PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

YVES ANDRÉ

Pour une théorie inconditionnelle des motifs

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 83 (1996), p. 5-49
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1996__83__5_0>

POUR UNE THÉORIE INCONDITIONNELLE DES MOTIFS

par YVES ANDRÉ

0. Introduction

0.1. Au cœur de la philosophie des motifs, imaginée par A. Grothendieck il y a une trentaine d'années, il y a la recherche d'une cohomologie universelle $h(\mathrm{X})$ pour les schémas X algébriques sur un corps de base K fixé, à valeurs dans une certaine $\otimes$-catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire — la catégorie des *motifs* —, et telle que toute cohomologie « raisonnable » se factorise à travers h (réalisation des motifs). En citant J.-P. Serre [S92], on dispose en effet « de trop de groupes de cohomologie qui ne sont pas suffisamment liés entre eux — malgré les isomorphismes de compatibilité. Par exemple, si X et Y sont deux variétés (projectives, lisses), et $f\colon \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{X}, \mathbf{Q}_l) \to \mathrm{H}^i_{\text{ét}}(\mathrm{Y}, \mathbf{Q}_l)$ une application $\mathbf{Q}_l$-linéaire, où l est un nombre premier fixé, il n'est pas possible en général de déduire de f une application analogue pour la cohomologie l'-adique, où l' est un autre nombre premier. Pourtant, on a le sentiment que c'est possible pour certains f, ceux qui sont "motivés" (par exemple ceux qui proviennent d'un morphisme de Y dans X, ou plus généralement d'une correspondance algébrique entre X et Y). Encore faut-il savoir ce que "motivé" veut dire ! »

Voici, en se limitant aux schémas X projectifs et lisses, et à reformulation près, la construction originale de Grothendieck :

Un motif (semi-simple) est un symbole $qh(\mathrm{X})\ (n)$, où X est un schéma projectif lisse sur K, n un entier, et q une $\mathbf{Q}$-correspondance algébrique idempotente de degré 0 sur X, modulo une équivalence adéquate convenable $\equiv$, par exemple l'équivalence numérique (on dit que $qh(\mathrm{X})\ (n)$ est le motif découpé sur X par q, et n fois tordu à la Tate); un morphisme de motifs $qh(\mathrm{X})(n) \to ph(\mathrm{Y})\ (m)$ est une correspondance de la forme $p \circ r \circ q$, où r est elle-même une correspondance algébrique de X vers Y modulo $\equiv$ de degré $m - n$ (les définitions de base sont rappelées en appendice). Le foncteur contravariant de cohomologie motivique associe $h(\mathrm{X}) := \mathrm{id}\, h(\mathrm{X})\ (0)$ à X, et le produit tensoriel des motifs correspond au produit des schémas.

Bien que source d'inspiration dans de nombreux domaines de la géométrie algébrique et arithmétique, la théorie est restée longtemps presque entièrement conjecturale, faute de progrès suffisants sur les points suivants.

1) *Le problème des fondements :* la construction naturelle des réalisations requiert que $\equiv$ ne soit pas moins fine que l'équivalence homologique. Or, dans l'autre sens, U. Jannsen [J92] a récemment démontré que la catégorie des motifs de Grothendieck est abélienne semi-simple si et seulement si $\equiv$ est l'équivalence numérique. On est donc conduit à admettre, pour développer la théorie, que l'équivalence homologique et l'équivalence numérique coïncident — l'une des fameuses conjectures standard (en fait, nous montrerons dans l'appendice que si $\equiv$ n'est pas plus fine que l'équivalence homologique, la propriété des motifs de former une catégorie abélienne et correctement graduée impose cette conjecture standard même sans requérir la semi-simplicité).

On dispose alors sur la $\otimes$-catégorie des motifs d'une graduation naturelle (le « yoga des poids »), et la théorie « tannakienne » (conçue par Grothendieck à cette occasion) montre qu'elle est équivalente à la $\otimes$-catégorie des représentations d'une gerbe proréductive, dont les diverses incarnations donnent lieu aux *groupes de Galois motiviques* et à une correspondance de type galoisien; ceci ramène nombre de problèmes géométriques à des questions de représentations de groupes réductifs sur $\mathbf{Q}$.

2) *Le problème de la construction de cycles motivés :* la théorie n'est vraiment utile que si l'on dispose d'assez de cycles motivés — c'est-à-dire algébriques, selon la définition de Grothendieck. A ce point, on est confronté aux conjectures de Hodge et Tate, ou encore à celle plus modeste de Grothendieck sur la déformation des cycles algébriques par transport parallèle ([G68], n. 13). Du reste, en caractéristique nulle, les conjectures standard (et donc le problème des fondements) se ramènent à la construction d'un cycle algébrique $*_{\mathrm{L}}$ (cf. 0.2).

0.2. En caractéristique nulle, P. Deligne a proposé une variante «affaiblie » mais inconditionnelle de cette théorie [DM82], où l'on remplace correspondances algébriques par correspondances absolument de Hodge (ou absolument de Hodge-Tate selon A. Ogus [O82] si l'on veut des réalisations cristallines); il s'agit essentiellement de ne retenir des cycles algébriques que leurs propriétés cohomologiques les plus visibles, en rendant les réalisations quasi tautologiques. La catégorie des motifs de Grothendieck est une sous-catégorie *a priori* non pleine de cette catégorie de « motifs de Hodge absolus »; le problème 2 ci-dessus s'en trouve quelque peu facilité. Par exemple, Deligne [D82], et ultérieurement D. Blasius, A. Ogus [O90] et (indépendamment) J.-P. Wintenberger, ont réussi à montrer que tout cycle de Hodge sur une variété abélienne est absolument de Hodge, resp. de Hodge-Tate. Malgré ces succès, le caractère transcendant de cette définition de motifs reste un handicap (cf. *e.g.* la question de la compatibilité du système des réalisations étales l-adiques d'un motif de Hodge absolu sur un corps de nombres), et peu propre à exprimer, selon le vœu de Grothendieck, « l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique ».

Dans cet article, nous revenons à la construction originale de Grothendieck, et proposons une définition des morphismes motivés qui soit aussi proche que possible de la sienne tout en résolvant le problème des fondements. Nous tâcherons aussi de montrer qu'elle peut rendre au moins autant de services que la théorie de Hodge absolue (du moins dans le cadre présent des motifs purs).

Pour alléger cette introduction, nous nous bornons au cas d'un corps de base K de caractéristique nulle. Soit $H^\bullet$ une théorie de cohomologie classique, *i.e.* de de Rham, étale l-adique, ou de Betti si $K \subseteq \mathbf{C}$. On dispose alors du théorème de Lefschetz fort : pour tout $i \leqslant d = \dim X$, $L^{d-i} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)\ (d-i)$ est un isomorphisme. Si l'on choisit pour $\equiv$ l'équivalence homologique (qui ne dépend pas du choix de $H^\bullet$), ce qui garantit l'existence d'une $H^\bullet$-réalisation, l'isomorphisme de Lefschetz est la réalisation d'un morphisme de motifs $h^i(X) \to h^{2d-i}(X)\ (d-i)$, cf. § 4. Or si l'on veut que la catégorie des motifs soit abélienne et correctement graduée, on voit que l'involution « de Lefschetz » $*_L$, donnée en chaque degré par l'isomorphisme de Lefschetz ou son inverse (§ 1), doit être un morphisme de cette catégorie.

Faute de savoir en général si $*_L$ est donnée par une correspondance algébrique, l'idée clé de cet article est d'adjoindre *formellement* cette involution aux correspondances algébriques pour définir les cycles motivés.

0.3. Plus précisément, soit $\mathscr{V}$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des K-schémas X projectifs lisses, stable par produits, sommes disjointes et composantes connexes. Les objets de $\mathscr{V}$ seront les *pièces de base* du « meccano des motifs ».

Théorème **0.3.** — *Il existe une* $\mathbf{Q}$*-algèbre graduée* $A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)$, *contenant les cycles algébriques sur* X (modulo équivalence homologique), *et, pour toute cohomologie classique* H, *une application linéaire injective* $\mathrm{cl}_H : A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X) \to H^{\mathrm{pair}}(X)$ *prolongeant l'application « classe de cycle algébrique » et doublant la graduation, avec les propriétés suivantes :*

i) *pour tout élément* ξ *de* $A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)$, *il existe un objet* Y *de* $\mathscr{V}$, *des* $\mathbf{Q}$*-cycles algébriques* α *et* β *sur* $X \times Y$, *et une polarisation de* $X \times Y$ *de type « produit »* $[X] \otimes \eta_Y + \eta_X \otimes [Y]$, *tels que* $\mathrm{cl}_H(\xi) = \mathrm{pr}^{X \times Y}_{X\,*}(\mathrm{cl}_H(\alpha) \cup *_L\, \mathrm{cl}_H(\beta))$ *pour toute* H;

ii) *l'algèbre* $A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)$ *et les applications* cl_H *dépendent bifonctoriellement de* X *: on dispose du formalisme* f_*, f^* *pour les morphismes, reliés par la formule de projection.*

Nous appellerons *cycles motivés* (modelés sur $\mathscr{V}$) les éléments de $A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)$ (cette notion se réduit à celle de cycle algébrique si pour tout objet de $\mathscr{V}$ l'involution $*_L$ est donnée par une correspondance algébrique). On montre que les cycles motivés sont de Hodge-Tate absolus (§ 2.5).

La propriété i) [1] entraîne que la définition des cycles motivés est « de nature algébrique » (par opposition à celle des cycles de Hodge absolus), et que les applications sont compatibles aux isomorphismes de comparaison entre cohomologies classiques.

0.4. La propriété ii) permet de développer un formalisme des correspondances « motivées » et de leur composition. On peut alors mimer la construction 0.1 des motifs découpés sur X, pour tout schéma X dans $\mathscr{V}$, en remplaçant $\mathbf{Q}$-correspondances algébriques par correspondances motivées. La $\otimes$-catégorie ainsi obtenue [2] sera appelée *$\otimes$-catégorie des motifs modelée sur $\mathscr{V}$, et notée $\mathscr{M}(\mathscr{V})$.*

C'est de ces motifs-ci dont il s'agira dans la suite de cette introduction.

Théorème **0.4.** — *La $\otimes$-catégorie $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est tannakienne sur $\mathbf{Q}$, graduée, semi-simple, polarisée. En outre, toute cohomologie classique* $\mathrm{H}^{\bullet}$ *se factorise à travers la cohomologie motivique h en donnant naissance à un foncteur libre gradué sur $\mathscr{M}(\mathscr{V})$* (appelé H-réalisation).

Ce théorème apporte donc en caractéristique nulle une réponse satisfaisante au problème des fondements. Il permet de développer inconditionnellement une *théorie de Galois motivique* (4.6).

0.5. Passons aux problèmes de construction de cycles motivés, et, d'abord, à la conjecture de Grothendieck évoquée plus haut qui prédit l'invariance de la notion de cycle algébrique par déformation plate; nous en prouverons la variante « motivée » :

Théorème de déformation 0.5. — *Soient* S *un schéma réduit connexe de type fini sur* $\mathbf{C}$, $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme projectif et lisse, et* ξ *une section du faisceau* $\mathrm{R}^{2p} f_* \mathbf{Q}(p)$ *sur l'analytisé de* S. *Alors si en un point* $s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$, *la fibre* ξ_s *est motivée, il en est de même en tout point* $t \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$ (pour un choix convenable de pièces de base). *Si de plus* S *est projectif lisse, alors* ξ *provient d'un cycle motivé* ξ_{X} *sur* X.

L'essentiel de la preuve consiste à interpréter en termes de motifs le « théorème de la partie fixe » de Deligne [D71], qui n'était exploité jusque-là qu'en théorie de Hodge.

0.6. Ce résultat a de nombreux corollaires, dont voici quatre.

Théorème **0.6.1.** — *Soit* M *un motif sur* $\mathbf{C}$. *Il existe un motif* N *sur un corps de nombres tel que les groupes de Galois motiviques associés à* M *et* N *soient isomorphes.*

Cet énoncé figurait dans [S94] 6.4 comme conséquence des conjectures de Grothendieck et Tate.

---

[1] Dans laquelle on pourrait substituer l'involution de Hodge abstraite (§ 1) à celle de Lefschetz sans changer la notion de cycle motivé.

[2] Avec la contrainte de commutativité donnée par la règle de Koszul, cf. § 4.

Théorème **0.6.2.** — *Tout cycle de Hodge* ξ *sur une variété abélienne* A *est motivé. Plus précisément,* ξ *est somme de cycles de la forme* $p_*(\alpha \cup *_L \beta)$, *où* α *et* β *sont des* $\mathbf{Q}$*-cycles algébriques sur* $A \times B \times Y_1 \times \ldots \times Y_n$, B *désignant une variété abélienne,* Y_i *l'espace total d'un pinceau compact de variétés abéliennes, et* p *la projection sur* A.

Ce nouveau pas en direction de la conjecture de Hodge, qui renforce le théorème de Deligne-Blasius-Ogus-Wintenberger, permet notamment d'attacher à tout caractère de Hecke algébrique un unique motif découpé sur un produit de variétés abéliennes potentiellement de type CM et de variétés de dimension 0. On peut alors remplacer dans tout le livre de N. Schappacher [Scha88] (sauf aux deux dernières pages) les motifs de Hodge absolus par ceux définis ici. En pratique, chaque fois qu'on sait prouver qu'une classe de cohomologie est de Hodge absolue, le même argument essentiellement montre qu'il est motivé en notre sens.

La preuve de 0.6.2 suit le fil de celle de Deligne du fait que tout cycle de Hodge l'est absolument (1). Des arguments de même farine montrent :

Théorème **0.6.3.** — *Le motif de toute surface* K3 *projective et de toute hypersurface cubique de* $\mathbf{P}^n$, $n \leqslant 6$, *est isomorphe à un motif découpé sur une variété abélienne.*

Une autre source de cycles motivés est fournie par la monodromie (§ 5.3) :

Théorème **0.6.4.** — *Soient* S *un schéma connexe, lisse et séparé sur* $\mathbf{C}$, *et soit* $f: X \to S$ *un morphisme projectif et lisse. Pour tout point* $s \in S(\mathbf{C})$, *notons* $\mathfrak{H}_s$ *l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski de l'image de* $\pi_1(S(\mathbf{C}), s)$ *dans* $GL(H^i(X_s, \mathbf{Q}))$, et $\mathfrak{G}_s$ *l'algèbre de Lie du groupe de Galois motivique de* $h^i(X_s)$.

Alors $\mathfrak{H}_s$ *et* $\mathfrak{G}_s$ *sont motiviques,* i.e. *sont les réalisations de sous-motifs de* $\mathcal{E}nd\, h^i(X_s)$ (pour un choix convenable de pièces de base).

De plus, pour tout s *hors d'une partie maigre,* $\mathfrak{H}_s$ *est un idéal de* $\mathfrak{G}_s$; *c'est l'idéal dérivé* $[\mathfrak{G}_s, \mathfrak{G}_s]$ *si, pour un point* t *au moins,* $\mathfrak{G}_t$ *est abélienne.*

Le théorème de déformation s'avère aussi essentiel dans l'étude géométrico-arithmétique de la variation du groupe de Galois motivique dans une famille (5.2).

0.7. Parmi les problèmes laissés ouverts dans cette théorie, il y a celui de la compatibilité des représentations l-adiques attachées à un motif. Néanmoins, ce problème ne paraît pas aussi inaccessible que dans la théorie de Hodge absolue; il se ramène à la question suivante (§ 9) : notant $H_l(Z)$ la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbf{Q}_l$ d'une variété projective lisse Z sur un corps séparablement clos de caractéristique $p \neq l$, et T, U deux intersections complètes de même dimension dans Z, le nombre l-adique

(1) Rappelons que celle-ci reposait sur deux « principes » A et B; or nous avons montré dans [A92b] que A est superflu, et B n'est autre, dans le présent contexte, que le théorème 0.5.

$\langle \mathrm{cl}_H(T) \cup *_L \mathrm{cl}_H(U) \rangle$ est-il un nombre rationnel indépendant de l? (Pour d'autres avantages sur la théorie de Hodge absolue, voir aussi 5.2 et 9.5.)

0.8. L'article se poursuit par une brève étude des motifs à coefficients dans $\mathbf{Z}$, et du groupe de Galois motivique comme schéma en groupe affine plat sur $\mathbf{Z}$, et s'achève par la construction des motifs en caractéristique p et la théorie de la spécialisation en inégale caractéristique (qui serait inconcevable dans le cadre Hodge absolu).

La situation en caractéristique p soulève plusieurs problèmes, que nous ne ferons qu'effleurer dans cet article : la catégorie des motifs ne sera tannakienne que sur l'extension de $\mathbf{Q}$ engendrée par les nombres $\langle \mathrm{cl}_H(T) \cup *_L \mathrm{cl}_H(U) \rangle$ comme ci-dessus; d'ailleurs pour obtenir une catégorie abélienne, on est amené à définir les morphismes comme classes de cycles motivés modulo une certaine équivalence $\equiv$, analogue de l'équivalence numérique (mais dont l'indépendance en H n'est pas claire). Enfin la construction des réalisations est problématique; nous y reviendrons ultérieurement [A], cf. déjà [A94].

Je remercie O. Gabber et N. Schappacher pour des questions qui m'ont conduit à des améliorations et, tout particulièrement, P. Deligne de m'avoir obligeamment envoyé une longue liste de corrections et commentaires, dont la présente version a grandement bénéficié; l'une de ses remarques, notamment, m'a suggéré l'énoncé du théorème 0.6.4. Quant à ma dette envers A. Grothendieck, cette étude tout entière en est la marque.

1. Les involutions de Lefschetz et de Hodge

1.1. Dans toute la suite, $H^\bullet$ désigne une théorie de cohomologie de Weil à coefficients dans un corps de caractéristique nulle F pour les schémas projectifs lisses sur un corps K fixé (cf. [Kl68] 1.2, [SR72], [GM78]); par abus d'écriture, nous ferons l'économie des « twists de Tate » jusqu'au § 4, ce qui revient à choisir un générateur de $F(1)$.

Soit X un K-schéma projectif lisse purement de dimension d, muni de la classe $\eta = c_1(\mathfrak{L}_X) \in H^2(X)$ d'un faisceau inversible ample $\mathfrak{L}_X$, et soit $L = L_\eta$ l'opérateur de Lefschetz sur $H^\bullet(X)$ défini par le cup-produit avec η. On dit que X vérifie le *théorème de Lefschetz fort* (relativement à $H^\bullet$ et η) si pour tout $i \leqslant d$, $L^{d-i} : H^i(X) \to H^{2d-i}(X)$ est un isomorphisme.

On a alors pour tout j la *décomposition de Lefschetz* : $H^j(X) = \bigoplus L^k P^{j-2k}(X)$, la somme portant sur les entiers k compris entre $\mathrm{Max}(0, j-d)$ et $j/2$, avec $P^i(X) = H^i(X) \cap \mathrm{Ker}\, L^{d-i+1}$ pour $i \leqslant d$.

Cette décomposition permet de définir l'opérateur de Hodge « abstrait » ${}^c\Lambda$ par la formule suivante : si $x = \Sigma L^k x_{j-2k}$ est la décomposition de Lefschetz de $x \in H^j(X)$, alors ${}^c\Lambda x = \Sigma k(d-j+k+1)\, L^{k-1} x_{j-2k}$, la somme portant cette fois sur les entiers k compris entre $\mathrm{Max}(1, j-d)$ et $j/2$.

On définit aussi les *involutions de Lefschetz et de Hodge* respectivement par les formules :

$$*_L x = L^{d-j} x = \Sigma L^{d-j+k} x_{j-2k},$$

$$*_H x = \Sigma(-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} \frac{k!}{(d-j+k)!} L^{d-j+k} x_{j-2k}.$$

Remarque. — Si $K \subseteq \mathbf{C}$ et $H^{\bullet}$ est la cohomologie de Betti, le théorème de Lefschetz fort est vrai, ${}^{c}\Lambda$ est l'opérateur de Hodge classique et sur chacun des espaces $H^{pq} \cap L^{k} P^{j-2k}(X)$, l'opérateur star de Hodge relatif à une forme de Kähler représentant la classe η est le conjugué complexe de $(\sqrt{-1})^{q-p} *_{H}$; le point important, qui justifie l'introduction de $*_{H}$, est que cet opérateur star et $*_{H}$ ont les mêmes propriétés de positivité sur les cycles réels de type (p, p).

On voit immédiatement que $P^{i}(X) = H^{i}(X) \cap \operatorname{Ker} {}^{c}\Lambda$, et que l'opérateur $*_{L} L *_{L} = *_{H} L *_{H}$, proportionnel à ${}^{c}\Lambda$ sur chaque composante de Lefschetz, est un inverse à droite de L sur l'image de L. Remarquons aussi que L, $*_{L}$, $*_{H}$ et ${}^{c}\Lambda$ sont auto-adjoints relativement à l'accouplement de dualité de Poincaré $(x, y) \mapsto \int_{X} x \cup y$.

Remarque. — Pour X non équidimensionnel, on définirait encore L, $*_{L}$ et $*_{H}$ par additivité, et d comme fonction continue entière sur X.

Lemme **1.1.** — *Soit* $x \in H^{j}(X)$. *Pour* $* = *_{L}$ *ou* $*_{H}$, *la composante de Lefschetz de* $* x$ *dans* $L^{i} P^{2d-j-2i}(X)$ *est donnée par* $L^{i} * L^{i} x - L^{i+1} * L^{i+1} x = \pm L^{i} x_{2d-j-2i}$.

En effet, après avoir remarqué que dans les décompositions de Lefschetz respectives de x et $L^{i} x$, on a $(L^{i} x)_{k} = x_{k}$ si $k \leqslant 2d - 2i - j$ et $(L^{i} x)_{k} = 0$ sinon, on constate un télescopage entre les deux termes du second membre de ces égalités. □

1.2. Notons π_{X}^{j} le projecteur de Künneth sur $H^{j}(X)$, et posons $h = \sum_{j=0}^{2d} (d - j)\, \pi_{X}^{j}$. Alors $({}^{c}\Lambda, h, -L)$ forme un $\mathfrak{sl}_2$-triplet au sens de Bourbaki, Lie VIII 11.1 : $[h, {}^{c}\Lambda] = 2\, {}^{c}\Lambda$, $[h, L] = -2L$, $[{}^{c}\Lambda, L] = h$, cf. [Kl68] 1.4.6.

On en déduit une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ sur $H^{\bullet}(X)$, attachée à η :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to {}^{c}\Lambda, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to L, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to h.$$

Si S^{i} désigne la puissance symétrique i-ème de la représentation standard, alors :

$$H^{\bullet}(X) \cong \bigoplus P^{d-i}(X) \otimes S^{i}.$$

De plus, un calcul sans difficulté montre que l'élément $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de SL_2 s'envoie sur $\pm *_{H}$, le signe étant $(-1)^{j(j+1)/2}$ sur la composante H^{j}.

Proposition **1.2.** — *Les sous-algèbres* $\mathbf{Q}[L, *_{L}]$, $\mathbf{Q}[L, *_{H}]$, $\mathbf{Q}[L, *_{L} L *_{L}]$, $\mathbf{Q}[L, {}^{c}\Lambda]$ *de* End H(X) *sont égales et contiennent les projecteurs de Künneth. De plus, ces algèbres sont canoniquement isomorphes à une somme d'algèbres matricielles* $M^{i+1}(\mathbf{Q})$ *indexée par les entiers* i *tels que* $P^{d-i}(X) \neq 0$. *Via cet isomorphisme, la transposition relative à la forme bilinéaire* $(x, y) \mapsto \int_{X} x \cup * y$ *correspond à la transposition des matrices, pour* $* = *_{L}$ *ou* $*_{H}$.

Preuve. — Pour la première assertion, on renvoie à [Kl68] 1.4.4, 1.4.5. Prouvons la seconde : soit $P^i_{\mathbf{Q}}$ une $\mathbf{Q}$-structure sur le F-espace $P^i(X)$, posons $H_{\mathbf{Q}} = \bigoplus P^{d-i}_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Q}^{i+1}$ et munissons $H_{\mathbf{Q}}$ d'une structure de $\mathfrak{sl}_2$-module en identifiant $\mathbf{Q}^{i+1}$ à la puissance symétrique i-ème de la représentation standard (on peut du reste choisir pour $P^0_{\mathbf{Q}}$ la $\mathbf{Q}$-structure canonique sur H^0, dans le cas où X est géométriquement connexe). On a dès lors un isomorphisme canonique de $\mathfrak{sl}_2$-modules $H_{\mathbf{Q}} \otimes F \cong H(X)$. Puisque les S^i sont des représentations absolument irréductibles deux à deux non équivalentes, on en déduit un isomorphisme canonique $\mathbf{Q}[L, *_L L *_L] \cong \bigoplus M^{i+1}(\mathbf{Q})$ (somme indexée par les entiers i tels que $P^{d-i}(X) \neq 0$), tel que l'image de L (resp. $*_L L *_L$) dans chaque $M^{i+1}(\mathbf{Q})$ soit la matrice (m_{ij}) définie par $m_{ij} = 1$ si $i = j+1$ (resp. $i = j-1$), et $= 0$ sinon. Quant à la dernière assertion, il suffit de la tester sur les générateurs L et $*_L L *_L$. Comme ces générateurs s'échangent par la transposition, c'est clair. □

Remarque. — Si $H'^{\bullet}$ est une autre théorie de cohomologie à coefficients dans un corps F' vérifiant le théorème de Lefschetz fort et ayant les mêmes nombres de Betti que $H^{\bullet}$ (ce qui est le cas en particulier si $H^{\bullet}$ et $H'^{\bullet}$ satisfont au théorème de Lefschetz faible), et si L' désigne l'opérateur de Lefschetz défini par le même faisceau inversible ample, on a un triangle commutatif d'isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Q}[L, *_L] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& \bigoplus M^{i+1}(\mathbf{Q}), \\
\mathbf{Q}[L', *_{L'}] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est donnée par $L \mapsto L'$, $*_L \mapsto *_{L'}$, et où les flèches obliques sont données par la proposition.

En effet, l'hypothèse sur $H'^{\bullet}$ entraîne que $\dim P^i(X) = \dim P'^i(X)$, et l'on peut alors construire (en reprenant les notations de la preuve ci-dessus) un isomorphisme de $\mathfrak{sl}_2$-modules $H_{\mathbf{Q}} \cong H'_{\mathbf{Q}}$, induisant si l'on veut l'isomorphisme canonique $H^0_{\mathbf{Q}} \cong H'^0_{\mathbf{Q}}$, dans le cas où X est géométriquement connexe.

1.3. Nous donnons maintenant quelques sorites concernant les involutions $*_L$ et $*_H$ sur un produit $X \times Y$ de K-schémas projectifs lisses, équidimensionnels de dimensions respectives d et d'.

L'isomorphisme (d'algèbres graduées) de Künneth : $H^{\bullet}(X \times Y) \cong H^{\bullet}(X) \otimes H^{\bullet}(Y)$ devient un isomorphisme de $\mathfrak{sl}_2$-modules si l'on munit $X \times Y$ du faisceau inversible ample $\mathscr{L}_{X \times Y} = \mathrm{pr}_1^* \mathscr{L}_X \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{L}_Y$. Par le formalisme des $\mathfrak{sl}_2$-triplets (cf. [D80] 1.6.12.1, avec le dictionnaire $N = {}^c\Lambda$, $\mathrm{Gr}_i = H^{d+i}(X)$, $P_{-i} = P^{d-i}(X)$), on déduit de l'isomorphisme de $\mathfrak{sl}_2$-représentations $S^i \otimes S^j \cong \bigoplus S^{i+j-2k}$ (Clebsch-Gordan) un isomorphisme canonique : $P^h(X \times Y) \cong \bigoplus_{h-i-j \in 2\mathbf{N}} P^i(X) \otimes P^j(Y)$; l'inclusion

$$P^i(X) \otimes P^j(Y) \subseteq P^{i+j}(X \times Y)$$

fournie par cet isomorphisme est restriction de l'isomorphisme de Künneth.

Lemme **1.3.1.** — *Considérons* $P^i(X) \otimes P^j(Y)$ *comme un sous-espace de* $P^{i+j}(X \times Y)$ *et* $L_X^{d-i} P^i(X) \otimes L_Y^{d'-j} P^j(Y)$ *comme un sous-espace de* $L_{X\times Y}^{d+d'-i-j} P^{i+j}(X \times Y)$. *Alors les isomorphismes* $L_X^{d-i} P^i(X) \otimes L_Y^{d'-j} P^j(Y) \cong P^i(X) \otimes P^j(Y)$ *donnés par l'involution de Lefschetz (resp. Hodge) relative à* $X \times Y$ *d'une part, et par* $\binom{d+d'-i-j}{d-i}^{-1} *_L \otimes *_L$ *(resp.* $(-1)^{ij} *_H \otimes *_H$*) d'autre part, coïncident.*

En effet, l'inverse de cet isomorphisme est $L_{X\times Y}^{d+d'-i-j}$, qui coïncide avec $\binom{d+d'-i-j}{d-i} L_X^{d-i} \otimes L_Y^{d'-j}$ sur $P^i(X) \otimes P^j(Y)$. □

Lemme **1.3.2.** — *Il existe des nombres rationnels* r_{ijmn} *tels que pour tous éléments* $x \in H^m(X)$, $y \in H^n(Y)$, *on ait :*

$$\begin{aligned} *_L x \otimes *_L y = \Sigma r_{ijmn} \{ & L_X^i \otimes L_Y^j *_L(L_X^i x \otimes L_Y^j y) \\ & - L_{X\times Y} L_X^i \otimes L_Y^j *_L (L_{X\times Y}(L_X^i x \otimes L_Y^j y)) \}. \end{aligned}$$

Pour l'involution de Hodge, on a la formule $*_H x \otimes *_H y = (-1)^{mn} *_H(x \otimes y)$.

Preuve. — A l'aide de la décomposition de Lefschetz, écrivons :

$$\begin{aligned} *_L x \otimes *_L y &= \Sigma *_L L_X^k x_{m-2k} \otimes *_L L_Y^l y_{n-2l} \\ &= \Sigma L_X^{d+k-m} \otimes L_Y^{d'+l-n} *_L(L_X^{d+k-m} x_{m-2k}) \otimes *_L(L_Y^{d'+l-n} y_{n-2l}) \\ &= \Sigma r_{kl} L_X^{d+k-m} \otimes L_Y^{d'+l-n} *_L(L_X^{d+2k-m} x_{m-2k} \otimes L_Y^{d'+2l-n} y_{n-2l}) \end{aligned}$$

avec $r_{kl} \in \mathbf{Q}$ (lemme précédent). Le produit tensoriel $L_X^{d+2k-m} x_{m-2k} \otimes L_Y^{d'+2l-n} y_{n-2l}$ n'est autre que la composante de Lefschetz de $z := L_X^{d+k-m} x_{m-2k} \otimes L_Y^{d'+l-n} y_{n-2l}$ sur $L_{X\times Y}^{d+d'+2k+2l-m-n} P^{m+n-2k-2l}(X \times Y)$. Avec nos notations habituelles, on a donc $*_L(L_X^{d+2k-m} x_{m-2k} \otimes L_Y^{d'+2l-n} y_{n-2l}) = \pm z_{m+n-2k-2l}$.

En appliquant le lemme 1 (avec $i = 0$, $j = 2d + 2d' + 2k + 2l - m - n$, et d remplacé par $d + d'$), on obtient $z_{m+n-2k-2l} = \pm (*_L z - L_{X\times Y} *_L L_{X\times Y} z)$.

La formule pour l'involution de Hodge découle de son interprétation en termes de l'élément $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de SL_2. □

Remarque. — Les nombres rationnels r_{ijmn} ne changent pas si l'on remplace $H^\bullet$ par une autre théorie $H'^\bullet$ vérifiant le théorème de Lefschetz fort. On aurait des formules analogues en remplaçant $*_L$ par tout opérateur qui lui serait proportionnel sur chaque composante de Lefschetz.

2. Cycles et correspondances motivés

2.1. Soit $\mathscr{V}$ une sous-catégorie pleine, stable par produits [1], sommes disjointes et composantes connexes, de la catégorie des K-schémas X projectifs et lisses. Les objets

[1] On convient que le produit vide est Spec K.

de $\mathcal{V}$ seront appelés *pièces de base*. Fixons une cohomologie de référence $H^\bullet$ sur $\mathcal{V}$, à coefficients dans un corps F de caractéristique nulle, vérifiant le « théorème » de Lefschetz fort.

Notons pr_X^{XY} la projection $X \times Y \to X$, et posons $* = *_L$ ou bien $*_H$. Soit E un sous-corps de F.

Définition **1.** — Un *cycle motivé sur* X *à coefficients dans* E est un élément de $H^\bullet(X)$ de la forme $pr_{X\,*}^{XY}(\alpha \cup * \beta)$, où :

α et β sont des cycles algébriques à coefficients dans E sur $X \times Y$, avec Y arbitraire dans $\mathcal{V}$,

$* = *_{XY}$ est relative à $\eta_{X \times Y} = [X] \otimes \eta_Y + \eta_X \otimes [Y]$, η_X (resp. η_Y) désignant la classe d'un quelconque faisceau inversible ample sur X (resp. Y).

Notons $A_{mot}(X)_E^H$ (ou simplement $A_{mot}(X)_E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la cohomologie de référence) l'ensemble des cycles motivés sur X à coefficients dans E [1]. Il est clair que $A_{mot}(X)_E$ contient $A(X)$ et $* A(X)$ (prendre α ou β égal à la classe fondamentale de $X \times Y$), et que $A_{mot}(X) = A(X)$ si pour tout schéma Y dans $\mathcal{V}$, polarisé, l'involution de Lefschetz est donnée par une correspondance algébrique.

Proposition **2.1.** — (i) $A_{mot}(X)_E$ *est une sous-*E*-algèbre de* $H^\bullet(X)$ *(relativement au « cup-produit »).* (ii) *On a :*

$$pr_X^{XZ*}(A_{mot}(X)_E) \subseteq (A_{mot}(X \times Z)_E)$$

et

$$pr_{X\,*}^{XZ}(A_{mot}(X \times Z)_E) \subseteq (A_{mot}(X)_E).$$

Preuve. — (i) Prouvons d'abord que $A_{mot}(X)_E$ est un sous-E-espace vectoriel de $H^\bullet(X)$. Considérons une combinaison E-linéaire :

$$e_Y\, pr_{X\,*}^{XY}(\alpha \cup *_{XY}\, \beta) + e_Z\, pr_{X\,*}^{XZ}(\gamma \cup *_{XZ}\, \delta);$$

elle s'écrit aussi sous la forme $pr_{X\,*}^{X(Y \cup Z)}((e_Y\, \alpha, \gamma) \cup *_{X(Y \cup Z)}(e_Z\, \beta, \delta))$ pourvu que les classes η_X et η'_X impliquées dans la définition de $*_{XY}$ et $*_{XZ}$ coïncident. Si tel n'est pas le cas, remplaçons $(X, \eta_X$ ou $\eta'_X)$ par $(X^2, [X] \otimes \eta'_X + \eta_X \otimes [X])$. Soit Δ la diagonale de $X \times X$. Alors sur chaque composante connexe, $pr_{X\,*}^{XY}(\alpha \cup *_{XY}\, \beta)$, resp. $pr_{X\,*}^{XZ}(\gamma \cup *_{XZ}\, \delta)$, est rationnellement proportionnel à $pr_{X\,*}^{X^2 Y}(pr_{X^2}^{X^2 Y*}[\Delta] \cup (\alpha \otimes [X]) \cup (* \, \beta \otimes * \, ([* \, X])))$, resp. $pr_{X\,*}^{X^2 Z}(pr_{X^2}^{X^2 Z*}[\Delta] \cup ([X] \otimes \gamma) \cup (*(*[X]) \otimes * \, \delta)))$. En appliquant le lemme 1.3.2, on est ramené au cas précédent (ou plutôt à sa généralisation immédiate aux combinaisons linéaires à plusieurs termes).

[1] Nous nous écartons ici provisoirement des définitions de 0.3, mais nous y reviendrons en 2.4.

Montrons la stabilité sous $\cup$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{X}^{XY}{}_*(\alpha \cup * \beta) \cup \mathrm{pr}_{X}^{XZ}{}_*(\gamma \cup * \delta) &= \mathrm{pr}_{X}^{XX}{}_*([\Delta] \cup (\mathrm{pr}_{X}^{XY}{}_*(\alpha \cup * \beta) \otimes \mathrm{pr}_{X}^{XZ}{}_*(\gamma \cup * \delta)))\\ &= \mathrm{pr}_{X}^{XX}{}_*([\Delta] \cup \mathrm{pr}_{XX}^{XYXZ}{}_*((\alpha \otimes \gamma) \cup (* \beta \otimes * \delta)))\\ &= \mathrm{pr}_{X}^{XYXZ}{}_*(\mathrm{pr}_{XX}^{XYXZ*}[\Delta] \cup (\alpha \otimes \gamma) \cup (* \beta \otimes * \delta))\end{aligned}$$

et l'on conclut en appliquant le lemme 1.3.2.

(ii) On a $\mathrm{pr}_{X}^{XZ*}\, \mathrm{pr}_{X}^{XY}{}_*(\alpha \cup * \beta) = \mathrm{pr}_{XZ}^{XZY}{}_*\, \mathrm{pr}_{XY}^{XZY*}(\alpha \cup * \beta)$, qui sur chaque composante connexe est rationnellement proportionnel à $\mathrm{pr}_{XZ}^{XZY}{}_*(\mathrm{pr}_{XY}^{XZY*}\, \alpha \cup (* \beta \otimes * [Z]))$, et l'on conclut par le même lemme. On a, d'autre part, $\mathrm{pr}_{X}^{XZ}{}_*\, \mathrm{pr}_{XZ}^{XZY}{}_*(\alpha \cup * \beta) = \mathrm{pr}_{X}^{XZY}{}_*(\alpha \cup * \beta)$. □

Considérons la graduation d'algèbre sur $A_{\mathrm{mot}}(X)_E$ induite par la graduation moitié de celle de $H^{\mathrm{pair}}(X)$; nous abrégerons la notation $A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)_{\mathbf{Q}}$ en $A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)$.

Définition 2. — Soient $X = \coprod X_i$ et $Y = \coprod Y_j$ des sommes disjointes d'objets connexes de V. Soit r une fonction continue entière sur $X \times Y$ (*i.e.* un entier r_{ij} sur chaque $X_i \times Y_j$). Une E-*correspondance motivée de* X *vers* Y *de degré* r est un élément de $\bigoplus A_{\mathrm{mot}}^{\dim X_i + r_{ij}}(X_i \times Y_j)_E$. On note $C^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X, Y)_E$ l'espace gradué des E-correspondances motivées de X vers Y.

Corollaire. — Les correspondances motivées se composent, leurs degrés s'additionnant. En particulier, $C^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X, X)_E$ *est une* E-*algèbre graduée.*

En effet, on se ramène immédiatement au cas équidimensionnel. La proposition précédente montre alors que les espaces de E-correspondances motivées sont stables par la composition donnée par la formule $g \circ f = \mathrm{pr}_{XZ}^{XYZ}{}_*(\mathrm{pr}_{XY}^{XYZ*} f \cup \mathrm{pr}_{YZ}^{XYZ*}\, g)$. □

On obtient le formalisme f_*, f^* (pour un morphisme f) en composant les correspondances motivées avec la classe du graphe de f ou sa transposée; f_*, f^* sont reliés par la formule de projection $f_*(a \cup f^* b) = f_*(a) \cup b$.

Remarque : questions de signes. — L'isomorphisme d'algèbre de Künneth $H^{\bullet}(X \times Y) \cong H^{\bullet}(X) \otimes H^{\bullet}(Y)$ sous-entend le produit tensoriel *gradué* dans le membre de droite : $(x \otimes y) \cup (x' \otimes y') = (-)^{\delta y . \delta x'} (x \cup x') \otimes (y \cup y')$. On en déduit la règle : $(u^* \otimes v^*)\, (z \otimes w) = (-)^{\delta u . \delta w}\, u^*(z) \otimes v^*(w)$, pour tous $u \in H^{\bullet}(X \times Y)$, $v \in H^{\bullet}(Z \times W)$, $z \in H^{\bullet}(Z)$, $w \in H^{\bullet}(W)$.

On en déduit aussi un isomorphisme canonique d'algèbres :

$$\mathrm{End}^{\bullet}\, H(X \times Y) \cong \mathrm{End}^{\bullet}\, H(X) \otimes \mathrm{End}^{\bullet}\, H(Y),$$

la loi de composition dans le membre de droite étant soumise à

$$(u \otimes v) \circ (u' \otimes v') = (-)^{\delta u . \delta v'} (u \circ u') \otimes (v \circ v').$$

On voit donc que l'homomorphisme d'algèbres

$$C_{\mathrm{mot}}(X, X) \otimes C_{\mathrm{mot}}(Y, Y) \to C_{\mathrm{mot}}(X \times Y, X \times Y)$$

sous-entend le produit tensoriel *ordinaire* dans le membre de gauche.

2.2. *Proposition* **2.2.** — *L'algèbre* $C^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X, X)_E$ *contient les involutions* $*_L$ *et* $*_H$, *et les projecteurs de Künneth* π^i_X.

Preuve. — On se ramène au cas où X est purement de dimension d, et $E = \mathbf{Q}$. D'après les arguments de [Kl68] 1.4.4 et 1.4.6, il suffit de montrer que pour tout $i < d$, il existe un élément θ^i de $C_{\mathrm{mot}}(X, X)$ induisant l'inverse de L^{d-i} sur $L^{d-i}P^i(X)$. Considérons $*_{X^2}(L^{d-i}) \in *_{X^2} A(X^2) \subseteq A_{\mathrm{mot}}(X \times X) = C_{\mathrm{mot}}(X, X)$. Sa composante de Lefschetz sur $P^i(X) \otimes P^i(X) \subseteq H^{2i}(X \times X)$ se récrit aussi $*_{X^2}(\mu_i)$, où

$$\mu_i \in L^{d-i}P^i(X) \otimes L^{d-i}P^i(X)$$

s'interprète comme l'isomorphisme $P^i(X) \to L^{d-i}P^i(X)$ restriction de L^{d-1}. Il s'agit de comparer $*_{X^2}(\mu_i)$ à l'isomorphisme inverse μ_i^{-1} vu comme élément de $P^i(X) \otimes P^i(X)$ par la dualité de Poincaré. Or sur $L^{d-i}P^i(X) \otimes L^{d-i}P^i(X)$, $*_{X^2}$ est donnée à un facteur $\kappa \in \mathbf{Q}$ près par $* \otimes *$ (lemme 1.3.1), et $*$ n'est autre que μ_i^{-1}. On a donc :

$$*_{X^2}(\mu_i) = \kappa * \otimes * \, (\mu_i) = \kappa * \circ \mu_i \circ *$$

parce que $*$ est son propre transposé, et donc $*_{X^2}(\mu_i) = \kappa\mu_i^{-1}$, ce qui montre que $\theta^i := \mu_i^{-1} \in C_{\mathrm{mot}}(X, X)$ répond à la question. □

Corollaire 1. — *L'ensemble* $A_{\mathrm{mot}}(X)_E$ *est stable sous* $*$ *et ne change pas si dans la définition on échange* $*_L$ *avec* $*_H$ *(ou plus généralement tout opérateur qui est proportionnel à* $*_L$ *sur chaque composante de Lefschetz).* □

Corollaire 2. — *Posons* $P^i_{\mathrm{mot}}(X)_E = A^i_{\mathrm{mot}}(X)_E \cap P^{2i}(X)$, *espace des cycles motivés* primitifs. *Pour tout* j, *on a la* décomposition de Lefschetz : $A^j_{\mathrm{mot}}(X)_E = \oplus L^{k}_{\mathrm{mot}}P^{j-k}(X)_E$, *la somme portant sur les entiers* k *compris entre* $\mathrm{Max}(0, j - d/2)$ *et* j. □

Remarque. — Les définitions et propriétés précédentes se transposent dans le cadre des variétés kählériennes compactes, en substituant les cycles analytiques aux cycles algébriques, et en prenant pour η_X la classe d'une forme de Kähler, et pour $*$ l'opérateur star de Hodge (avec $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

2.3 Considérons le $\mathbf{Q}$-espace $Z(X \times Y)_{\mathbf{Q}}$ de base les sous-schémas intègres de $X \times Y$, et l'espace gradué $\mathscr{Z}^{\bullet}(X) := \bigoplus_{Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{V}}(Z^{\bullet}(X \times Y)_{\mathbf{Q}} \otimes Z_{\bullet}(X \times Y)_{\mathbf{Q}})$, où la graduation supérieure (resp. inférieure) est celle par la codimension (resp. dimension). On a une application $\mathbf{Q}$-linéaire canonique respectant la graduation : $\mathscr{Z}^{\bullet}(X) \to A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)$ donnée par $\alpha \otimes \beta \mapsto \mathrm{pr}^{XY}_{X*}(\alpha \cup * \beta)$.

Soit maintenant $H'^{\bullet}$ une cohomologie *comparable* à $H^{\bullet}$ sur $\mathscr{V}$, au sens où sur une extension convenable F'' commune aux corps de coefficients respectifs F' et F, on dispose d'un « isomorphisme de comparaison » $i : H'^{\bullet} \otimes_{F'} F'' \cong H^{\bullet} \otimes_F F''$ (isomorphisme de cohomologies). Un tel i induit un isomorphisme fonctoriel d'algèbres graduées $i_{\mathrm{mot}} : A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)^{H'} \cong A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)^{H}$, qui est compatible aux flèches $\mathscr{Z}^{\bullet}(X) \to A^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(X)^{H'}$,

$\mathscr{Z}^\bullet(X) \to A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)^H$. On en déduit que i_{mot} ne dépend pas du choix de i. En d'autres termes :

Proposition **2.3.** — *Deux cohomologies de Weil comparables sur $\mathscr{V}$ fournissent des algèbres de cycles motivés canoniquement et fonctoriellement isomorphes.* □

2.4. Ceci s'applique en particulier aux cohomologies classiques si K est de caractéristique nulle. En effet, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Alors $X_{\overline{K}}$ est définissable sur la fermeture algébrique K^0 dans $\overline{K}$ d'une extension de type fini de $\mathbf{Q}$, et le choix d'un plongement $K^0 \to \mathbf{C}$ donne lieu à des isomorphismes de comparaison (compatibles aux classes de cycles algébriques) $H^\bullet_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \cong H^\bullet_{\text{ét}}(X_{K^0}, \mathbf{Q}_p) \cong H^\bullet_B(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{Q}_p$ (M. Artin), et $H^\bullet_{dR}(X_{K^0}) \otimes \mathbf{C} \cong H^\bullet_{dR}(X_{\mathbf{C}}) \cong H^\bullet_B(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C}$ (Grothendieck); d'où aussi un isomorphisme $H^\bullet_{dR}(X_{K^0}) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p \cong H^\bullet_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes \overline{\mathbf{Q}}_p$ dépendant du choix d'un isomorphisme de corps $\overline{\mathbf{Q}}_p \cong \mathbf{C}$. Le théorème de comparaison p-adique de [Fa89] fournit encore un isomorphisme $\iota_p : H^\bullet_{dR}(X_{K^0}) \otimes B_{dR} \cong H^\bullet_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \otimes B_{dR}$ dépendant du choix d'un plongement $K^0 \to \overline{\mathbf{Q}}_p$. Mais conformément à 2.3, l'isomorphisme d'algèbres de cycles motivés qu'on déduit de ces divers isomorphismes de comparaison est canonique.

On voit alors que le théorème 0.3 n'est qu'une reformulation des propositions 2.1 (et corollaire) et 2.3, $A^\bullet_{\mathrm{mot}}(X)$ étant défini par exemple via la cohomologie de de Rham, et les applications cl_H étant induites par des isomorphismes de comparaison dont elles ne dépendent pas. □

2.5. Mentionnons pour terminer ce paragraphe quelques propriétés usuelles des cycles algébriques en cohomologie étale, de de Rham, Betti ou cristalline, qui s'étendent sans peine aux cycles motivés. Cette extension s'obtient en remarquant que L^{d-i} et π^i_X, et par suite $*_L$, jouissent de ces propriétés. Pour les formuler, il convient de réintroduire les « twists à la Tate », considérant $A^j_{\mathrm{mot}}(X)$ comme un sous-espace de $H^{2j}(X)\,(j)$ plutôt que de $H^{2j}(X)$.

a) Cohomologie étale. — Pour $l \neq p$ car K, $X \to H^\bullet_{\text{ét}}(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbf{Q}_l)$ est une cohomologie de Weil vérifiant les deux théorèmes de Lefschetz (M. Artin, Grothendieck, Deligne). Le groupe $\mathrm{Gal}(K^{\text{sép}}/K)$ agit par fonctorialité sur ces espaces de cohomologie; sur $A^j_{\mathrm{mot}}(X)_{\mathbf{Q}_l} \subseteq H^{2j}_{\text{ét}}(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbf{Q}_l)\,(j)$, cette action est triviale (l'action sur $\mathbf{Q}_l(j)$ est donnée par la puissance j-ième du caractère cyclotomique).

Scolie. — *Soit* L/K *une extension séparable (non nécessairement algébrique)*; *on suppose* L *séparablement clos. Alors pour des ensembles de pièces de bases convenables, et sous l'isomorphisme canonique* $H^\bullet_{\text{ét}}(X_L, \mathbf{Q}_l) \cong H^\bullet_{\text{ét}}(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbf{Q}_l)$, $A^j_{\mathrm{mot}}(X_L)$ *s'identifie à* $A^j_{\mathrm{mot}}(X_{K^{\text{sép}}})$. *De plus* $\mathrm{Gal}(K^{\text{sép}}/K)$ *agit sur* $A^j_{\mathrm{mot}}(X_{K^{\text{sép}}})$ *à travers un groupe fini, et* $A^j_{\mathrm{mot}}(X_K)$ *est le sous-espace des invariants.*

Esquisse de preuve. — Soit $\mathrm{pr}^{X_L Y}_{X_L\,*}(\alpha \cup * \beta)$ un cycle motivé dans $H^{2j}_{\text{ét}}(X_L, \mathbf{Q}_l)\,(j)$; alors Y et les sous-schémas de $X \times Y$ définissant α, β et $\eta_{X_L Y}$ sont définis sur une $K^{\text{sép}}$-

sous-algèbre L′ de L, lisse et de type fini. En spécialisant ces schémas selon un $K^{\text{sép}}$-homomorphisme convenable $L' \to K^{\text{sép}}$, on obtient un cycle motivé $\mathrm{pr}_{X_{K^{\text{sép}}}\,*}^{X_{K^{\text{sép}}}Y'}(\alpha' \cup * \,'\beta')$ dont l'image par l'isomorphisme $H^{\bullet}_{\text{ét}}(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbf{Q}_l) \cong H^{\bullet}_{\text{ét}}(X_L, \mathbf{Q}_l)$ s'identifie à $\mathrm{pr}_{X_L\,*}^{X_L Y}(\alpha \cup * \beta)$. Ceci montre que le monomorphisme canonique $A^j_{\text{mot}}(X_{K^{\text{sép}}}) \to A^j_{\text{mot}}(X_L)$ induit par cet isomorphisme est surjectif. Pour la seconde assertion, on note que puisque $A^j_{\text{mot}}(X_{K^{\text{sép}}})_{\mathbf{Q}_l}$ est de dimension finie, il existe une extension galoisienne finie K′ de K telle que $A^j_{\text{mot}}(X_{K^{\text{sép}}})_{\mathbf{Q}_l} = A^j_{\text{mot}}(X_{K'})_{\mathbf{Q}_l}$. Enfin tout cycle motivé Gal(K′/K)-invariant $\mathrm{pr}_{X_{K'}\,*}^{X_{K'}Y}(\alpha \cup * \beta)$ s'écrit aussi $[K' : K]^{-1} \Sigma_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K'/K)} \mathrm{pr}_{X\,*}^{XY}(\alpha^{\sigma} \cup *^{\sigma} \beta^{\sigma})$, en considérant le K′-schéma Y comme K-schéma. Nous laissons les détails au lecteur (la situation est la même que pour les cycles de Hodge absolus [D82] 2.7, 2.9). □

b) Cohomologie de de Rham. — Pour $p = 0$, $X \to H^{\bullet}_{dR}(X) = H^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_{X/K})$ est une cohomologie de Weil vérifiant les deux théorèmes de Lefschetz (Grothendieck, Lefschetz). Le K-espace $H^{\bullet}_{dR}(X)$ est muni d'une $K/\mathbf{Q}$-connexion intégrable, dite de Gauss-Manin, et, en tant qu'aboutissement de la suite spectrale (dégénérée) $H^q(\Omega^p_{X/K}) \Rightarrow H^{p+q}(\Omega^{\bullet}_{X/K})$, d'une filtration décroissante $F^{\bullet}$. Tout élément de $A^j_{\text{mot}}(X) \subseteq H^{2j}_{dR}(X)\ (j)$ est dans le cran F^0 et est annulé par la connexion.

c) Cohomologie de Betti. — Pour $p = 0$ et K de cardinalité au plus celle du continu, choisissons un plongement complexe σ de K. Alors $X \to H^{\bullet}_B(X \otimes_{\sigma} \mathbf{C}, \mathbf{Q}) \otimes F$ est une cohomologie de Weil satisfaisant aux théorèmes de Lefschetz. Pour $F = \mathbf{C}$, ces espaces sont bigradués (Hodge). Tout élément de $A^j_{\text{mot}}(X) \subseteq H^{2j}_B(X \otimes_{\sigma} \mathbf{C}, \mathbf{Q})\ (j)$ est de type (0, 0) ($\mathbf{Q}(j)$ est de type $(-j, -j)$).

En combinant *a)*, *b)*, *c)*, on obtient :

Proposition **2.5.1.** — *Si* K *est de caractéristique* 0, *la collection des classes de de Rham et l-adiques de tout cycle motivé est un cycle de Hodge absolu au sens de* [D82] 2.10.

d) Cohomologie cristalline. — Pour $p > 0$, soit W un anneau de valuation discrète de corps résiduel k_W, d'idéal maximal engendré par p, et soit F le corps de fractions de W, muni d'un endomorphisme φ relevant $x \mapsto x^p$. Alors $Z \to H^{\bullet}_{\text{cris}}(Z/W) \otimes_W F$ est une cohomologie de Weil; l'espace $H^{\bullet}_{\text{cris}}(Z/W) \otimes_W F$ est muni d'un endomorphisme φ-linéaire, le Frobenius cristallin φ (P. Berthelot [B], H. Gillet - W. Messing [GM]).

Si de plus k_W est algébrique sur $\mathbf{Q}_p$, cette cohomologie vérifie les deux théorèmes de Lefschetz [KM], et φ fixe $A^j_{\text{mot}}(Z) \subseteq H^{2j}_{\text{cris}}(Z/F(j)) := H^{2j}_{\text{cris}}(Z/W) \otimes_W F(j)$ (φ agit sur $F(j)$ par multiplication par p^{-j}).

e) Inégale caractéristique. — Soit K une extension finie de F = Frac W, d'anneau de valuation V, de corps résiduel k. Soit X un K-schéma projectif lisse ayant bonne réduction en V, *i.e.* tel qu'il existe un V-schéma projectif lisse $\mathscr{X}$ de fibre générique X. On dispose alors [BO83] de l'isomorphisme de comparaison de Berthelot-Ogus $\iota_{BO} : H^i_{dR}(X)\ (j) \cong H^i_{\text{cris}}(\mathscr{X}_k/F(j)) \otimes_F K$.

Proposition **2.5.2.** — *L'image par* ι_{BO} *de tout cycle motivé dans* $\mathrm{H}^{2j}_{d\mathrm{R}}(\mathrm{X})\,(j)$ *appartient au* $\mathbf{Q}_p$*-espace des invariants de* φ *dans* $\mathrm{H}^{2j}_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/\mathrm{F}(j))$. *En particulier tout cycle motivé en caractéristique* 0 *est de Tate absolu au sens de* [O82].

Preuve. — L'énoncé est bien connu pour les cycles algébriques, et s'étend immédiatement au cas des cycles motivés $\xi = \mathrm{pr}^{\mathrm{XY}}_{\mathrm{X}\,*}(\alpha \cup * \beta) \in \mathrm{H}^{2j}_{d\mathrm{R}}(\mathrm{X})\,(j)$ dès que Y a aussi bonne réduction en V (en fait l'image cristalline de $\alpha \cup * \beta \in \mathrm{H}^{2j'}_{d\mathrm{R}}(\mathrm{X})\,(j')$, $j' = j + \dim \mathrm{Y}$, est invariante sous φ dans $\mathrm{H}^{2j'}_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k \times \mathscr{X}_k/\mathrm{F}(j'))$, cf. *infra*, 9.4).

Dans le cas général, il faut recourir à la classe étale p-adique de ξ dans $(\mathrm{H}^{2j}_{\text{ét}}(\mathrm{X}_{\overline{\mathrm{K}}}, \mathbf{Q}_p)\,(j))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})}$, qui correspond à ξ via l'isomorphisme de comparaison p-adique ι_p (cf. 2.4; on utilise l'existence de cet isomorphisme pour X et pour $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$). Or l'image de $(\mathrm{H}^{2j}_{\text{ét}}(\mathrm{X}_{\overline{\mathrm{K}}}, \mathbf{Q}_p)\,(j))^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})}$ par ι_p est, d'après une propriété fondamentale de cet isomorphisme dans le cas de bonne réduction [Fa89] 5.6, [I90] 2.2.2 (1), le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace de $\mathrm{F}^0\,\mathrm{H}^{2j}_{d\mathrm{R}}(\mathrm{X})\,(j)$ qui s'envoie sur $\mathrm{H}^{2j}_{\mathrm{cris}}(\mathscr{X}_k/\mathrm{F}(j))^{\varphi}$ par ι_{BO}. □

3. L'équivalence ≡ sur les cycles motivés

En première lecture, on peut omettre les sections 3.1 *et* 3.2 *qui ne sont pas utilisées avant* 9.

3.1. Nous définissons l'analogue de l'équivalence numérique pour les cycles motivés.

Définition **3.** — Soient x, $y \in \mathrm{A}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$. Nous écrirons $x \equiv y$ pour exprimer que $\int_{\mathrm{X}} (x - y) \cup z = 0$ pour tout $z \in \mathrm{A}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$.

Lemme **3.1.** — (i) *La relation* $\equiv$ *est une relation d'équivalence* E*-linéaire.*

(ii) *Les éléments* z *de* $\mathrm{A}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ *tels que* $z \equiv 0$ *forment un idéal bilatère homogène (avec la multiplication fournie par le cup-produit).*

(iii) *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme, et soient* $x \in \mathrm{A}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$, $y \in \mathrm{A}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{Y})_{\mathrm{E}}$. *Alors* $x \equiv 0 \Rightarrow f_* x \equiv 0$, *et* $y \equiv 0 \Rightarrow f^* y \equiv 0$.

(iv) *Les éléments* z *de* $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ *tels que* $z \equiv 0$ *forment un idéal bilatère homogène.*

Preuve. — (i) et (ii) sont immédiats; (iii) se déduit de la fonctorialité co- et contravariante des espaces de cycles motivés, et de la « formule de projection ». Quant à (iv), la formule qui exprime la composition jointe à (ii), (iii) appliqué à des projections, montre que les éléments z de $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ tels que $z \equiv 0$ forment un idéal bilatère. Le fait que les composantes homogènes d'un tel z soient encore $\equiv 0$ est clair. □

On peut résumer les propriétés exprimées dans ce lemme en disant que $\equiv$ est une *équivalence* « *adéquate* » sur les cycles motivés. Ceci entraîne que la composition des correspondances passe au quotient à travers $\equiv$.

---

(1) En fait, ce résultat requiert la compatibilité espérée, mais ne figurant pas explicitement dans la littérature à ma connaissance, des isomorphismes de comparaison de Faltings notés α_{cris} et α_{DR} dans [I90], cf. *loc. cit.* 4.3.5.

Notation. — Nous poserons :

$$\overline{\mathrm{A}}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}} := \mathrm{A}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}/_{\equiv}, \qquad \overline{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathrm{E}} := \mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathrm{E}}/_{\equiv}.$$

Proposition **3.1.** — *L'idéal $\mathcal{N}$ formé des cycles motivés $\equiv 0$ est le plus grand nilidéal (à gauche ou à droite) homogène de $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$. Il est nilpotent.*

(C'est l'analogue pour les cycles motivés du théorème de Jannsen [J92].)

Preuve. — Soit $\mathcal{I}$ un nilidéal (à droite, pour fixer les idées) homogène, et soit f un élément de $\mathcal{I}$ de degré r. Pour tout $g \in \mathrm{C}^{-r}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$, $f \circ g$ est donc nilpotent, de degré 0. Dès lors, $\mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^i}(f \circ g) = 0$ pour tout i, et la formule de trace donne $\int_{\mathrm{X}^2} f \cup {}^t g = \Sigma_i (-1)^i \, \mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^i}(f \circ g) = 0$. Ceci montre que l'image de $\mathcal{I}$ dans $\overline{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ est nulle, *i.e.* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Montrons réciproquement que $\mathcal{N}$ est nilpotent. Il suffit de le voir dans le cas $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. Tirons parti du fait qu'alors $\mathrm{C}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{F}}$ est de dimension finie sur F : le radical de Jacobson, qui contient tout nilidéal unilatère, est nilpotent. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{N}$ est somme d'idéaux à droite nilpotents, ce qui est le cas si tout $f \in \mathcal{N}$ vérifiant $f = \pi^i_{\mathrm{X}} \circ f \circ \pi^{i-r}_{\mathrm{X}}$ (avec i, r arbitraires) engendre un nilidéal à droite (rappelons que les projecteurs de Künneth sont des éléments de $\mathrm{C}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ (prop. 4)). Pour montrer qu'un produit $f \circ g$ est nilpotent, il est loisible de supposer $g = \pi^{i-r}_{\mathrm{X}} \circ g \circ \pi^i_{\mathrm{X}}$. Comme $(f \circ g)^{m-1} \circ f \in \mathcal{N}$, on a alors :

$$0 = \int_{\mathrm{X}^2} ((f \circ g)^{m-1} \circ f) \cup {}^t g = (-1)^i \, \mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^i}(f \circ g)^m,$$

ce qui montre bien que $f \circ g$ est nilpotent. Ainsi $\mathcal{N}$ est un idéal nilpotent; et l'on a vu qu'il est homogène. □

3.2. Notons Q, ou $\mathrm{Q}_{\mathscr{V}}$ s'il y a lieu de préciser, le sous-corps de F engendré par les valeurs $\int_{\mathrm{X}} \alpha \cup * \alpha$, où α décrit les cycles algébriques sur X, X parcourant $\mathscr{V}$, et où $*$ est relatif à une quelconque polarisation de X.

Proposition **3.2.1.** — *Soit* E *une extension intermédiaire entre* Q *et* F. *Alors la surjection canonique* $\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{Q}} \otimes \mathrm{E} \to \overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ *est bijective, et* $\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ *est de dimension finie sur* E.

Preuve. — Remarquons d'abord que $\mathrm{A}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{F}}$ est de dimension finie sur F. Choisissons une F-base de $\mathrm{A}^{d-i}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{F}}$ dans $\mathrm{A}^{d-i}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})$, soit $(y_1, \ldots, y_s)$. Alors $\overline{\mathrm{A}}^i_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ s'identifie à l'image de $\mathrm{A}^i_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X})_{\mathrm{E}}$ dans F^s par l'application

$$\theta : z \mapsto \left(\int_{\mathrm{X}} y_1 \cup z, \ldots, \int_{\mathrm{X}} y_s \cup z\right).$$

La proposition suit immédiatement de ce que θ prend ses valeurs dans E^s. Démontrons cela : il suffit de le faire voir pour $\mathrm{E} = \mathrm{Q}$ et comme les espaces de cycles motivés sont stables par « cup-produit » (prop. 3*i*), cela suit du

Lemme **3.2.** — *On a* $\int_{\mathrm{X}} \mathrm{A}^d_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Q}$.

Interprétant $\int_X$ comme l'image directe en cohomologie par le morphisme structural de X, on voit que les éléments de $\int_X A_{mot}(X)$ sont combinaisons linéaires rationnelles d'éléments de la forme $\int_Y \alpha \cup * \beta$, où α et β sont des cycles algébriques sur Y fixé dans V; en exploitant la symétrie de $(x, y) \mapsto \int_Y x \cup * y$ sur la partie paire de la cohomologie, il est facile de voir que $\int_Y \alpha \cup * \beta \in Q$, comme requis. Ceci achève de démontrer la proposition. □

Corollaire. — Pour $Q \subseteq E \subseteq F$, *l'algèbre quotient* $\overline{C}^{\bullet}_{mot}(X, X)_E$ *est semi-simple de dimension finie sur* E, *et* $\mathcal{N}$ *est le radical de Jacobson de* $C^{\bullet}_{mot}(X, X)_E$.

Cela découle des deux propositions précédentes. □

Proposition **3.2.2.** — *Le polynôme caractéristique dans* $H^i(X)$ *de tout élément f de* $C^0_{mot}(X, X)$ *est à coefficients dans* Q.

En effet, ces coefficients sont eux-mêmes des polynômes à coefficients rationnels en les quantités $\mathrm{Tr}_{H^i}(f^m) = (-1)^i \int_{X^2} f^m \cup \pi_X^{2d-i} \in Q$ (lemme 3.2). □

Remarque. — On aurait pu donner une définition plus restrictive des cycles motivés en *fixant* une polarisation sur tout objet de $\mathcal{V}$, de manière compatible aux produits et sommes disjointes, et démontrer des résultats analogues. Mais cette définition alternative conduit au même corps Q, et aux mêmes espaces $A_{mot}(X)_E$ pour $Q \subseteq E \subseteq F$ (ne dépendant donc pas du choix des polarisations η_X). En effet, il suffit d'établir que pour toute autre polarisation η'_X, l'involution $*_{L'}$ associée appartient à $C_{mot}(X, X)_Q$ (version alternative). Puisque $*_{L'} = \Sigma(L')^{d-i} \pi_X^i$, il suffit d'établir que :

$$(L')^{d-i} \pi_X^i \in C_{mot}(X, X)_Q \text{ (v. alt.)} \quad \text{pour tout } i > d.$$

Ceci découle de ce que $(L')^{d-i} \pi_X^i *_L = (*_L(L')^{i-d} \pi_X^{2d-i})^{-1}$ s'exprime comme polynôme à coefficients dans Q en $*_L(L')^{i-d} \pi_X^{2d-i}$ (Cayley-Hamilton et prop. précédente v. alt.).

3.3. *Proposition* **3.3.** — *Supposons que* K *soit de caractéristique nulle et que* $H^{\bullet}$ *soit une cohomologie classique* (étale, de Rham, *ou* Betti *si* $K \subseteq \mathbf{C}$).

Alors $Q = \mathbf{Q}$, *et* $\equiv$ *est l'égalité sur* $A_{mot}(X)$. *La* $\mathbf{Q}$-*algèbre* $C^{\bullet}_{mot}(X, X)$ *est semi-simple de dimension finie. De plus, la forme bilinéaire symétrique sur* $C^{\bullet}_{mot}(X, X)$ *donnée par* $(u, v) \mapsto \mathrm{Tr}_{H^{\bullet}(X)}(u *_H {}^t v *_H)$ *est à valeurs dans* $\mathbf{Q}$ *et définie positive.*

Preuve. — On se ramène par les théorèmes de comparaison classiques au cas où $K \subseteq \mathbf{C}$ et où $H^{\bullet}$ est la cohomologie de Betti rationnelle. L'égalité $Q = \mathbf{Q}$ est alors immédiate. Le théorème de l'indice de Hodge entraîne que $(x, y) \mapsto \int_X x \cup *_H y$ définit un produit scalaire sur les cycles motivés (car ceux-ci sont clairement de type (p, p)).

Comme $*_H$ est un automorphisme de $A_{mot}(X)$ (prop. 4), la forme $(x,y) \mapsto \int_X x \cup y$ est donc non dégénérée sur $A_{mot}(X)$, c'est-à-dire que $\equiv$ est l'égalité. La dernière assertion résulte aussi du théorème de l'indice de Hodge, cf. [Kl68], 3.11. □

4. Motifs en caractéristique nulle et groupes de Galois motiviques

Ici et jusqu'au § 9, *le corps de base* K *est de caractéristique nulle, et nous ne considérons que des cohomologies* $H^{\bullet}$ *classiques.*

4.1. On se donne une sous-catégorie $\mathscr{V}$ pleine, stable par produits, sommes disjointes et composantes connexes, de la catégorie des K-schémas X projectifs et lisses (les objets de $\mathscr{V}$ seront appelés *pièces de base*).

A partir de maintenant, il convient de ne plus négliger les « twists de Tate » (voir [SR72] A1 pour les définitions); en particulier, on regarde les cycles motivés de $A^r_{mot}(X)$ comme des éléments de $H^{2r}(X)\,(r)$ et non plus de $H^{2r}(X)$.

4.2. *Définition de la catégorie des motifs modelés sur* $\mathscr{V}$.

Objets : triplets $M = (X, n, q)$ formés d'un objet X de $\mathscr{V}$, d'une fonction (1) continue entière n sur X, et d'un idempotent $q \in C^0_{mot}(X, X)$; on dit que M *est un motif découpé sur* X, *tordu par* n; on note aussi $M = qh(X)\,(n)$.

Morphismes : $\mathrm{Hom}(qh(X)\,(n), ph(Y)\,(m)) = pC^{m-n}_{mot}(X, Y)\,q$.

On vérifie immédiatement qu'on obtient bien une catégorie $\mathbf{Q}$-linéaire, et pseudo-abélienne (la somme directe de deux objets existe :

$$qh(X)(n) \oplus ph(Y)\,(m) = (q, p)\,h(X \amalg Y)\,(n+m);$$

et les endomorphismes idempotents ont un noyau et un conoyau). Nous noterons cette catégorie $\mathscr{M}_K(\mathscr{V})$, ou bien $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ s'il n'y a pas lieu de préciser K. Comme les algèbres d'endomorphismes de motifs sont semi-simples de dimension finie sur $\mathbf{Q}$ (prop. 3.3), on déduit du lemme 2 de [J92] que $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est *abélienne semi-simple*.

La *cohomologie motivique* de X est le foncteur contravariant sur $\mathscr{V}$ qui associe au schéma X le motif $h(X) := (X, \mathrm{id}, 0)$, et à un morphisme la classe d'équivalence homologique du transposé de son graphe.

4.3. La catégorie $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est naturellement une catégorie tensorielle rigide, la loi $\otimes$ étant donnée par $qh(X)\,(n) \otimes ph(Y)\,(m) = (q \times p)\,h(X \times Y)\,(n+m)$, l'$\mathscr{H}om$ interne par $({}^tq \times p)\,h(X \times Y)\,(\dim(X) - n + m)$, l'objet unité par $\mathbf{1} = h(\mathrm{Spec}\,K)$, de sorte que $\mathrm{End}\,\mathbf{1} = \mathbf{Q}$; nous noterons $M^\vee$ le dual $\mathscr{H}om(M, \mathbf{1})$ d'un motif M. Nous noterons $\mathbf{Q}(n)$ l' « objet de Tate » $(\mathrm{Spec}\,k, \mathrm{id}, n)$, et poserons $M(n) := M \otimes \mathbf{Q}(n)$; de

(1) *I.e.* un entier n_i sur chaque composante connexe X_i; prendre n constant conduirait à une catégorie équivalente, mais notre définition facilite la construction de $\oplus$ et $\mathscr{H}om$ interne.

la sorte, $\mathbf{1} = \mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{Q}(n)^{\vee} = \mathbf{Q}(-n)$, et $M(n)\ (m)$ est canoniquement isomorphe à $M(n+m)$.

Les contraintes d'unité et d'associativité sont les contraintes évidentes; la contrainte de commutativité se définit en modifiant la contrainte évidente (1) par un signe selon la règle de Koszul, cf. *e.g.* [J92], relativement à la graduation donnée par $(qh(X)\ (n))^{(i)} = qhh^{i+2n}(X)\ (n)$, où $h^{i+2n}(X)\ (n)$ est défini à l'aide du projecteur de Künneth : $h^j(X)\ (n) := (X, n, \pi^j_X)$. On a $h^i(X)^{\vee} = h^{2d-i}(X)\ (d)$, pour $d = \dim X$, et $*$ induit un isomorphisme $h^i(X) \cong h^{2d-i}(X)\ (d-i)$.

Grâce à cette contrainte modifiée, le rang d'un motif est donné par la formule $\mathrm{rg}(qh(X)\ (n)) = \Sigma_i \dim_F qH^i(X)$.

4.4. Toute cohomologie classique $H^{\bullet}$ fournit de manière évidente un foncteur fibre gradué $\mathscr{H}^{\bullet}$, appelé H-réalisation, vérifiant $\mathscr{H}^{\bullet}(qh(X)\ (n)) := qH^{\bullet+2m}(X)\ (n)$, et $H^{\bullet} = \mathscr{H}^{\bullet} \circ h$.

Ceci entraîne que $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est une catégorie *tannakienne* sur $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire $\otimes$-équivalente à la catégorie des représentations d'une gerbe algébrique. On a vu qu'elle est en outre semi-simple et graduée (terminologie en vigueur : on dit *poids* plutôt que degré, *pur* plutôt qu'homogène). Enfin, la dernière assertion de 3.3 exprime que $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est polarisée. Ceci achève de prouver le théorème 0.4 de l'introduction. □

Remarques. — 1) Soit $\iota : Y \to X$ l'inclusion d'une section hyperplane lisse dans un K-schéma projectif lisse purement de dimension d. En vertu du théorème de Lefschetz faible relativement à $H^{\bullet}$, ι^* induit des isomorphismes de motifs $h^i(X) \cong h^i(Y)$, $i \leqslant d-2$, et un monomorphisme $h^{d-1}(X) \to h^{d-1}(Y)$. Un inverse à droite de ι^* est donné par $*_L\, L *_L \iota_*$.

2) Toute théorie de cohomologie de Weil $H^{\bullet}$ sur $\mathscr{V}$ vérifiant le théorème de Lefschetz fort, et induisant sur les cycles algébriques l'équivalence homologique classique, définit un foncteur fibre gradué sur $\mathscr{M}(\mathscr{V})$. Par le théorème d' « unicité » des foncteurs fibres sur les catégories tannakiennes, on en déduit que $H^{\bullet}$ est comparable aux cohomologies classiques au sens de 2.3.

3) On peut dire que la théorie de Hodge absolue et la théorie exposée ici sont deux théories motiviques « extrémales », au sens où, pour la théorie de Hodge absolue, ce sont les réalisations qui sont quasi tautologiques, tandis que pour la théorie ci-dessus, c'est la cohomologie motivique qui l'est.

4.5. Voici quelques $\otimes$-catégories (graduées) de motifs dérivées de $\mathscr{M}(\mathscr{V})$. Considérons une sous-famille $\mathscr{W}$ de Ob $\mathscr{V}$, non nécessairement stable par produit.

La sous-catégorie (strictement) pleine de $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ formée des sous-quotients de sommes de produits tensoriels de motifs $h(X_i)$ ou $h(X_i)^{\vee}$, $X_i \in \mathscr{W}$, est une sous-catégorie

(1) Celle donnée par $\sigma^* : (q \times p)\ h(X \times Y)\ (n+m) \cong (p \times q)\ h(Y \times X)\ (n+m)$, où $\sigma : X \times Y \cong Y \times X$ désigne la transposition des facteurs. Noter que σ agit en cohomologie, compte tenu de la formule de Künneth, par $\sigma^*(x \otimes y) = (-)^{\delta y . \delta x}\, y \otimes x$.

tannakienne de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ $\otimes$-équivalente à la catégorie des motifs (non tordus) découpés sur les sommes disjointes finies de produits de copies de membres de $\mathcal{W}$. On la note $\mathcal{M}(\mathcal{W})_{\mathcal{V}}$, ou simplement $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $\mathcal{V}$.

Il y a aussi une variante à coefficients : $\mathcal{M}(\mathcal{V})[\mathrm{E}]$, obtenue en remplaçant $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ par $\mathrm{C}^{\bullet}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathrm{E}}$ dans la définition. Il est facile de voir que $\mathcal{M}(\mathcal{V})[\mathrm{E}]$ n'est autre que la catégorie des E-modules dans $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ dans la terminologie de [DM82] 3.11.

Enfin, si M est un motif modelé sur $\mathcal{V}$, on définit $\mathcal{M}(\mathrm{M})$, comme la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{M}(\mathcal{V})$ engendrée par M.

Exemples. — (i) Si $\mathcal{V}$ est la catégorie des K-schémas projectifs lisses, nous écrirons simplement $\mathcal{M}_{\mathrm{K}}$ pour $\mathcal{M}(\mathcal{V})$: c'est *la catégorie tannakienne des motifs* sur K. Cette catégorie est la limite inductive des $\mathcal{M}(\mathrm{M})$ ordonnées par inclusion.

(ii) *Motifs d'Artin.* On prend pour $\mathcal{W}$ la famille des K-schémas finis étales; alors $\mathcal{M}(\mathcal{W})_{\mathcal{V}}$ est $\otimes$-équivalente à la catégorie des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ de dimension finie sur $\mathbf{Q}$. Ces motifs sont de poids nul.

(iii) *Motifs attachés aux formes modulaires.* Voir [Scho90]; ces motifs sont découpés par des correspondances algébriques.

4.6. Nous développons maintenant en termes de groupes (pro)algébriques les conséquences standards du théorème 0.4 (cf. [S94]), dans le cas où K est muni d'un plongement dans $\mathbf{C}$. Soit $\mathcal{W}$ un ensemble d'objets de $\mathcal{V}$.

La réalisation de Betti $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ est un foncteur fibre gradué, à valeurs dans les $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie, *neutralisant* la catégorie tannakienne $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ formée de motifs modelés sur $\mathcal{V}$.

Définition. — Le groupe de Galois motivique de $\mathcal{M}(\mathcal{W})$, noté $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$, est le schéma d'automorphismes $\mathbf{Aut}^{\otimes}\, \mathcal{H}_{\mathrm{B}\,|\,\mathcal{M}(\mathcal{W})}$.

C'est un groupe proalgébrique, muni d'un homomorphisme central $w : \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ (du fait que $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ est graduée). Le foncteur fibre $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}$ fournit une $\otimes$-équivalence de catégorie entre $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ et la catégorie des représentations rationnelles de $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.

Pour tout motif M dans $\mathcal{M}(\mathcal{W})$, $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ agit sur $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ à travers le groupe algébrique $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{M})}$. De plus :

(i) $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{M})}$ est *proréductif* (du fait que $\mathcal{M}(\mathcal{W})$ est semi-simple);

(ii) $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{M})}$ est le sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}))$ qui *fixe les cycles motivés* parmi les tenseurs mixtes sur $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$; réciproquement, tout tenseur mixte sur $\mathcal{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ fixé par $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{M})}$ est motivé;

(iii) $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ se déploie sur le *compositum des corps* CM, et le quotient du centre de $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ par l'image de w est compact (par polarisabilité de $\mathcal{M}(\mathcal{W})$).

Remarques. — (i) Les groupes $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ dépendent du plongement $K \to \mathbf{C}$, mais n'en dépendent qu'à torsion intérieure près.

(ii) Même dans le contexte des cycles de Hodge absolus, et pour $K = \mathbf{C}$, la connexité des groupes de Galois motiviques ne semble pas connue (l'argument donné en faveur de cette connexité dans [DM82], 6.22 *a* est incomplet).

Exemples. — (i) Si $\mathcal{W} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}$ est la famille de tous les K-schémas projectifs lisses, nous écrirons simplement $\mathbf{G}_K$ le *groupe de Galois motivique absolu* sur K.

(ii) *Motifs d'Artin.* Si on prend pour $\mathcal{W}$ la famille des K-schémas finis étales, $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{W})}$ est le schéma en groupe constant profini $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Les arguments de [DM82], 6.23, *a*, *d* montrent qu'on a une suite exacte $1 \to \mathbf{G}_{\overline{K}} \to \mathbf{G}_K \to \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to 1$, et pour tout nombre premier l, un scindage continu canonique $\rho_l : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbf{G}_K(\mathbf{Q}_l)$.

Je ne sais toutefois pas montrer que $\mathbf{G}_{\overline{K}}$ est connexe.

5. Déformation

5.1. *Preuve du théorème* **0.5.** — Soient S un schéma réduit connexe de type fini sur $\mathbf{C}$, $f: X \to S$ un morphisme projectif et lisse, et s, t deux points de $S(\mathbf{C})$. Il existe une variété affine lisse connexe S' (par exemple une courbe) et un morphisme $S' \to S$ tel que l'image de $S'(\mathbf{C})$ dans $S(\mathbf{C})$ contienne s et t. Pour démontrer le théorème, à savoir que pour toute section ξ du faisceau $R^{2p}f_* \mathbf{Q}(p)$ sur l'analytisé de S, ξ_t est motivée si ξ_s l'est, on peut remplacer S par S'; dès lors, X est un schéma quasi projectif lisse, et il existe, d'après H. Hironaka, une compactification lisse $\overline{X}$ de X. Notons j_s l'inclusion $X_s \to \overline{X}$. Nous nous appuierons sur le « théorème de la partie fixe » de Deligne [D71], 4.1.1, selon lequel l'application composée $u : H^{2p}(\overline{X}, \mathbf{Q}) \to H^{2p}(X, \mathbf{Q}) \to H^0(S, R^{2p}f_* \mathbf{Q})$ est *surjective*.

Considérons le morphisme de motifs (modelés sur une catégorie $\mathcal{V}$ dont $\overline{X}$, X_s et X_t sont des objets) induits par $j_s^* : h^{2p}(\overline{X})\,(p) \to h^{2p}(X_s)\,(p)$. Sa réalisation est la composée de la tordue de u et de l'application injective $H^0(S, R^{2p}f_* \mathbf{Q})\,(p) \to H^{2p}(X_s, \mathbf{Q})\,(p)$. Ainsi son noyau est le même pour s et pour t (la réalisation de Betti $\mathcal{H}_B$ est un foncteur exact). Puisque la catégorie des motifs est abélienne (0.4), il existe un motif N quotient de $h^{2p}(\overline{X})\,(p)$ par ce noyau, un motif image $j_s^*\, h^{2p}(\overline{X})\,(p)$, et un isomorphisme de motifs $\widetilde{j_s^*} : N \cong j_s^*\, h^{2p}(\overline{X})\,(p)$. Or :

$$\mathcal{H}_B(j_s^*\, h^{2p}(\overline{X})\,(p)) = \mathrm{Im}(H^0(S, R^{2p}f_* \mathbf{Q})\,(p) \\ \to H^{2p}(X_s, \mathbf{Q})\,(p)) = H^{2p}(X_s)\,(p)^{\pi_1(S(\mathbf{C}), s)}$$

contient la fibre ξ_s; de même en substituant t à s. On voit donc que $\xi_t = (\mathcal{H}_B(\widetilde{j_t^*} \circ \widetilde{j_s^*}^{-1}))\,(\xi_s)$ est motivé si ξ_s l'est. En fait, ξ_s provient d'un cycle motivé sur $\overline{X}$, en l'occurrence $\mathcal{H}_B(\widetilde{j_s^*}^{-1})\,\xi_s$. $\square$

Corollaire **5.1.** — *Soit* $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *un morphisme projectif et lisse,* S *étant une variété algébrique complexe lisse connexe, et soit* s *un point de* $\mathrm{S}(\mathbf{C})$. *Soit :*

$$\tau \in \mathrm{H}(\mathrm{X}_s)^{\otimes m} \otimes (\mathrm{H}(\mathrm{X}_s)^\vee)^{\otimes n} \cong \mathrm{H}(\mathrm{X}_s)^{\otimes m+n}(n \dim \mathrm{X}_s)$$

un cycle motivé invariant sous un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$. *Alors les translatés de* τ *par transport parallèle en un point quelconque de* $\mathrm{S}(\mathbf{C})$ *sont motivés. En particulier, pour tout* $\gamma \in \pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$, $\gamma\tau$ *est motivé.*

En effet, le sous-groupe d'indice fini définit un revêtement étale $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et il suffit d'appliquer le théorème de déformation à $\mathrm{X}' := \mathrm{X}_\mathrm{S} \times \ldots \times_\mathrm{S} \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$ (en supposant que $\mathscr{V}$ contienne toutes les fibres de f de même qu'une compactification lisse de X'). □

5.2. *Application à la variation du groupe de Galois motivique dans une famille.*

Notons $\mathscr{H}$ la $\mathrm{H}^\bullet$-réalisation des motifs, pour l'une quelconque des cohomologies classiques. Supposons donnés :

a) une variété algébrique lisse géométriquement connexe S sur un sous-corps K de $\mathbf{C}$,

b) des S-schémas lisses X et Y, de dimensions relatives respectives d_X et d_Y, munis de fibrés inversibles relativement amples $\mathscr{L}_{\mathrm{X/S}}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{Y/S}}$,

c) des combinaisons $\mathbf{Q}$-linéaires Z_1 et Z_2 de sous-schémas intègres de codimension $d_\mathrm{X} + d_\mathrm{Y}$ dans $\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{Y}$, plats sur S; on suppose que pour un $s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$, la classe $q_s := \mathrm{pr}^{\mathrm{X}_s \mathrm{X}_s \mathrm{Y}_s}_{\mathrm{X}_s \mathrm{X}_s}{}_*([(\mathrm{Z}_1)_s] \cup *[(\mathrm{Z}_2)_s]) \in \mathrm{H}^{2d_\mathrm{X}}(\mathrm{X}_s \times \mathrm{X}_s)\,(d_\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{End}\,\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}_s)$ vérifie $q_s \circ q_s = q_s$ (on a noté $*$ l'involution de Lefschetz ou Hodge relative à $[(\mathscr{L}_{\mathrm{X/S}})_s] \otimes [\mathrm{Y}_s] + [\mathrm{X}_s] \otimes [(\mathscr{L}_{\mathrm{Y/S}})_s]$). Cette propriété d'idempotence vaut alors pour tout point s de S,

d) un entier j.

Ces données définissent une *famille de motifs* sur $\mathbf{C}$ paramétrée par $\mathrm{S}(\mathbf{C})$, par l'assignation $s \mapsto \mathrm{M}_s := q_s\, h(\mathrm{X}_s)\,(j)$ (1). Nous nous proposons d'étudier la variation du groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M}_s)}$ avec s.

Théorème **5.2.** — 1) *L'ensemble* Exc *des points* $s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$, *tels que le groupe de Galois motivique* $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M}_s)}$ *ne contienne l'image d'aucun sous-groupe d'indice fini de* $\pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$, *est* maigre *dans* $\mathrm{S}(\mathbf{C})$. *Plus précisément, il existe une suite* $(\mathrm{V}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *de sous-variétés algébriques de* $\mathrm{S}_{\overline{\mathrm{K}}}$, *distinctes de* $\mathrm{S}_{\overline{\mathrm{K}}}$, *telles que* $\mathrm{Exc} = \cup\, \mathrm{V}_n(\mathbf{C})$.

2) *Il existe un système local* $(\mathrm{G}_s)_{s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})}$ *de sous-groupes algébriques de* $\mathrm{Aut}\,\mathrm{H}(\mathrm{M}_s)$ *tel que :*

(i) $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M}_s)} \subseteq \mathrm{G}_s$ *pour tout* $s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$,

(ii) $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M}_s)} = \mathrm{G}_s$ *si et seulement si* $s \notin \mathrm{Exc}$,

(iii) G_s *contient l'image d'un sous-groupe d'indice fini de* $\pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$.

---

(1) On suppose que la catégorie ambiante $\mathscr{V}$ contient toutes les fibres X_s, Y_s des compactifications lisses des puissances fibrées $\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \ldots \times_\mathrm{S} \mathrm{X}$, et est stable par des opérations de « spécialisation » comme dans l'argument de la scolie 2.5.

3) *Supposons de plus que* K *soit un corps de nombres, et que soit donné un morphisme étale* $\pi : S \to \mathbf{P}^n$. *Alors pour toute extension finie* K′ *de* K, $\pi(\mathrm{Exc}) \cap \mathbf{P}^n(K')$ *est* mince. A fortiori, *l'ensemble des points* $s \in S(\overline{K})$ *hors de* Exc, *de degré* $\leqslant 2 \deg \pi$ *sur* K, *est dense dans* $S(\mathbf{C})$.

Remarques. — (i) Rappelons qu'une partie est dite *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Une partie de $\mathbf{P}^n(K')$ est dite *mince* si elle est contenue dans un ensemble de la forme $p(V(K'))$, où $p : V \to \mathbf{P}^n$ est un K′-morphisme génériquement fini sans section rationnelle, cf. *e.g.* [S89], § 9. Ainsi, si K′ est non réel, le complémentaire d'une partie mince est dense. La première assertion de 3) (appliquée à des extensions finies non réelles de K) implique donc la seconde.

(ii) Cette dernière entraîne aisément à son tour le *théorème* 0.6.1 : le motif M sur **C** « provient » d'un motif M_L sur une extension L de type fini de $\mathbf{Q}$. Soit K la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans L, et S une K-variété lisse de corps de fonctions égal à L; quitte à rétrécir S, on peut disposer, à partir de M_L, de données *a), b), c)* comme ci-dessus, et d'un morphisme π. Si $s \in S(K')$, pour une quelconque extension finie K′ de K, se situe hors de la partie « exceptionnelle » Exc, alors $N = M_s$ répond à la question : $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M)} \cong \mathbf{G}_{\mathcal{M}(N)}$, comme les deux remarques suivantes le feront voir. □

(iii) Notons $s_{\mathbf{C}}$ le point complexe associé à $s \in S(\overline{K})$. Alors l'isomorphisme canonique de réalisations l-adiques $\mathscr{H}_l(M_s) \cong \mathscr{H}_l(M_{s_{\mathbf{C}}})$ identifie $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M_s)}$ à $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M_{s_{\mathbf{C}}})}$.

(iv) En cohomologie l-adique, les données *a), b), c)* ci-dessus définissent un motif M_η sur K(S) en prenant pour s le point générique η de S. Supposons **C** de degré de transcendance infini sur K. Soit $s \in S(\mathbf{C})$ un point générique de Weil relativement à $K : K(s) = K(S)$. Alors l'isomorphisme canonique $\mathscr{H}_l(M_s) \cong \mathscr{H}_l(M_{\eta_{\overline{K}}})$ identifie $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M_s)} = G_s$ à $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M_{\eta_{\overline{K}}})}$.

(v) Lorsque S est une courbe définie sur un corps de nombres, Exc est un ensemble dénombrable de points algébriques. On verra dans [A] [A95*a*] comment des méthodes de transcendance (G-fonctions) permettent alors dans certains cas de raffiner l'assertion 3 du théorème.

(vi) Les assertions 1 et 2 du théorème valent également dans le contexte des cycles de Hodge, pour $K = \mathbf{C}$, en remplaçant groupes motiviques par groupes de Mumford-Tate, cf. [D72*a*], app., [A92*a*], lemme 4, et [CDK95] pour la seconde assertion de 1).

(vii) Des arguments semblables établissent l'analogue du théorème dans le contexte de Hodge absolu, sauf en ce qui concerne la seconde assertion de 1), qui n'est pas connue.

Preuve du théorème.

1) *a)* En vue de la maigreur de Exc, on peut supposer $K = \mathbf{C}$ et que $H^\bullet$ est la cohomologie de Betti rationnelle.

Posons $\mathscr{E}_s^{m,n} = \mathscr{H}(M_s)^{\otimes m} \otimes (\mathscr{H}(M_s)^\vee)^{\otimes n}$, et notons $(\mathscr{E}_s^{m,n})_{\mathrm{mot}}$ le sous-espace des cycles motivés, *i.e.* des invariants de $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(M_s)}$. En vertu du corollaire 5.1, $s \notin \mathrm{Exc}$ implique que $\pi_1(S(\mathbf{C}), s)$ agit sur $(\mathscr{E}_s^{m,n})_{\mathrm{mot}}$; en fait, $s \notin \mathrm{Exc}$ si et seulement si *pour tout* (m, n), $\pi_1(S(\mathbf{C}), s)$ *agit sur* $(\mathscr{E}_s^{m,n})_{\mathrm{mot}}$ *à travers un quotient fini.*

Désignons par $\mathscr{J}_s^{m,n}$ le sous-espace de $(\mathscr{C}_s^{m,n})_{\text{mot}}$ formé des cycles dont les translatés par transport parallèle en n'importe quel point de $S(\mathbf{C})$ sont motivés. Alors, $s \notin \text{Exc}$ si et seulement si *pour tout* (m, n), $\mathscr{J}_s^{m,n} = (\mathscr{C}_s^{m,n})_{\text{mot}}$.

L'implication $\Rightarrow$ découle du corollaire 5.1, tandis que la réciproque vient de ce que $\pi_1(S(\mathbf{C}), s)$ agit sur $\mathscr{J}_s^{m,n}$ à travers un quotient fini : en effet son action se factorise d'une part à travers le groupe discret $\text{Aut}[\mathscr{J}_s^{m,n} \cap (H_B(X_s, \mathbf{Z})^{\otimes m} \otimes (H_B(X_s, \mathbf{Z})^\vee)^{\otimes n}/\text{torsion})]$, d'autre part, elle est à valeurs dans le groupe orthogonal (compact) relatif à la trace sur $\mathscr{J}_s^{m,n} \otimes \mathbf{R}$ de la polarisation.

Soit $p : \widetilde{S} \to S^{\text{an}}$ le revêtement universel analytique. Pour toute section θ du système local constant $p^{-1} \mathscr{C}^{m,n}$ sur $\widetilde{S}$, notons $\widetilde{S}(\theta)$ l'ensemble des points $z \in \widetilde{S}$ tels que θ_z soit motivé, *i.e.* appartienne à $p^*(\mathscr{C}_{p(z)}^{m,n})_{\text{mot}}$. Alors l'équivalence que nous venons de démontrer s'exprime aussi comme suit : $s \in \text{Exc}$ si et seulement si *il existe* θ *tel que* $p(\widetilde{S}(\theta)) \neq S(\mathbf{C})$ *et* $s \in \widetilde{S}(\theta)$.

Notons que $\widetilde{S}(\theta)$ est contenu dans la sous-variété analytique fermée

$$\{ z \in \widetilde{S} \mid \theta_z \in F^0((p^{-1} \mathscr{C}^{m,n})_z \otimes \mathbf{C}) \} \text{ de } \widetilde{S}$$

(le cran F^0 de la filtration de Hodge est un sous-fibré analytique du fibré $p^{-1} \mathscr{C}^{m,n} \otimes \mathbf{C}$). Comme l'ensemble des θ est dénombrable, nous concluons que :

$$\text{Exc} = \bigcup_{\theta / p(\widetilde{S}(\theta)) \neq S(\mathbf{C})} p(\widetilde{S}(\theta))$$

est maigre.

b) Prouvons la seconde assertion de 1) (qui redonne la maigreur, et n'est pas utilisée dans la suite). On peut supposer que K est la clôture algébrique d'une extension de type fini de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$; dès lors, K est dénombrable. Remarquons que tout élément de $(\mathscr{C}_s^{m,n})_{\text{mot}}$ s'écrit :

$$\frac{1}{N} q_s^{m,n} \, \text{pr}_{X_s^{m+n} \, *}^{X_s^{m+n} Z} \{ ([a_s^+] - [a_s^-]) \cup *_{1 \otimes [D''] + [D_s'] \otimes 1}([b_s^+] - [b_s^-]) \},$$

où N est entier, Z est une sous-variété lisse d'un $\mathbf{P}^M$ définie sur K (scolie 2.5), D'' est le diviseur à l'infini de Z, $a_s^\pm$, $b_s^\pm$ sont des cycles algébriques effectifs entiers portés par $X_s^{m+n} \times Z$, D_s' est un diviseur ample sur X_s^{m+n} et $q_s^{m,n} = a_s^{\otimes m} \otimes {}^t a_s^{\otimes n}$. Notons que l'ensemble des données $\Delta = (N, M, Z, \deg a_s^+, \deg a_s^-, \deg b_s^+, \deg b_s^-, \deg D_s')$ possibles est *dénombrable*. D'autre part, pour Δ fixé, mais s variable, les quintuplets $w = (a_s^+, a_s^-, b_s^+, b_s^-, D_s')$ forment une variété algébrique W_Δ (variété de Chow), munie d'un morphisme propre $W_\Delta \to S$. De plus, pour toute composante irréductible $W_{\Delta,\iota}$ de W_Δ, d'image dans S notée $S_{\Delta,\iota}$, les classes de cohomologie $[a_s^\pm]$, $[b_s^\pm]$, $[D_s']$ sont localement constantes sur $S_{\Delta,\iota}$ (soient $W'_{\Delta,\iota}$ une désingularisation de $W_{\Delta,\iota}$, et $\sigma : W'_{\Delta,\iota} \to S_{\Delta,\iota}$ le morphisme propre surjectif naturel; il existe une classe algébrique $\alpha \in H_B(W'_{\Delta,\iota} \times_S (X \times_S \ldots \times_S X)^5 \times Z^4)$ telle que pour tout $w' \in W'_{\Delta,\iota}(\mathbf{C})$, on ait $\alpha_{w'} = [a^+_{\sigma(w')}] \otimes [a^-_{\sigma(w')}] \otimes [b^+_{\sigma(w')}] \otimes [b^-_{\sigma(w')}] \otimes [D'_{\sigma(w')}]$ dans $(\mathscr{C}_{\sigma(w')}^{m,n})^{\otimes 5} \otimes_{\mathbf{Q}} H_B(Z^4)$; le point est que les $\alpha_{w'}$ définissent, par conséquent, une section du système local $\sigma^{-1}(\mathscr{E}^{m,n})^{\otimes 5} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Z}^4)$ sur l'espace connexe par arcs $\mathrm{W}'_{\Delta,\iota}(\mathbf{C})$). La classe

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\, q_s^{m,n}\, \mathrm{pr}^{\mathrm{X}_s^{m+n}}_{\mathrm{X}_s^{m+n}}{}_{*}\,\mathrm{z}\,\{([a_s^+] - [a_s^-]) \cup *_{1\otimes[\mathrm{D}'']+[\mathrm{D}'_s]\otimes 1}([b_s^+] - [b_s^-])\}$$

est donc, de même, localement constante. On en tire, avec les notations de *a)*, que l'ensemble $\mathrm{W}_{\Delta,\theta}$ des $w = (a_s^{\pm}, b_s^{\pm}, \mathrm{D}'_s)$ tels que :

$$\theta_s = p^*\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\, q_s^{m,n}\, \mathrm{pr}^{\mathrm{X}_s^{m+n}}_{\mathrm{X}_s^{m+n}}{}_{*}\,\mathrm{z}\,\{([a_s^+] - [a_s^-]) \cup *_{1\otimes[\mathrm{D}'']+[\mathrm{D}'_s]\otimes 1}([b_s^+] - [b_s^-])\}\right)$$

est une réunion de composantes de W_Δ; sa projection $\mathrm{S}_{\Delta,\theta}$ sur S est donc une sous-K-variété, et l'on a $p(\widetilde{\mathrm{S}}(\theta)) = \bigcup_\Delta \mathrm{S}_{\Delta,\theta}$. Il s'ensuit que $\mathrm{Exc} = \bigcup_{(\Delta,\theta)/\mathrm{S}_{\Delta,\theta} \neq \mathrm{S}} \mathrm{S}_{\Delta,\theta}$, réunion dénombrable de K-variétés.

2) Pour tout $s \in \mathrm{S}(\mathbf{C})$, définissons G_s comme le sous-groupe algébrique de Aut $\mathrm{H}(\mathrm{M}_s)$ qui fixe les tenseurs mixtes sur $\mathrm{H}(\mathrm{M}_s)$ appartenant aux espaces $\mathscr{J}_s^{m,n}$ (pour (m,n) quelconque). Les propriétés (i), (ii) et (iii) de l'assertion 2) sont maintenant claires.

3) Le principe sera de montrer, grâce au théorème de déformation, que la « dégénérescence » du groupe motivique en un point exceptionnel entraîne celle des représentations l-adiques. On peut agrandir K, et donc supposer $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$. Pour tout $s \in \mathrm{S}(\mathrm{K})$, l'isomorphisme canonique $\mathscr{H}_l(\mathrm{M}_s) \cong \mathscr{H}_l(\mathrm{M}_\eta)$ identifie l'image H_s de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathscr{H}_l(\mathrm{M}_s)$ à un sous-groupe fermé du groupe de Lie l-adique H_η image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}(\mathrm{S})}/\mathrm{K}(\mathrm{S}))$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathscr{H}_l(\mathrm{M}_\eta)$. Remplaçant S par un revêtement étale fini si nécessaire (ceci n'affecte pas la minceur), on peut supposer H_η connexe. Le groupe algébrique $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M}_{s_\mathbf{C}})}$ peut être défini comme le fixateur d'un nombre fini de tenseurs mixtes (nécessairement motivés), dont on peut supposer qu'ils sont définis sur une extension finie de $\mathrm{K}(s)$ (cf. scolie 2.5). Ceux-ci sont donc invariants sous le groupe H_s si ce dernier est connexe.

Démontrons l'implication $\mathrm{H}_s = \mathrm{H}_\eta \Rightarrow s \notin \mathrm{Exc}$: il s'agit de faire voir que si un tenseur $\theta_s \in (\mathscr{E}_s^{m,n})_{\mathrm{mot}} \subseteq \mathscr{H}_l(\mathrm{M}_s)^{\otimes m} \otimes (\mathscr{H}_l(\mathrm{M}_s)^\vee)^{\otimes n} \cong \mathscr{H}_l(\mathrm{M}_\eta)^{\otimes m} \otimes (\mathscr{H}_l(\mathrm{M}_\eta)^\vee)^{\otimes n}$ est fixé par H_η, alors θ_s est fixé par $\pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$ — et donc par G_s, car θ_s se prolonge en un cycle motivé partout d'après le théorème de déformation. C'est clair puisque H_η contient l'image du complété profini de $\pi_1(\mathrm{S}(\mathbf{C}), s)$.

Ceci ramène l'énoncé 3) à un résultat de J.-P. Serre [S] (cf. aussi [S94], 6.4), selon lequel l'ensemble $\pi(\{s \in \mathrm{S}(\overline{\mathrm{K}})/\mathrm{H}_s \neq \mathrm{H}_\eta\})$ est mince. (Principe : on peut supposer π galoisien; soit K_η (resp. K_s) l'extension galoisienne de $\mathrm{K}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{K}(s)$) définie par le noyau de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}(\mathrm{S})}/\mathrm{K}(\mathrm{S})) \to \mathrm{H}_\eta$ (resp. $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K}(s)) \to \mathrm{H}_s$). Alors :

$$\mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\eta/\mathrm{K}(\mathbf{P}^n)) \cong \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_s/\mathrm{K}) \Rightarrow \mathrm{H}_s = \mathrm{H}_\eta$$

et on applique une variante du théorème de Hilbert pour les extensions galoisiennes infinies, cf. [S89], p. 149.) □

5.3. *Preuve du théorème* 0.6.4. — Nous allons en fait prouver une légère généralisation, pour une famille de motifs (M_s) paramétrée par $S(\mathbf{C})$ comme en 5.2.

Notons $\mathfrak{G}'_s$ l'algèbre de Lie du groupe G_s introduit dans le théorème 5.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_s$ du groupe motivique et celle $\mathfrak{H}_s$ du groupe de monodromie sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{G}'_s$, et l'on a $\mathfrak{G}_s = \mathfrak{G}'_s$ si $s \notin$ Exc. Remarquons d'emblée que $\mathfrak{G}_s$ et $\mathfrak{G}'_s$ sont des sous-espaces motivés de End $\mathscr{H}_B(M_s)$, puisqu'ils sont stables sous l'action adjointe de $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(M_s)}$ (en fait, comme G_s est localement constant, le sous-espace $\mathfrak{G}'_s$ de End $\mathscr{H}_B(M_s)$ peut être défini par la fibre (motivée) en s d'un endomorphisme idempotent du *système local* de fibres End $\mathscr{H}_B(M_t)$).

Le même argument montre que l'algèbre de Lie de tout sous-groupe fermé normal de G_s est motivé. Montrons donc que $\mathfrak{H}_s$ est un tel idéal de $\mathfrak{G}'_s$. Pour cela, il est loisible de remplacer S par un revêtement fini étale, donc de supposer le groupe de monodromie algébrique H_s connexe, et il s'agit de montrer que H_s est normal dans G_s. Tel est le cas si, pour tous entiers positifs m, n, et tout caractère χ de H_s, la partie de $T_s^{m,n} = \mathscr{H}_B(M_s)^{\otimes m} \otimes (\mathscr{H}_B(M_s)^\vee)^{\otimes n}$ sur laquelle H_s agit à travers χ est stable sous G_s (cf. [A92*a*]). Or d'après [D71], 4.2.8, on a $\chi = 1$. En écrivant :

$$\mathscr{E}_s^{m,n} = (q_s^{(m+n)})\, H_B(X_s)^{\otimes(m+n)}(nd_X),$$

on est ramené au théorème de la partie fixe qui montre (cf. 5.1) que l'espace des invariants de H_s dans $\mathscr{E}_s^{m,n}$ est la réalisation d'un motif indépendant de s. Ceci achève d'établir que $\mathfrak{H}_s$ est un sous-espace motivé de End $\mathscr{H}_B(M_s)$.

Prouvons enfin que si, pour un $t \in S(\mathbf{C})$, $\mathfrak{G}_t$ est abélienne, alors $\mathfrak{H}_s = [\mathfrak{G}'_s, \mathfrak{G}'_s]$. Les deux membres de l'égalité à pourvoir étant localement constants, il suffit de l'établir pour $s \notin$ Exc. Et pour cela, il suffit de s'assurer que pour tout (m, n), l'action de $\mathfrak{G}'_s$ sur l'espace des invariants de H_s dans $\mathscr{E}_s^{m,n}$ est abélienne. Comme cet espace est la réalisation d'un motif indépendant de s, l'action de $\mathfrak{G}'_s = \mathfrak{G}_s$ est bien, tout comme celle de $\mathfrak{G}_t$, abélienne.

6. Cycles motivés sur les variétés abéliennes

6.1. Dans ce paragraphe, nous étudions les motifs engendrés par la famille $\mathscr{A}b$ des K-schémas de la forme $A \times_K K'$, où A est une variété abélienne sur K et K' une K-algèbre de type fini. Ces motifs sont aussi les objets de la catégorie tannakienne $\mathscr{M}(\mathscr{A}b)_{\mathscr{V}}$ engendrée par les $h^1(A)$ et les motifs d'Artin; elle contient les objets de Tate ($\mathbf{Q}(-1)$ est quotient de $h^1(A) \otimes h^1(A)$ si $\dim A > 0$).

Exemples. — 1) Supposons que A soit potentiellement *de type* CM, par quoi on entend que pour une extension finie convenable K'/K, End $A_{K'} \otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-$\mathbf{Q}$-algèbre commutative semi-simple de dimension 2 dim A. Alors $\mathbf{G}_{\mathscr{M}(A_{K'})}$ est un *tore* (cf. [M69], § 2, en remplaçant groupe de Hodge par groupe motivique).

2) La cohomologie motivique de toute *variété de Fermat* est un objet de $\mathcal{M}(\mathcal{A}b)$, ce qui découle de [KaS79]. Par contre, les motifs attachés aux *formes modulaires* de poids > 2 non CM (par exemple le motif de Ramanujan) ne sont des objets de $\mathcal{M}(\mathcal{A}b)_{\mathscr{V}}$ pour aucun $\mathscr{V}$ [Bl92].

Nous allons distinguer deux cas particuliers.

6.2. *Le cas* $\operatorname{Ob}\mathscr{V} = \mathcal{A}b$: dans ce cas, on sait que quelle que soit la classe du faisceau inversible ample choisie, les opérateurs π^i, $*_{\mathrm{L}}$ et $*_{\mathrm{H}}$ sont donnés par des correspondances algébriques indépendantes de la cohomologie [L68], Th. 1 et 3 (cf. aussi [Kl68], app.). Donc les cycles motivés modelés sur $\mathcal{A}b$ sont algébriques. Ceci entraîne que les réalisations l-adiques d'un motif dans $\mathcal{M}(\mathcal{A}b)$ forment un système strictement compatible.

Le groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{A})}$ attaché à A et $\mathrm{H}^{\bullet}$ (*i.e.* le schéma d'automorphisme de la H-réalisation) est le sous-groupe algébrique réductif de $\mathrm{GL}\,\mathrm{H}^1(\mathrm{A})$ qui fixe les cycles algébriques parmi les tenseurs mixtes sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{A})$; réciproquement, tout tenseur mixte fixé par $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{A})}$ est algébrique [1].

Pour $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{C}$ et $\mathrm{H}^{\bullet} = \mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{B}}$, $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{A})}$ contient le groupe de Mumford-Tate $\mathrm{G}_{\mathrm{MT}}(\mathrm{A}_{\mathbf{C}})$.

6.3. *Le cas où* $\mathrm{K} = \mathbf{C}$ *et* $\mathscr{V}$ *contient les pinceaux compacts de variétés abéliennes.*

Nous allons démontrer le théorème 0.6.2, à savoir que tout élément ξ de type $(0, 0)$ dans $\mathrm{H}^{2p}(\mathrm{A}, \mathbf{Q})\,(p)$ est motivé. En remplaçant A par ses puissances, on en déduit que $\mathbf{G}_{\mathcal{M}(\mathrm{A})}$ coïncide avec $\mathrm{G}_{\mathrm{MT}}(\mathrm{A})$. Ceci valant pour toute variété abélienne complexe, il en résulte que le foncteur « réalisation de Betti-Hodge » de $\mathcal{M}(\mathcal{A}b)_{\mathscr{V}}$ vers la catégorie des $\mathbf{Q}$-structures de Hodge est *pleinement fidèle.*

Nous commençons par déduire du théorème de déformation 0.5, en trois étapes, que tout cycle de Hodge ξ est motivé :

a) réduction au cas d'une variété abélienne de type CM,

b) réduction au cas d'un « cycle de Weil »,

c) réduction au cas d'une variété abélienne isogène à une puissance d'une courbe elliptique.

a) Lemme **6.3.1.** — *Il existe un pinceau compact de variétés abéliennes complexes* [2] $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et deux points* s, t *de* S, *tels que :*

(i) X_s *soit isogène à* $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$,

(ii) X_t *soit de type* CM,

(iii) *l'image inverse de* (ξ, ξ) *sur* X_s *s'étende en une section globale* ξ' *de* $\mathrm{R}^{2p} f_* \mathbf{Q}(p)$, *de type* $(0, 0)$ *sur toute fibre de* f.

---

(1) Ceci réfute l'opinion imprudente « on ne peut guère espérer prouver un principe A pour les cycles algébriques » exprimée dans l'introduction de [A92*b*].

(2) *I.e.* un schéma abélien de base une courbe projective lisse sur **C**.

Preuve. — Considérons l'espace $V_0 := H^1(A, \mathbf{Q})$ muni de sa structure de Hodge de type $(0, 1) + (1, 0)$ et de sa forme alternée de Riemann ψ_0. On a $H^{2p}(A, \mathbf{Q}) \cong \bigwedge^{2p} H^1(A, \mathbf{Q})$ et le groupe « de Hodge » (1) $G^1_{MT}(A)$ est contenu dans $Sp(V_0, \psi_0)$.

Nous aurons à choisir un corps quadratique *réel* E auxiliaire; posons $V := V_0 \otimes E$, $\psi := tr_{E/\mathbf{Q}}(\psi_0 \otimes 1)$. Considérons la famille de type de Hodge $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ associée à $G := Res_{E/\mathbf{Q}} G^1_{MT}(A)_E \to Sp(V, \psi)$ (et à un sous-groupe arithmétique sans torsion de G) cf. [M69]. Elle satisfait aux propriétés (i) à (iii). La base $\mathscr{S}$ est une variété quasi projective lisse; l'intérêt de l'extension auxiliaire par E est que le bord de sa compactification projective minimale $\mathscr{S}^*$ (Baily-Borel) est de codimension complexe $\geqslant 2$. D'autre part, bouger s ou t par un élément quelconque de $G(\mathbf{Q})$ change X_s resp. X_t en des variétés abéliennes isogènes $X_{s'}$ resp. $X_{t'}$, et change ξ'_s en $\xi'_{s'}$; les ensembles de points $G(\mathbf{Q})\, s$ et $G(\mathbf{Q})\, t$ sont partout denses dans $\mathscr{S}(\mathbf{C})$. Alors, d'après Bertini, il existe une section linéaire lisse S de $\mathscr{S}^*$, de dimension 1, rencontrant $G(\mathbf{Q})\, s$ et $G(\mathbf{Q})\, t$ mais ne rencontrant pas le bord de $\mathscr{S}^*$. L'image inverse f de f par $S \to \mathscr{S}$ remplit les conditions du lemme. □

Remarque. — Si ξ_k est un cycle motivé de degré p sur A^k, on montre de même que l'image inverse de (ξ_k, ξ_k) sur X^k_s s'étend en une section globale ξ'_k de $R^{2p}(f \times_S \ldots \times_S f)_* \mathbf{Q}(p)$ de type $(0, 0)$ sur toute fibre.

b) Désignons maintenant par E un *corps* CM, et par E^+ son sous-corps réel maximal. Soit V une $\mathbf{Q}$-structure de Hodge de type $(1, 0) + (0, 1)$ telle que E agisse par endomorphismes. En suivant [A92*b*], nous dirons que V est *de Weil* si la condition suivante est réalisée : $(*)$ il existe une forme E-hermitienne φ sur le E-espace sous-jacent à V, admettant un sous-espace totalement isotrope de dimension $p = 1/2 \dim_E V$, et il existe un élément purement imaginaire de E, soit ζ, tel que $\psi := tr_{E/\mathbf{Q}}(\zeta)\, \varphi$ définisse une polarisation de V. On vérifie alors aisément que les éléments de $\bigwedge^{2p}_E V$ (dont le E-espace sous-jacent est une droite) sont des cycles de Hodge (on néglige ici la torsion de Tate), appelés *cycles de Weil*; ces cycles ont été introduits par A. Weil [W77] dans le cas où E est quadratique.

Lemme **6.3.2.** — *Soit* $\xi \in H^{2p}(B, \mathbf{Q})\ (p)$ *un cycle de Hodge sur une variété abélienne* B *de type* CM. *Alors il existe un corps* CM E, *des variétés abéliennes* B_j *de type* CM *par* E, *de dimension* $p[E : \mathbf{Q}]$ *(pour* $j = 1, \ldots, n$*), des morphismes* $g_j : B \to B_j$, *et un cycle de Weil* ξ_j *sur chaque* B_j, *tels que* $\xi = \Sigma g^*_j(\xi_j)$.

Cela est prouvé dans [A92*b*]. □

Remarquons que si $p = 1$, le théorème classique de Lefschetz assure que tout cycle de Weil est algébrique.

(1) Défini comme le plus grand sous-groupe de $G_{MT}(A)$ agissant trivialement sur les objets de Tate, ou de manière équivalente, comme la $\mathbf{Q}$-adhérence de Zariski de l'image du morphisme $S^1 \to GLV_{0\mathbf{R}}$ donnant la structure complexe sur $T_{A,0} \cong V^\vee_{0\mathbf{R}}$.

c) Lemme **6.3.3.** — *Soient* $\xi_j \in (\overset{2p}{\Lambda_{\mathrm{E}}} \mathrm{H}^1(\mathrm{B}_j, \mathbf{Q}))\ (p) \subseteq \mathrm{H}^{2p}(\mathrm{B}_j, \mathbf{Q})\ (p)$ *des cycles de Weil, avec* $p > 1$. *Il existe un pinceau compact de variétés abéliennes complexes* $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et des points* s_j *de* S, $j = 0, \ldots, n$, *tels que*

(i) *pour* $j = 1, \ldots, n$, X_{s_j} *soit isogène à* B_j,

(ii) X_{s_0} *soit isogène à une puissance d'une courbe elliptique,*

(iii) *l'image inverse de* ξ_j *sur* X_{s_j} *s'étende en une section globale* ξ'_j *de* $\mathrm{R}^{2p} f_* \mathbf{Q}(p)$, *dont la fibre en* s_0 *soit algébrique.*

Preuve. — D'après un résultat classique de W. Landherr (voir aussi [D82], 4.2), la condition (∗) détermine l'espace E-hermitien sous-jacent à (V, φ). De plus, on peut paramétrer naturellement les structures de Weil sur cet espace par le domaine symétrique hermitien associé au groupe $\mathrm{G} := \mathrm{Res}_{\mathrm{E}^+/\mathbf{Q}} \mathrm{SU}(\mathrm{V}, \varphi)$.

Soit alors V_0 une $\mathbf{Q}$-structure de Hodge de type $(1, 0) + (0, 1)$ de rang $2p$ (par exemple le H^1 d'une puissance p-ième d'une courbe elliptique), munie d'une polarisation ψ_0, et soit W_0 un sous-espace isotrope maximal de V_0. Posons $\mathrm{V} := \mathrm{V}_0 \otimes \mathrm{E}$, dont on munit le complexifié de la bigraduation issue de celle de $\mathrm{V}_0 \otimes \mathbf{C}$, et posons $\psi := \mathrm{tr}_{\mathrm{E}/\mathbf{Q}}(\psi_0 \otimes 1)$, polarisation qui s'écrit automatiquement sous la forme $\mathrm{tr}_{\mathrm{E}/\mathbf{Q}}(\zeta)\, \varphi$ pour une unique forme E-hermitienne φ [D82], 4.6. Alors la condition (∗) est satisfaite ($\mathrm{W}_0 \otimes \mathrm{E}$ est un sous-espace isotrope de dimension p pour φ).

Considérons la famille de type de Hodge associée à $\mathrm{G} \to \mathrm{Sp}(\mathrm{V}, \psi)$ (et à un sous-groupe arithmétique sans torsion de G; cf. [D82], 4.8, ou [W77] dans le cas où E est quadratique). Elle satisfait aux conditions (i) à (iii). En outre, puisque $p > 1$, le bord de sa compactification projective minimale est de codimension complexe $\geqslant 2$. Les arguments du point *a)* permettent alors de conclure, compte tenu du fait bien connu que tout cycle de Hodge sur une puissance d'une courbe elliptique est algébrique (cf. *e.g.* [KuM91], § 2). □

Comme l'affirme alors le théorème 0.5 appliqué au cas particulier d'un pinceau compact de variétés abéliennes, les cycles motivés sont préservés par déformation plate dans le pinceau, et comme les cycles motivés sont aussi préservés par image inverse par un morphisme, les lemmes précédents entraînent immédiatement le théorème 0.6.2. □

Remarques. — 1) Le théorème 0.6.2 implique que pour *tout* corps K de caractéristique nulle, tout cycle de Hodge absolu sur une K-variété abélienne est motivé.

2) Ce théorème ramène en particulier la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes à la question de savoir si l'involution de Lefschetz (ou de Hodge) sur les pinceaux compacts de variétés abéliennes est donnée par une correspondance algébrique. Ceci est à rapprocher de [Ab94], qui montre que la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes découlerait de l'algébricité de l'involution de Hodge dans la cohomologie L^2 réduite des variétés de Kuga non compactes.

7. Motifs attachés aux surfaces K3 et à quelques cubiques

7.1. Ici encore le corps de base K est $\mathbf{C}$.

Soit Λ un réseau quadratique isométrique au réseau primitif $P^2(Y, \mathbf{Z})$ d'une surface K3 polarisée Y. L'image de $\wp := (H^{2,0} \oplus H^{0,2}) \cap P^2(Y, \mathbf{Z})$ dans la grassmannienne Ω des plans positifs orientés de $\Lambda_{\mathbf{R}}$ s'appelle la période de Y (l'orientation est telle que pour $w \neq 0 \in H^{2,0}$, $(\mathrm{Re}\, w, \mathrm{Im}\, w)$ soit directe).

Une surface K3 (polarisée) est dite exceptionnelle si son nombre de Picard est égal à 20; ceci équivaut à dire que sa période $\wp$ est définie sur $\mathbf{Q}$.

Lemme **7.1.1.** — *La cohomologie motivique de toute surface* K3 *exceptionnelle* Y_1 *est un objet de* $\mathcal{M}(\mathcal{A}b)_{\mathcal{V}}$ *(pourvu que* Y_1 *soit un objet de* $\mathcal{V}$*).*

Preuve. — En effet, d'après [SI77], il existe deux courbes elliptiques isogènes à multiplication complexe, soient E et E′, et une application rationnelle de degré 2 $r : Y_1 \dots \to (E \times E')/\pm 1$ telle que la correspondance algébrique r' de Y_1 vers $E \times E'$ associée à r induise une isométrie sur les réseaux transcendants de Y_1 et $E \times E'$ (*i.e.* sur l'orthogonal des groupes de Néron-Severi dans $H^2(.\,, \mathbf{Z})$). Alors r' fournit un monomorphisme de motifs $h(Y_1) \to h(E \times E') \oplus h(\mathbf{P}^1) \oplus h(\mathbf{P}^1) \oplus \dots \oplus h(\mathbf{P}^1)$. □

Lemme **7.1.2.** — *Soit* Y_0 *une surface* K3 *polarisée et* $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ *une déformation (analytique) projective locale verselle de* Y_0. *Il existe alors une partie dense de* $\mathcal{S}$ *où les fibres de* g *sont des surfaces* K3 *exceptionnelles.*

Preuve. — En effet, quitte à rapetisser $\mathcal{S}$, on peut choisir une trivialisation $(R^2 g_* \mathbf{Z})_{\mathrm{prim}} \to \Lambda_{\mathcal{S}}$ qui induit un isomorphisme local $\mathcal{S} \to \Omega$ (Andreotti-Weil-Tjurina). Comme $\mathrm{Aut}\, \Lambda_{\mathbf{Q}}$ est dense dans $\mathrm{Aut}\, \Lambda_{\mathbf{R}}$, qui agit transitivement sur Ω, l'ensemble des points de Ω correspondant à des plans orientés $\wp$ tels que $\wp \cap \Lambda$ soit de rang 2 est dense. □

Lemme **7.1.3.** (1). — *Soit* Y_0 *une surface* K3 *polarisée. Il existe un schéma* S *connexe affine lisse sur* $\mathbf{C}$, *une famille* $g : Y \to S$ *de surfaces* K3 *polarisées, et un schéma abélien* $h : A \to S$ (dit de « Kuga-Satake »), *de dual noté* $h^\vee$, *tels que*

a) pour un point $0 \in S$, *la fibre de* g *en* 0 *soit* Y_0,

b) pour un point $1 \in S$, *la fibre de* g *en* 1 *soit une surface* K3 *exceptionnelle,*

c) il existe un monomorphisme de variations de structures de Hodge :

$$(R^2 g_* \mathbf{Z})_{\mathrm{prim}} \to R^1 h_* \mathbf{Z} \otimes R^1 h^\vee_* \mathbf{Z}.$$

Preuve. — Pour les points *a)* et *c)*, voir [D72*a*], 6.4, 6.5 (notre S est un voisinage affine de 0 dans le schéma S de *loc. cit.*). Le point *b)* découle alors du lemme précédent. □

(1) Une proposition analogue, mais où l'on demande à A_1 d'être de Kummer, est énoncée sans démonstration dans [DM82], 6.26.

Notons à présent $f: X = Y \times_S A \times_S A^\vee \to S$ le produit fibré de g, h, $h^\vee$, et soit $\overline{X}$ une compactification lisse de X. Supposons que $\overline{X}$, Y_0 et Y_1 soient des pièces de base.

Le monomorphisme de *c)* provient d'une section de $R^4 f_* \mathbf{Q}(2)$ sur S, dont la fibre en 1 est un cycle de Hodge sur le produit d'une surface K3 exceptionnelle, de sa variété de Kuga-Satake et de la duale de celle-ci; un tel cycle de Hodge est motivé d'après 7.1.1 et 0.6.2 si $\mathscr{V}$ contient les pinceaux abéliens compacts; en fait, on peut montrer que la fibre de h en 1 est isogène à une puissance de la courbe elliptique E [Mo85] (avec les notations introduites en 7.1.1), et conclure que le cycle de Hodge en question est motivé sans autre hypothèse sur $\mathscr{V}$. Le lemme précédent joint à 0.5, et la décomposition $h(Y_0) \cong h(\mathbf{P}^2) \oplus h^2(Y_0)_{\text{prim}}$ entraînent alors le

Théorème **7.1.** — *La cohomologie motivique de toute surface* K3 *algébrique* Y_0 *est un objet de* $\mathscr{M}(\mathscr{A}b)_{\mathscr{V}}$. □

Une autre preuve est proposée dans [A95*b*].

7.2. *Théorème* **7.2.** — *La cohomologie motivique de toute hypersurface cubique lisse* V_0 *de* $\mathbf{P}^n$, $n \leqslant 6$, *est un objet de* $\mathscr{M}(\mathscr{A}b)_{\mathscr{V}}$ *(pour* $\mathscr{V}$ *convenable).*

Preuve. — Les cas $n \leqslant 3$ sont faciles et bien connus ($\mathscr{V} = \mathscr{A}b$ convient). Nous distinguerons les cas restants.

a) $n = 5$. — On a $h(V_0) \cong h(\mathbf{P}^4) \oplus h^4(V_0)_{\text{prim}}$, et pour les nombres de Hodge : $h^{pq} = 0$ si $|p - q| > 2$, $h^{3,1} = 1$, $h^{2,2} = 21$. On peut donc appliquer la construction de Kuga-Satake comme pour les surfaces K3 (cf. [D72*a*], 5.7, et l'appendice de M. Rapoport) : on trouve un revêtement S étale fini surjectif de l'ouvert U (connexe quasi projectif lisse) du schéma de Hilbert qui paramétrise les hypersurfaces cubiques lisses, un schéma abélien $g' : A \to S$, et (en notant $g : V \to S$ la cubique universelle) un monomorphisme de variations de structures de Hodge :

$$(R^4 g_* \mathbf{Z})_{\text{prim}} \to R^1 g'_* \mathbf{Z} \otimes R^1 g'^\vee_* \mathbf{Z}(-1).$$

On conclut comme pour le théorème précédent, en notant que l'une des fibres de g est une hypersurface de Fermat, dont la cohomologie motivique est un objet de $\mathscr{M}(\mathscr{A}b)_{\mathscr{V}}$ (6.1). (Un autre argument est proposé dans [A95*b*].)

b) $n = 4$ *ou* 6. — On a $h(V_0) \cong h(\mathbf{P}^{n-1}) \oplus h^{n-1}(V_0)_{\text{prim}}$, et pour les nombres de Hodge : $h^{pq} = 0$ si $|p - pq| > 1$, $h^{n/2, n/2-1} \begin{cases} = 5 \text{ si } n = 4, \\ = 21 \text{ si } n = 6. \end{cases}$

Alors, d'après [D72*b*], 1.5, il existe un schéma abélien $g'' : J(V/U) \to U$ (la *jacobienne intermédiaire* relative), et, en notant g la cubique universelle sur U, un isomorphisme de variations de structures de Hodge : $(R^{n-1} g_* \mathbf{Z})_{\text{prim}} \cong R^1 g''_* \mathbf{Z}(1 - n/2)$. On conclut comme précédemment. □

Remarque. — Le même résultat vaut pour les quartiques dans $\mathbf{P}^4$.

8. Motifs à coefficients entiers

8.1. Pour définir des motifs à coefficients entiers, une première idée naïve serait de n'utiliser que des cycles algébriques à coefficients entiers dans la construction de Grothendieck; c'est toutefois peu judicieux, au vu des contre-exemples de Atiyah-Hirzebruch [AH62] à la conjecture originelle de Hodge pour des coefficients entiers. Il est d'autre part sans espoir d'adapter cette idée aux motifs définis ci-dessus, car l'involution de Lefschetz introduit irrémédiablement des dénominateurs.

Une meilleure idée consiste à adapter la notion de $\mathbf{Z}$-forme d'un système de représentations l-adiques [S94] 10.

Nous nous placerons dans la situation où $K \subseteq \mathbf{C}$ et où les cycles motivés sont ceux définis en termes de la cohomologie de Betti rationnelle $H_B^\bullet$. Rappelons (§ 4.6) que l'on a des morphismes continus $\rho_l : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbf{G}_{\mathscr{M}(M)}(\mathbf{Q}_l) \subseteq \mathrm{GL}(\mathscr{H}_B(M) \otimes \mathbf{Q}_l)$.

Définitions. — Un *motif à coefficients entiers* (modelé sur $\mathscr{V}$) est la donnée d'un motif M modelé sur $\mathscr{V}$ et d'un $\mathbf{Z}$-réseau (1) Λ dans $\mathscr{H}_B(M)$ tel que $\Lambda \otimes \mathbf{Z}_l$ soit stable sous $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ pour tout nombre premier l.

Un *morphisme* de motifs à coefficients entiers est un morphisme entre motifs sous-jacents, dont l'image par $\mathscr{H}_B$ respecte les réseaux.

Avec le produit tensoriel induit par celui des motifs et des réseaux, on obtient ainsi une catégorie *$\mathbf{Z}$-linéaire tensorielle rigide* notée $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$.

Dans les questions galoisiennes, il est utile de supposer, et nous supposerons, que $\mathscr{V}$ contient les schémas finis sur K. Introduisons alors une autre $\otimes$-catégorie $\mathbf{Z}$-linéaire, notée $\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$, et définie comme $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$, mais où l'on demande à Λ d'être un groupe abélien de type fini muni :

(i) d'un isomorphisme $\Lambda \otimes \mathbf{Q} \cong \mathscr{H}_B(M)$,
(ii) pour tout nombre premier l, d'une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ sur $\Lambda \otimes \mathbf{Z}_l$, telle que l'isomorphisme $\Lambda \otimes \mathbf{Q}_l \cong \mathscr{H}_B(M) \otimes \mathbf{Q}_l$ déduit de (i) soit Γ-équivariant.

La catégorie $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$. De plus, il est clair que $\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$ est une catégorie *abélienne* (tout comme $\mathscr{M}(\mathscr{V})$).

Lemme **8.1.1.** — *Tout objet de $\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$ est quotient d'un objet de $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$.*

Preuve. — Soit (M, Λ) un objet de $\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$. Par la théorie des diviseurs élémentaires, la partie de torsion de Λ se décompose : $\Lambda_{\mathrm{tor}} \cong \bigoplus_{l \in L} \Lambda_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l$, où L est un ensemble fini; posons $r = \sharp\, \Lambda_{\mathrm{tor}}$. Il existe un sous-groupe normal d'indice fini $\Gamma' \subseteq \Gamma$, tel que pour tout $l \in L$, Γ' agit trivialement sur $\Lambda_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l$ et l'extension de Γ'-modules $\Lambda_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l \to \Lambda \otimes \mathbf{Z}_l \to \Lambda/\Lambda_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l$ se scinde : en effet, soit A_l la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\Lambda \otimes \mathbf{Z}_l)$ engendrée par l'image de Γ, et soit $0 \to I_l \to A_l^s \to \Lambda/\Lambda_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l \to 0$

(1) De tels réseaux existent toujours : si $M = qh(X)\,(n)$, on peut prendre par exemple :

$$\Lambda = (H_B(X, \mathbf{Z})\,(n)/\text{torsion}) \cap qH_B(X, \mathbf{Q})\,(n).$$

une présentation du A_l-module $\Lambda/\Lambda_{\text{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l$; on a $\text{Ext}^1(A_l^s, \Lambda_{\text{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l) = 0$, et l'on voit alors que $\Gamma' = \bigcap_{l \in L} \text{Ker}(\Gamma \to \text{Aut}((\Lambda_{\text{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l) \oplus \text{Hom}(I_l, \Lambda_{\text{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l))$ convient. Notons K'/K l'extension galoisienne correspondante, et G le groupe fini $\text{Gal}(K'/K) = \Gamma/\Gamma'$. Considérons un Γ'-supplémentaire Λ'_l de $\Lambda_{\text{tor}} \otimes \mathbf{Z}_l$ dans $\Lambda \otimes \mathbf{Z}_l$, et l'image (isomorphique) Λ' de $\Lambda \cap \bigcap_{l \in L} \Lambda'_l$ dans $\mathscr{H}_B(M)$. A l'aide d'un scindage auxiliaire de la suite de groupes abéliens $\Lambda_{\text{tor}} \to \Lambda \to \Lambda/\Lambda_{\text{tor}}$, on voit que $\Lambda/\Lambda_{\text{tor}} \cong \Lambda'$ et que l'homomorphisme injectif canonique $\Lambda' \to \Lambda$ est une « section » de $\Lambda \to \Lambda/\Lambda_{\text{tor}}$, qui après tensorisation avec $\mathbf{Z}_l$ est compatible à l'action de Γ', pour tout nombre premier l. D'où un homomorphisme surjectif naturel $\mathbf{Z}^r \oplus \Lambda' \to \Lambda$, envoyant la base canonique de $\mathbf{Z}^r$ sur Λ_{tor}, et qui, après tensorisation avec $\mathbf{Z}_l$, est compatible à l'action de Γ'. On déduit ensuite de là un homomorphisme surjectif $\mathbf{Z}[G]^r \oplus \mathbf{Z}[G] \otimes \Lambda' \to \mathbf{Z}[G] \otimes \Lambda$, que l'on interprète, après tensorisation avec $\mathbf{Z}_l$, comme le morphisme naturel de représentations induites $\text{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma}((\mathbf{Z}^r \oplus \Lambda') \otimes \mathbf{Z}_l) \to \text{Ind}_{\Gamma'}^{\Gamma}(\text{Res}_{\Gamma'}^{\Gamma} \Lambda \otimes \mathbf{Z}_l)$ (*ipso facto* compatible à l'action de Γ). En composant avec l'homomorphisme $\mathbf{Z}[G] \otimes \Lambda \to \Lambda$ déduit de l'augmentation de $\mathbf{Z}[G]$, on en tire un homomorphisme surjectif $\Lambda_1 := \mathbf{Z}[G]^r \oplus \Lambda' \otimes \mathbf{Z}[G] \to \Lambda$, compatible à l'action de Γ après tensorisation avec $\mathbf{Z}_l$. L'application $\mathbf{Q}$-linéaire associée $\mathbf{Q}[G]^r \oplus \Lambda' \otimes \mathbf{Q}[G] \to \Lambda \otimes \mathbf{Q}$ s'interprète comme la réalisation de Betti d'un morphisme de motifs $M_1 := h(\text{Spec}\, K')^r \oplus h(\text{Spec}\, K') \otimes M \to M$, dont la restriction à la composante $h(\text{Spec}\, K')^r$ est nulle, et dont la seconde composante provient d'un morphisme de motifs d'Artin $h(\text{Spec}\, K') \to 1$. On a donc construit un épimorphisme $(M_1, \Lambda_1) \to (M, \Lambda)$, où (M_1, Λ_1) est un objet de $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$, et dont le noyau est clairement isomorphe à un objet de $\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$. □

Notons ω_1 et ω_2 les $\otimes$-foncteurs d'oubli (du motif M et de la structure galoisienne, resp. du groupe abélien Λ sous-jacent). Le foncteur ω_1 est exact et fidèle. Des motifs à coefficients entiers à images par ω_2 isomorphes seront dits *isogènes*.

Théorème **8.1.** — *Le schéma d'automorphismes* $\mathbf{Aut}^{\otimes}\, \omega_1$ *est un schéma en groupes affine plat sur* $\mathbf{Z}$, *de fibre générique* $\mathbf{G}_K$, *et* ω_1 *induit des* $\otimes$-*équivalences de catégories*

$$\mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}] \approx \text{Repr. t.f.}_{/\mathbf{Z}}(\mathbf{Aut}^{\otimes}\, \omega_1),$$
$$\mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}] \approx \text{Repr. t.f. sans tors.}_{/\mathbf{Z}}(\mathbf{Aut}^{\otimes}\, \omega_1).$$

Il suffit de démontrer la première $\otimes$-équivalence, qui est une application du lemme général suivant :

Lemme **8.1.2.** — *Soit* A *un anneau commutatif nœthérien. Soient* T *une* $\otimes$-*catégorie abélienne* A-*linéaire, et* ω *un* $\otimes$-*foncteur* A-*linéaire exact et fidèle de* T *dans la catégorie des* A-*modules de type fini. Supposons qu'il existe une sous-*$\otimes$-*catégorie pleine* T' *de* T *telle que :*

(i) T' *est rigide, et la restriction de* ω *à* T' *est un foncteur rigide (à valeurs projectives)* (1);

(ii) *tout objet de* T *est quotient d'un objet de* T'.

(1) Voir [SR72], I, 5.2.1 pour les définitions.

Alors il existe un A*-groupe affine et plat* $\mathbf{G}$, *qui représente le foncteur* $\mathscr{A}ut^{\otimes}\,\omega$, *et une* $\otimes$*-équivalence de catégories s'insérant dans un triangle commutatif*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\omega"'] & & \text{Repr. t.f.}_{/A}(\mathbf{G}) \arrow[dl, "\text{« A-module sous-jacent »}"] \\ & \text{A-Mod. t.f.} & \end{tikzcd}$$

Preuve. — On trouve dans [SR72], II, 3.1.4.3 un énoncé analogue où « A-groupe... $\mathscr{A}ut^{\otimes}\,\omega$ » est remplacé par « A-monoïde... $\mathscr{E}nd^{\otimes}\,\omega$ » et l'existence de T′ convenable est remplacée par

(iii) « pour toute A-algèbre A′, si l'on note $F^{A'}$ le foncteur contravariant qui à M associe $\mathrm{Hom}_A(\omega(M), A')$, le morphisme évident $F^A \to F^{A'}$ définit un isomorphisme $A' \otimes_A F^A \to F^{A'}$, où le produit tensoriel externe $A' \otimes_A F^A$ est pris dans la catégorie des foncteurs A-linéaires exacts à gauche $T^{op} \to$ A-Mod. ».

Montrons d'abord que (i) et (ii) entraînent (iii). Pour tout foncteur F A-linéaire et exact à gauche $T^{op} \to$ A-Mod., notons F′ sa restriction à T'^{op}. Pour deux tels foncteurs, l'application de restriction $\mathrm{Hom}(F_1, F_2) \to \mathrm{Hom}(F'_1, F'_2)$ est bijective : cela résulte de ce qu'en vertu de (ii), tout objet M de T admet une résolution $N' \to M' \to M \to 0$, où N′ et M′ sont dans T′. La condition (iii), qui signifie que l'application

$$\mathrm{Hom}_{A'}(F^{A'}, F) \to \mathrm{Hom}_A(F^A, F)$$

est bijective, se lit donc sur $\mathrm{Hom}_{A'}(F^{A'})', F') \to \mathrm{Hom}_A((F^A)', F')$. Or $(F^{A'})'$ s'identifie au produit externe $A' \otimes_A (F^A)'$: en effet, si M est un objet de T′, on a :

$$(F^{A'})'\,(M) := \mathrm{Hom}_A(\omega(M), A') \cong \mathrm{Hom}_A(\omega(M), A) \otimes_A A'$$

puisque, d'après (i), $\omega(M)$ est projectif. Cela établit (i) + (ii) $\Rightarrow$ (iii), et il ne s'agit plus que de prouver que, sous (i), $\mathscr{A}ut^{\otimes}\,\omega = \mathscr{E}nd^{\otimes}\,\omega$. Ceci équivaut encore à $\mathscr{A}ut^{\otimes}\,\omega' = \mathscr{E}nd^{\otimes}\,\omega'$, pour ω' la restriction de ω à T′. Soit donc g une section du faisceau $\mathscr{E}nd^{\otimes}\,\omega'$ sur A′. Pour tout objet M de T′, de dual $M^{\vee}$, on définit :

$$h_M : \omega'(M) \otimes_A A' \to \omega'(M) \otimes_A A'$$

par $h_M = {}^t g_{M^{\vee}}$ en utilisant la réflexivité de $\omega'(M) \otimes_A A'$. On vérifie alors à l'aide de (i) que la donnée des endomorphismes h_M fournit une section du faisceau $\mathscr{E}nd^{\otimes}\,\omega'$ sur A′ inverse de g. $\square$

Le théorème s'obtient en prenant $A = \mathbf{Z}$, $T = \mathscr{M}(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$, $T' = \mathscr{M}'(\mathscr{V})[\mathbf{Z}]$, $\omega = \omega_1$. La condition (ii) est satisfaite en vertu de 8.1.1.

Remarques. — (i) (P. Deligne) le groupe de Galois d'une classe d'isogénie de motifs à coefficients entiers (vu comme schéma en groupe sur $\mathbf{Z}$ image de $\mathscr{A}ut^{\otimes}\,\omega_1$) n'est en général pas de type fini sur $\mathbf{Z}$; cela se voit déjà sur le motif de Tate.

(ii) Le lemme 8.1.2 s'applique de manière semblable dans bien d'autres contextes ; par exemple, il permet de définir le *groupe de Mumford-Tate* d'une $\mathbf{Z}$-structure de Hodge (pure ou mixte) comme schéma en groupe affine plat sur $\mathbf{Z}$.

8.2. Un des résultats de [S94] [S] peut alors se traduire de manière frappante en termes de motifs à coefficients entiers :

Théorème **8.2.** — *Supposons* K *de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Supposons que dans chaque classe d'isogénie dans* $\mathscr{M}(\mathrm{M})$, *il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de motifs à coefficients entiers. Alors pour tout* l *assez grand, l'image de* $\rho_l : \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K}) \to \mathbf{G}_{\mathscr{M}(\mathrm{M})}(\mathbf{Q}_l)$ *est ouverte.* □

L'hypothèse signifie concrètement que pour tout objet N de $\mathscr{M}(\mathrm{M})$, il n'existe modulo l'action de Aut N qu'un nombre fini de réseaux Λ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ tels que $\Lambda \otimes \mathbf{Z}_l$ soit stable sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$ pour tout nombre premier l.

9. Motifs en caractéristique p et spécialisation

9.1. Nous généralisons la définition 4.2 de la catégorie des motifs au cas d'un corps de base K arbitraire. Nous nous plaçons dans le cadre des § 2.1, 3.1 : $\mathrm{H}^\bullet$ est une cohomologie de Weil fixée sur la catégorie $\mathscr{V}$, satisfaisant au théorème de Lefschetz fort, etc. ; on a défini en 3.2 un sous-corps Q du corps F des coefficients de $\mathrm{H}^\bullet$.

Objets : triplets $\mathrm{M} = (\mathrm{X}, n, \overline{q})$ formés d'un objet X de $\mathscr{V}$, d'une fonction continue entière n sur X, et d'un idempotent $\overline{q} \in \overline{\mathrm{C}}^0_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{Q}}$; on note aussi $\mathrm{M} = \overline{q}h(\mathrm{X})\ (n)$.

Morphismes : $\mathrm{Hom}(\overline{q}h(\mathrm{X})\ (n), \overline{p}h(\mathrm{Y})\ (m)) = \overline{p}\,\overline{\mathrm{C}}^{m-n}_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathrm{Q}}\, \overline{q}$.

On vérifie immédiatement que l'on obtient bien une catégorie Q-linéaire pseudo-abélienne ; nous la noterons $\mathscr{M}_{\mathrm{K}}(\mathscr{V})$ ou $\mathscr{M}(\mathscr{V})$.

Comme les algèbres d'endomorphismes de motifs sont semi-simples de dimension finie sur Q (cor. 3.2.1), on déduit du lemme 2 de [J92] que $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est *abélienne semi-simple*. La *cohomologie motivique* de X est définie comme en 4.2.

9.2. On fait de $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ une catégorie tensorielle rigide graduée comme en 4.3. L'objet unité est $\mathbf{1} = h(\mathrm{Spec\,K})$, et $\mathrm{End}\,\mathbf{1} = \mathrm{Q}$. Le rang d'un motif $\overline{q}h(\mathrm{X})\ (n)$ est $\Sigma_i \dim_{\mathrm{F}} q\mathrm{H}^i(\mathrm{X})$, où q est un quelconque relevé idempotent de $\overline{q}$ dans $\mathrm{C}^0_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{Q}}$ (1). En particulier, le rang est toujours un entier naturel. D'après [D90], ceci entraîne que $\mathscr{M}(\mathscr{V})$ est *tannakienne* sur Q ; il existe un foncteur fibre à valeurs dans une extension de Q. Le composé $\mathrm{H}'^\bullet$ d'un tel foncteur fibre et de la cohomologie motivique est une cohomologie sur la catégorie $\mathscr{V}$, satisfaisant au théorème de Lefschetz fort, et telle que l'équivalence H'-homologique sur les cycles algébriques coïncide avec $\equiv$. Ainsi, si $\equiv$ ne coïncide pas avec l'équivalence H-homologique, H ne se factorise pas à travers h : il n'y a pas de H-réalisation naturelle.

9.3. Dans le cas où K est de caractéristique $p > 0$, et où $\mathrm{H}^\bullet$ est une théorie classique (étale l-adique ($l \neq \mathrm{car}\,k$) ou cristalline), il serait très intéressant de démontrer en général la rationalité et l'indépendance en $\mathrm{H}^\bullet$ des « nombres » $\int_{\mathrm{X}} \alpha \cup * \alpha$ (d'où $\mathrm{Q} = \mathbf{Q}$).

(1) Pour qu'un tel relevé existe, on se ramène, par récurrence sur l'ordre de nilpotence du noyau de $\mathrm{C}^0_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{Q}} \to \overline{\mathrm{C}}^0_{\mathrm{mot}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathrm{Q}}$ (cf. 3.1), à supposer trouvé un relevé q' tel que $q'^2 - q'$ soit de carré nul; alors $q = q' + (q'^2 - q')\,(1 - 2q')$ convient.

On peut en fait se ramener au cas où α est la classe d'une somme d'intersections de diviseurs (du moins si $\mathscr{V}$ est stable par la construction « fibré projectif »). On peut alors espérer que les remarques du § 1 jetteront quelque lumière sur cette question.

Pour cette réduction, on utilise le principe de scindage, pour lequel on renvoie à la section 3 de l'appendice dont on reprend les notations ; notons aussi $\tilde{\xi} = -\Sigma N_i \xi_i$ pour $N_i \geqslant 0$, une classe dans le cône relativement ample/X. Nous allons établir :

Lemme **9.3.1.** — *Pour $x, y \in H^{2p}(X)$, $\int_X x \cup *_L y$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients rationnels, indépendants de x, y et de la cohomologie, en les quantités*

$$\int_{\mathrm{Drap}\,\mathscr{E}} (f^* x \cup \tilde{\xi}^{r'}) \cup *_L(f^* y \cup f^*(\eta_X^k) \cup \tilde{\xi}^{r'-k}),$$

où $r' = 1/2\, r(r-1) = \dim_X \mathrm{Drap}\,\mathscr{E}$ $(r = \mathrm{rang}\,\mathscr{E})$, et k *varie entre* 0 *et* r'.

Faisant $x = y = \alpha$ algébrique, et choisissant $\mathscr{E}$ pour que $f^*(\alpha)$ s'exprime comme combinaison linéaire rationnelle de monômes en les ξ_i et $f^* \eta_X$, on obtient l'assertion ci-dessus. Choisissons un entier N tel que $\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{L}_X^{\otimes N-1}$ soit engendré par ses sections globales. On obtient ainsi un plongement $\mathscr{E} \to (\mathscr{L}_X^{\otimes 1-N})^M$, d'où aussi un plongement de X-schémas $\iota : \mathrm{Drap}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Drap}(r, ((\mathscr{L}_X^{\otimes 1-N})^M) \cong X \times \mathrm{Drap}(r, M)$ (drapeaux de longueur r dans un espace de dimension M). On a :

$$M' := \dim \mathrm{Drap}(r, M) = (M - (r+1)/2)\, r.$$

Les premières classes de Chern ξ_i du i-ème cran du drapeau universel sur $\mathrm{Drap}(\mathscr{E})$ et sur $\mathrm{Drap}(r, M)$ se correspondent par ι et Künneth ; de même $\tilde{\xi}$ provient d'une classe notée ξ dans le cône ample de $H^2(\mathrm{Drap}(r, M))$.

Pour prouver le lemme, il nous suffira d'établir les formules suivantes :

$$(*) \qquad \int_{X \times \mathrm{Drap}(r,M)} \iota_* \iota^*(z \otimes \xi^k) = q_k \int_{X \times \mathrm{Drap}(r,M)} z \otimes \xi^{M'},$$

où $q_k \in \mathbf{Q}^*$ (indépendant de $z \in H^{2d}(X)$ et de la cohomologie) si $k = r'$, et $q_k = 0$ si $k < r'$;

$$(**) \qquad \iota^*(*_L(y \otimes \xi^{M'})) = *_L\, \Sigma r_k\, \iota^*(f^*(y \cup \eta_X^k) \otimes \xi^{r'-k}),$$

où $r_k \in \mathbf{Q}$ (dépendant de p mais non de y ni de la cohomologie) et k varie entre 0 et r'.

En effet, d'après le lemme 1.3.2, $\int_X x \cup *_L y$ est rationnellement proportionnel à $\int_{X \times \mathrm{Drap}(r,M)} (x \otimes \xi^{M'}) \cup *_L(y \otimes \xi^{M'})$ et donc aussi, par $(*)$, à

$$\int_{X \times \mathrm{Drap}(r,M)} \iota_* \iota^*(x \otimes \xi^{r'}) \cup *_L(y \otimes \xi^{M'}) = \int_{\mathrm{Drap}\,\mathscr{E}} \iota^*(x \otimes \xi^{r'}) \cup \iota^* *_L (y \otimes \xi^{M'}),$$

et le lemme découle alors de $(**)$.

Reste à prouver (∗) et (∗∗). Par application de la formule de projection et « intégration », l'égalité (∗) résulte de la « formule de Scott » [IIL 74], prop. 2 :

$$\iota^*(1) = \prod_{j=1}^{r} \Big(\sum_{i=0}^{M-r} f^* c_{M-r-i}((\mathcal{O}_X)^M/\mathcal{E}) \otimes (-\xi_j)^i \Big).$$

Pour (∗∗), considérons l'opérateur de Lefschetz L associé à l'élément $N\eta_X \otimes 1 + 1 \otimes \xi$ du cône ample de $H^2(X \times \mathrm{Drap}(r, M))$. Ecrivons :

$$y \otimes \xi^{M'} = L^{M'-r'}(z_0 \otimes \xi^{r'+p} + \ldots + z_{r'+p} \otimes 1),$$

avec $z_j \in H^{2j}(X)$; en annulant les coefficients de $\xi^{M'+p}, \ldots, \xi^{M'+1}$, on obtient de proche en proche $z_0 = \ldots = z_{p-1} = 0$, $z_p = y$, $z_{p+1} = (Nr(r-M))^{-1}(y \cup \eta_X) \otimes 1$ et, plus généralement, pour $j \geqslant p$, $z_j = r_{p-j}(y \cup \eta_X^{p-j}) \otimes 1$. Ceci donne

$$\iota^*(*_L(y \otimes \xi^{M'})) = \iota^* L^{-r'} \Sigma z_j \otimes \xi^{r'+p-j} = *_L(\iota^* \Sigma z_j \otimes \xi^{r'+p-j}),$$

car on a

$$\iota^*(N\eta_X \otimes 1 + 1 \otimes \xi) = Nf^* \eta_X \otimes 1 + \tilde{\xi},$$

polarisation qui définit $*_L$ sur Drap $\mathcal{E}$. □

9.4. Nous supposons maintenant que K est le corps des fractions, de caractéristique nulle, d'un anneau de valuation discrète V, de corps résiduel noté k.

Soit $M = qb(X)\,(n)$ un motif sur K (au sens de 4.2).

Définition. — Nous dirons que M a *visiblement bonne réduction* en V si X a bonne réduction en V et si q s'écrit sous la forme $\mathrm{pr}^{X^2Y}_{X^2\,*}(\alpha \cup *\,\beta)$, α et β étant portés par $X^2 \times Y$, où Y a aussi bonne réduction en V.

Remarque. — Rappelons que la condition de bonne réduction signifie qu'il existe un V-schéma projectif lisse $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$, de fibre générique X, resp. Y. On note X_0, resp. Y_0, les fibres spéciales. Soit $\mathcal{L}_X$, resp. $\mathcal{L}_Y$, un faisceau inversible ample sur $\mathcal{X}/V$, resp. $\mathcal{Y}/V$. Alors il découle de la remarque 3.2 et de la proposition 2.1 que l'on peut supposer, quitte à remplacer Y par une somme disjointe de puissances de $X \times Y$ (ce qui n'affecte pas la condition d'avoir visiblement bonne réduction), que l'involution ∗ est relative au faisceau inversible ample

$$\mathcal{L}_{X^2Y} := \mathrm{pr}^{XXY*}_{X}(\mathcal{L}_X)_X \otimes \mathrm{pr}^{X\,XY*}_{\;\;X}(\mathcal{L}_X)_X \otimes \mathrm{pr}^{XX\,Y*}_{\;\;\;\;Y}(\mathcal{L}_Y)_Y.$$

La spécialisation

$$\mathcal{L}_{X_0^2Y_0} := \mathrm{pr}^{X_0X_0Y_0*}_{X_0}(\mathcal{L}_X)_{X_0} \otimes \mathrm{pr}^{X_0\,X_0\,Y_0*}_{\;\;\;X_0}(\mathcal{L}_X)_{X_0} \otimes \mathrm{pr}^{X_0X_0\,Y_0*}_{\;\;\;\;\;\;Y_0}(\mathcal{L}_Y)_{Y_0}$$

est un faisceau inversible ample.

Exemple. — Le motif de Ramanujan sur **Q** (de poids 11) a visiblement bonne réduction en tout premier p (cf. [Scho90], 1.5.0) ; j'ignore toutefois si l'on peut le découper sur un modèle lisse sur **Z**.

On dispose de la théorie de l'intersection relative et de la spécialisation des cycles algébriques de Shimura-Fulton [F84], 20.2 ou 3 ; ces flèches de spécialisation sont compatibles avec les flèches de spécialisation en cohomologie l-adique ($l \neq \operatorname{car} k$) : on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^r(X \times X) & \longrightarrow & H^{2r}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}} \times X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_l)\,(r) \\ {\scriptstyle sp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle sp} \\ A^r(X^0 \times X^0) & \longrightarrow & H^{2r}_{\text{ét}}(X^0_{k^{\text{sép}}} \times X^0_{k^{\text{sép}}}, \mathbf{Q}_l)\,(r). \end{array}$$

On en déduit que les involutions de Lefschetz associées à une classe dans le cône ample de $H^2(X \times X)$ (1) et à sa spécialisation se correspondent par sp. En considérant le carré analogue où $X \times X \times Y$ remplace $X \times X$ (Y ayant aussi bonne réduction), et compte tenu de la remarque précédente, on voit que l'on peut « prolonger » le carré ci-dessus en remplaçant cycles algébriques par cycles motivés du type $p_*(\alpha' \cup * \beta')$, α' et β' étant portés par $X \times X \times Y$ (la cohomologie l-adique étant celle de référence).

On a un carré analogue en cohomologie de de Rham si k est de caractéristique 0.

Si k est de caractéristique $p > 0$, et si W est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k et d'idéal maximal engendré par p, contenu dans la complétion p-adique $V^\wedge$ de V, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^r(X \times X) & \longrightarrow & H^{2r}_{dR}(X \times X)\,(r) \otimes_K K^\wedge \\ {\scriptstyle sp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle sp\,=\,\iota_{BO}} \\ A^r(X_0 \times X_0) & \longrightarrow & H^{2r}_{\text{cris}}(X_0 \times X_0/W)\,(r) \otimes_W K^\wedge \end{array}$$

(la construction de la flèche du bas et la commutativité du carré se trouvent dans [GM78]). On peut encore « prolonger » ce carré en remplaçant cycles algébriques par cycles motivés du type $p_*(\alpha' \cup * \beta')$ comme ci-dessus (avec la cohomologie de de Rham pour référence sur K, la cohomologie cristalline sur k).

9.5. Soit alors $M = qh(X)\,(n)$ un motif sur K ayant visiblement bonne réduction en V. Ce qui précède permet de définir un motif $M_0 = \overline{q}_0 h(X_0)\,(n)$ sur k au sens de 9.1, en posant $\overline{q}_0 = \operatorname{sp}(q) \bmod. \equiv$, appelé *spécialisation* de M, et ne dépendant que de M et $\mathscr{X}$, et, si car $k > 0$, du choix de la cohomologie classique sur k.

La classe d'isomorphie de M_0 ne dépend pas du modèle $\mathscr{X}$: si M_0 et M'_0 sont deux spécialisations de M correspondant à deux modèles de X, l'élément neutre de End M se spécialise en un isomorphisme dans $\overline{q}'_0\, \overline{C}_{\text{mot}}(X_0, X'_0)\, \overline{q}_0$. Un énoncé analogue vaut pour la spécialisation des morphismes de motifs.

Remarque. — Tout motif sur $\mathbf{Q}$ peut être spécialisé de la sorte en presque tout p.

9.6. Supposons alors que tout objet de $\mathscr{V}$ ait bonne réduction en V, de sorte que tout motif modelé sur $\mathscr{V}$ a visiblement bonne réduction. Notons $\mathscr{V}_0$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des k-schémas d'objets les fibres spéciales des divers modèles projectifs et lisses des objets de $\mathscr{V}$. Considérons alors la $\otimes$-catégorie $\mathscr{M}_V(\mathscr{V})$ dont les objets sont formés de couples $(M, \mathscr{X})$, où $M = qh(X)(n)$ est un motif sur K modelé sur $\mathscr{V}$ et $\mathscr{X}$ un modèle de X, et dont les morphismes et la loi $\otimes$ sont définis comme dans $\mathscr{M}_K(\mathscr{V})$. Le $\otimes$-foncteur d' « oubli du modèle » est une équivalence de catégories $\mathscr{M}_V(\mathscr{V}) \approx \mathscr{M}_K(\mathscr{V})$, donc une $\otimes$-équivalence [SR72], 4.4.2.

On dispose dès lors d'un $\otimes$-foncteur canonique de « *spécialisation* » $\mathscr{S}p$ de $\mathscr{M}_V(\mathscr{V})$ vers $\mathscr{M}_k(\mathscr{V}_0)$, et aussi de $\otimes$-foncteurs de « spécialisation » $\mathscr{S}p_{(\mathscr{X})}$ de $\mathscr{M}_K(\mathscr{V})$ vers $\mathscr{M}_k(\mathscr{V}_0)$, liés à des choix de modèles, mais tous isomorphes entre eux. Comme ces catégories sont abéliennes semi-simples, ces foncteurs sont *exacts* et *fidèles*. Ils sont d'autre part clairement compatibles à la graduation.

Remarques. — 1) Dans le cas d'un corps de fonctions, le foncteur de spécialisation permet de considérer un motif sur K comme une *famille à un paramètre de motifs*, en variant la place V de bonne réduction (comparer avec 5.2).

2) Malgré les problèmes soulevés en 0.8, 9.2, 9.3, l'utilité de cette théorie des motifs en caractéristique p et de la spécialisation est illustrée dans [A95*a*], qui est la suite naturelle de cet article.

Appendice : équivalence numérique et équivalence homologique

1. *Notations.* — Soit X un schéma projectif lisse sur K, purement de dimension d. Par *cycle algébrique* sur X, on entend une combinaison linéaire rationnelle de sous-schémas fermés intègres modulo une équivalence « adéquate », comprise dans l'échelle de finesse entre l'équivalence rationnelle et l'équivalence numérique [1].

Fixons une théorie de cohomologie de Weil $H^\bullet$, et notons $A^\bullet(X)$ le $\mathbf{Q}$-espace des cycles algébriques sur X modulo l'équivalence H-homologique, gradué par la codimension ; ainsi $A^\bullet(X)$ se plonge dans $H^{2\bullet}(X)$. Si Y est un autre schéma projectif lisse équidimensionnel, notons $C^\bullet(X, Y)$ l'espace gradué des correspondances algébriques modulo l'équivalence homologique, *i.e.* $A^{\bullet+d}(X \times Y)$ — on prendra garde que ce *n'est pas* la graduation définie dans [F84], 16.1 (obéissant à un formalisme covariant), mais celle telle que $C^r(X, Y)$ se plonge dans les homomorphismes de degré $2r$ de $H^\bullet(X)$ vers $H^\bullet(Y)$ via la dualité de Poincaré ; ainsi, le transposé du graphe d'un morphisme $X \to Y$ est de degré 0. Les correspondances se composent selon la formule usuelle $g \circ f = \mathrm{pr}^{XYZ}_{XZ\,*}(\mathrm{pr}^{XYZ*}_{XY} f . \mathrm{pr}^{XYZ*}_{YZ}\, g)$, leurs degrés s'additionnant. Tout ceci s'étend à des schémas non équidimensionnels ; on définit $A^r(X)$, composante par composante, pour $r =$ fonction continue à valeurs entières sur X.

---

[1] Un cycle algébrique α sur X est dit numériquement équivalent à 0 si, pour tout cycle algébrique β (le degré de la composante de codimension d de $\alpha . \beta$) : $\int_X \alpha \cup \beta$ est nul.

2. Soit X un K-schéma projectif lisse géométriquement connexe, tel que les classes de faisceaux inversibles amples dans $H^2(X)$ vérifient le théorème de Lefschetz fort. Considérons la catégorie $\mathscr{M}(X)$ des motifs de Grothendieck découpés sur les sommes de copies de puissances de X, définis en termes de correspondances algébriques *modulo l'équivalence homologique* (pour la cohomologie de référence).

Théorème. — *Considérons les conditions*

A*b* : $\mathscr{M}(X)$ *est une catégorie abélienne*

C : *la graduation sur* $H^\bullet(X)$ *provient d'une graduation du motif* $h(X)$

N : *sur toute puissance de* X, *l'équivalence numérique coïncide avec l'équivalence homologique.*

Alors (A*b et* C) *est équivalent à* N.

Remarquons que C équivaut à l'algébricité des projecteurs de Künneth π^j_X, condition qui est stable par produit. Notons B la conjecture standard de Grothendieck suivante : l'involution de Lefschetz est donnée par une correspondance algébrique (ceci ne dépend pas du choix de la polarisation de X, cf. [Kl68]). Les implications N $\Rightarrow$ B $\Rightarrow$ C sont dues à Grothendieck [G69] ; pour cela, le carré de X suffit dans N. La démonstration de N $\Rightarrow$ B ne figure pas dans *loc. cit.*, mais on peut la reconstituer aisément à partir des arguments prouvant la proposition 2.2 ci-dessus (notons incidemment que dans [Kl68] cette implication n'est prouvée que sous l'hypothèse supplémentaire que $H^\bullet$ vérifie le théorème de Lefschetz faible pour les sections linéaires de X, mais voir [K94]). Remarquons enfin que la flèche N $\Rightarrow$ A*b* est un cas particulier d'un théorème de Jannsen [J92] (en fait N entraîne que $\mathscr{M}(X)$ est semi-simple, et nous aurons à en utiliser un des avatars).

Passons à l'implication opposée (A*b* et C) $\Rightarrow$ N, qui renforce le théorème de Jannsen dans une direction. Remarquons pour cela d'emblée que (A*b* et C) $\Rightarrow$ B : en effet, L^{d-i} induit un isomorphisme de motifs $h^i(X) \to h^{2d-i}(X)\,(d-i)$ de noyau et conoyau nuls ; c'est donc un isomorphisme, dont l'inverse est donné par une correspondance algébrique. Quitte à remplacer X par une puissance, on est ramené à prouver

(?) (A*b* et B) $\Rightarrow$ l'équivalence numérique est l'égalité sur $A^\bullet(X)$.

Remarque. — Si $K = \mathbf{C}$ et si $H^\bullet$ est comparable à la cohomologie de Betti, l'implication (?) se déduit du théorème de l'indice de Hodge, cf. *e.g.* [Kl68], 3.8.

3. Soit $\alpha \in A^r(X)$. On sait que le caractère de Chern $\mathrm{ch} : K(X) \otimes \mathbf{Q} \to A(X)$ est surjectif (K(X) désigne le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels sur X). Soient donc $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des fibrés tels que $\mathrm{ch}([\mathscr{E}] - [\mathscr{F}])$ soit un multiple rationnel non nul de α. En considérant une résolution de $\mathscr{F}$ du type $0 \to \mathscr{E}' \to \bigoplus \mathscr{L}_X^{\otimes n_i} \to \mathscr{F} \to 0$, on voit que l'on peut supposer $\mathscr{F}$ de la forme $\bigoplus \mathscr{L}_X^{\otimes n_i}$, $n_i \in \mathbf{Z}$. Soit alors $f : \mathrm{Drap}(\mathscr{E}) \to X$ le fibré en drapeaux de $\mathscr{E}$, et notons ξ_i, $i = 1, \ldots, \mathrm{rang}\,\mathscr{E}$, la première classe de Chern du i-ème cran du drapeau universel $f^*(\mathscr{E})$. Alors $f^*(\alpha)$ s'exprime comme combinaison linéaire rationnelle de monômes de degrés $\leqslant d$ en les ξ_i et $f^*\eta_X$ (principe de scindage).

D'autre part, comme f est une cascade de fibrés projectifs, f^* est injectif en cohomologie (le motif $h(\mathrm{Drap}(\mathscr{E}))$ est un objet de $\mathscr{M}(\mathrm{X})$), et des combinaisons linéaires indépendantes η_j ($j = 1, \ldots, n = 1 + \mathrm{rang}\ \mathscr{E}$) de $f^*\eta_{\mathrm{X}}$ et des ξ_i, à coefficients entiers assez grands, sont dans le cône ample et vérifient B. En outre $f^*(\alpha)$ s'exprime comme combinaison linéaire rationnelle de monômes de degré r en les η_i.

4. Soit donc $\alpha \in \mathrm{A}^\bullet(\mathrm{X})$ un cycle numériquement équivalent à 0. Le principe de scindage permet, quitte à substituer $\mathrm{Drap}(\mathscr{E})$ à X, de se ramener au cas où

$$\alpha = \Sigma r_{\mathbf{m}}\, \eta_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \eta_n^{m_n}, \qquad r_{\mathbf{m}} \in \mathbf{Q},$$

la somme portant sur les multi-indices $\mathbf{m}$ de longueur $|\,\mathbf{m}\,| \leqslant d$; il s'agit de montrer que α est nul. (On pourrait d'ailleurs utiliser un éclatement de X plutôt qu'un fibré en drapeaux, ce qui conserve la dimension, cf. [Kl69].)

La réduction suivante utilise l'application diagonale $\Delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$. On a $\Delta_*(a) = \Sigma r_{\mathbf{m}}\, \mathrm{L}_1^{m_1} \circ \ldots \circ \mathrm{L}_n^{m_n}$, en désignant par L_i l'opérateur de Lefschetz associé à η_i. Or $\Delta_*(a)$ et $a = \Delta_*(a)[\mathrm{X}]$ sont simultanément *nuls* (resp. numériquement égaux à 0) *ou non.* Pour démontrer (?), on est donc ramené à prouver (sous Ab et sous l'hypothèse que les η_i vérifient B) :

(??) tout élément de $\mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n]$ numériquement équivalent à 0 est nul.

5. Plus généralement, soient $\eta_i \in \mathrm{H}^2(\mathrm{X})$ ($i = 1, \ldots, n$) des classes de faisceaux inversibles amples vérifiant le théorème de Lefschetz fort. Notons $*_i$ l'involution de Lefschetz ou Hodge associée à η_i, et considérons l'algèbre produit tensoriel des $\mathbf{Q}$-algèbres $\mathbf{Q}[\mathrm{L}_i, *_i]$, vue comme algèbre d'endomorphismes de $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n) \cong \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X})^{\otimes n}$. Il découle de la proposition 1 que c'est un produit d'algèbres matricielles sur $\mathbf{Q}$. Plus précisément, les projecteurs de Wedderburn (*i.e.* les projecteurs centraux sur les facteurs simples) sont donnés par les termes non nuls dans la suite des $w_j = p^1_{\mathrm{S}^{d-j_1}} \otimes \ldots \otimes p^n_{\mathrm{S}^{d-j_n}}$ où $p^i_{\mathrm{S}^j}$ est le projecteur sur la composante $\mathrm{P}^{d-j}(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{S}^j = \bigoplus_k \mathrm{L}_i^k\, \mathrm{P}^{d-j}(\mathrm{X})$ pour $\eta = \eta_i$, cf. § 1.2. Pour $w_0 := w_{(0, \ldots, 0)}$ en particulier, notons T le facteur $w_0(\bigotimes \mathbf{Q}[\mathrm{L}_i, *_i])$; il s'identifie à $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}\, \mathrm{V}_{\mathbf{Q}} \cong \mathrm{M}_{(d+1)^n}(\mathbf{Q})$, où $\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}$ désigne la $\mathbf{Q}$-structure $\bigotimes_i(\bigoplus_j \mathbf{Q}\eta_i^j)$ sur $\mathrm{V} := w_0\, \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n)$. La restriction à $\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}$ de la forme bilinéaire

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathrm{X}^n} x \cup (*_1 \otimes \ldots \otimes *_n)\, y$$

sur $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n)$ est à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et symétrique définie positive (c'est le produit scalaire produit tensoriel des produits scalaires $\int_{\mathrm{X}} x \cup *_i\, y$ sur les espaces $\bigoplus_j \mathbf{Q}\eta_i^j$).

Introduisons maintenant le T-module à droite $\mathrm{M} = \theta^*\, \mathrm{T}$, où $\theta : \mathrm{X}^n \to \mathrm{X}^n$ désigne l'idempotent composé de la première projection $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}'} : \mathrm{X}^n \to \mathrm{X}$ et de l'application diagonale $\delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^n$. C'est un T-module monogène non nul, donc isomorphe à $e\mathrm{T}$, où e est un idempotent non nul de T. Un choix canonique pour e est le *projecteur orthogonal selon le noyau* $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}}$ *de* θ^* dans $\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}$ (« orthogonal » se réfère au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}$).

En effet, $(\theta^*(1-e)\,\mathrm{T})\,\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n) = \theta^*(1-e)\,w_0\,\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n) = \mathrm{F}.\theta^*(1-e)\,\mathrm{V}_{\mathbf{Q}} = 0$ donc $\theta^*(1-e)\,\mathrm{T} = 0$; réciproquement, si $\theta^* t = 0$, alors $t(\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}) \subseteq \mathrm{W}_{\mathbf{Q}}$ d'où

$$t = (1-e)\,t \in (1-e)\,\mathrm{T}.$$

On voit ainsi que $\theta^* = \theta^* e$ comme opérateur sur T ou V (on prendra garde que ceci n'entraîne pas que $1-e$ engendre sur F le noyau de θ^* dans V).

Lemme. — *La composition* $(\alpha, m) \mapsto (\alpha \otimes 1_{\mathrm{X}^{n-1}}) \circ m$, $\alpha \in \mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n]$, $m \in \mathrm{M}$, *fait de* M *un* $\mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n]$*-module fidèle.*

En effet, on peut écrire pour tout $t \in \mathrm{T}$:

$$(\mathrm{L}_i \otimes 1_{\mathrm{X}^{n-1}})\,\theta^* t = \theta^*(1_\mathrm{X} \otimes \ldots \otimes \mathrm{L}_i \otimes \ldots \otimes 1_\mathrm{X})\,t,$$

en plaçant L_i en i-ème position, donc $(\mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n] \otimes 1_{\mathrm{X}^{n-1}})\,\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}$. La fidélité provient de ce qu'un élément de $\mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n]$ est déterminé par sa valeur sur $[\mathrm{X}] \in \delta^*\,\mathrm{V}_{\mathbf{Q}}$. □

6. Revenons à nos hypothèses Ab et B. Cette dernière assure que T et M sont des sous-espaces de $\mathrm{C}(\mathrm{X}^n, \mathrm{X}^n)$; Ab assure que l'isomorphisme inverse $(\theta^*)^{-1} : \mathrm{M} \to e\mathrm{T}$ est donné par une correspondance algébrique de degré 0 (on peut en effet considérer M et eT comme des motifs tordus découpés sur des sommes de copies de X^{2n} et $\theta^* : e\mathrm{T} \to \mathrm{M}$ comme un morphisme de motifs de noyau et conoyau nuls). Si $\alpha \in \mathbf{Q}[\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n]$ est numériquement équivalent à 0, il en est donc de même de

$$(\theta^*)^{-1}(\alpha \otimes 1_{\mathrm{X}^{n-1}})\,\theta^* \in \mathrm{End}_\mathrm{T}\, e\mathrm{T} = e\mathrm{T}e.$$

Comme $\mathrm{End}_\mathrm{T}\, e\mathrm{T}$ *est une sous-algèbre semi-simple de* $e\mathrm{C}(\mathrm{X}^n, \mathrm{X}^n)\,e$, la variante du corollaire 3.2.1 pour les correspondances algébriques entraîne que $(\theta^*)^{-1}(\alpha \otimes 1_{\mathrm{X}^{n-1}})\,\theta^* = 0$, d'où $\alpha = 0$ d'après le lemme précédent, ce qui achève de prouver (??) et le théorème. □

7. *Remarques.* — 1) Notons par un prime l'(anti-)involution de transposition sur $\bigoplus \mathbf{Q}[\mathrm{L}_i, *_i]$ relative à $\langle\,,\,\rangle$. Alors *la forme bilinéaire symétrique sur* $\bigoplus \mathbf{Q}[\mathrm{L}_i, *_i]$ *donnée par* $(u, v) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n)}(uv')$ *est à valeurs dans* $\mathbf{Q}$ *et définie positive.*

En effet, traitons d'abord le cas $n = 1$: la décomposition isotypique de $\mathbf{Q}[\mathrm{L}, *]$-modules $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}) \cong \bigoplus \mathrm{P}^{d-i}(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{S}^i$ donne $\mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X})}(uv') = \Sigma \dim \mathrm{P}^{d-i}(\mathrm{X}).\mathrm{Tr}_{\mathrm{S}^i}(uv')$.

Mais d'après la prop. 1.2, la représentation ρ_i de $\mathbf{Q}[\mathrm{L}, *]$ sur S^i a pour image $\mathrm{M}^{i+1}(\mathbf{Q})$ dans une base standard si $\mathrm{P}^{d-i}(\mathrm{X}) \neq 0$, et l'involution $'$ agit comme la transposition des matrices. Donc $\mathrm{Tr}_{\mathrm{S}^i}(uu') \in \mathbf{Q}^{+*}$ si $\rho_i(u) \neq 0$, et par suite $\mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X})}(uu') \in \mathbf{Q}^{+*}$ si $u \neq 0$.

Dans le cas général, il suffit de remarquer que la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n)}(uv')$ est le produit scalaire produit tensoriel des produits scalaires $(u_i, v_i) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{X}^n)}(u_i v_i')$ sur chacun des espaces $\mathbf{Q}[\mathrm{L}_i, *_i]$. (On peut considérer cet énoncé comme un principe « faible » de positivité à la Hodge.) □

Par l'isomorphisme canonique $\mathrm{End}_T\, M \cong eTe$, on peut faire agir l'involution $'$ sur $\mathrm{End}_T\, M$ par transport de structure (noter que $e' = e$). Alors *si* S *est une sous-algèbre de* $\mathrm{End}_T\, M$ (non nécessairement unitaire) *stable par* $'$, S *est semi-simple.*

En effet, comme $\mathrm{End}_T\, M$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, il suffit de faire voir que si $\mathcal{N}$ est un idéal à droite nilpotent de S, alors $\mathcal{N} = 0$. Identifions $\mathrm{End}_T\, M$ à eTe. Si $ene \in \mathcal{N}$, alors $(ene)\,(ene)' = enen'\,e$ est nilpotent, par conséquent $\mathrm{Tr}_{H^{\cdot}(X^n)}((ene)\,(ene)') = 0$, et $ene = 0$. □

Si l'on pouvait démontrer sans utiliser A*b* que $(\pi^0_X\, \alpha \otimes 1_{X^{n-1}})'$ est algébrique, on pourrait déduire de la semi-simplicité de $\mathbf{Q}[(\alpha\pi^0_X \otimes 1_{X^{n-1}})', \alpha\pi^0_X \otimes 1_{X^{n-1}}]$ que $\alpha = 0$, sous la seule hypothèse B.

2) Considérons la catégorie dont les objets sont des couples $(Y, \overline{q})$, Y étant une somme de copies de X et $\overline{q}$ désignant une correspondance algébrique de degré 0 idempotente modulo l'équivalence numérique, et dont les morphismes sont donnés par les correspondances algébriques comme pour les motifs, mais sans condition de degré. On montre comme dans [J92] ou 3.2 que cette catégorie est abélienne semi-simple. En particulier, l'endomorphisme nilpotent $N := L$ (mod. équivalence numérique) de l'objet (X, id) admet une filtration canonique, cf. [D80], 1.6.12. Comme ici la catégorie est semi-simple, cette filtration se scinde :

Lemme. — *Soit* N *un endomorphisme nilpotent d'indice d d'un objet* V *d'une catégorie abélienne semi-simple. Il existe alors une décomposition* $V = \bigoplus V^i$ *telle que* $NV^i \subseteq V^{i+2}$ *et que* N^{d-i} *induise un isomorphisme* $V^i \cong V^{2d-i}$.

Remarque. — Par unicité de la filtration canonique M, associée à N (*loc. cit.*), on a $M_i = \Sigma_{j \leqslant i} V^{d-j}$, $i = -d, \ldots, d$.

Preuve du lemme. — On construit V^i et V^{2d-i} par récurrence pour $i \leqslant d$ ($N^{d+1} = 0$). Posons $V^i = V^{2d-i} = 0$ si $i < 0$. Supposons V^j et V^{2d-j} construits par récurrence pour $j < i$. On a $V^{i-2} \subseteq M_{d-i+2}$ donc $NV_{i-2} \subseteq M_{d-i}$. D'autre part :

$$M_{d-i-1} \cap NV^{i-2} = 0$$

en effet, si W^{i-2} désigne le sous-objet de V^{i-2} image inverse de $M_{d-i-1} \cap NV^{i-2}$ par N, alors $N^{d-i+2}\, W^{i-2} \subseteq N^{d-i+1}\, M_{d-i-1} \cap V^{2d-i+2} = M_{i-d-3} \cap V^{2d-i+2} = 0$, donc $W^{i-2} = 0$ puisque N^{d-i+2} est un monomorphisme sur V^{i-2}. Choisissons alors pour V^i un supplémentaire de M_{d-i-1} dans M_{d-i} contenant NV^{i-2}, et posons $V^{2d-i} = N^{d-i}\, V^i$. Par définition de la filtration canonique, N^{d-i} induit alors un isomorphisme $V^i \cong V^{2d-i}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $NV^{2d-i} = N^{d-i+1}\, V^i \subseteq V^{2d-i+2}$. Or en factorisant l'isomorphisme $N^{d-i+2} = N^{d-i+1} \circ N$ sur V^{i-2} à travers V^i, on voit que V^i est somme directe de NV^{i-2} et du noyau de N^{d-i+1} (restreint à V^i), d'où l'inclusion cherchée. □

Notons $\{\varpi^i\}$ le système orthogonal de projecteurs attaché à la décomposition

$V = \bigoplus V^i$. Supposons que les projecteurs de Künneth soient donnés par des correspondances algébriques indépendantes de la cohomologie (vérifiant les deux théorèmes de Lefschetz) ; c'est le cas en particulier si K est algébrique sur un corps fini, cf. [K-M].

On peut alors montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $*$ est donnée par une correspondance algébrique dont la classe d'équivalence numérique ne dépend pas de H ;

(ii) pour tout i, $\varpi^i = \pi^i_X$ (mod. équivalence numérique) ;

(iii) si $i + j \leqslant d$, la restriction de N^j au sous-objet $(X, \pi^i_X$ (mod. équivalence numérique)) est un monomorphisme. (Ces conditions découlent d'autre part de N.)

Le théorème de Lefschetz faible permet par induction de se limiter à vérifier (iii) dans le cas crucial $i = d - 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ab94] S. Abdulali, Algebraic cycles in families of abelian varieties, *Can. J. Math.*, **46** (6) (1994), 1121-1134.

[A92*a*] Y. André, Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part, *Compositio Math.*, **82** (1992), 1-24.

[A92*b*] Y. André, Une remarque à propos des cycles de Hodge de type CM, in *Sém. de théorie des nombres de Paris*, 1989-1990 (S. David, ed.), *Progress in Math.*, 102 Birkhäuser Boston (1992), 1-7.

[A95*a*] Y. André, Théorie des motifs et interprétation géométrique des valeurs *p*-adiques de G-fonctions, in *Number theory* (S. David, ed.), Cambridge Univ. Press., 1995, 37-60.

[A95*b*] Y. André, On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties, à paraître dans *Math. Annalen.*

[A] Y. André, *Réalisation de Betti des motifs p-adiques*, en préparation (première partie prépubliée à l'IHES, avril 1992).

[AH62] M. Atiyah, F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, *Topology*, **1** (1962), 25-46.

[B74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p > 0*, *Springer LNM*, 407 (1974).

[BO83] P. Berthelot, A. Ogus, F-isocrystals and the De Rham cohomology I, *Inv. Math.*, **72** (1983), 159-199.

[Bl92] D. Blasius, Modular forms and abelian varieties, in *Sém. de théorie des nombres de Paris*, 1989-1990 (S. David, ed.), *Progress in Math.*, 102 Birkhäuser Boston (1992), 23-30.

[CDK95] E. Cattani, P. Deligne, A. Kaplan, On the locus of Hodge classes, *J. of the AMS*, **8** (2) (1995), 483-505.

[D71] P. Deligne, Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES*, **40** (1971), 5-57.

[D72*a*] P. Deligne, La conjecture de Weil pour les surfaces K3, *Invent. Math.*, **15** (1972), 206-226.

[D72*b*] P. Deligne, Les intersections complètes de niveau de Hodge un, *Invent. Math.*, **15** (1972), 237-250.

[D80] P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES*, **52** (1980), 137-252.

[D82] P. Deligne, Hodge cycles on abelian varieties (notes by J. S. Milne), in *Springer LNM*, **900** (1982), 9-100.

[D90] P. Deligne, Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift*, Birkhäuser Boston (1990), vol. II, 111-195.

[DM82] P. Deligne, J. Milne, Tannakian categories, in *Springer LNM*, **900** (1982), 101-228.

[Fa89] G. Faltings, Crystalline cohomology and *p*-adic Galois representations, in *Algebraic analysis, Geometry and number theory*, J. I. Igusa ed., *Proc. of the JAMI inaug. conf. Johns Hopkins Univ.* (1989), 25-80.

[F84] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer Berlin, 1984.

[G66] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. IHES*, **29** (1966), 93-103.

[G69] A. Grothendieck, Standard conjectures on algebraic cycles, in *Bombay colloquium on algebraic geometry*, Oxford, 1969, 193-199.

[GM78] H. Gillet, W. Messing, Riemann-Roch and cycle classes in crystalline cohomology, *Duke Math. J.*, **45** (1978), 193-211.

[I90] L. Illusie, Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique, *Sém. Bourbaki*, exp. 726, juin 1990.

[IIL74] S. Ilori, A. Ingleton, A. Lascu, On a formula of D. B. Scott, *J. London Math. Soc.* (2), 8 (1974), 539-544.

[J92] U. Jannsen, Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity, *Inv. Math.*, **107** (1992), 447-452.

[KaS79] T. Katsura, T. Shioda, On Fermat varieties, *Tôhoku Math. J.*, **31** (1) (1979), 97-115.

[KM74] N. Katz, W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.*, **23** (1974), 73-77.

[Kl68] S. Kleiman, Algebraic cycles and the Weil conjectures, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 359-386.

[Kl69] S. Kleiman, Geometry on grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles, *Publ. Math. IHES*, **36** (1969), 281-297.

[Kl94] S. Kleiman, The standard conjectures, in *Comptes rendus de la conférence de Seattle sur les motifs, Proc. Symp. pure Math.*, **55** (1994), part I, 3-20.

[KuM91] V. Kumar Murty, Computing the Hodge group of an abelian variety, in *Sém. de théorie des nombres de Paris*, 1988-1989 (C. Goldstein, ed.), *Progress in Math.*, 91 Birkhäuser Boston (1991), 141-158.

[L68] D. Lieberman, Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds, *Amer. J. of Math.*, **90** (1968), 366-374.

[Mo85] D. Morrison, The Kuga-Satake of an abelian surface, *J. of Algebra*, **92**, n° 2 (1985), 454-476.

[M69] D. Mumford, A note on Shimura's paper « Discontinuous groups and abelian varieties », *Math. Ann.*, **181** (1969), 345-351.

[O82] A. Ogus, Hodge cycles and crystalline cohomology, in *Springer LNM*, **900** (1982), 357-414.

[O90] A. Ogus, A p-adic analogue of the Chowla-Selberg formula, in « *p-adic analysis* » (F. Baldassarri, S. Bosch, B. Dwork, eds), *Springer LNM*, **1454** (1990).

[SR72] N. Saavedra-Rivano, *Catégories tannakiennes*, *Springer LNM*, **265** (1972).

[Scha88] N. Schappacher, *Periods of Hecke characters*, *Springer LNM*, **1301** (1988).

[Scho90] A. Scholl, Motives for modular forms, *Invent. Math.*, **100** (1990), 419-430.

[S89] J.-P. Serre, *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, *Aspects of Mathematics*, Vieweg Verlag, Wiesbaden (1989).

[S92] J.-P. Serre, Motifs, in *Astérisque*, **198-199-200** (1992), 333-349.

[S94] J.-P. Serre, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations l-adiques, *Comptes rendus de la conférence de Seattle sur les motifs, Proc. Symp. pure Math.*, **55** (1994), part I, 377-400.

[S] J.-P. Serre, *Représentations galoisiennes attachées aux motifs*, Cours au Collège de France, 1993.

[SI77] T. Shioda, H. Inose, On singular K3 surfaces, in *Complex analysis and algebraic geometry, papers dedicated to K. Kodaira*, Iwanami Shoten/Cambridge Univ. Press (1977), 119-136.

[W77] A. Weil, *Abelian varieties and the Hodge ring*, 1977*c*, in *Œuvres scientifiques*, vol. 3, Springer Berlin, 1980.

Institut de mathématiques,
4, place Jussieu,
Tour 46-00, 5e étage, case 247,
F-75252 Paris Cedex 05

Manuscrit reçu le 2 septembre 1993.
Révisé le 11 novembre 1994
et le 2 septembre 1995.