta x^\beta) = \Lambda_P \Psi(x_\alpha) \quad \text{avec} \quad \Lambda_P \Gamma_\alpha \Lambda_P^{-1} = \Gamma_\beta P^\beta{}_\alpha\,.$$

Ici encore il y a deux définitions (presque équivalentes) de la matrice $[P^{\beta}{}_{\alpha}]$ qui correspondent respectivement à renverser la direction d'un axe d'espace ou à renverser trois axes. La première est préférable parce que simple et valable quel que soit le nombre d'axes du genre espace ; la deuxième consiste à faire suivre le renversement d'un axe par une rotation d'angle π.

La fameuse invariance CPΘ, traduite dans le langage du groupe de Lorentz, est simplement l'invariance dans les transformations de Lorentz qui préservent le signe du déterminant de la transformation (qui préservent « l'orientation » de la transformation). La transformation des spineurs correspondante est une transformation définie par le groupe Spin (et non pas le groupe Pin).

Autre exemple de l'utilité des groupes Pin : on entend dire « Une particule représentée par un spineur Weyl (spineur à 2 composantes) n'est pas dans un état propre de l'opérateur parité, on ne peut donc pas lui assigner une parité ». Or un spineur Weyl est un spineur (et non pas un pineur), et l'opérateur parité qui n'est pas dans le groupe Spin ne peut pas agir sur un spineur. Dire « $\Lambda_P \Psi \neq$ constante Ψ » au lieu de dire « $\Lambda_P \notin$ groupe Spin » est source de confusion.

ii) Déterminer expérimentalement l'un ou l'autre des groupes Pin. Les deux groupes ont la même algèbre de Lie ; de plus, le lagrangien d'un système de pineurs est composé de pineurs groupés de telle sorte que chaque terme est tensoriel (et non pinoriel) ; il est donc difficile de proposer une expérience qui permette de dire « **ce** fermion correspond à une représentation de **ce** groupe Pin ». Trois propositions, plus ou moins utiles :

- Un neutrino Majorana émis et réabsorbé dans un processus de désintégration β double, sans émission de neutrino, ne peut être associé qu'au groupe Pin(3,1).
- L'espérance de vide d'un courant fermionique définie sur $\mathbb{R}^2 \times$ bouteille de Klein, calculée avec Pin(3.1), est tout à fait différente [D-D] de la même expression calculée avec Pin(1,3). Je n'ai pas encore trouvé de système physique dont l'espace de configuration ait la topologie de $\mathbb{R} \times$ bouteille de Klein.
- On change de groupe Pin soit en changeant la définition de l'algèbre de Clifford, soit en changeant le signe de la métrique. Il existe un exemple subtil où l'on est obligé de changer le signe de la métrique : l'intégrale de Polyakov pour les supercordes est définie sur des surfaces à deux dimensions. Si ces surfaces ne sont pas orientables, les contributions des surfaces à métriques positives sont différentes des contributions des surfaces à métriques négatives. Dans cette intégrale 3 signes sont arbitraires mais ces 3 signes ne sont pas indépendants. Si l'on change le signe de l'algèbre de Clifford, on est obligé de changer un autre signe pour maintenir la supersymétrie – et ceci revient à changer le signe de la métrique. On est loin d'un résultat expérimental, mais c'est un fait qui peut être intéressant lorsque les conséquences physiques de la théorie des supercordes seront plus développées.

Je n'ai encore que peu de conséquences expérimentales à offrir, mais le cadre théorique est simple et *inéluctable*: si l'on attribue aux particules, composées ou élémentaires, une représentation du groupe de Poincaré, il faut tenir compte du fait qu'il y a deux groupes Pin. Or, un article « Spin or Pin? » écrit en 1993 avec S.-Jr Gwo et E. Kramer, alors mes étudiants, n'est pas encore accepté pour publication – non à cause de la rareté des conséquences expérimentales mais pour des raisons invraisemblables ([1]) (incompétences, préjugés, etc.) ; mais ceci est une autre histoire.

3. Une phase non triviale.

Cette anedote est... un roman-feuilleton fait d'allers et retours entre la physique et les mathématiques dont je ne donnerai que quelques extraits. Un signe valeur absolue disparaît, et la définition de l'intégrale de Feynman s'embourbe jusqu'au jour où les mathématiques reprennent l'affaire en main.

Chapitre 1. Institute for Advanced Study, Princeton, année scolaire 1949–1950

Enchantée par les possibilités offertes ([2]) par l'intégrale de Feynman,

$$\mathrm{I(S)} \equiv \int \mathcal{D}x \exp\Big(-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{S}(x)\Big) := \lim_{n=\infty} \int_{\mathbb{R}^\mathrm{D}} \frac{dx(t_1)}{\mathrm{A}} \int_{\mathbb{R}^\mathrm{D}} \frac{dx(t_2)}{\mathrm{A}} \dots \int_{\mathbb{R}^\mathrm{D}} \frac{dx(t_n)}{\mathrm{A}} \cdot$$
$$\cdot \exp\Big(\frac{-2\pi i}{h} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{S}\big(x(t_{k+1}), x(t_k)\big)\Big),$$

je cherchais une formule générale pour le facteur A qui ne dépende que de la fonctionnelle d'action,

$$\mathrm{S}(x) = \int_{\mathbb{T}} dt\, \mathrm{L}(x(t),\ \dot{x}\,t)) .$$

Je cherchais aussi une approximation de l'intégrale I(S) facile à calculer. Jusqu'alors I(S) était calculée perturbativement en termes de merveilleux diagrammes – si merveilleux que beaucoup cherchaient à obtenir les diagrammes sans passer par I(S) alors mal définie.

---

(1) Il faut dire, à la décharge de certains, que leur confusion s'explique facilement : on peut caractériser les deux groupes Pin par la valeur du carré de l'opérateur parité; avec la convention utilisée habituellement en physique des particules (renversement de 3 axes) :

$$\Lambda_\mathrm{P} \in \mathrm{Pin}(3,1) \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\mathrm{P}^2 = -\mathbb{1} \quad \text{valeurs propres de } \Lambda_\mathrm{P} : \pm i$$
$$\hat{\Lambda}_p \in \mathrm{Pin}(1,3) \quad \Rightarrow \quad \hat{\Lambda}_\mathrm{P}^2 = \mathbb{1} \quad \text{valeurs propres de } \hat{\Lambda}_\mathrm{P} : \pm 1 .$$

Or la parité définie expérimentalement est la valeur propre de l'opérateur parité choisi comme s'il n'y avait qu'un seul groupe Pin. Certains *referees* ont interprété le choix du signe du carré de l'opérateur (Λ_P^2 ou $\hat{\Lambda}_\mathrm{P}^2$) comme étant le choix du signe de la valeur propre de $\hat{\Lambda}_\mathrm{P}$.

L'existence de 4 valeurs propres (± 1, $\pm i$) avait déjà été notée par G. Racah en 1937 mais ne semble pas avoir été expliquée en termes de *deux* groupes Pin.

(2) Voir l'article de Dyson [FD].

C'est à Léon Van Hove, aux mathématiques si claires, que je parlais de mes problèmes. Grâce à ses conseils, j'obtenais non pas A mais $|A|$ en imposant une condition d'unitarité au propagateur pour un intervalle de temps infinitésimal

$$|A|^2 = \left|\det_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{S}(x(t_{(k+1)}), x(t_k))/h}{\partial x^\alpha(t_{k+1})\partial x^\beta(t_k)}\right| \simeq |\det \text{ de Van Vleck}|, \; h = 2\pi\hbar$$

avec

$$\mathcal{S}\big(x(t_{k+1}), x(t_k)\big) = \int_{t_k}^{tk+1} dt\, \mathrm{L}\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$$

calculé avec x une approximation du chemin classique entre $x(t_k)$ et $x(t_{k+1})$. Bien entendu, une condition d'unitarité ne donnait qu'une valeur absolue, et je n'avais aucune idée pour déterminer la phase.

Pauli s'intéressait à ce travail, et l'année suivante, fit un cours à l'ETH. Dans ce cours il remarque que le choix

$$\mathrm{A} = (2\pi i\hbar)^{-\mathrm{D}/2}\ (\det \text{Van Vleck})^{1/2}$$

conduit à une amplitude de probabilité qui, dans le cas

$$x : \mathbb{T} \longrightarrow \text{espace riemannien},$$

ne satisfait pas l'équation de Schrödinger. Cette remarque de Pauli (sans référence au travail qui ne déterminait que la valeur absolue de A) a suggéré [BD] que l'équation de Schrödinger pour Ψ définie sur un espace riemannien est de la forme $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\mathrm{H} + \xi\hbar^2\mathrm{R}/m)\Psi$ avec R la courbure scalaire et m la masse, et ξ une constante à déterminer.

Le choix de A, c'est-à-dire le choix du propagateur infinitésimal, détermine ξ. Il existe des choix, autres que I(S), pour définir une intégrale fonctionnelle qui conduisent, eux aussi, à une valeur non nulle de ξ. De nombreux articles établissent les relations entre ξ, l'ordre des opérateurs dans l'hamiltonien, et le choix du propagateur infinitésimal. Ultérieurement (voir chapitre 3) un calcul fait sur le fibré des repères donne, sans discrétisation, un propagateur qui résout l'équation de Schrödinger avec $\xi = 0$. On trouvera dans [D-E-N-S] la version infinitésimale de ce propagateur et sa comparaison avec les autres propagateurs infinitésimaux utilisés alors. On trouvera des références plus récentes dans [AM].

Chapitre 2. University of North Carolina, année scolaire 1968–1969

Yvonne Choquet-Bruhat qui m'avait invité à faire trois exposés à son séminaire ([1]) intervint : « Lis Bourbaki, *Intégration,* chapitre IX, commence page 70 ». Ce fut merveilleux :

([1]) Je note ces exposés car, alors, faute de poste pour des raisons administratives, je disparaissais de la corporation des chercheurs. L'invitation d'Yvonne renouvela mon intérêt dans l'intégration fonctionnelle, je lui en suis très reconnaissante.

un chapitre pratique qui se suffisait à lui-même, un chemin pour sortir du bourbier créé par la prescription

$$x \mapsto \{x(t_1), ..., x(t_n)\} \ .$$

Bourbaki traite l'intégrale de Wiener d'une manière que je pouvais généraliser facilement à l'intégrale de Feynman : une promesure est une famille de mesures bornées sur un système d'espaces projectifs. Les conditions de cohérence satisfaites par les mesures bornées s'expriment facilement en termes de leurs transformées de Fourier. Il suffit alors de généraliser le schéma aux transformées de Fourier de mesures au sens des distributions. La promesure devient une prodistribution – terme proposé par Dieudonné, après plusieurs appellations plus ou moins maladroites, mais terme difficile à passer dans le langage courant. Non seulement j'avais un outil bien précis, mais encore facile à utiliser pour résoudre des problèmes physiques complexes. Je m'en servis ultérieurement pour obtenir une formule simple pour les sections efficaces des gloires. En appliquant la formule à la diffusion des ondes gravitationnelles par les trous noirs, type Schwarzschild, on trouve les mêmes résultats que R. Matzner et F. Handler obtenus numériquement par d'autres méthodes.

Chapitre 3. Warwick, année scolaire 1977–1978

L'espace des chemins à valeurs dans un espace riemannien était un fort bon test pour mon nouvel outil : en travaillant sur l'espace $\mathbb{X}$ des chemins x plutôt que sur l'ensemble de leurs discrétisations $\{x(t_i), ..., x(t_n)\}$, j'avais accès aux propriétés de l'image du domaine des fonctions $x \in \mathbb{X}$. Je demandais conseil (1) à K. David Elworthy qui, avec J. Eells, avait résolu ce problème pour l'intégrale de Wiener. « Utilise le développement de Cartan », me dit David. Une excellente idée puisque ce développement définit une relation bi-univoque entre deux espaces de chemins pointés : celui des chemins à valeurs dans un espace riemannien et celui des chemins à valeurs dans un espace plat. Ultérieurement, P. Cartier vit le parti à tirer des espaces de chemins pointés puisqu'ils sont contractibles.

Chapitre 4. University of Texas, 1992–

Grâce à ma lecture d'un chapitre de Bourbaki, et grâce à un cocktail de l'IHÉS, je fis connaissance avec Pierre Cartier. Il s'intéressa aux résultats obtenus par les physiciens via l'intégration fonctionnelle et découvrit l'axiomatique sous-jacente. Voici quelques points forts de cette axiomatique :

---

(1) David me mit en garde : «Ne me fais pas dire que j'ai des résultats valables pour l'équation de Schrödinger». Pour respecter son honnêteté, j'appelais s la racine carrée de -1, et lui disais de mettre $s = 1$ dans mes calculs. Ayant incorrectement utilisé l'expression «by a convenient abuse of language», David m'écrit : «That "convenient abuse of language" phrase is almost as strong an abuse of the word "convenient" as the Mafia could ever have made! since it knocks out one of the major mathematical difficulties!». Sous la bonne influence de David, je devenais mal à l'aise en parlant de chemins continus pour des systèmes dont l'action contient des dérivées. Cartier (voir chapitre 4) offrit des intégrales sur des espaces de Sobolev qui, grâce à des théorèmes de densité, ont des limites dans les espaces utilisés par les probabilistes. Je n'ai donc plus de souci à ce sujet.

- Avant tout préciser le domaine d'intégration. Si l'on veut donner un sens et calculer

$$\mathrm{I}(\mathbb{X},\mathrm{F}) = \int_{\mathbb{X}} \mathcal{D}x\,\mathrm{F}(x)\ ,\ x \in \mathbb{X}\,,$$

il faut préciser $\mathbb{X}$. On précise toujours le domaine d'intégration soit que l'on pense à une simple intégrale, soit que l'on pense à la cohomologie de de Rham. Le domaine $\mathbb{X}$ est un espace de fonctions avec une structure beaucoup plus riche que $\mathbb{R}^\infty$. Pour le définir il faut donner le domaine et l'image du domaine des fonctions $x \in \mathbb{X}$, par exemple,

$$x : \mathrm{T} \to \mathrm{M}^{\mathrm{D}}\,;$$

il faut donner les propriétés analytiques de x, et certaines indications sur quelques valeurs de x, par exemple, $\mathbb{X}$ peut être un espace de chemins pointés ($x(t_0) = x_0$ pour tout $x \in \mathbb{X}$). L'intégrale $\mathrm{I}(\mathbb{X},\mathrm{F})$ reflète, en particulier, les propriétés topologiques de $\mathbb{M}^{\mathrm{D}}$.
- Définir « $\mathcal{D}x$ » implicitement. Le terme « dx » avait déjà donné beaucoup de soucis à Newton. Il aurait peut-être pu dire «je ne sais pas ce qu'est "dx" mais je pose $\int_a^b dx = b - a$ ». Il est évident (1) que $\mathcal{D}x$ ne peut pas être une généralisation automatique de dx. Par contre, l'équation

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{D}}} \mathcal{D}_a x \cdot \exp\Big(-\frac{\pi}{a}|x|^2 - 2\pi i\langle x', x\rangle\Big) = \exp(-\pi a|x'|^2)$$

définit

$$\mathcal{D}_a x = a^{-\mathrm{D}/2}\, dx' \ldots dx^{\mathrm{D}}\,.$$

On peut alors généraliser la définition implicite de $\mathcal{D}_a x$ sur $\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ à la définition implicite de $\mathcal{D}_{s,\mathrm{Q}}x$ sur un espace de Banach $\mathbb{X}$:

$$\int_{\mathbb{X}} \mathcal{D}_{s,\mathrm{Q}}x \cdot \exp\Big(-\frac{\pi}{s}\mathrm{Q}(x) - 2\pi i\langle x', x\rangle\Big) = \exp(-\pi s \mathrm{W}(x'))$$

---

(1) Un exemple simple, dû à Cartier, suggère une définition implicite de $\mathcal{D}x$ valable pour un espace de Banach. Soit

$$\mathrm{I}_{\mathrm{D}} := \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{D}}} dx \exp\Big(-\frac{\pi}{a}|x|^2\Big) = a^{\mathrm{D}/2}\,.$$

Si l'on passe à la limite $\mathrm{D} = \infty$

$$\mathrm{I}_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \\ \infty & \text{si} \quad 1 < a\,. \end{cases}$$

Par contre, si l'on introduit un élément de volume *sans* dimension

$$\mathcal{D}_a x = a^{-\mathrm{D}/2}\, dx^1 \ldots dx^{\mathrm{D}},$$

on peut généraliser le cas fini dimensionnel au cas infini dimensionnel.

avec $s \in \{1, i\}$, Q une forme quadratique sur $\mathbb{X}$, positive pour $s = 1$, $Q(x) = \langle Dx, x \rangle$, et W une forme quadratique sur le dual $\mathbb{X}'$ de $\mathbb{X}$, $W(x') = \langle x', Gx' \rangle$; W et Q sont inverses l'une de l'autre, au sens de DG = $\mathbb{1}$. La définition implicite de $\mathcal{D}_{s,\,Q}$ peut être généralisée à la définition de $\mathcal{D}_{\Theta,\,Z}$ par

$$\int_{\Phi} \mathcal{D}_{\Theta,\,Z}\varphi \cdot \Theta(\varphi, J) = Z(J)\,,$$

où Φ est un espace de Banach et Θ, Z des fonctionnelles continues bornées.
Ces définitions implicites sont suffisantes pour construire une théorie de l'intégration pratique et robuste.

. Alors, et seulement alors, on peut déterminer les fonctionnelles F sur $\mathbb{X}$ intégrables par un $\mathcal{D}_{\mathbb{X}}\, x$ défini implicitement, c'est-à-dire F telle que

$$\int_{\mathbb{X}} \mathcal{D}_{\mathbb{X}} x \cdot F(x) < \infty\,.$$

Il ne convient pas de demander *a priori* quels sont les potentiels susceptibles d'être traités par intégration fonctionnelle.

À l'origine de cette anecdote une phase non triviale, mais de fil en aiguille la poursuite d'une définition des intégrales fonctionnelles. Si l'intégration fonctionnelle s'est développée grâce aux allers et retours entre la physique et les mathématiques, il n'en reste pas moins qu'une intégrale fonctionnelle est un objet mathématique dont la définition ne doit pas faire appel à la physique et dont la définition doit conduire à des règles de calcul simples et robustes. Étant donné un problème physique, on peut *alors* examiner la possibilité de l'analyser et de le résoudre au moyen d'intégrales fonctionnelles.

Conclusion

Sur le pont d'Avignon, on fait comme ci, et puis encore comme ça, mais on ne danse jamais seul ; et je remercie les mathématiciens qui m'ont donné la main pour entrer dans la danse : L. Van Hove, Y. Choquet-Bruhat, K.D. Elworthy, G. Hamrick et P. Cartier. Je remercie Louis Michel de m'avoir invité à raconter ces quelques rondes.

RÉFÉRENCES
(ordre chronologique, par section)

Un isomorphisme qui n'est pas canonique

[LS1] L. SCHULMAN, A Path Integral for Spin, *Phys. Rev.* **176** (1968), p. 1558–1569. Cet article est en grande partie la publication de la thèse du Ph. D. de l'auteur.

[LS2] L. SCHULMAN, Approximate Topology, *J. Math. Phys.* **12** (1971), p. 304–308. Ce titre n'encourage malheureusement pas la lecture de l'article.

[L-D] M. G.G. LAIDLAW and C. DEWITT-MORETTE , Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles, *Phys. Rev.* **D.3** (1971), p. 1375–1378.

[B-L-S-W] L. BIEDENHARN, E. LIEB, B. SIMON, and F. WILCZEK, The Ancestry of the anyon, *Phys. Today*, p. 90–91 (Aug. 1990).

[I-S] T. D. IMBO and E.C.G. SUDARSHAN, Inequivalent Quantizations and Fundamentally Perfect Spaces, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), p. 481–483.

[S-I-I] E.C.G. SUDARSHAN, T. D. IMBO, and C. S. IMBO, Topological and algebraic aspects of quantization : symmetries and statistics, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **49** (1988), p. 387–396.

Une clause «insignifiante» du premier axiome de Stiefel-Whitney

[EC] E. CARTAN, *La Théorie des Spineurs*, Hermann (1966).

[M-S] J. W. MILNOR and J. D. STASHEFF, *Characteristic classes*, Princeton University Press (1974).

[B-D] J.D. BJÖRKEN and S.D. DRELL, Relativistic Quantum Mechanics (1964), Relativistic Quantum Fields (1965) (McGraw-Hill Co, New York).

[S-W] R.F. STREATER and A.S. WIGHTMAN, *PCT, Spin and Statistics, and all that* (W.A. Benyamin, Inc. New York, 1964).

[A-B-S] M.F. ATIYAH, R. BOTT, and A. SHAPIRO, Clifford Modules, *Topology*, Vol. **3** (1964), Suppl. 1, p. 3–38.

[MK] M. KAROUBI, Algèbres de Clifford et *K*-Théorie, *Annales Sci. Éc. Normale*, Supp. 4*e* série 1 (1968), p. 161–270.

[CB-D] Y. CHOQUET-BRUHAT and C. DEWITT-MORETTE, *Analysis, Manifolds and Physics. Part II : 92 Applications*, p. 17–27 (North-Holland, Amsterdam, 1980–1989).

[C-D] S. CARLIP and C. DEWITT-MORETTE, Where the sign of the metric makes a difference, *Physical Review Letters* **60** (1988), p. 1599–1601.

[D-G] C. DEWITT-MORETTE and S.-Jr GWO, One Spin group, two Pin groups, dans *Symposia Gaussiana*, Ed. M. Behara; *Series A Mathematics and Theoretical Physics*, Ed. R.G. Lintz, p. 341–382 (Institutum Gaussianum, P.O. Box 1113, Station A, Toronto, ON M5W 1G6, Canada, 1990).

[D-D] C. DEWITT-MORETTE and B. DEWITT, The Pin Groups in Physics, *Physical Review D* **41** (1990), p. 1901–1907.

[D-G-K] C. DEWITT-MORETTE, S.-Jr GWO, and E. KRAMER, Spin or Pin?, manuscript, http ://godel.ph.utexas.edu/Center/Papers.html (1993).

Une phase non triviale

[FD] F.J. DYSON, Feynman at Cornell, *Physics To-Day* **42** (1949), p. 36.

[CM] C. MORETTE, On the Definition and Approximation of Feynman's Path Integrals, *Phys. Rev.* **81** (1951), p. 848–852.

[WP] W. PAULI, Ausgewählte Kapitel aus der Feldquantisierung (ausgearbeitet von U. Hochstrasser und M.R. Schafroth), ETH 1950/1951.

[BD] B. S. DEWITT, Dynamical Theory in Curved Spaces. I. A review of the Classical and Quantum Action Principles, *Rev. Mod. Phys.* **29**, p. 377–397 (1957). Eq. (7.8) est la forme covariante de l'équation (172) de Pauli. Cet article mentionne, à tort, que l'approche de Pauli à la théorie de Feynman a pour base le travail de Van Vleck. En fait, le point de départ du travail de Pauli (son eq. 172) est l'équation obtenue par Morette et Van Hove.

[CD] C. DEWITT , L'intégrale fonctionnelle de Feynmann. Une introduction, Ann. Inst. Henri Poincaré XI, p. 153–206 (1969).

[NB] N. BOURBAKI, *Integration*, Chapitre IX (Intégration sur les espaces topologiques séparés) Hermann, Paris (1969).

[D-E-N-S] C. DEWITT-MORETTE, K.D. ELWORTHY, B.L. NELSON, and G.S. SAMMELMAN, A stochastic scheme for constructing solutions of the Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **XXXII**, Section A, p. 327–341 (1980).

[C-D] P. CARTIER and C. DEWITT-MORETTE, A new perspective on functional integration, *J. Math. Phys.* **36**(1995), p. 2237–2312 .

[C-S] Ph. CHOQUART and F. STEINER, The story of Van Vleck's and Morette-Van Hove's determinants, *Helv. Phys. Acta*, **69** (1996), p. 637–654.

[AM] A. MOSTAFAZADEH, Scalar curvature factor in the Schrödinger equation and scattering on a curved surface, *Phys. Rev. A* **54** (1996), p. 1165–1170.

C. DEWITT-MORETTE,
Department of Physics and Center for Relativity,
University of Texas,
Austin, TX 78712-1081, USA