PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

LOUIS MICHEL

Physique et mathématique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome S88 (1998), p. 131-144
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1998__S88__131_0>

PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUE

par LOUIS MICHEL

à Léon Motchane,
fondateur de l'IHÉS

Cet article n'est pas un travail érudit sur les rapports entre la physique et les mathématiques. J'ai souvent réfléchi sur ce sujet et j'ai été invité plusieurs fois à en parler (une seule conférence a été publiée [MIC91]). Et je serai fort intéressé de lire les articles de ce recueil. Le mien sera simplement un témoignage vécu, basé sur mon activité de physicien théoricien commencée il y a cinquante ans, et dont les deux tiers se sont déroulés à l'IHÉS, un des lieux de notre planète où les relations entre les mathématiciens et les physiciens sont les plus intenses.

Les systèmes de numération, y compris l'introduction des fractions, ont été inventés indépendamment dans plusieurs civilisations ce qui leur a permis non seulement d'intensifier leur commerce, mais aussi d'enregistrer, par exemple, des observations astronomiques pour faire des prédictions d'éclipses (ou, plus souvent, des prédictions dans les horoscopes). C'est dans la civilisation grecque antique, établie sur une grande partie du bassin méditerranéen ([1]), que sont nées les mathématiques : non seulement la géométrie d'Euclide, et la construction des cinq polyèdres réguliers, mais aussi l'étude des coniques et la preuve de l'existence des nombres irrationnels. Archimède, tout en faisant d'intéressants travaux mathématiques (calculs de surfaces et de volumes, calcul approché de π) entreprit aussi une certaine mathématisation des expériences avec des machines simples (e.g. levier) ou d'hydrostatique; cette méthode lui permit de faire d'importantes découvertes. Parallèlement, les astronomes surent reconstituer dans l'espace les mouvements des astres observés sur la sphère céleste. Des éclipses de Lune ils déduisirent la forme sphérique de la Terre et le rapport entre les rayons de la Terre et de la Lune. Plus tard Eratosthène mesura (avec une bonne précision) le rayon de la Terre et put aussi évaluer la distance Terre-Lune. Aristarque de Samos introduisit l'héliocentrisme, Hipparque découvrit la précession des équinoxes

([1]) Le très récent livre [RUS97] sur ce sujet est excellent.

(dont la période est de 26 000 ans) ; le principal traité d'astronomie qui nous est parvenu est l'Almageste de Ptolémée (remarquable, mais géocentrique). Il fallut plus de mille ans pour douter de la validité de ce dernier système (par exemple, il ne pouvait pas expliquer les variations d'éclat de Mars ou de Vénus). Au XVI^{e} siècle deux nouveaux systèmes furent proposés pour le remplacer : celui de Copernic et celui de Tycho-Brahé. La précision des observations de ce dernier permit à Kepler de trouver la forme de la trajectoire de Mars (une ellipse dont un de ses foyers est occupé par le Soleil) et la variation de la vitesse de Mars sur son orbite (le segment variable Soleil-Mars balaie des aires égales en des temps égaux). Il trouva aussi la relation entre les périodes et les tailles des orbites des planètes.

De nombreuses découvertes scientifiques avaient été faites avant Kepler et beaucoup avaient eu d'intéressantes applications pratiques. Mais on peut dire que la science moderne est née avec Galilée. Habile observateur (satellites de Jupiter, phases de Vénus, etc.) et remarquable expérimentateur, à partir d'expériences sur un plan incliné il formula les lois de la chute des corps par des fonctions ([1]) du temps. Il précisa que ces lois seraient identiques si les mêmes expériences étaient faites sur un bateau se déplaçant à vitesse constante sur une mer calme (ce que nous appelons maintenant le principe de relativité de Galilée). Bien que son exceptionnelle intuition scientifique ne l'ait pas préservé de théories fausses (par exemple celle des marées) qu'il n'abandonna pas, je suis profondément en accord avec son point de vue :

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro, che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, a conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica... (dans *Il Saggiatore*, 1623) ([2]).

Vers la fin de ce XVII^{e} siècle, la découverte par Newton de la théorie universelle de la gravitation est une illustration magnifique de ce point de vue. Vouloir ranger cette révolution de nos connaissances dans le cadre des classifications que nous avons héritées du XIX^{e} siècle n'a pas beaucoup de sens. La théorie de Newton enrichissait ce qui deviendra les mathématiques et fondait ce qui sera la physique : c'était tout simplement de la « Natural philosophy », le déchiffrement d'un chapitre du grand livre de la Nature. Il est encore oiseux de se poser de nos jours la question : la théorie de Newton doit-elle être cataloguée dans la mathématique, l'astronomie, la physique, la mécanique? Il s'agit de l'un des monuments magnifiques de notre patrimoine scientifique qui doit être enseigné aux futurs membres des quatre professions correspondantes et à bien d'autres... par exemple à ces explorateurs du système solaire par satellites qui savent faire ricocher ceux-ci sur le champ de gravitation des planètes pour qu'ils accomplissent plus rapidement leur mission.

Jusqu'au début du XIX^{e} siècle, en dehors de sujets spécifiquement mathématiques (la théorie des nombres et la résolution des équations algébriques), la distinction entre physique et mathématique n'est pas bien définie. C'est toujours la philosophie naturelle, et

---

([1]) Un concept mathématique alors en cours de formation.

([2]) En résumé, en français : « Le livre de la nature est ouvert devant nos yeux; pour le comprendre il faut connaître la langue dans laquelle il est écrit : les mathématiques. »

plus spécialement ce que nous appelons aujourd'hui mécanique rationnelle et mécanique des fluides, qui inspirent au XVIII^{e} siècle les nouveaux problèmes que les mathématiciens cherchent à résoudre. Pendant ce temps d'autres savants mesurent tout ce qui a un intérêt scientifique. Newton avait prédit l'aplatissement de la Terre aux pôles et Mac Laurin avait fait un calcul précis de l'excentricité de l'ellipsoïde terrestre. L'Académie des sciences de Paris finança deux expéditions, en Laponie et au Pérou, pour vérifier ces prédictions théoriques. Les deux expéditions durèrent plusieurs années et ramenèrent de nombreuses autres observations scientifiques. Le passage de Vénus devant le Soleil se produit deux fois par siècle, à 7 ans d'intervalle. Ceux du XVIII^{e} siècle permirent de mieux connaître la taille du système solaire. Coulomb mesura non seulement les charges électriques et leur loi d'attraction ou de répulsion ; il mesura aussi la constante de gravitation, ce qui donnait ainsi la masse de la Terre.

Bien que la transition soit très progressive, il me semble que c'est dans la première moitié du XIX^{e} siècle que se dessina la compartimentation de la science en « disciplines ». Cela était dû en partie à la grande expansion de la science à cette époque et à l'effort de plus en plus grand et soutenu qui était nécessaire pour acquérir, dans une discipline, une compétence permettant de la faire progresser ([1]). Bien sûr certains savants étaient capables de faire avancer avec succès plusieurs domaines de la science. Pour n'en citer qu'un des plus remarquables, rappelons que Gauss, quand il publia à vingt-huit ans les *Disquisitiones arithmeticae* [GAU805] (un des grands monuments des mathématiques), il avait été aussi le plus efficace des astronomes pour déterminer les orbites des trois premiers astéroïdes découverts depuis quatre ans, si bien qu'à trente ans (1807) il fut nommé directeur de l'observatoire de Göttingen. Vers la cinquantaine il transforma complètement et développa l'optique géométrique, il fit faire des progrès solides à la mécanique rationnelle (principe de moindre contrainte, étude des oscillations sans ou avec frottement) et il y engloba aussi (en collaboration avec W. E. Weber) l'étude de phénomènes électromagnétiques. En hommage posthume à ces derniers travaux, le nom de Gauss est aussi celui d'une unité d'induction magnétique.

Certainement la compartimentation de la science est due aux motivations différentes des chercheurs dans les différentes disciplines, même quand ces recherches ont une structure commune. Je voudrais montrer sur un exemple que je connais un peu, comment, dès le XIX^{e} siècle, des savants travaillant sur le même objet abstrait le faisaient dans un langage différent sans intercommunication (et le plus souvent sans intercompréhension) ; appelons cette situation « tour de Babel ». Il s'agit des crystallographes et des mathématiciens s'occupant de géométrie des nombres. En général, les cristaux se cassent en cristaux plus petits, les nouvelles faces qui apparaissent étant parallèles aux faces initiales; c'est le phénomène de *clivage* des cristaux. En imaginant qu'on le répète autant qu'il est possible sur un échantillon, Haüy montra qu'on pouvait obtenir une cellule élémentaire (microscopique) du cristal qu'il appella « molécule intégrante ». En affinant cette idée,

([1]) L'importance de ces deux facteurs n'a fait que croître à notre époque.

il fonda la cristallographie : répétées par translations sur tout un réseau, les cellules fondamentales pavent l'espace [HAÜ783]. La structure du réseau (que nous qualifions d'euclidien ci-dessous) peut être obtenue à partir de la forme du cristal.

Paradoxalement, pour expliquer cet exemple de situation « tour de Babel », il est plus simple de donner d'abord la solution : il s'agit du dictionnaire entre la « théorie des réseaux euclidiens » et la « théorie arithmétique des formes quadratiques positives ». Évidemment nous donnons ce dictionnaire en langage actuel.

Nous notons E_n un espace orthogonal, $\vec{x}, \vec{y}, \ldots$ ses éléments, $\vec{x}.\vec{y}$ son produit scalaire ($\vec{x}.\vec{x} \geqslant 0$, l'égalité implique $\vec{x} = 0$) ; nous notons $\mathcal{E}_n$ un espace euclidien qui a E_n comme groupe de translations. Par définition les groupes d'automorphismes de E_n et $\mathcal{E}_n$ sont respectivement le groupe orthogonal O_n et le groupe euclidien $\mathrm{E}u_n \sim \mathrm{R}^n \rtimes \mathrm{O}_n$. Soit $\{\vec{b}_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, une base de E_n; le sous-ensemble $\mathrm{L} = \{\sum_i \mu_i \vec{b}_i\}$, $\mu_i \in \mathrm{Z}$ forme, par définition, un *réseau de translations* de rang n. Remarquons que L est un sous-groupe de $\mathrm{E}u_n$; il agit donc sur $\mathcal{E}_n$.

Définition : *Les réseaux euclidiens sont les orbites dans $\mathcal{E}_n$ des réseaux de translations.*

Ces orbites sont principales ([1]). En prenant pour origine des coordonnées de $\mathcal{E}_n$ un des points d'un réseau euclidien, on reconstruit son groupe de translations et par conséquent L, son réseau de translations.

A partir de la base qui a défini un réseau L on peut construire la matrice $q(\mathrm{L})$ d'éléments $q(\mathrm{L})_{ij} = \vec{b}_i.\vec{b}_j$. Notons que $q(\mathrm{L})$ est indépendante de la position du réseau dans l'espace E_n et dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$. Nous dirons simplement que $q(\mathrm{L})$ définit le réseau euclidien abstrait (que nous appellerons simplement « réseau » dans la suite).

La matrice $q(\mathrm{L})$ définit une forme quadratique positive sur R^n; soit Q_n l'ensemble de telles formes. Les matrices $n \times n$, réelles, symétriques $q, q', \ldots$ forment un espace orthogonal E_N, $\mathrm{N} = n(n+1)/2$ de produit scalaire $\mathrm{tr}\, qq'$; et dans cet espace Q_n est l'intérieur d'un cône convexe que nous noterons $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n)$. Par la décomposition polaire des matrices réelles inversibles ([2]) on peut obtenir son identification à l'ensemble des classes translatées (= cosets) de O_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathrm{R})$, i.e. $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n) \sim \mathrm{GL}_n(\mathrm{R}) : \mathrm{O}_n$.

Toute autre base de E_n correspondant au même réseau de translation L est de la forme $\{\vec{b}'_i = \sum_j m_{ij} \vec{b}_j\}$, les m_{ij} étant les éléments de matrice de $m \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$; cela signifie que les bases d'un réseau de translations forment une orbite de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$ et que l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des réseaux de E_n peut être identifié aux classes translatées $\mathcal{L}_n \sim \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z}) : \mathrm{GL}_n(\mathrm{R})$. Les changements de base correspondent à l'action $q(\mathrm{L}) \mapsto mq(\mathrm{L})m^\top$ de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$ sur les formes quadratiques positives. La théorie arithmétique des formes quadratiques est l'étude de l'espace d'orbites $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n) \,|\, \mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$. Chaque point de cet espace correspond biunivoquement à un réseau euclidien abstrait. L'ensemble $\mathcal{R}_n$ de ces réseaux est identique

([1]) C'est-à-dire les stabilisateurs (les physiciens disent «petits groupes») de l'orbite sont =1.

([2]) $\mathrm{GL}_n(\mathrm{R}) \ni b = \sqrt{bb^\top}\, r = r\sqrt{b^\top b}$ où $r \in \mathrm{O}_n$ et la racine carrée d'une matrice positive est prise positive, donc $\sqrt{bb^\top}$ et $\sqrt{b^\top b}$ sont dans $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n)$.

aux doubles classes $GL_n(Z) : GL_n(R) : O_n$. En résumé :

$$\mathcal{R}_n \sim \mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n) \,|\, GL_n(Z) \sim GL_n(Z) : GL_n(R) : O_n \sim \mathcal{L}_n|O_n\,; \tag{1}$$

il a donc une topologie naturelle. Comme nous le décrirons, les cristallographes ont été surtout intéressés par la classification des symétries crystallines; par exemple, déterminer le sous-groupe de O_n qui normalise L (i.e. qui tranforme L en lui-même). C'est un groupe fini que nous notons P_L (car il est appelé groupe *ponctuel* du réseau euclidien).

Après Gauss et jusqu'à la fin du siècle, il semble que les mathématiciens étudiant la théorie arithmétique des formes quadratiques n'aient jamais mentionné les réseaux. Un problème technique, mais naturel, était de déterminer un domaine fondamental ([1]) pour l'action de $GL_n(Z)$ sur $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_n)$. Lagrange l'avait résolu en 1773 pour les formes binaires. Gauss, qui commença très tôt l'étude des formes ternaires [GAU805], attaqua ce problème pour celles-ci. Une bonne solution fut d'abord obtenue par Seeber [SEE831], physicien et cristallographe qui s'en servit pour étudier les symétries de cristaux; Gauss [GAU840] fit une critique élogieuse de ce livre, tout en qualifiant les preuves de trop longues et maladroites. Le long mémoire de Bravais [BRA850] contient une étude générale des réseaux à deux et trois dimensions ([2]) dont la généralisation à toute dimension n est évidente. Quand le réseau est défini par une base, il considère aussi la forme quadratique f correspondante ([3]). Il définit aussi, dans la dernière section (= §VI) le réseau « polaire » L par une base correspondante. Rappelons d'abord une définition de L^*, réseau dual de L :

$$L^* = \{\vec{\ell}';\ \forall \vec{\ell} \in L,\ \vec{\ell}'.\vec{\ell} \in Z\};\ \Rightarrow\ (L^*)^* = L, \quad \det(q(L^*)) = \det(q(L))^{-1}; \tag{2}$$

la dernière equalité s'obtient en notant que dans la base $\{\vec{b}_j\}$ de L, la base correspondante $\vec{b}_i^*$ de L^* est définie par $\vec{b}_i^*.\vec{b}_j = \delta_{ij}$. Le réseau polaire défini par Bravais est λL^* avec la normalisation ([4]) $\det(q(\lambda L^*)) = \det(q(L))$. Bravais prouve la dualité et en donne plusieurs applications pour l'étude de la symétrie des cristaux. Ce concept de dualité est devenu encore plus utile en cristallographie depuis les expériences de diffraction de von Laue en 1912. En effet les images de diffraction d'un faisceau (de rayons X, de neutrons, d'électrons...) par un cristal ont un réseau de translations dual de celui du cristal. Ce concept de dualité ne semble avoir été utilisé en mathématique que depuis les années 1930.

Pour chaque point o d'un réseau euclidien $\bar{L}$ correspondant au réseau de translations L, on notera $D_L(o)$ le « domaine de proximité » de o : c'est l'ensemble des points dont la distance à o est plus petite ou égale à la distance de tout autre point du réseau; c'est-à-dire, en notant $d(x,y)$ la distance entre les points $x, y \in \mathcal{E}_n$,

$$D_L(o) = \{x \in \mathcal{E}_n;\ \forall \ell \in \bar{L},\ d(x,o) \leqslant d(x,\ell)\}. \tag{3}$$

([1]) C'est-à-dire un domaine contenant un seul point de chaque orbite.

([2]) Pour faciliter l'exposé il emploie les mots « rangées, réseaux, assemblages » pour les réseaux de dimension 1, 2, 3.

([3]) Il se réfère aux notations de Gauss : [GAU805] p. 426.

([4]) Bravais remarque que la forme quadratique du réseau polaire est proportionnelle à la forme «adjointe» définie par Gauss : $F = f^{-1} \det f$.

$D_L(o)$ a la symétrie P_L. L'ensemble des $D_L(\ell)$ pour tous les points du réseau est obtenu par les translations de L et pave l'espace euclidien. Dirichlet [DIR850] et Hermite [HER850a], en s'exprimant dans le langage des formes quadratiques, ont démontré que pour un ensemble ouvert dense de $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_2)$, ce domaine est un hexagone possédant ([1]) un centre de symétrie; pour les autres formes quadratiques binaires (= réseaux), ce domaine est un rectangle (qui peut devenir un carré quand $P_L \sim O_2(Z)$).

La détermination des cinq types combinatoriaux de ces domaines pour $n = 3$ est l'objet du livre de Fedorov [FED885] ([2]). Dans toute dimension n ces domaines sont des polyèdres; Minkowski [MIN897] prouva que leur nombre maximal de faces (de dimension $n-1$) est $2(2^n - 1)$.

À ma connaissance ([3]), le premier livre qui donna la traduction entre les deux théories est celui de Minkowski [MIN896]. Le dernier ouvrage de Voronoï [VOR08], est divisé en deux mémoires ([4]). Le premier est écrit dans le langage des formes quadratiques et le second utilise une synthèse des deux points de vue. C'est la référence fondamentale pour les domaines de proximités; à juste titre ils sont appelés maintenant *cellules de Voronoï.* L'auteur donne une borne supérieure $N_d(n)$ pour le nombre de facettes de dimension d ($d = 0, 1, \ldots, n-1$ pour les sommets, les arêtes, ..., les faces) pour les domaines de proximités de *tous* les réseaux en dimension n :

$$0 \leqslant d < n, \quad N_d(n) = (n+1-d) \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^{n-d-k} \binom{n-d}{\ell} (1+k)^n = (n+1-d)!\, \mathbf{S}_{n+1}^{(n+1-d)}, \quad (4)$$

où $\mathbf{S}_{n+1}^{(n+1-d)}$ est un nombre de Stirling de seconde espèce. De plus, Voronoï donne une famille de réseaux (on les appelle maintenant réseaux de poids de l'algèbre de Lie A_n), dont la cellule ([5]) atteint les bornes $N_d(n)$ et il détermine dans $\mathcal{Q}_n$ le domaine, un sous-cône convexe, des réseaux (= formes quadratiques) dont les cellules de Voronoï sont combinatoriellement équivalentes (il les appelle de type I). Il y a beaucoup d'autres résultats remarquables dans ce « second mémoire »; depuis vingt ans il est de plus en plus étudié et il suscite de nouveaux travaux. Remarquons que dans les §112-113 Voronoï reconstruit rapidement les cinq cellules qui existent en dimension 3, en citant Fedorov [FED885]. Brillouin [BRI31] ignorait le livre de cristallographie de celui-ci; il retrouva 4 des 5 cellules

---

([1]) Cet hexagone est aussi inscriptible dans un cercle. Je ne connais aucune référence pour cette propriété si simple.

([2]) Fedorov écrivit ce livre *Une introduction à la théorie des figures* entre l'age de 16 et 26 ans quand il était étudiant en médecine, chimie et physique et quand il servit dans l'armée. Il devint un minéralogiste et six ans plus tard ce livre fut publié en russe dans une série d'ouvrages de cristallographie. Aucune traduction dans un langage occidental n'est connue. Un court résumé a été publié en allemand; une analyse assez détaillée est faite dans [SEN84].

([3]) Je serais très reconnaissant au lecteur qui me ferait connaître des références antérieures.

([4]) Ils furent publiés dans le journal de Crelle, couvrant presque 300 pages réparties dans 3 numéros. Voronoï mourut à 40 ans, avant la fin de leur publication.

([5]) Dans un récent travail [MIC97] j'ai donné la nature des différentes facettes de dimension d, $0 \leqslant d \leqslant n-1$ et leur nombre. J'ai aussi introduit la dernière égalité de (4).

de Fedorov en étudiant sur certains exemples de cristaux, la propagation des ondes dans les réseaux et leur diffraction. Ce que les physiciens appellent zone de Brillouin de L est la cellule de Voronoï de L^* avec les faces opposées identifiées; c'est en fait une description géométrique de $\hat{L}$, le dual du groupe L (= le groupe formé par les représentations unitaires irréductibles du groupe L de translations). La cellule de Voronoï fut utilisée pour la première fois en physique dans le fameux article de Wigner et Seitz ([1]) [WIG33] calculant à partir de la mécanique quantique des constantes physiques du sodium métallique.

Soit $s(q) > 0$ la valeur minimum non nulle, prise sur valeurs entières des variables, d'une forme quadratique $q \in Q_n$. Hermite [HER850b] introduisit sur Q_n la fonction réelle

$$\gamma(q) = s(q)(\det(q))^{-1/n}. \tag{5}$$

Notons que $\gamma(q)$ est en fait une fonction sur $\mathcal{R}_n$ qui est aussi invariante par dilatation : $0 < \lambda \in \mathrm{R}$, $\gamma(\lambda q) = \gamma(q)$. Dorénavant, pour la fonction d'Hermite, nous pourrons donc remplacer la variable q par la variable L. L'interprétation de $q(\mathrm{L})$ en termes de réseaux est très intuitive : soit d la plus petite distance entre deux points distincts du réseau, alors $s(q) = d^2$. Considérons «l'empilement de sphères» du réseau, c'est-à-dire l'ensemble des boules de diamètre d et centrées sur les points du réseau; ces boules se touchent mais ne s'interpénètrent pas. Chaque boule est inscrite dans une cellule de Voronoï D. Le rapport de leurs volumes est la densité dens(L) de l'empilement :

$$\mathrm{dens}(\mathrm{L}) = 2^{-n}(\gamma(\mathrm{L}))^{n/2}\omega_n < 1, \quad \omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+\frac{n}{2}), \tag{6}$$

(ω_n est le volume de la boule de rayon unité). Les extréma de dens(L) et $\gamma(\mathrm{L})$ coïncident. Pour la dimension n, le maximum absolu de $\gamma(\mathrm{L})$ est noté γ_n et est appelé constante d'Hermite. Elle était connue, ainsi que le réseau L correspondant à ce maximum, pour $n = 2$ par Lagrange, $n = 3$ par Gauss. Pour $n = 4, 5$ Korkine et Zolotareff, pendant les années 1872-77, déterminèrent toutes les formes quadratiques extrêmes pour la fonction d'Hermite γ; ils proposèrent comme candidats en dimensions $n = 6, 7, 8$ les réseaux des racines de E_n, ces trois algèbres de Lie simples, exceptionnelles trouvées quinze ans plus tard par Killing et Cartan ([2]).

([1]) Seitz m'a dit avoir appris l'existence de cette cellule en lisant la traduction allemande *Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektronentheorie der Metalle*, edit. Springer (1931) du livre de Brillouin. Les figures de la page 304 et le texte correspondant ne sont pas dans la version originale en français.

([2]) Depuis, il a été prouvé que pour $n = 6, 7, 8$, les réseaux de racines E_n correspondent au maximum absolu de la fonction γ d'Hermite (rappelons que les réseaux de racines $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{D}_4, \mathrm{D}_5 = \mathrm{E}_5$ sont les solutions pour les dimensions inférieures). Que les réseaux de racines des algèbres de Lie A, D, E soient extrêmaux est intuitivement évident. Les faces de la cellule de Voronoï $\mathrm{D}(o)$ sont orthogonales aux racines en leur milieu; elles forment donc une orbite du groupe de Weyl et la boule inscrite touche *toutes* les faces de $\mathrm{D}(o)$. Les réseaux de racines sont contenus dans leur dual, le réseau des poids. Pour $n > 8$ et dans certains cas, il existe un réseau intermédiaire sur lequel la fonction γ d'Hermite prend une valeur plus grande. Par exemple $\mathrm{A}_9 \subset \mathrm{A}_9^{(2)} \subset \mathrm{A}_9^*$, où le réseau des racines est d'index 2 dans $\mathrm{A}_9^{(2)}$. La cellule de Voronoï de ce dernier a donc un volume moitié de celle D_r du réseau des racines A_9; on l'obtient en tronquant certains sommets de D_r tout en respectant un

Le premier mémoire de Voronoï [VOR08] est aussi en langage des formes quadratiques; il nomme *parfaites* celles qui satisfont la condition nécessaire trouvée par Korkine et Zolotareff pour qu'elles soient des extréma de la fonction d'Hermite. En termes de réseaux, soit $\{P_s(L)\}$ l'ensemble des projecteurs sur chaque droite de E_n contenant des vecteurs de L de longueur minimale; L est parfait si $\{P_s(L)\}$ engendre l'espace E_N des formes quadratiques (ce qui implique que le nombre des vecteurs les plus courts de L soit $\geqslant (n+1)n$). Voronoï prouva que cette condition n'est pas suffisante pour $n \geqslant 6$, et la compléta par la condition d'eutaxie : I_n, l'identité sur E_n, est à l'intérieur du cône convexe engendré par $\{P_s(L)\} \subset E_N$. Il montra aussi que les réseaux abstraits parfaits (modulo une homothétie) sont en nombre fini pour chaque dimension. Il associa à chacun d'eux un sous-cône de $\mathcal{Q}_n$ (ce qui permet de définir des relations de « voisinage » entre formes parfaites) ; il créa un algorithme pour le calculer et le fit pour le réseau des racines de A_n. Dans le second mémoire, il constate que le cône des réseaux de type I (défini ci-dessus, dans le paragraphe contenant (4)) est identique : c'est « une coïncidence remarquable [qui] est à signaler » (page 147 du second mémoire, avant-dernier paragraphe du §104). En fait, il s'agissait de réseaux duaux, concept dû à Bravais, mais alors ignoré par les mathématiciens. S'il n'était pas mort avant la parution de la deuxième partie de ce second mémoire, Voronoï aurait certainement fait évoluer ce sujet des mathématiques différemment de ce qu'il en a été. Un récent livre *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens* traite assez complètement ce sujet depuis son origine [MAR96]. Sur les empilements de sphères et la symétrie des réseaux le livre de Conway et Sloane [CON88] (avec des contributions « locales » de quelques autres auteurs) est une véritable et très utile encyclopédie.

Au début du XIX^e^ siècle, Lagrange, Cauchy développèrent la théorie des groupes. Il s'agissait essentiellement de groupes de permutations. Mais ce sont les crystallographes qui s'occupèrent de groupes de la géométrie euclidienne pour entreprendre la classification des symétries cristallines ébauchée par Haüy pour le réseau cristallin et la forme des cristaux (nous avons vu que ces deux symétries sont reliées). Considérant les rotations qui laissaient invariante la forme de certains cristaux, Weiss [WEI816] les groupa dans 7 « systèmes cristallographiques ».

L'article de Bravais [BRA50] dont nous avons déjà parlé est plus fondamental. Il détermina les types d'orbites apparaissant dans les deux espaces d'orbites qui représentent l'ensemble $\mathcal{R}_n$ des réseaux dans (1). Bravais appela aussi systèmes cristallographiques les 7 types d'orbites qui apparaissent dans $\mathcal{L}_3|O_3$. Cinq d'entre eux coïncident avec ceux de Weiss. Les types d'orbites de $\mathcal{C}_+(\mathcal{Q}_3) \mid GL_3(Z)$ sont appelées classes de Bravais; il détermina ces 14 classes ([1]). Il y a une application naturelle de l'ensemble des classes de Bravais sur

---

voisinage du centre des faces; la boule inscrite ne change donc pas et la densité de $A_9^{(2)}$ est le double de la densité du réseau des racines A_9. L'étude systématique des réseaux de racines et des réseaux intermédiaires a été faite seulement au milieu de ce siècle : [COX51].

([1]) La définition de ces classes (ou une définition équivalente donnée par les cristallographes) n'est pas celle de Bravais : la sienne est un peu ambiguë et semble un peu moins fine [PIT96]. Mais Bravais donne la l'ensemble des systèmes cristallographiques de Bravais; les deux systèmes, « hexagonal » et « rhomboédrique », contiennent chacun une seule classe de Bravais ([2]).

Les groupes de symétrie des cristaux sont les sous-groupes discrets G du groupe euclidien $\mathrm{E}u_n$ dont les translations forment un réseau L. On les appelle, le plus souvent, *groupe d'espace du cristal.* Le quotient G/L = P est appelé le groupe ponctuel du cristal. C'est un groupe fini. Frankenheim [FRA826] et Hessel [HES830] établirent indépendamment la liste des 32 classes de conjugaison des groupes ponctuels P dans le groupe O_3. On les appelle *classes géométriques*; cette classification est suffisante pour l'étude macroscopique de beaucoup de propriétés physiques des cristaux. Des familles de groupes G (appelés le plus souvent groupes cristallographiques d'espace) ont été obtenues par Jordan à partir de 1867, par Sohncke à partir de 1879. La liste complète de ces groupes (17, 219 pour $n = 2, 3$) fut obtenue indépendamment par le minéralogiste Fedorov et le mathématicien Schönflies (après quelques corrections mutuelles) en 1892. Ces sous-groupes de $\mathrm{E}u_3$ avaient été définis à une conjugaison près dans le groupe affine ([3]). Bieberbach prouva aussi [BIE12] qu'en toute dimension, un isomorphisme entre deux groupes cristallographiques d'espace implique leur conjugaison dans le groupe affine.

Ce n'est qu'après cette classification des groupes d'espace des cristaux qu'est apparu un concept de base : celui de *classes arithmétiques*, c'est-à-dire les classes de conjugaison des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$. Il y en a respectivement ([4]) 2, 13, 73, 710 pour n = 1, 2, 3, 4; Jordan [JOR880] a prouvé que ce nombre est fini pour tout n. A chaque classe arithmétique correspond une action de P sur $\mathrm{L} \sim \mathrm{Z}^n$ et un problème d'extension de groupes G/L = P. Pour chaque classe arithmétique a, les extensions inéquivalentes correspondent aux éléments du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2_a(\mathrm{P}, \mathrm{Z}^n)$ qui est fini puisque P est fini et Z^n a un nombre fini de générateurs. Soit N(P) le normalisateur de P dans $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$; il agit naturellement sur P, L et par conséquent sur $\mathrm{H}^2_a(\mathrm{P}, \mathrm{L})$. Les orbites de N(P) sur $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}, \mathrm{L})$ correspondent aux classes de cristallographie (= classe d'isomorphie) des groupes d'espace

---

classification exacte : il refait et corrige le travail de [FRA42] qui, n'ayant pas su reconnaître que deux d'entre elles étaient identiques, en avait trouvé 15.

([2]) Curieusement les Tables internationales de cristallographies n'ont pas voulu choisir entre Weiss et Bravais ! Elles classent les réseaux n'appartenant pas à un des cinq systèmes cristallographiques communs à ces deux auteurs, dans une «famille hexagonale». Ces tables consacrent au moins deux pages pour chacun des 230 groupes crystallographiques (= groupes d'espace, voir le prochain paragraphe) et celles consacrées aux groupes de la famille hexagonale sont groupées suivant la classification empirique de Weiss : trigonal et hexagonal. Ces tables utilisent une notation remarquable pour désigner chaque groupe d'espace : c'est un symbole, composé au plus de 7 lettres et/ou chiffres, qui permet de déterminer la loi de groupe et la classe de Bravais et, par conséquent, le système de Bravais.

([3]) En fait les physiciens préfèrent se restreindre au groupe affine connexe car ces conjugaisons correspondent aux modifications du crystal par changement de température, de pression... qui ne changent pas sa classe de symétrie. Il faut donc ajouter 11 groupes. On obtient ainsi onze paires de groupes (dites éniantomorphiques) conjugués dans le groupe affine complet. Les deux « orientations », correspondant aux deux groupes de la paire, se trouvent présentes dans une cristallisation et elles peuvent être distinguées par des mesures physiques (qui utilisent par exemple de la lumière polarisée).

([4]) Tous les livres de mathématiques que j'ai consultés et qui donnent le nombre de classes arithmétiques pour n = 3 sont d'accord pour le nombre 70. L'un deux est le si intéressant livre *Symétrie* que H. Weyl écrivit pour une grande audience.

en dimension (1) n. La liste des 4 783 groupes d'espace à 4 dimensions et leur structure sont données dans [BRO77], résultat de calculs sur ordinateurs faits par un groupe interdisciplinaire de 5 auteurs.

Après les mathématiciens et depuis Hermann, des cristallographes ont étudié quelques propriétés de la cristallographie en dimension n arbitraire. Une de ces questions (désignée le plus souvent comme « condition cristallographique ») est purement mathématique : pour quelles valeurs de n le groupe (2) $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Z})$ a des sous-groupes isomorphes à Z_m, le groupe cyclique d'ordre m. Pour $m < 15$ la réponse est donnée par la fonction $\phi(m)$ d'Euler qui fait intervenir la décomposition de m en produit de puissances des nombres premiers :

$$m = \prod_{p \text{ premier}} p^{k_p}; \quad n \geqslant \phi(m) = \prod_{p \text{ premier}} \phi(p^{k_p}) = \prod_{p \text{ premier}} (p-1)p^{k_p-1}. \tag{7}$$

Trop souvent cette formule est présentée à tort (3) comme la solution générale; celle-ci a été donnée par [HER49] :

$$n \geqslant (k_2 > 1)\phi(2^{k_p}) + \sum_{2 < p \text{ premier}} \phi(p^{k_p}), \tag{7'}$$

où $(k_2 > 1)$ est une fonction de Boole : elle vaut 1 quand l'inégalité dans ( ) est satisfaite et vaut 0 dans le cas contraire. Par exemple, la valeur minimum de n est 10 non seulement pour $m = 11,\ 22$ mais aussi pour les valeurs $m = 35, 45, 48, 56, 70, 72, 84, 90, 120$. Il est bien connu que pour $n = 3$, $m \neq 5$. Cependant en 1984 [SHE84] furent trouvés des cristaux à symétrie icosaédrique; ces cristaux sont apériodiques, c'est-à-dire sans réseau de translations. Beaucoup de progrès ont été faits sur l'étude des nombreux cristaux apériodiques (4). Le concept de cristal est à redéfinir. Les figures de diffraction de ces nouveaux cristaux posent encore de très intéressants problèmes mathématiques.

Le plus important progrès de la physique au XIXe siècle est la théorie de Maxwell, qui rassemble l'étude physique des phénomènes électriques, magnétiques et lumineux dans un système linéaire d'équations aux dérivées partielles (5). La lumière visible correspond simplement à un domaine de fréquence des ondes électromagnétiques, d'autres domaines de fréquence étant si utilisés de nos jours comme support de communications, comme rayons ultraviolets, rayons X ou rayons γ. Les équations de Maxwell sont incompatibles avec la mécanique newtonienne : leurs groupes de symétrie sont différents. La nouvelle

(1) Que le nombre total de classes soit fini était une partie du 18e problème d'Hilbert; il fut résolu, sous une forme moins directe, dans [BIE12].

(2) La réponse est la même pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Q})$ sur les rationnels.

(3) Par exemple «Encyclopedic Dictionnary of Mathematics» (Math. Soc. Japan); traduction anglaise : MIT press (1977), article «Crystallography» § A.

(4) Certains les appellent des quasi-cristaux. Ce sont des vrais cristaux avec des corrélations de position des atomes de longueur infinie; «apériodique» indique en quoi ils se distinguent des cristaux périodiques.

(5) Cette théorie est exposée dans le « A treatise on electricity and magnetism » [MAX873] qui contient aussi les connaissances de calcul différentiel et intégral nécessaires pour établir la théorie.

mécanique fut élaborée dès le début du XX^{e} siècle, principalement par Lorentz et Einstein; son cadre est l'espace-temps pseudo-euclidien. Pour la cohérence il fallait aussi abandonner l'approximation (très suffisante à l'échelle terrestre) newtonienne de la théorie de la gravitation. La nouvelle théorie, créée par Einstein en cinq ans (1911–16) et appelée aussi «relativité générale», réalise une révolution dans nos concepts : la géométrie de notre espace-temps dépend directement de l'énergie qu'il contient; plus précisément c'est une variété riemannienne pseudo-euclidienne dont le tenseur de courbure est proportionnel au tenseur de densité d'impulsion et énergie ([1]). La lumière se propage le long des géodésiques de cette variété.

La mécanique classique n'est plus valable à l'échelle atomique. Au milieu des années vingt fut élaborée très rapidement la mécanique quantique : deux réalisations mathématiques équivalentes en furent données, l'une par Heisenberg et l'autre, un an après, par Schrödinger. Les mathématiciens von Neumann et Weyl apportèrent des contributions importantes à cette nouvelle théorie physique. La version relativiste fut mise en équation par Dirac en 1928 (il réinventa les algèbres de Clifford à cette occasion). Il faut souligner que les équations d'Einstein et celles de Dirac furent découvertes à partir des conditions mathématiques (y compris leur symétrie) qu'elles devaient satisfaire. En fait, les équations de Dirac contenaient une involution supplémentaire (appelée maintenant « conjugaison de charge ») qui conduisit Dirac à prédire l'existence de l'antimatière. Cette prédiction à la fois détaillée et concise est faite à la fin de l'introduction de l'article [DIR31] où sont inventés et quantifiés les monopoles magnétiques. L'introduction commence par « The steady progress of physics requires for its formulation a mathematics which is continuously more advanced... a mathematics that continuously shifts its foundation and gets more abstract».

Tout un livre pourrait être écrit sur la symbiose entre les mathématiques et certaines parties de la physique au XX^{e} siècle; on ne peut le faire dans un court article. L'IHÉS est un des points privilégiés pour observer et même participer à cette évolution. Mais je n'y ai été qu'un utilisateur, très gourmand et un peu gourmet, de mathématiques; ce fut merveilleux pour moi et très utile pour la physique que j'ai voulu faire. Serait-ce utile de faire connaître aux mathématiciens les desiderata et... les avatars d'un utilisateur? J'en doute, les motivations sont si différentes! C'est rare de recevoir des produits ([2]) «clés en main». Il s'agit plus souvent de «kit» à monter. C'est un travail banal laissé à l'utilisateur : la notice de montage est si claire! Oui mais parfois, en le montant, il devient vite évident que celui qui l'a conçu ne l'a jamais essayé, ni même monté. Il y a des surprises, certaines décevantes, d'autres très agréables!

Je suis très reconnaissant à tous ceux qui ont participé à la décision de m'inviter à l'IHÉS comme troisième professeur permanent. Presque tous sont morts; ils sont vivants

---

([1]) Hilbert écrivit indépendamment les mêmes équations quelques semaines après.

([2]) En voici un très simple exemple : à la suite d'une conversation au déjeuner, un visiteur me passe un prétirage de [STA77] qui donne une méthode pour calculer sous une forme élégante et efficace l'algèbre des polynômes invariants d'un certain type de groupes finis. Je vois tout de suite qu'il s'applique à tous les sous-groupes finis de O_3 et cela intéresse beaucoup les physiciens!

dans ma mémoire. Je suis entré à l'IHÉS en octobre 1962, dès son déménagement au Bois-Marie. Quelle activité avaient les deux premiers professeurs permanents (le séminaire Grothendieck attirait une remarquable audience) ! Je n'apprendrai rien au lecteur en disant qu'ils n'étaient pas intéressés par la physique. Jean Dieudonné fut très gentil pour moi. Nous aimions discuter ensemble. Au bout de quelques mois, je pus même me permettre de le taquiner un peu : je dénichai pour lui tous les articles ou les prétirages de physiciens qui le citaient. Au début il fut suffoqué, puis assez vite intéressé. Nos relations devinrent excellentes. Moins de 18 mois après mon entrée à l'IHÉS, ma famille déménagea de Paris à Bures où habitait aussi la famille d'Alexander Grothendieck. Nous nous recevions assez souvent en famille. Scientifiquement, Sacha m'influença sans que je m'en aperçusse tout de suite ([1]) : son enthousiasme pour les mathématiques était communicatif et il avait un art pour expliquer en termes non techniques sa philosophie de cette science.

L'article de A. S. Wightman, dans ce recueil, traite surtout de la physique à l'IHÉS avant le déménagement au Bois-Marie. Il faut ajouter que Harry Lehmann, à qui une position de professeur permanent fut offerte mais finalement non acceptée, travailla trois ans à l'IHÉS (années académiques 62–65). En 63–64, en plus de Arthur Wightman, Arthur Jaffe, Oscar Lanford, vinrent pour de moins longs séjours Julian Schwinger, Res Jost, Vladimir Glaser, Henri Epstein; René Thom y était aussi comme professeur permanent et David Ruelle arriva en octobre 1964. Il est vrai qu'il ne s'agissait encore que d'une cohabitation avec la géométrie algébrique qui brillait comme une étoile de première magnitude au firmament des mathématiques. Mais *la vision de Léon Motchane prenait corps.*

RÉFÉRENCES

[BIE12] L. BIEBERBACH, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung), Die Gruppen mit einem endlichen fundamental Bereich, Math. Ann. **72** (1912) 400–412.

[BRA50] A. BRAVAIS, Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. J. École Polytech. **19** (1850) 1–128.

[BRI30] L. BRILLOUIN, Les électrons libres dans les métaux et le rôle des réflexions de Bragg. J. Physique Radium, **VII 1** (1930) 376–398.

[BRO78] H. BROWN, R. BÜLOW, J. NEUBÜSER, H. WONDRATSCHEK, H. ZASSENHAUS, *Crystallographic groups of four dimensional space*, John Wiley & and sons, New York, 1978.

[CON88] J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE, *Sphere Packings, Lattices and Groups.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290), Springer-Verlag, 1988. Seconde édition en 1993.

[COX51] H.S.M. COXETER, Extreme forms, Canadian J. Math., **3** (1951) 391-441.

[DIR31] P.A.M. DIRAC, Quantized Singularities in the Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc. **A 133** (1931) 60–72.

[DIR850] P.G. LEJEUNE-DIRICHLET, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, J. reine angew. Math. (= Crelle), **40** (1850) 209–227.

([1]) Au début, Jean Lascoux, visiteur fréquent, me servait d'interprète et il aidait Grothendieck dans ses travaux de paléographie pour lire des mathématiques de plus de cinquante ans!

[FED885] E.S. FEDOROV, Nachalo ucheniya o figurakh (*Verhandlungen der russisch-kaiserlichen mineralogischen Gesellschaft zu St Petersbourg*), **21** (1885) 1–279.

[FRA826] M.L. FRANKENHEIM, Crystallonomische Aufsätze, ISIS enzyklopädische Zeitung von Oken, **5** (1826) 497–515; *ibid*, **6** (1826) 542–565.

[FRA842] M.L. FRANKENHEIM, System der Crystalle, *Nova Acta Acad. Caesarea Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum* **19** (1842) 471–660.

[GAU805] C.F. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticae* (1805).

[GAU805] C.F. GAUSS, Recension der «Untersuchungen über Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber», J. reine angew. Math. (= Crelle), **20** (1840) 312–320.

[HAÜ783] R.J. HAÜY, *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées*, Paris (1783).

[HER49] C. HERMANN, Kristallographie in Räumen beliebiger Dimensionszahl. I Die Symmetrieoperationen, Acta Crystallogr., **2** (1949) 139–145.

[HER850a] C. HERMITE, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires, J. reine angew. Math. (= Crelle), **40** (1850) 173–177.

[HER850b] C. HERMITE, Lettres à Jacobi, J. reine angew. Math. (= Crelle), **40** (1850) 261–278.

[HES830] J.F.C. HESSEL, Krystall p. 1023-1360 in *Gehler's Phys. Wörterbuch*, Bd 5, Abt. 2, Schwikert, Leipzig (1830).

[JOR880] C. JORDAN, Mémoire sur l'équivalence des formes, J. École Polytech. **48** (1880) 112-150.

[MAR96] J. MARTINET, *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens*, édit. Masson, Paris (1996).

[MAX873] J.C. MAXWELL, A treatise on electricity and magnetism (1873), 3rd edition (1891) Clarendon Press, reprinted by Dover (1954).

[MIC91] L. MICHEL, La symétrie en physique, p. 63–71 de *La physique et les mathématiques*, Revue du Palais de la découverte, n^o 40, mai 1991.

[MIC97] L. MICHEL, Complete description of the Voronoï cell of the Lie algebra A_n weight lattice. On the bounds for the number of d-faces of the n-dimensional Voronoï cells. IHÉS prétirage P/97/53.

[MIN896] H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig (1896), reprint Johnson, New-York (1968).

[MIN897] H. MINKOWSKI, Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1897) [Ges. Abhand. **2** 103–121.]

[PIT96] M. PITTERI, G. ZANZOTTO, On the definition and classification of Bravais lattices. Acya Cryst. **A52** (1996) 830–838.

[RUS97] L. RUSSO, *La revoluzione dimenticata : il pensiero scientifico greco e la scienza moderna.* Feltrinelli (Milano) 1997.

[SEE831] L.A. SEEBER, *Untersuchungen über Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen.* Freibourg (1831).

[SEN84] M. SENECHAL, R.V. GALIULIN, An introduction to the theory of figures : the geometry of E.S. Fedorov, Topologie structurale, **10** (1984) 5–22.

[SHE84] D. SHECHTMAN, I. BLECH, D. Gratias, J.W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. Phys. Rev. Lett., **53** (1984) 1951–1953.

[VOR08] G. VORONOÏ, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.* Premier mémoire : Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, J. reine angew. Math. (= Crelle) **133** (1908) 97–178. Second mémoire : Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *ibid.* **134** (1908) 198-287 et **136** (1909) 67-181.

[WIG33] E. WIGNER and F. SEITZ, On the constitution of metallic sodium, Phys. Rev., **43** (1933) 804–810.

[WEI816] C.S. WEISS, Ueber eine verbesserte Methode für die Bezeichnung der verschiedenen Flächen eines Krystall-systems. Abh. der kgl. Akad. der Wiss. (1816-17) 286–336.

Louis MICHEL
Institut des Hautes Études Scientifiques,
91440 Bures-sur-Yvette, France