PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

MICHEL BROUÉ

Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 71 (1990), p. 45-63
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1990__71__45_0>

ISOMÉTRIES DE CARACTÈRES ET ÉQUIVALENCES DE MORITA OU DÉRIVÉES

par Michel BROUÉ

0. Introduction

Soit $\mathcal{O}$ un anneau commutatif unitaire nœthérien intègre, de caractéristique zéro. Soit K son corps des fractions; on le suppose « assez gros » pour tous les groupes finis que nous considérons.

Soit G un groupe fini. Dans toute la suite, on désigne par e un idempotent du centre $Z\mathcal{O}G$ de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}G$. On note ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{mod}$ la catégorie des $\mathcal{O}Ge$-modules de type fini. On désigne par $\mathrm{Irr}_K(G, e)$ l'ensemble des caractères irréductibles χ de G sur K tels que $\chi(1) = \chi(e)$.

Soit H un second groupe fini, et soit f un idempotent de $Z\mathcal{O}H$. On définit $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ de manière analogue.

Le résultat suivant est inspiré d'une situation particulière (« Isomorphic Blocks ») étudiée par Alperin ([Al]). Il a été également noté par Dade ([Da]).

0.1. *Théorème. — Supposons que* H *soit un sous-groupe de* G, *et que la restriction* Res_H^G *induise une bijection de* $\mathrm{Irr}_K(G, e)$ *sur* $\mathrm{Irr}_K(H, f)$. *Alors les* $\mathcal{O}$*-algèbres* $\mathcal{O}Ge$ *et* $\mathcal{O}Hf$ *sont isomorphes.*

Bien que très simple (cf. démonstration ci-dessous) ce résultat m'a semblé intéressant : d'une information sur les « caractères ordinaires » il permet d'obtenir une information *a priori* beaucoup plus profonde sur les représentations entières. L'un des buts du présent travail est d'obtenir la généralisation suivante du théorème 0.1, que nous appliquerons ensuite à l'étude de certains blocs des groupes réductifs finis.

0.2. *Théorème. — Soit* M *un* $(\mathcal{O}Ge, \mathcal{O}Hf)$*-bimodule qui est projectif et de type fini à la fois comme* $\mathcal{O}Ge$*-module et comme module-*$\mathcal{O}Hf$. *Supposons que le foncteur*

$$M \otimes_{\mathcal{O}Hf} \cdot : {}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{mod} \to {}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{mod}$$

induise une bijection de $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ *sur* $\mathrm{Irr}_K(G, e)$. *Alors ce foncteur est une équivalence de catégories (et en particulier les* $\mathcal{O}$*-algèbres* $\mathcal{O}Ge$ *et* $\mathcal{O}Hf$ *sont Morita équivalentes).*

Le principe de la démonstration du théorème 0.2 est analogue à celui de la démonstration du théorème 0.1 que nous fournissons ci-dessous : l'équivalence de Morita (l'isomorphisme dans le cas 0.1) entre $\mathrm{KG}e$ et $\mathrm{KH}f$ impliqué par l'hypothèse se *calcule*, et on *constate* qu'en fait elle est « rationnelle sur $\mathcal{O}$ ».

Démonstration du théorème 0.1. — Soit $\mathrm{Br}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}} : \mathcal{O}\mathrm{G} \to \mathcal{O}\mathrm{H}$ l'application $\mathcal{O}$-linéaire définie par la formule

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\sum_{g \in \mathrm{G}} x(g)\, g) = \sum_{h \in \mathrm{H}} x(h)\, h.$$

Nous allons vérifier que les applications

$$i : \mathrm{KH}f \to \mathrm{KG}e \quad \text{telle que } y \mapsto ye$$
$$r : \mathrm{KG}e \to \mathrm{KH}f \quad \text{telle que } x \mapsto |\,\mathrm{G} : \mathrm{H}\,|\, \mathrm{Br}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(x)$$

sont des isomorphismes d'algèbres inverses l'un de l'autre. Puisque ces applications sont $\mathcal{O}$-rationnelles, il en résultera bien l'isomorphisme annoncé entre $\mathcal{O}\mathrm{G}e$ et $\mathcal{O}\mathrm{H}f$.

Puisque K est assez gros, d'après l'hypothèse il existe une famille $(\mathrm{V}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de K-espaces vectoriels et des isomorphismes de K-algèbres

$$\rho : \mathrm{KG}e \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V}_i) \quad \text{et} \quad \sigma : \mathrm{KH}f \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V}_i).$$

Posons $i = \rho^{-1}\,\sigma$ et $r = \sigma^{-1}\,\rho$. La formule d'inversion de Fourier (cf. [Se], 6.2, prop. 11) montre que

$$i(hf) = (1/|\,\mathrm{G}\,|) \sum_{g \in \mathrm{G},\, i \in \mathrm{I}} \dim(\mathrm{V}_i)\, \mathrm{tr}_{\mathrm{V}_i}(g^{-1} h)\, g$$
$$r(ge) = (1/|\,\mathrm{H}\,|) \sum_{h \in \mathrm{H},\, i \in \mathrm{I}} \dim(\mathrm{V}_i)\, \mathrm{tr}_{\mathrm{V}_i}(h^{-1} g)\, h$$

pour $g \in \mathrm{G}$ et $h \in \mathrm{H}$, d'où l'on déduit sans difficulté que

$$i(hf) = he \quad \text{et} \quad r(ge) = |\,\mathrm{G} : \mathrm{H}\,|\, \mathrm{Br}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(ge). \quad \blacksquare$$

Nous démontrons en fait un résultat plus général que le théorème 0.2 (cf. § 1) : avec des hypothèses convenables, on y remplace les algèbres de groupes par des $\mathcal{O}$-algèbres qui sont des $\mathcal{O}$-modules projectifs de type fini, et surtout on remplace les catégories de modules par leurs catégories dérivées (bornées). Nous avons choisi de nous placer dans ce cadre général en particulier en vue d'applications aux cas d'isométries parfaites décrits dans [Br. 2].

Dans l'immédiat, nous présentons au § 3 une application du théorème 0.2 aux blocs des groupes réductifs finis.

Soit ℓ un nombre premier. On suppose maintenant que $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation discrète complet, extension finie de l'anneau des nombres ℓ-adiques $\mathbf{Z}_\ell$.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps fini de cardinal q premier à ℓ, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On désigne par G le groupe fini $\mathbf{G}^{\mathrm{F}}$. Soit $\mathbf{G}^*$ un groupe dual de $\mathbf{G}$ et soit F^* une isogénie duale de F; on pose $\mathrm{G}^* = \mathbf{G}^{*\mathrm{F}^*}$.

On sait ([Br-Mi], [Br. 2]) qu'en général un ℓ-bloc e de G a une « décomposition de Jordan » : il correspond à une paire formée d'un ℓ'-élément semi-simple s de G^* et d'un ℓ-bloc « unipotent » e_u du groupe des points rationnels d'un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$. Nous étudions ici le cas particulier où ce sous-groupe de Levi est un tore $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$: c'est le cas où s est *régulier*. Le bloc e_u est alors le bloc principal du groupe $T = \mathbf{T}^F$ et l'on dit que le bloc e est régulier. On démontre (théorème 3.1) qu'un tel bloc e est « nilpotent », selon la terminologie introduite dans [Br-Pu]. Il en résulte ([Br-Pu], [Pu]) que les catégories ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{mod}$ et ${}_{\mathcal{O}Te_u}\mathbf{mod}$ sont équivalentes. Grâce au théorème 0.1, nous démontrons (théorème 3.3) que la cohomologie ℓ-adique à coefficients dans $\mathbf{Z}_\ell$ de la variété de Deligne-Lusztig associée à la situation fournit effectivement (au moins si q est assez grand) une équivalence de Morita entre les algèbres $\mathcal{O}Ge$ et $\mathcal{O}Te_u$: ainsi s'allonge la liste des points communs et des coïncidences entre les méthodes de la théorie des représentations modulaires et celles de Deligne-Lusztig.

1. Le théorème principal

Hypothèses et notations

Soit $\mathcal{O}$ un anneau commutatif unitaire nœthérien. On désigne par K un sur-anneau commutatif de $\mathcal{O}$, supposé plat sur $\mathcal{O}$. En général, on omettra le signe « $\otimes_{\mathcal{O}}$ » pour l'opération d'extension des scalaires; ainsi, on notera $KX = K \otimes_{\mathcal{O}} X$ et $K\varphi = \mathrm{Id}_K \otimes_{\mathcal{O}} \varphi$ pour tous $\mathcal{O}$-modules X et X′ et toute application $\mathcal{O}$-linéaire $\varphi : X \to X'$.

Soient A et B deux $\mathcal{O}$-algèbres, que l'on suppose des $\mathcal{O}$-modules projectifs de type fini. On note ${}_A\mathbf{mod}$ la catégorie (abélienne) des A-modules de type fini, et ${}_A\mathbf{derb}$ sa catégorie dérivée bornée. Si X et X′ sont objets de ${}_A\mathbf{derb}$, on note

$$\mathrm{Hom}_A(X, X') = \mathrm{Hom}_{{}_A\mathbf{derb}}(X, X').$$

On rappelle (cf. [Gr. 1]) qu'on qualifie de « parfaits » les objets de ${}_A\mathbf{derb}$ isomorphes à un complexe borné de A-modules projectifs de type fini. On dit qu'un objet X de ${}_A\mathbf{derb}$ est « scindé » s'il est isomorphe à son homologie (qui est un complexe à différentielle nulle).

On rappelle que ${}_A\mathbf{mod}$ se plonge (pleinement fidèlement) dans ${}_A\mathbf{derb}$, un module s'envoyant sur un complexe concentré en degré 0. On appelle encore « modules » les complexes concentrés en degré 0.

Un « A-module-B » est ici un (A, B)-bimodule pour lequel les deux structures de $\mathcal{O}$-modules déduites des structures de A-module et de module-B coïncident, et qui est de type fini sur $\mathcal{O}$. On note ${}_A\mathbf{mod}_B$ la catégorie (abélienne) des A-modules-B, et ${}_A\mathbf{derb}_B$ sa catégorie dérivée bornée. Pour les opérations sur les catégories du type ${}_A\mathbf{derb}_B$ et les foncteurs considérés dans l'énoncé suivant, on pourra se rapporter à [Gr. 2], § 3, ainsi qu'à [Ri. 2].

1.1. *Théorème. — Soient* M *et* N *deux complexes bornés de* A*-modules-*B *et de* B*-modules-*A *respectivement. On suppose que*

(1) *considéré comme objet de* ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}$, *le complexe* M *est parfait,*
considéré comme objet de ${}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}$, *le complexe* N *est parfait,*

(2) *le complexe* $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ *est scindé dans* ${}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}_{\mathrm{B}}$,
le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{N})$ *est scindé dans* ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}_{\mathrm{A}}$,

(3) M *est isomorphe dans* ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}_{\mathrm{B}}$ *à* $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{N}, \mathrm{B})$,
N *est isomorphe dans* ${}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}_{\mathrm{A}}$ *à* $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$.

Alors si les foncteurs $\mathrm{KM} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{KB}} \cdot : {}_{\mathrm{KB}}\mathbf{derb} \to {}_{\mathrm{KA}}\mathbf{derb}$ *et* $\mathrm{KN} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{KA}} \cdot : {}_{\mathrm{KA}}\mathbf{derb} \to {}_{\mathrm{KB}}\mathbf{derb}$ *sont des équivalences de catégories, les foncteurs*

$$\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \cdot : {}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb} \to {}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb} \quad \textit{et} \quad \mathrm{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{A}} \cdot : {}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb} \to {}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}$$

sont des équivalences de catégories.

Remarques :

(1) Dans le cas où les algèbres A et B sont symétriques (cf. § 2 ci-dessous), il résulte des travaux de Rickard ([Ri. 1], [Ri. 2]) que si ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}$ et ${}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}$ sont équivalentes, il existe des objets M et N satisfaisant aux hypothèses du théorème 1.1.

(2) Puisque M est A-parfait, pour tout X objet de ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}$ on peut voir le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{X})$ comme le complexe total formé à partir du complexe double $\mathcal{H}om_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{X})$. De l'isomorphisme $\mathrm{N} \simeq \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ on déduit alors que N est parfait dans $\mathbf{derb}_{\mathrm{A}}$. Par suite le complexe $\mathrm{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{X}$ peut être vu comme le complexe total formé à partir du complexe double $\mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{X}$. De façon analogue, pour Y objet de ${}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}$, on peut voir $\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$ comme le complexe total formé à partir du complexe double $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{Y}$.

(3) Comme nous allons le voir au cours de la démonstration, les foncteurs $\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \cdot$ et $\mathrm{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{A}} \cdot$ sont adjoints l'un de l'autre, et par conséquent sont des équivalences inverses l'une de l'autre (*i.e.*, leurs composés sont naturellement isomorphes aux foncteurs identité).

Cette dernière assertion peut s'exprimer par les isomorphismes suivants :

$$\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{N} \simeq \mathrm{A} \quad \text{dans } {}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}_{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \simeq \mathrm{B} \quad \text{dans } {}_{\mathrm{B}}\mathbf{derb}_{\mathrm{B}}.$$

En supposant M concentré en degré 0, on obtient le résultat suivant [1] comme cas particulier du théorème 1.1 (le lecteur rétif aux catégories dérivées pourra effectivement lire la démonstration du théorème 1.1 en faisant l'hypothèse que M est un

---

[1] Dans une première version de ce travail, je n'avais démontré que le théorème 1.2. Lluis Puig m'en a suggéré une nouvelle démonstration qui m'a permis, convenablement adaptée, de démontrer le théorème 1.1. Les idées de Lluis Puig se sont aussi trouvées, pour l'essentiel, dans une lettre que m'a adressée Pierre Deligne au sujet de mon premier manuscrit. Je les en remercie tous deux.

module : il aura ainsi une démonstration du théorème 1.2, qui ne concerne que les catégories de modules).

1.2. *Théorème.* — *Soient* M *et* N *un* A-*module*-B *et un* B-*module*-A *respectivement. On suppose que*

(1) M *est un* A-*module projectif de type fini*,
N *est un* B-*module projectif de type fini*,

(2) M *est isomorphe comme* A-*module*-B *à* $\mathrm{Hom}_B(N, B)$,
N *est isomorphe comme* B-*module*-A *à* $\mathrm{Hom}_A(M, A)$.

Alors si les foncteurs $KM \otimes_{KB} \cdot : {}_{KB}\mathbf{mod} \to {}_{KA}\mathbf{mod}$ *et* $KN \otimes_{KA} \cdot : {}_{KA}\mathbf{mod} \to {}_{KB}\mathbf{mod}$ *sont des équivalences de catégories, les foncteurs*

$$M \otimes_B \cdot : {}_B\mathbf{mod} \to {}_A\mathbf{mod} \quad \textit{et} \quad N \otimes_A \cdot : {}_A\mathbf{mod} \to {}_B\mathbf{mod}$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration du théorème 1.1. — Si M est un A-module-B, X un A-module et Y un B-module, on a l'isomorphisme

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_B(Y, \mathrm{Hom}_A(M, X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M \otimes_B Y, X).$$

Celui-ci se dérive en un isomorphisme (cf. [Il], § 5)

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_B(Y, \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, X)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B Y, X)$$

pour M objet de ${}_A\mathbf{derb}_B$, X objet de ${}_A\mathbf{derb}$, Y objet de ${}_B\mathbf{derb}$. On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(Y, \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B Y, X),$$

qui exprime le fait que la paire de foncteurs $(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B \cdot, \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, \cdot))$ est une « paire adjointe ».

Puisque M est supposé A-parfait, la flèche de produit tensoriel

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, A) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A X \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, X)$$

est un isomorphisme (naturel en X objet de ${}_A\mathbf{derb}$) (cf. [Il], § 5). Notant

$$M^\vee = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, A),$$

on en déduit que la paire de foncteurs $(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B \cdot, M^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A \cdot)$ est une paire adjointe.

On identifiera souvent dans ce qui suit bi-objets et foncteurs correspondants. Ainsi on note M le foncteur $(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B \cdot)$, MN le foncteur $(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A \cdot)$, et un morphisme de foncteurs $MN \to \mathrm{Id}({}_A\mathbf{derb})$ s'identifie à une flèche $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N \to A$ dans ${}_A\mathbf{derb}_A$. On note

$$\varepsilon_M : M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B M^\vee \to A \quad \text{et} \quad \eta_M : B \to M^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$$

les flèches d'adjonction (cf. [McL], chap. 4) exprimant que la paire $(M, M^\vee)$ est adjointe. Dans le cas où M est un module, les flèches ε_M et η_M sont définies de la manière suivante.

- L'application $\varepsilon_M : M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B M^\vee \to A$ est définie par $m \otimes_B \varphi \mapsto \langle m, \varphi \rangle$.

- Soit $\sigma_{B,M} : B \to \mathrm{Hom}_A(M, M)$ l'application qui définit la structure de module-B de M (ainsi $\sigma_{B,M}(b)$ est l'application qui envoie m sur mb). Soit

$$\tau_{A,M} : M^\vee \otimes_A M \to \mathrm{Hom}_A(M, M)$$

l'application telle que $\tau_{A,M}(\varphi \otimes_A m)$ soit l'application de M dans M qui envoie x sur $\langle x, \varphi \rangle m$; puisque M est A-projectif de type fini, l'application $\tau_{A,M}$ est un isomorphisme. On a alors $\eta_M = \tau_{A,M}^{-1} \cdot \sigma_{B,M}$.

De manière analogue, on note $N^\vee = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_B(N, B)$, et

$$\varepsilon_N : N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N^\vee \to B \quad \text{et} \quad \eta_N : A \to N^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$$

les flèches dans ${}_B\mathbf{derb}_B$ et ${}_A\mathbf{derb}_A$ (flèches d'adjonction) qui expriment que la paire $(N, N^\vee)$ est adjointe.

Par hypothèse, il existe des isomorphismes de bi-objets $\alpha : M^\vee \to N$ et $\beta : N^\vee \to M$. Par composition avec les flèches ε et η définies ci-dessus, on en déduit deux couples de flèches

$$(\mathrm{ad}_{M,N}) \qquad \varepsilon^\alpha_{M,N} : M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N \to A \quad \text{et} \quad \eta^\alpha_{M,N} : B \to N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$$

$$(\mathrm{ad}_{N,M}) \qquad \varepsilon^\beta_{N,M} : N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M \to B \quad \text{et} \quad \eta^\beta_{N,M} : A \to M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$$

qui expriment que les paires (M, N) et (N, M) sont adjointes.

Nous allons démontrer que les quatre flèches d'adjonction ci-dessus sont toutes des isomorphismes.

1. Par hypothèse, les foncteurs $(KM \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KB} \cdot)$ et $(KN \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} \cdot)$ sont des équivalences. De plus, les hypothèses du théorème 1.1 sont toutes vérifiées en remplaçant A, B, M, N par KA, KB, KM, KN, essentiellement car les flèches naturelles

$$K \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, X) \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KX)$$

$$K \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_B(N, Y) \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KB}(KN, KY)$$

sont des isomorphismes (puisque K est plat sur $\mathcal{O}$ et que tous les modules considérés sont de présentation finie — cf. par exemple [Bo], § 1, 5).

Pour ces mêmes raisons, les flèches d'adjonction associées à $\{ KM, KN \}$ s'obtiennent simplement en tensorisant par K. En d'autres termes, on a $\varepsilon^{K\alpha}_{KM,KN} = K\varepsilon^\alpha_{M,N}$, etc.

Puisque les foncteurs KM et KN sont des équivalences, les flèches d'adjonctions $K\varepsilon^\alpha_{M,N}$, $K\eta^\alpha_{M,N}$, $K\varepsilon^\beta_{N,M}$, $K\eta^\beta_{N,M}$ sont toutes des isomorphismes (cf. par exemple [McL], IV).

De plus, $KN \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} KM$ est isomorphe à $KM^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} KM$, donc à $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KM)$ (cf. ci-dessus), et par suite au module gradué $H^\bullet(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KM))$. Comme d'autre part $KN \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} KM$ est isomorphe au module KB, on en déduit que $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KM)$ est, non seulement scindé, mais isomorphe à son homologie de degré 0, à savoir $\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KM)$.

2. Vérifions que $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$ et $N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$ sont isomorphes à des modules (dans, respectivement, ${}_A\mathbf{derb}_A$ et ${}_B\mathbf{derb}_B$) qui sont respectivement A-projectif de type fini et B-projectif de type fini.

On sait que $N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$, par exemple, est isomorphe à $M^\vee \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$, donc à $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, M)$ (cf. ci-dessus) et par suite est scindé. Le complexe $N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M$ est en particulier scindé dans ${}_B\mathbf{derb}$, et comme il y est parfait, il est homotope à son homologie. Il résulte alors de [Bo], § 2, 5, que ses modules d'homologie $H^n(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, M)) = \mathrm{Hom}_A(M, M[n])$ sont facteurs directs des $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, M)^n$, et par suite sont des B-modules projectifs de type fini. Ce sont donc en particulier des $\mathcal{O}$-modules projectifs de type fini. Or, d'après ce qui précède (cf. 1. ci-dessus), par tensorisation par K cette homologie se réduit au degré 0. Il s'ensuit (puisque $\mathcal{O}$ s'injecte dans K et que K est plat sur $\mathcal{O}$) que $H^\bullet(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, M))$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(M, M)$.

De même, $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_B(N, N)$ qui est un A-module projectif de type fini.

3. Par les propriétés générales des adjonctions (cf. par exemple [McL], IV, théorème 1) on sait que le morphisme composé

$$M \xrightarrow{\eta^\beta_{N,M}\cdot M} MNM \xrightarrow{M.\varepsilon^\beta_{N,M}} M$$

est égal à Id_M. Par suite le morphisme composé

$$MN \xrightarrow{\eta^\beta_{N,M}.M.N} MNMN \xrightarrow{M.\varepsilon^\beta_{N,M}.N} MN$$

est égal à Id_{MN}.

D'après 2. ci-dessus, $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$ est isomorphe à un module qui est projectif et de type fini sur $\mathcal{O}$. Or ce qui précède montre que l'image de $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$ par $\eta^\beta_{N,M} \otimes_A \mathrm{Id}_M \otimes_B \mathrm{Id}_N$ est facteur direct (dans ${}_A\mathbf{derb}_B$) de $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_A M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B N$. Par extension des scalaires à K, l'application $\eta^\beta_{N,M} \otimes_A \mathrm{Id}_M \otimes_B \mathrm{Id}_N$ devient un isomorphisme. Il en résulte que $\eta^\beta_{N,M} \otimes_A \mathrm{Id}_M \otimes_B \mathrm{Id}_N$ est un isomorphisme.

De manière analogue, on montre que les morphismes (de foncteurs, de bi-objets)

$$M.\varepsilon^\beta_{N,M}.N, \quad N.\eta^\beta_{N,M}.M, \quad \varepsilon^\beta_{N,M}.N.M, \quad \eta^\alpha_{M,N}.N.M,$$
$$N.\varepsilon^\alpha_{M,N}.M, \quad \varepsilon^\alpha_{M,N}.M.N, \quad M.\eta^\alpha_{M,N}.N$$

sont des isomorphismes.

4. De ce qui précède on déduit que le morphisme composé

$$\mathrm{NM} \xrightarrow{\mathrm{N}.\eta^{\beta}_{\mathrm{N,M}}.\mathrm{M}} \mathrm{NMNM} \xrightarrow{\mathrm{N}.\varepsilon^{\alpha}_{\mathrm{M,N}}.\mathrm{M}} \mathrm{NM}$$

est un isomorphisme. Or cette flèche est induite par la flèche composée (morphisme dans ${}_{\mathrm{A}}\mathbf{derb}_{\mathrm{A}}$)

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\eta^{\beta}_{\mathrm{N,M}}} \mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{N} \xrightarrow{\varepsilon^{\alpha}_{\mathrm{M,N}}} \mathrm{A}$$

qui correspond à un élément $z_{\alpha,\beta}$ du centre ZA de A.

Nous allons démontrer que cet élément $z_{\alpha,\beta}$ est inversible dans ZA. Si tel est le cas, il en résulte que l'image de A par $\eta^{\beta}_{\mathrm{N,M}}$ est un facteur direct de $\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{N}$. Comme par ailleurs la flèche $\mathrm{K}\eta^{\beta}_{\mathrm{N,M}}$ est un isomorphisme, on en déduit alors (puisque $\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{N}$ est isomorphe à un module $\mathcal{O}$-projectif de type fini) que $\eta^{\beta}_{\mathrm{N,M}}$ est bien un isomorphisme. On procède de même avec les autres flèches d'adjonction.

Il reste donc à démontrer l'inversibilité de $z_{\alpha,\beta}$. D'après ce qui précède, le morphisme naturel $\zeta_{\mathrm{M,N}} : \mathrm{ZA} \to \mathrm{End(NM)}$ (dans le cas des modules, l'élément $z \in \mathrm{ZA}$ s'envoie sur l'application $(m \otimes_{\mathrm{A}} n \mapsto mz \otimes_{\mathrm{A}} n)$) envoie $z_{\alpha,\beta}$ sur un élément inversible de End(NM). Par extension des scalaires à K, la flèche $\zeta_{\mathrm{M,N}}$ devient un isomorphisme (on a $\mathrm{K}\zeta_{\mathrm{M,N}} = \zeta_{\mathrm{KM,KN}}$, toujours grâce à la platitude de K sur $\mathcal{O}$ et au fait que nos modules sont tous de présentation finie, puisque $\mathcal{O}$ est nœthérien) et par conséquent $\zeta_{\mathrm{M,N}}$ est elle-même injective. D'autre part, l'anneau End(NM) est de type fini sur $\mathcal{O}$ (car $\mathcal{O}$ est nœthérien), et par suite de type fini donc entier sur ZA. Il en résulte bien que l'élément $z_{\alpha,\beta}$, inversible dans End(NM), l'est aussi dans ZA. ∎

2. Le théorème principal dans le cas des algèbres de groupes

Nous nous plaçons dans le cadre un peu plus général des algèbres symétriques.

2.1. *Définition. — On dit qu'une $\mathcal{O}$-algèbre* A *est une algèbre* symétrique *si elle est un $\mathcal{O}$-module projectif de type fini, et s'il existe une forme linéaire $t : \mathrm{A} \to \mathcal{O}$ possédant les propriétés suivantes :*

(S1) $t(aa') = t(a'a)$ *pour* $a, a' \in \mathrm{A}$,

(S2) *l'application* $\hat{t} : \mathrm{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{A}, \mathcal{O})$ *telle que* $(a', \hat{t}(a)) = t(aa')$ *pour* a *et* $a' \in \mathrm{A}$ *est un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules.*

Remarquons que, si (S1) et (S2) sont vraies, l'application $\hat{t}$ est un isomorphisme de A-modules-A. Une forme linéaire t sur A satisfaisant à (S1) et (S2) est appelée une forme *symétrisante* pour A.

La forme $t_{\mathrm{G}} : \mathcal{O}\mathrm{G}e \to \mathcal{O}$ définie par

$$t_{\mathrm{G}}\Big(\sum_{g \in \mathrm{G}} x(g)\, g\Big) = x(1)$$

est symétrisante pour $\mathcal{O}\mathrm{G}e$.

On désigne dorénavant par A une $\mathcal{O}$-algèbre symétrique et par t une forme symétrisante pour A. Si M est un A-module, on pose $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$, et l'on note

$$t_*^M : \mathrm{Hom}_A(M, A) \to M^*$$

l'application définie par $\varphi \mapsto t.\varphi$. Si M est un complexe borné de A-modules, on pose $M^* = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$ et l'on note

$$t_*^M : \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, A) \to M^*$$

le morphisme de complexes défini par les $(t_*^{M^n})_{n \in \mathbf{Z}}$. La démonstration du lemme suivant est un exercice facile, laissé au lecteur.

2.2. *Lemme. — Pour tout complexe borné* M *de* A*-modules*-B, *le morphisme*

$$t_*^M : \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, A) \to M^*$$

est un isomorphisme de complexes de B*-modules*-A.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la forme que prennent les théorèmes 1.1 et 1.2 dans le cas où les algèbres A et B sont supposées symétriques. Le théorème 0.1 de l'introduction en est une conséquence immédiate.

On désigne toujours par K une extension plate de $\mathcal{O}$.

2.3. *Théorème. — Soient* A *et* B *deux $\mathcal{O}$-algèbres symétriques, et soit* M *un complexe borné de* A*-modules*-B. *On suppose que*

(1) *le complexe* M *est parfait à la fois dans* ${}_A\mathbf{derb}$ *et dans* $\mathbf{derb}_B$,

(2) *le complexe* $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(M, M)$ *est scindé dans* ${}_B\mathbf{derb}_B$,
le complexe $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_B(M, M)$ *est scindé dans* ${}_A\mathbf{derb}_A$.

Alors si le foncteur $KM \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KB} \cdot : {}_{KB}\mathbf{derb} \to {}_{KA}\mathbf{derb}$ *est une équivalence de catégories, le foncteur* $M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_B \cdot : {}_B\mathbf{derb} \to {}_A\mathbf{derb}$ *est une équivalence de catégories.*

2.4. *Théorème. — Soient* A *et* B *deux $\mathcal{O}$-algèbres symétriques, et soit* M *un* A*-module*-B, *qui est projectif de type fini à la fois comme* A*-module et comme module*-B. *Supposons que le foncteur* $KM \otimes_{KB} \cdot : {}_{KB}\mathbf{mod} \to {}_{KA}\mathbf{mod}$ *est une équivalence de catégories. Alors le foncteur* $M \otimes_B \cdot : {}_B\mathbf{mod} \to {}_A\mathbf{mod}$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration du théorème 2.3. — On applique le théorème 1.1, avec $N = M^*$. Grâce au lemme 2.2, on voit en effet que les hypothèses du théorème 1.1 sont toutes immédiatement satisfaites, hormis peut-être la dernière : il reste à établir que $(KM^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} \cdot)$ est une équivalence de catégories. Ceci résulte du fait que ce foncteur est adjoint de $(KM \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KB} \cdot)$, grâce au lemme 2.2, à l'isomorphisme

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, KA) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KA} \cdot \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{KA}(KM, \cdot)$$

et à l'isomorphisme (∗) (cf. démonstration du théorème 1.1 ci-dessus). ■

Où l'on explicite certaines flèches, et on fait le lien avec les isométries parfaites.

Enonçons d'abord le théorème 1.1 dans un cas particulier.

Notations et hypothèses

Soit $\mathcal{O}$ un anneau commutatif intègre unitaire nœthérien, de corps des fractions K, que l'on suppose de caractéristique 0, et « assez gros » pour tous les groupes finis considérés.

Soit

$$M = \ldots 0 \longrightarrow M^r \xrightarrow{\delta^r} M^{r+1} \xrightarrow{\delta^{r+1}} \ldots \xrightarrow{\delta^{s-1}} M^s \longrightarrow 0 \ldots$$

un complexe borné de $\mathcal{O}Ge$-modules-$\mathcal{O}Hf$, qui sont tous projectifs à la fois comme $\mathcal{O}Ge$-modules et comme modules-$\mathcal{O}Hf$.

On suppose que les complexes totaux associés aux doubles complexes $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}Ge}(M, M)$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}Hf}(M, M)$ sont respectivement $\mathcal{O}Ge$-scindé-$\mathcal{O}Ge$ et $\mathcal{O}Hf$-scindé-$\mathcal{O}Hf$.

En d'autres termes (cf. [Bo], § 2, 5), si δ_H désigne la différentielle du complexe total $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, M)$ associé au double complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}Ge}(M, M)$, il existe (pour tout n) des applications $\mathcal{O}Hf$-linéaires-$\mathcal{O}Hf$

$$s_H^n : \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, M)^{n+1} \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, M)^n$$

telles que, pour tout n, on ait : $\delta_H^n = \delta_H^n . s_H^n . \delta_H^n$,

— et la condition analogue pour $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Hf}(M, M)$.

Soit $\mu = \Sigma_n(-1)^n \chi_{M^n}$ le caractère du $K[G \times H]$-complexe M (on renvoie le lecteur à [Br. 2] pour les définitions et notations des applications linéaires entre groupes de caractères associées à μ).

2.5. *Théorème. — Supposons que le foncteur* $(KM \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{KHf} \cdot)$ *est une équivalence de catégories de* ${}_{KHf}\mathbf{derb}$ *sur* ${}_{KGe}\mathbf{derb}$ *(l'application* $I_\mu : \mathcal{R}_K(H, f) \to \mathcal{R}_K(G, e)$ *est alors une isométrie bijective — c'est une isométrie parfaite). Alors le foncteur* $(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}Hf} \cdot)$ *est une équivalence de catégories de* ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{derb}$ *sur* ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{derb}$.

Nous terminons cette partie en explicitant certaines des flèches utilisées ci-dessus, ce qui nous permet de retrouver certains des outils introduits dans [Br. 2].

Soit M un complexe borné de $\mathcal{O}Ge$-modules-$\mathcal{O}Hf$.

• *La flèche d'évaluation*

En appliquant l'isomorphisme (∗) du n° 1-2, on obtient un isomorphisme de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}Hf} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, \mathcal{O}Ge), \mathcal{O}Ge)$$

sur

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Hf}(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, \mathcal{O}Ge), \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, \mathcal{O}Ge)),$$

d'où (en considérant l'image réciproque de l'identité de $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, \mathcal{O}Ge)$) une flèche

$$\varepsilon_M : M \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}Hf} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}Ge}(M, \mathcal{O}Ge) \to \mathcal{O}Ge.$$

Grâce à l'isomorphisme $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathcal{O}\mathrm{G}e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}^*$ fourni par le lemme 2.2, on en déduit une flèche

$$\varepsilon_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} : \mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{H}f} \mathrm{M}^* \to \mathcal{O}\mathrm{G}e,$$

appelée flèche d'évaluation.

Supposons que M est un $\mathcal{O}\mathrm{G}e$-module-$\mathcal{O}\mathrm{H}f$. Pour $m \in \mathrm{M}$ et $m^* \in \mathrm{M}^*$, on pose $\langle m, m^* \rangle_{\mathrm{G}} = \Sigma_{g \in \mathrm{G}}\, m^*(g^{-1} m)\, g$. Ainsi, on voit que l'application de M dans $\mathcal{O}\mathrm{G}e$ qui envoie m sur $\langle m, m^* \rangle_{\mathrm{G}}$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathcal{O}\mathrm{G}e)$; c'est l'élément dont l'image par l'isomorphisme $(t_{\mathrm{G}})^{\mathrm{M}}_*$ (cf. ci-dessus) est m^*. On a $\varepsilon_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}}(m \otimes m^*) = \langle m, m^* \rangle_{\mathrm{G}}$.

• *La flèche de Higman*

On suppose dorénavant que les constituants de M sont des $\mathcal{O}\mathrm{G}e$-modules projectifs de type fini. La flèche de produit tensoriel

$$\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathcal{O}\mathrm{G}e) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M} \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$$

est un isomorphisme, donc fournit, grâce au lemme 2.2, un isomorphisme (cf. [Gr. 2], proposition 3.8)

$$\tau_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} : \mathrm{M}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$$

appelé ici *flèche de Higman.*

Dans le cas où M est un module, l'application $\tau_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} : \mathrm{M}^* \otimes_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M} \to \mathrm{M}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{M}$ est définie par

$$\tau_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}}(m^* \otimes_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} m) = \sum_{g \in \mathrm{G}} m^*\, g^{-1} \otimes_{\mathcal{O}} gm.$$

Puisque M est $\mathcal{O}$-projectif de type fini, on peut identifier $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{M})$ à $\mathrm{M}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{M}$, et l'application $\tau_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{M}^* \otimes_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M}$ sur $\mathrm{End}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M})$ (c'est le « critère de Higman »).

Soit $\sigma_{\mathrm{H},\,\mathrm{M}} : \mathcal{O}\mathrm{H}f \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$ l'application provenant de la structure de complexe-$\mathcal{O}\mathrm{H}f$ de M. On a alors

$$\eta_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} = \tau^{-1}_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} \cdot \sigma_{\mathrm{H},\,\mathrm{M}}.$$

La paire de foncteurs $(\mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{H}f} \cdot, \mathrm{M}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \cdot)$ est alors adjointe et les deux flèches

$$(\mathrm{ad}_{\mathrm{M},\,\mathrm{M}^*}) \qquad \varepsilon_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} : \mathrm{M} \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{H}f} \mathrm{M}^* \to \mathcal{O}\mathrm{G}e \quad \text{et} \quad \eta_{\mathrm{G};\,\mathrm{M}} : \mathcal{O}\mathrm{H}f \to \mathrm{M}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M}$$

sont les adjonctions.

La multiplication par les éléments du centre $\mathrm{Z}\mathcal{O}\mathrm{G}e$ de $\mathcal{O}\mathrm{G}e$ définit un morphisme

$$\zeta_{\mathrm{G},\,\mathrm{M}} : \mathrm{Z}\mathcal{O}\mathrm{G}e \to \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})^{\mathrm{H}}$$

où l'on désigne par $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})^{\mathrm{H}}$ le complexe des points fixes par l'action par conjugaison de H.

On désigne alors par $\zeta_{\mathrm{G},\,\mathrm{H}}$ l'application composée

$$\mathrm{Z}\mathcal{O}\mathrm{G}e \xrightarrow{\zeta_{\mathrm{G},\mathrm{M}}} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e}(\mathrm{M}, \mathrm{M})^{\mathrm{G}} \xrightarrow{\tau^{-1}_{\mathrm{G};\mathrm{M}}} (\mathrm{M}^* \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}\mathrm{G}e} \mathrm{M})^{\mathrm{H}} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{H};\mathrm{M}^*}} \mathrm{Z}\mathcal{O}\mathrm{H}f.$$

La vérification de la proposition suivante est laissée au lecteur. Puisque M est un $\mathcal{O}$-module projectif de type fini, l'application $\mathrm{tr}_{M/\mathcal{O}} : \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M) \to \mathcal{O}$ est bien définie (en posant $\mathrm{tr}_{M/\mathcal{O}}(m^* \otimes_{\mathcal{O}} m) = (m, m^*)$).

2.6. *Proposition.* — *L'application* $\zeta_{G,H} : Z\mathcal{O}Ge \to Z\mathcal{O}Hf$ *se calcule par la formule*

$$\zeta_{G,H}\Big(\sum_{g\in G} x(g)\, g\Big) = \sum_{h\in H} (1/|G|)\Big(\sum_{g\in G} \mathrm{tr}_{M/\mathcal{O}}(g, h)\, x(g)\Big)\, h.$$

Si μ désigne comme ci-dessus, le caractère du $K[G \times H]$-complexe M, on reconnaît ainsi en $\zeta_{G,H}$ l'application notée R^0_μ dans [Br. 2].

3. Application à certains blocs des groupes réductifs finis

Pour l'essentiel des outils et résultats utilisés ici, on renvoie le lecteur à [De-Lu] (voir aussi [Ca]), et à [Br-Mi].

Soient p et ℓ deux nombres premiers distincts.

On désigne dorénavant par K un corps, extension finie du corps des nombres ℓ-adiques $\mathbf{Q}_\ell$, supposé « assez gros » pour tous les groupes finis considérés. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K sur $\mathbf{Z}_\ell$.

Soit q une puissance de p. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbf{F}_q$, et soit F l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On pose $G = \mathbf{G}^F$. Soit $\mathbf{G}^*$ un groupe dual de $\mathbf{G}$ et soit F^* une isogénie duale de F (cf. par exemple [Ca, 4.3]); on pose $G^* = \mathbf{G}^{*F^*}$.

On suppose choisis un isomorphisme entre le groupe multiplicatif $\overline{\mathbf{F}}_q^\times$ d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q$ et $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{p'}$, et un plongement de $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_{p'}$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell^\times$. Rappelons (cf. [Lu. 2], 7.5.1) qu'alors, l'ensemble des classes de G-conjugaison de couples $(\mathbf{T}, \theta)$, où $\mathbf{T}$ est un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}$, et où $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^F)$, est en bijection avec l'ensemble des classes de G^*-conjugaison de couples $(\mathbf{T}^*, s)$, où $\mathbf{T}^*$ est un tore maximal rationnel de $\mathbf{G}^*$ et où $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$. Si la classe sous G de la paire $(\mathbf{T}, \theta)$ correspond à la classe sous G^* de la paire $(\mathbf{T}^*, s)$, nous désignerons parfois θ par $\hat{s}$ (conscients qu'en fait $\hat{s}$ n'est défini qu'à conjugaison près par le groupe $W(\mathbf{T})^F$).

Blocs réguliers

Hypothèses

Soit s un ℓ'-élément semi-simple régulier de G^*; ainsi $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un *tore* (maximal, F-stable) de $\mathbf{G}^*$. On le note $\mathbf{T}^*$. Soit $(\mathbf{T}, \hat{s})$ une paire constituée d'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ et d'un caractère $\hat{s}$ de $\mathbf{T}^F$, correspondant à la paire $(\mathbf{T}^*, s)$ grâce à la dualité entre $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^*$. On pose $T = \mathbf{T}^F$ et $T^* = \mathbf{T}^{*F^*}$.

Soit e_s^G l'idempotent de $Z\mathcal{O}G$ correspondant à l'ensemble $\mathcal{E}_\ell(G, (s))$ des caractères irréductibles de G associés à la ℓ-section de s dans G^* (cf. [Br-Mi]). En d'autres termes,

$\mathrm{Irr}_K(G, e_s^G)$ se compose de tous les composants irréductibles des caractères virtuels de G de la forme $R_T^G(\hat{s}\eta)$, où η parcourt l'ensemble des caractères de T d'ordre une puissance de ℓ.

Le résultat suivant est bien connu pour certains types de groupes **G** (voir par exemple [Fo-Sr. 1], [Fo-Sr. 2], [Br. 1], ou [Hi]). Nous l'énonçons et le démontrons ici en toute généralité.

3.1. *Théorème. — L'idempotent e_s^G est un bloc de $\mathcal{O}$G. Ce bloc a pour groupe de défaut le ℓ-sous-groupe de Sylow* T_ℓ *de* T, *et il est nilpotent.*

3.2. *Définition. — Le bloc e_s^G est appelé* bloc régulier *de* G.

Démonstration du théorème 3.1. — Soit e_1^T l'idempotent de $Z\mathcal{O}T = \mathcal{O}T$ correspondant à $\mathcal{E}_\ell(T, (1))$. Puisque T est abélien, on voit que cet idempotent n'est autre que le bloc principal de T. Puisqu'il est primitif, il résulte de [Br. 2], théorème 2.3, que l'idempotent e_s^G, image de e_1^T par l'isométrie parfaite $\eta \mapsto R_T^G(\hat{s}\eta)$, est primitif dans $Z\mathcal{O}G$.

Soit $\mathbf{L} = C_{\mathbf{G}}^0(T_\ell)$; on pose $L = \mathbf{L}^F$. Puisque $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{L}$ et s un élément du tore dual $\mathbf{T}^*$, l'idempotent e_s^L est bien défini. Il est un bloc de L d'après ce qui précède. Comme l'indice de L dans $C_G(T_\ell)$ est une puissance de ℓ (cf. [Br-Mi], lemme 2.1), et que e_s^L est stable par l'action du groupe $C_G(T_\ell)$, cet idempotent est en fait un bloc de $C_G(T_\ell)$ (voir par exemple [Fe], chap. V, § 3). Par conséquent, (T_ℓ, e_s^L) est une sous-paire de G.

Afin de démontrer que e_s^G est nilpotent et de défaut T_ℓ, il suffit de démontrer que (T_ℓ, e_s^L) est une e_s^G-sous-paire de G, qu'elle est une sous-paire maximale de $C_G(T_\ell)$, et que $N_G((T_\ell, e_s^L)) = C_G(T_\ell)$. En effet, cette dernière égalité prouve que (T_ℓ, e_s^L) est une sous-paire maximale (puisqu'elle est alors une paire maximale de son normalisateur), donc que T_ℓ est un groupe de défaut de e_s^G. La même égalité montre alors que T_ℓ contrôle la fusion des e_s^G-sous-paires (cf. [Al-Br], prop. 4.21), ce qui prouve (par définition, cf. [Br-Pu]) que le bloc e_s^G est nilpotent.

1. Démontrons tout d'abord que (T_ℓ, e_s^L) est une e_s^G-sous-paire de G, *i.e.*, que e_s^L intervient dans la décomposition de $\mathrm{Br}_{T_\ell}(e_s^G)$.

Soit $x \in T_\ell$. Par un argument analogue à celui employé ci-dessus pour e_s^L, on voit que l'idempotent $e_s^{C_G^0(x)}$ est un bloc de $C_G(x)$. D'après [Br-Mi], théorème 3.2, cet idempotent intervient dans la décomposition de $\mathrm{Br}_x(e_s^G)$.

Supposons T_ℓ engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On voit que, pour tout $i (1 \leqslant i < n)$, l'idempotent $e_s^{C_G^0(x_1, \ldots, x_{i+1})}$ intervient dans la décomposition de $\mathrm{Br}_{x_{i+1}}(e_s^{C_G(x_1, \ldots, x_i)})$, ce qui prouve bien l'assertion annoncée.

2. Vérifions que (T_ℓ, e_s^L) est une sous-paire maximale de $C_G(T_\ell)$. Pour cela, il suffit de démontrer que e_s^L a pour groupe de défaut T_ℓ dans $C_G(T_\ell)$. Par définition du groupe de défaut (cf. par exemple [Al-Br]), il suffit donc de démontrer que

$$\mathrm{Br}_{\langle x\rangle}^{C_G(T_\ell)}(e_s^L) = 0$$

pour tout ℓ-élément $x \in C_G(T_\ell)$, $x \notin T_\ell$ (en effet, ceci montre que T_ℓ contient le groupe de défaut de e_s^L; or, comme T_ℓ est central dans $C_G(T_\ell)$, ce groupe de défaut contient T_ℓ). Comme L est d'indice une puissance de ℓ dans $C_G(T_\ell)$, il suffit de vérifier que $\mathrm{Br}^L_{\langle x \rangle}(e_s^L) = 0$ pour tout ℓ-élément $x \in L$, $x \notin T_\ell$. Or cette dernière assertion résulte encore de [Br-Mi], théorème 3.2, appliqué au bloc e_s^L de L.

3. Démontrons que $N_G((T_\ell, e_s^L)) = C_G(T_\ell)$.

Par définition, $N_G((T_\ell, e_s^L))$ est l'ensemble des éléments de G qui normalisent T_ℓ et stabilisent la $C_G(T_\ell)$-classe de conjugaison de la paire $(T, \hat{s})$. Comme, par hypothèse sur s, on a $N_G((T, \hat{s})) = T$, on en déduit que $N_G((T_\ell, e_s^L)) = C_G(T_\ell)\, T$ d'où $N_G((T_\ell, e_s^L)) = C_G(T_\ell)$. ■

Equivalence de Morita et cohomologie ℓ-adique

Nous utilisons les notations et hypothèses qui précèdent.

Soit $\mathbf{B}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$, de radical unipotent $\mathbf{U}$, et contenant le tore $\mathbf{T}$. Soit $\mathbf{X}_\mathbf{U}$ la variété de Deligne-Lusztig définie par

$$\mathbf{X}_\mathbf{U} = \{ g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}\, F(g) \in \mathbf{U} \}.$$

Il est clair (cf. [De-Lu]) que la multiplication à gauche par les éléments de G et la multiplication à droite par les éléments de T permettent de munir les groupes de cohomologie ℓ-adique à support compact $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathbf{Z}_\ell)$ de structures de $(\mathbf{Z}_\ell G, \mathbf{Z}_\ell T)$-bimodules. Posant $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathbf{Z}_\ell)$, on voit que $e_s^G\, \mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathcal{O})\, e_s^T$ est un $(\mathcal{O}Ge_s^G, \mathcal{O}Te_s^T)$-bimodule.

L'application de $\mathcal{O}T_\ell$ dans $\mathcal{O}Te_s^T$ définie par $t \mapsto (1/|\, T_{\ell'}\, |)\, \Sigma_{t' \in T_{\ell'}}\, \hat{s}(t')\, t'\, t$ est un isomorphisme d'algèbres. Cet isomorphisme permet de considérer le $\mathcal{O}$-module $e_s^G\, \mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathcal{O})\, e_s^T$ comme un $(\mathcal{O}Ge_s^G, \mathcal{O}T_\ell)$-bimodule, ce que nous ferons désormais.

3.3. *Théorème.* — *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes, on suppose de plus* $\mathbf{X}_\mathbf{U}$ *affine et de dimension d. Alors le* $(\mathcal{O}Ge_s^G, \mathcal{O}T_\ell)$*-bimodule* $e_s^G\, \mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathcal{O})\, e_s^T$ *définit une équivalence de catégories entre* ${}_{\mathcal{O}Ge_s^G}\mathbf{mod}$ *et* ${}_{\mathcal{O}T_\ell}\mathbf{mod}$.

Remarque. — D'après [De-Lu] (théorème 9.7 et corollaire 1.12), on sait que la variété $\mathbf{X}_\mathbf{U}$ est affine dès que q est plus grand que le nombre de Coxeter de $\mathbf{G}$.

Démonstration du théorème 3.3. — Remarquons que tous les caractères irréductibles de T associés au bloc e_s^T sont « en position générale ». D'après [De-Lu], théorème 6.8 et corollaire 9.9, on sait que $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, K)\, e_s^T = 0$ si $i \neq d$, et que le foncteur $\mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, K)\, e_s^T \otimes_{KT} \cdot$ définit une équivalence de catégories de ${}_{KTe_s^T}\mathbf{mod}$ sur ${}_{KGe_s^G}\mathbf{mod}$ (puisque $(-1)^d\, R_T^G$ définit une bijection entre $\mathrm{Irr}_K(T, e_s^T)$ et $\mathrm{Irr}_K(G, e_s^G)$). Grâce au théorème 0.1, il suffit donc de démontrer que $\mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_\mathbf{U}, \mathcal{O})\, e_s^T$ est projectif à la fois comme $\mathcal{O}G$-module et comme module-$\mathcal{O}T$.

Or on sait (S.G.A.) qu'il existe un objet $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{X}_U, \mathbf{Z}_\ell)$ de la catégorie ${}_{\mathbf{Z}_\ell G}\mathbf{derb}_{\mathbf{Z}_\ell T}$, catégorie dérivée bornée de la catégorie des $(\mathbf{Z}_\ell G, \mathbf{Z}_\ell T)$-bimodules, possédant les propriétés suivantes :

- pour tout i, on a $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_U, \mathbf{Z}_\ell) = H^i(\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{X}_U, \mathbf{Z}_\ell))$,
- $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{X}_U, \mathbf{Z}_\ell)$ définit par restriction des objets parfaits dans chacune des catégories ${}_{\mathbf{Z}_\ell G}\mathbf{derb}$ et $\mathbf{derb}_{\mathbf{Z}_\ell T}$ (car chacun des groupes finis G et T opère librement sur $\mathbf{X}_U$).

Nous allons vérifier que $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e^T_s = 0$ pour tout $i \neq d$ et que $\mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e^T_s$ est sans torsion. La projectivité de $\mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e^T_s$ à la fois comme $\mathcal{O}$G-module et comme module-$\mathcal{O}$T résultera alors du lemme suivant.

3.4. *Lemme. — Soit* G *un groupe fini, soit* $\mathcal{O}$ *un anneau de Dedekind, et soit*

$$M^\bullet = 0 \longrightarrow M^0 \xrightarrow{\delta 1} M^1 \xrightarrow{\delta 2} \dots \xrightarrow{\delta n} M^n \longrightarrow 0$$

un complexe fini de $\mathcal{O}$G*-modules projectifs tel que* $H^i(M^\bullet) = \{0\}$ *pour* $i \neq d$, *et que* $H^d(M^\bullet)$ *soit sans torsion. Alors* $H^d(M^\bullet)$ *est un* $\mathcal{O}$G*-module projectif.*

Démonstration du lemme 3.4. — On vérifie d'abord l'assertion suivante :

Soient M un $\mathcal{O}$G-module projectif, M′ un $\mathcal{O}$G-module, et $\iota : M \to M'$ un morphisme de $\mathcal{O}$G-modules qui est une injection directe comme $\mathcal{O}$-morphisme. Alors ι est une injection directe comme $\mathcal{O}$G-morphisme.

En effet, puisque M est projectif, il existe $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ tel que $\Sigma_{g\in G}\, g\alpha g^{-1} = \mathrm{Id}_M$. Soit s une $\mathcal{O}$-section de ι. Alors $t = \Sigma_{g\in G}\, g\alpha s g^{-1}$ est une $\mathcal{O}$G-section de ι.

Posons $Z^i = \ker(\delta^i)$, $B^i = \mathrm{im}(\delta^i)$ et $H^i = Z^{i+1}/B^i$. Grâce à l'assertion précédente, on vérifie aisément que

- si M^{i-1}/Z^i est projectif et $H^i = \{0\}$, alors Z^{i+1} est projectif et facteur direct dans M^i, donc M^i/Z^{i+1} est projectif,
- si B^i est projectif et $H^{i-1} = \{0\}$, alors M^{i-1}/B^{i-1} est projectif, donc B^{i-1} est projectif.

Ceci permet de ramener la démonstration du lemme 3.4 au cas où

$$M^\bullet = \dots 0 \to 0 \to M^{d-1} \to M^d \to M^{d+1} \to 0 \to 0 \to \dots.$$

Dans ce cas, puisque M^{d-1} est projectif, il en est de même de B^d. Comme H^d est sans torsion, il en résulte que B^d est facteur direct dans Z^{d+1}, et H^d est donc facteur direct dans Z^{d+1}. Or, puisque M^{d+1} est projectif, Z^{d+1} l'est aussi. Ceci établit bien la projectivité de H^d. ■

Il reste donc à vérifier que $\mathbf{H}^i_c(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e^T_s = 0$ pour tout $i \neq d$ et que $\mathbf{H}^d_c(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e^T_s$ est sans torsion.

D'après [De-Lu], § 1, on sait que $\mathbf{X}_{\mathrm{U}}$ est un T-torseur sur une variété $\mathbf{Y}_{\mathrm{U}}$ affine, lisse et purement de dimension d. Soit $\pi : \mathbf{X}_{\mathrm{U}} \to \mathbf{Y}_{\mathrm{U}}$ le morphisme fini correspondant. Il transforme le faisceau constant $\mathcal{O}$ sur $\mathbf{X}_{\mathrm{U}}$ en un faisceau localement constant $\pi_*(\mathcal{O})$ sur $\mathbf{Y}_{\mathrm{U}}$. On note $\mathcal{F}_s$ le sous-faisceau de $\pi_*(\mathcal{O})$ défini par l'idempotent e_s^{T} de $\mathrm{Z}\mathcal{O}\mathrm{T}$. On a alors, pour tout i, $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}_{\mathrm{U}}, \mathcal{O})\, e_s^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}_{\mathrm{U}}, \mathcal{F}_s)$.

D'après [De-Lu], démonstration du théorème 9.8, on sait qu'il existe une compactification $j : \mathbf{Y}_{\mathrm{U}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{\mathrm{U}}$ telle que ([De-Lu], lemma 9.14) $j_!\, \mathcal{F}$ soit isomorphe à $\mathbf{R}j_*\, \mathcal{F}$. La propriété à démontrer résulte alors du lemme suivant (qui m'a été signalé par Luc Illusie — cf. [De]).

3.5. *Lemme.* — *Soit* $\mathbf{Y}$ *une variété algébrique définie sur* $\overline{\mathbf{F}}_q$, *affine, lisse et de dimension* d. *Soit* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}$*-faisceau lisse sans torsion, et soit* $j : \mathbf{Y} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Y}}$ *une compactification telle que* $j_!\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}j_*\, \mathcal{F}$. *Alors* $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}, \mathcal{F}) = 0$ *pour* $i \neq d$ *et* $\mathbf{H}_c^d(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$ *est sans torsion.*

Démonstration du lemme 3.5. — D'après [Ar], le complexe $\mathbf{R\Gamma}(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$ et son dual $\mathbf{R\Gamma}(\mathbf{Y}, \mathcal{F}^\vee)$ (objets parfaits de la catégorie dérivée de ${}_{\mathcal{O}}\mathbf{mod}$) sont d'amplitude parfaite dans $[-1, d]$. Par dualité de Poincaré, on sait que

$$\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{Y}, \mathcal{F}) = \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbf{R\Gamma}(\mathbf{Y}, \mathcal{F}^\vee), \mathcal{O}(d))\,[-2d],$$

ce qui montre que $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$ est d'amplitude parfaite dans $[d, 2d+1]$. Puisque $j_!\, \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}j_*\, \mathcal{F}$, on a $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{Y}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R\Gamma}(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$, donc $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$ est d'amplitude parfaite dans $[-1, d] \cap [d, 2d+1] = \{d\}$. En d'autres termes, $\mathbf{R\Gamma}_c(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathbf{H}_c^d(\mathbf{Y}, \mathcal{F})\,[-d]$, ce qui établit bien l'assertion annoncée. ■

Une équivalence de Morita entre deux algèbres de blocs sur $\mathcal{O}$ préserve la simplicité ou la projectivité des modules, et commute aux opérations de « décomposition » (*i.e.*, — cf. par exemple [Se], III — les opérations de réduction modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$). L'énoncé suivant résulte alors du théorème 3.3 (les spécialistes de la théorie des blocs noteront qu'il résulte aussi aisément du théorème 3.1 et de la description des caractères d'un bloc nilpotent — cf. [Br-Pu]).

3.6. *Corollaire.* — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe algébrique connexe réductif défini sur* $\mathbf{F}_q$, *soit* $\mathbf{T}$ *un tore maximal rationnel de* $\mathbf{G}$; *on note* G *et* T *les groupes (finis) de points rationnels. Soit* ℓ *un nombre premier ne divisant pas* q *et soit* $\theta : \mathrm{T} \to \mathrm{K}^\times$ *un caractère de* T.

On suppose que le ℓ'*-composant de* θ *est en position générale. Alors :*

(1) *la restriction aux* ℓ'*-éléments de* G *du caractère* $\varepsilon_{\mathrm{G}}\, \varepsilon_{\mathrm{T}}\, \mathrm{R}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ *est un caractère de Brauer irréductible de* G;

(2) *le caractère* $|\,\mathrm{T}_\ell\,|\, \varepsilon_{\mathrm{G}}\, \varepsilon_{\mathrm{T}}\, \mathrm{R}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ *est le caractère d'un* $\mathcal{O}\mathrm{G}$*-module projectif indécomposable.*

Démonstration du corollaire 3.6. — En faisant des choix convenables de dualité, le ℓ'-composant $\theta_{\ell'}$ du caractère θ correspond à un ℓ'-élément semi-simple s d'un groupe fini « dual » G^* qui définit un bloc régulier e_s^G. L'application $\varepsilon_G \varepsilon_T R_T^G$ est la traduction, au niveau des caractères ordinaires, du foncteur de tensorisation par $e_s^G \mathbf{H}_c^d(\mathbf{X}_U, \mathcal{O})\, e_s^T$. Les assertions à démontrer résultent alors du fait qu'elles sont trivialement vérifiées si l'on y remplace G par T_ℓ et $\varepsilon_G \varepsilon_T R_T^G(\theta)$ par θ. ■

Remarque : une question aux géomètres

Il est très probable que le théorème 3.3 n'est qu'un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général sur la décomposition de Jordan des blocs.

Soit en effet s un ℓ'-élément semi-simple de $\mathbf{G}^*$ « presque » quelconque : on suppose simplement que la composante connexe de son centralisateur, notée $C^\circ_{\mathbf{G}^*}(s)$, est complément de Levi d'un certain sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}^*$. On sait qu'alors par dualité lui correspond un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, que l'on note $\mathbf{G}(s)$. On pose $G(s) = \mathbf{G}(s)^F$. Soient e_s^G et $e_s^{G(s)}$ les idempotents de $Z\mathcal{O}G$ et $Z\mathcal{O}G(s)$ correspondant respectivement aux ensembles de caractères irréductibles $\mathcal{E}_\ell(G, (s))$ et $\mathcal{E}_\ell(G(s), (s))$ (cf. [Br-Mi]).

Soit $\mathbf{V}$ le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{G}(s)$ est un complément de Levi, et soit $\mathbf{X}_\mathbf{V}$ la variété de Deligne-Lusztig associée, définie par

$$\mathbf{X}_\mathbf{V} = \{ g \in \mathbf{G} \mid g^{-1} F(g) \in \mathbf{V} \},$$

sur laquelle opèrent G par multiplication à gauche, et $G(s)$ par multiplication à droite.

On sait que

(1) ([Lu. 3], proposition 6.3) $\mathbf{X}_\mathbf{V}$ est lisse, purement de dimension $d = \dim(V/V \cap F(V))$,

(2) *(id.)* si q est plus grand que le nombre de Coxeter de $\mathbf{G}$, $\mathbf{X}_\mathbf{V}$ est affine,

(3) ([Lu. 3], proposition 6.6) le foncteur $\mathbf{H}_c^d(\mathbf{X}_\mathbf{V}, K)\, e_s^{G(s)} \otimes_{KG(s)} \cdot$ définit une équivalence de Morita entre ${}_{KG(s)\, e_s^{G(s)}}\mathbf{mod}$ et ${}_{KGe_s^G}\mathbf{mod}$ (ce foncteur est égal à $(-1)^d R^G_{G(s), \mathbf{V}}$),

(4) ([Br. 2]) ce foncteur induit une isométrie parfaite entre les groupes de caractères $\mathcal{R}_K(G(s), e_s^{G(s)})$ et $\mathcal{R}_K(G, e_s^G)$.

Comme l'a fait remarquer G. Hiß, le calcul des matrices de décomposition de nombreux exemples suggère que les blocs de $\mathcal{O}G(s)\, e_s^{G(s)}$ et de $\mathcal{O}Ge_s^G$ qui se correspondent par cette isométrie parfaite ([Br. 2]) sont en fait Morita équivalents. A la différence du cas particulier des blocs réguliers traité ci-dessus, la théorie des blocs n'a pas permis d'établir cette propriété générale *a priori*.

Grâce aux propriétés énoncées ci-dessus, et d'après la démonstration du théorème 3.3, on voit que cette équivalence de Morita serait démontrée si l'on pouvait établir que les groupes $\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}_\mathbf{V}, \mathcal{O})\, e_s^{G(s)}$ sont sans torsion.

Comme dans la démonstration du théorème 3.3, on peut introduire une variété affine lisse $\mathbf{Y}_\mathbf{V}$ et un $\mathcal{O}$-faisceau $\mathcal{F}_s$ sans torsion sur $\mathbf{Y}_\mathbf{V}$ de sorte que

$$\mathbf{H}_c^i(\mathbf{X}_\mathbf{V}, \mathcal{O})\, e_s^{G(s)} = \mathbf{H}_c^i(\mathbf{Y}_\mathbf{V}, \mathcal{F}_s) \quad \text{pour tout } i.$$

On voit donc, d'après le lemme 3.5 ci-dessus, qu'il suffit de trouver une compactification $j : \mathbf{Y_V} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Y}}_\mathbf{V}$ telle que $j_! \mathscr{F}_s = \mathbf{R}_{j_*} \mathscr{F}_s$.

L'auteur laisse cette question aux géomètres.

Remarque. — Dans le cas où $\mathbf{G}(s)$ est un sous-groupe « de Harish-Chandra » — *i.e.*, le complément de Levi d'un sous-groupe parabolique *rationnel* $\mathbf{P} = \mathbf{VG}(s)$ de $\mathbf{G}$ —, la réponse à la question précédente est évidemment positive. Les algèbres $\mathcal{O}\mathrm{G}(s)\, e_s^{\mathrm{G}(s)}$ et $\mathcal{O}\mathrm{G}e_s^\mathrm{G}$ sont alors Morita équivalentes *via* le $\mathcal{O}\mathrm{G}e_s^\mathrm{G}$-module-$\mathcal{O}\mathrm{G}(s)\, e_s^{\mathrm{G}(s)}$ « de Harish-Chandra » $e_s^\mathrm{G}\, \mathcal{O}(\mathrm{G}/\mathrm{V})\, e_s^{\mathrm{G}(s)}$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Ar] M. ARTIN, Théorèmes de finitude pour un morphisme propre : dimension cohomologique des schémas algébriques affines, in *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4, tome 3)*, Berlin, Springer-Verlag L.N. 305, 1972-1973, 145-167.

[Al] J. L. ALPERIN, Isomorphic Blocks, *J. Algebra*, **43** (1976), 694-698.

[Al-Br] J. L. ALPERIN and M. BROUÉ, Local Methods in Block Theory, *Ann. of Math.*, **110** (1979), 143-157.

[Bo] N. BOURBAKI, *Algèbre, chapitre 10 (algèbre homologique)*, Paris, Masson, 1980.

[Br.1] M. BROUÉ, Les ℓ-blocs des groupes $\mathrm{GL}(n, q)$ et $\mathrm{U}(n, q^2)$ et leurs structures locales, *Astérisque (Séminaire Bourbaki, 37e année)*, **133-134** (1986), 159-188.

[Br.2] M. BROUÉ, Blocs, isométries parfaites, catégories dérivées, *Astérisque* (à paraître) (1990).

[Br-Mi] M. BROUÉ et J. MICHEL, Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini, *J. reine angew. Math.*, **395** (1989), 56-67.

[Br-Pu] M. BROUÉ and L. PUIG, A Frobenius theorem for blocks, *Invent. Math.*, **56** (1980), 117-128.

[Ca] R. CARTER, *Finite groups of lie type : conjugacy classes and complex characters*, New York, Wiley-Interscience, 1985.

[Da] E. C. DADE, Remarks on isomorphic blocks, *J. Algebra*, **45** (1977), 254-258.

[De] P. DELIGNE, Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques, in *Cohomologie étale (SGA 4 ½)*, Berlin, Springer-Verlag L.N. 569, 1977, 168-232.

[De-Lu] P. DELIGNE and G. LUSZTIG, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.*, **103** (1976), 103-161.

[Fe] W. FEIT, *The representation theory of finite groups*, Amsterdam, North-Holland, 1982.

[Fo-Sr.1] P. FONG and B. SRINIVASAN, The blocks of finite general linear groups and unitary groups, *Invent. Math.*, **69** (1982), 109-153.

[Fo-Sr.2] P. FONG and B. SRINIVASAN, The blocks of finite classical groups, *J. reine angew. Math.*, **396** (1989), 122-191.

[Gr.1] A. GROTHENDIECK, Groupes des classes des catégories abéliennes et triangulées, complexes parfaits, in *Cohomologie ℓ-adique et fonctions* L *(SGA 5)*, Springer-Verlag L.N. 589, 1977, 351-371.

[Gr.2] A. GROTHENDIECK, Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale, in *Cohomologie ℓ-adique et fonctions* L *(SGA 5)*, Springer-Verlag L.N. 589, 1977, 372-406.

[Hi] G. HIß, On the decomposition numbers of $\mathrm{G}_2(q)$, *J. Algebra*, **120** (1989), 339-360.

[Il] L. ILLUSIE, Calculs de termes locaux, in *Cohomologie ℓ-adique et fonctions* L *(SGA 5)*, Berlin, Springer Verlag L.N. 589, 1977, 138-203.

[Ja] N. JACOBSON, *Basic Algebra II*, San Francisco, Freeman, 1980.

[Lu.1] G. LUSZTIG, On the finiteness of the number of unipotent classes, *Invent. Math.*, **34** (1976), 201-213.

[Lu.2] G. Lusztig, Representations of finite classical groups, *Invent. Math.*, **43** (1977), 125-175.
[Lu.3] G. Lusztig, *Green functions and character sheaves*, preprint (1989).
[McL] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Berlin, Springer-Verlag (G.T.M. 5), 1971.
[Pu] L. Puig, Nilpotent blocks and their source algebras, *Invent. Math.*, **93** (1988), 77-116.
[Ri.1] J. Rickard, Morita Theory for Derived Categories, *J. London Math. Soc.*, **39** (1989), 436-456.
[Ri.2] J. Rickard, *Derived equivalences as derived functors*, preprint (1989).
[Se] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Paris, Hermann, 1971.

D.M.I.
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
F-75005 Paris

Manuscrit reçu le 28 novembre 1989.