PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

PATRICE PHILIPPON

Critères pour l'indépendance algébrique

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 64 (1986), p. 5-52

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1986__64__5_0>

CRITÈRES POUR L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

par PATRICE PHILIPPON

INTRODUCTION

C'est E. Borel qui en 1899 introduisit le premier le résultant de deux polynômes en une variable dans l'étude des nombres transcendants. Mais c'est A. O. Gel'fond qui en 1949 en montra toute la puissance pour les questions d'indépendance algébrique lorsqu'il généralisa la méthode qui lui avait permis de résoudre, parallèlement à T. Schneider, le septième problème de Hilbert, pour démontrer qu'au moins deux des nombres $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$, où α est algébrique distinct de 0, 1 et β algébrique de degré $d \geqslant 3$ sur $\mathbf{Q}$, sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Lorsque $d = 3$ il montrait ainsi l'indépendance algébrique sur $\mathbf{Q}$ des nombres $\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}$ résolvant le cas $d = 3$ de la conjecture, dite, depuis lors, de Gel'fond-Schneider (cf. [G] et [S]), qui demande d'établir l'indépendance algébrique sur $\mathbf{Q}$ des nombres $\alpha^{\beta}, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ avec α et β comme ci-dessus. Cette méthode de Gel'fond, pour l'indépendance algébrique, repose sur un critère de transcendance, dit lui aussi de Gel'fond, dont la démonstration fait intervenir de façon essentielle le résultant de deux polynômes en une variable, et que nous rappelons dans le corollaire suivant sous une forme raffinée obtenue indépendamment par W. D. Brownawell et M. Waldschmidt en 1971 (cf. [B] par exemple).

Corollaire **(0.1)** *(critère de Gel'fond). — On note* d° P *et* $t(\mathrm{P})$ *le degré et la somme du degré et du maximum des logarithmes des valeurs absolues des coefficients du polynôme* P *de* $\mathbf{Z}[X]$. *Soient* $\theta \in \mathbf{C}$ *et* τ, δ *deux fonctions croissantes de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}^*$ *tendant vers l'infini. Si* C_0 *est un nombre réel suffisamment grand (indépendant de* θ, τ, δ*), il n'existe pas de suite* $(P_N)_{N\in\mathbf{N}}$ *de polynômes de* $\mathbf{Z}[X]$ *telle que pour tout* $N \in \mathbf{N}$ *on ait* $t(P_N) \leqslant \tau(N)$, $d^0 P_N \leqslant \delta(N)$ *et*

$$0 < |P_N(\theta)| \leqslant \exp[-C_0\,\tau(N+1)\,\delta(N+1)].$$

N.B. — Ce corollaire, ainsi que les autres énoncés formulés dans cette introduction seront déduits au § 2 de la seconde partie de cet article, d'un théorème appelé « critère principal ». Ces énoncés ne sont pas toujours donnés dans cette introduction sous la forme optimale établie par leurs auteurs.

La méthode de Gel'fond a connu de nombreux développements, par exemple W. D. Brownawell a étendu le domaine d'application du critère de Gel'fond en substituant au corps de base $\mathbf{Q}$ un corps quelconque de type de transcendance fini (au sens de S. Lang); voir [B] pour plus de détails et aussi [C], § 1, pour plus de théorèmes.

C'est surtout G. V. Choodnovsky qui, à partir des années 1974-1976, s'est attaché à faire progresser les travaux sur la conjecture de Gel'fond-Schneider. Il propose ainsi que le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ du corps $\mathbf{Q}(\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}})$, avec α et β comme plus haut, soit au moins $[\log_2(d+1)]$ (où [ ] désigne la partie entière et $\log_2$ le logarithme en base deux). Parallèlement, il énonce un critère d'indépendance algébrique pour des polynômes en plusieurs variables, dont E. Reyssat a démontré dans [R] une version améliorée que nous écrivons comme suit :

Corollaire (**0.2**) *(critère de Choodnovsky-Reyssat). — Soient* $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{C}$ *et* η *un nombre réel* $\geqslant 2^n$ *et* a_1, a_2 *deux nombres réels vérifiant* $0 < a_2 < a_1 < a_2 \dfrac{2^n}{2^n - 1}$. *Il n'existe pas de suite* $(\mathrm{P_N})_{\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_0}$ *de polynômes de* $\mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ *telle que pour tout* $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_0$ *on ait* $t(\mathrm{P_N}) \leqslant \mathrm{N}$ *et*

$$\exp(-\mathrm{N}^{\eta+a_1}) < |\mathrm{P_N}(\theta_1, \ldots, \theta_n)| < \exp(-\mathrm{N}^{\eta+a_2}).$$

Remarques. — Nous démontrerons ce corollaire pour tout nombre réel $\eta \geqslant n+1$, ce qui améliore de façon, semble-t-il, optimale le critère de Choodnovsky-Reyssat et nous permet d'énoncer le théorème suivant sur la conjecture de Gel'fond-Schneider. Remarquons auparavant qu'un énoncé similaire au corollaire (0.2) avec la condition $\eta \geqslant n+1$ avait déjà été proposé, sans démonstration, par G. V. Choodnovsky (cf. [C], Prop. (5.1)).

Théorème (**0.3**). — *Soient* α *un nombre algébrique distinct de* 0, 1 *et* β *algébrique de degré* $d \geqslant 2$ *sur* $\mathbf{Q}$. *Alors au moins* $[d/2]$ *des nombres* $\alpha^\beta, \ldots, \alpha^{\beta^{d-1}}$ *sont algébriquement indépendants.*

Notons que ce résultat général n'est pas assez fin pour contenir dans le cas $d = 3$ celui de Gel'fond. Nous établirons ce théorème au § 2 de la seconde partie comme corollaire d'un théorème de minorations de degrés de transcendance plus général.

En 1977, Y. V. Nesterenko introduit dans [N1], et pour la première fois dans l'étude des nombres transcendants, les techniques de U-élimination à la Kronecker. Nous avons déjà largement utilisé dans [P2] ces techniques pour étudier certains problèmes d'indépendance algébrique sur les variétés abéliennes (analogues de la conjecture de Gel'fond-Schneider et du théorème de Lindemann-Weierstrass) et y avons démontré un critère d'indépendance algébrique généralisant un énoncé antérieur de R. Dvornicich (cf. [D], th. 1). Nous mentionnons ce critère de [P2] sous une forme simplifiée.

Corollaire (**0.4**). — *Soient* $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbf{C}$ *et* C_0 *un nombre réel suffisamment grand en fonction de n. Il n'existe pas de suite* $(\mathrm{I_N} = (\mathrm{P}_{1,\mathrm{N}}, \ldots, \mathrm{P}_{m(\mathrm{N}),\mathrm{N}}))_{\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_0}$ *d'idéaux homogènes* *de* $\mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n]$ *dont la variété des zéros dans l'espace projectif* $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ *soit de dimension zéro, telle que pour tout* $N \geqslant N_0$ *et tout* $i = 1, \ldots, m(N)$ *on ait* $t(P_{i,N}) \leqslant N$ *et*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m(N)} \{|P_{i,N}(1, \theta_1, \ldots, \theta_n)|\} \leqslant \exp(-C_0 N^{n+1}).$$

Y. V. Nesterenko a lui-même appliqué, dans [N3], les méthodes de [N1] au problème de Gel'fond-Schneider où il démontre le résultat proposé par Choodnovsky, et plus récemment dans [N2] pour l'étude des problèmes de mesures d'indépendance algébrique (voir également [C], § 2, pour une autre approche de ce type de problèmes).

En 1983, M. Waldschmidt et Zhu Yao Chen ont interprété dans [WZ] la condition de minoration du critère de Choodnovsky-Reyssat, ce qui les a conduit à un énoncé du style suivant :

Corollaire **(0.5)**. — *Soient* $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{C}^n$ *et* η *un nombre réel* $\geqslant 2^n$ *et* C_0 *un nombre réel suffisamment grand en fonction de n. Il n'existe pas de suite* $((P_{1,N}, \ldots, P_{m(N),N}))_{N \geqslant N_0}$ *de familles de polynômes de* $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *telle que pour tout* $N \geqslant N_0$ *et tout* $i = 1, \ldots, m(N)$ *on ait* $t(P_{i,N}) \leqslant N$, *et que pour tout* $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ *tel que* $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|z_i - \theta_i|\} \leqslant \exp(-3C_0 N^\eta)$ *on ait*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m(N)} \{|P_{i,N}(z_1, \ldots, z_n)|\} \leqslant \exp(-C_0 N^\eta).$$

Remarques. — Le véritable critère de Waldschmidt-Zhu (cf. [WZ]) est plus fort car il ne demande d'imposer l'encadrement que pour les n-uplets $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $z_1 = \theta_1$. Ceci fait que le vrai critère de Waldschmidt-Zhu entraîne à la fois celui de Gel'fond et celui de Choodnovsky (cf. [C], Prop. (1.7)), alors que celui de Choodnovsky n'implique pas celui de Gel'fond. Nous établirons le corollaire (0.5) avec la borne meilleure $\eta \geqslant n + 1$ mais nous ne sommes pas parvenus à nous ramener à l'hypothèse $z_1 = \theta_1$ du vrai critère de Waldschmidt-Zhu. L'interprétation et l'étude de ce type de condition, qui est peut-être à rapprocher dans le cas $n = 2$ de la condition (c) du théorème 2 de [D], nous semblent intéressantes. Il faut encore mentionner que Zhu Yao Chen avait déjà établi le corollaire (0.5) avec la condition $\eta \geqslant 2^{n-2}(2 + \sqrt{3})$.

Dans cet article nous démontrons un critère d'indépendance algébrique englobant et généralisant (aux exceptions près, déjà mentionnées) les critères précédents. La philosophie de ce critère peut être mieux appréhendée sur le corollaire simplifié suivant :

Corollaire **(0.6)**. — *Soient* $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{C}^n$ *et* η *un nombre réel* $\geqslant n + 1$ *et* C_0 *un nombre réel suffisamment grand en fonction de n. Il n'existe pas de suite* $(I_N = (P_{1,N}, \ldots, P_{m(N),N}))_{N \geqslant N_0}$ *d'idéaux de* $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *dont l'ensemble des zéros dans la boule* $B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-3C_0 N^\eta))$ *de* $\mathbf{C}^n$ *soit de cardinal fini et telle que pour tout* $N \geqslant N_0$ *et tout* $i = 1, \ldots, m(N)$ *on ait* $t(P_{i,N}) \leqslant N$ *et*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m(N)} \{|P_{i,N}(\theta_1, \ldots, \theta_n)|\} \leqslant \exp(-C_0 N^\eta).$$

Remarque. — Les divers raffinements que l'on trouvera dans le critère principal (théorème (2.11)), par rapport au corollaire (0.6), sont essentiellement de séparer, comme dans le corollaire (0.1), le degré de la hauteur des polynômes $P_{i,N}$ et de différencier, comme dans le corollaire (0.2), les comportements du rayon de la boule considérée et de la majoration des $|P_{i,N}(\boldsymbol{\theta})|$.

Il est clair que le corollaire (0.4) est un cas particulier du corollaire (0.6) lorsque l'on y déshomogénéise les idéaux I_N en posant $X_0 = 1$. Le corollaire (0.4) ne permettait, dans [P2], de traiter les questions d'indépendance algébrique que sur les variétés abéliennes (qui sont des variétés algébriques projectives complètes); le corollaire (0.6), en « localisant » la condition d'être de dimension zéro, permet d'étendre les méthodes et résultats de [P2] aux groupes algébriques commutatifs généraux. Le théorème (0.3) est un exemple d'une telle extension. M. Waldschmidt a établi dans [W], par une méthode différente s'appuyant néanmoins sur le corollaire (0.6), de nombreux autres cas de grands degrés de transcendance dans les groupes algébriques. Il faut également dire que G. V. Choodnovsky a dans [C], § 4, donné une démonstration dans le cas $n = 2$ du corollaire (0.6), bien qu'il ait énoncé le théorème (4.1) de [C] de façon différente. Par ailleurs, la proposition (5.1) de [C] se trouve maintenant démontrée comme conséquence du corollaire (0.2) avec $\eta = n + 1$, tandis que les autres affirmations ou conjectures de ce § 5 de [C] trouvent toutes leurs contre-exemples en reprenant la méthode de J. W. S. Cassels pour démontrer le théorème XIV (p. 94) de [Ca] (cf. Appendice). Signalons encore que le lemme (3.1) de [C] se déduit de la remarque suivant la proposition (2.8) en adaptant la preuve de la proposition (2.6).

Nous avons découpé ce travail en deux parties. La première présente les outils nécessaires à la démonstration du critère principal, on y trouve un exposé de la théorie de l'élimination projective (§§ 1 et 2) très proche de celui de [N1], et au § 3 des définitions de hauteurs et valeurs absolues en un point d'idéaux homogènes (donc en particulier de variétés projectives) ainsi que la preuve de plusieurs propriétés utiles de ces notions (voir aussi [N3]). La seconde partie est consacrée à l'énoncé et à la démonstration du critère principal (§§ 2 et 3), on y explique également au § 2 comment les énoncés de cette introduction se déduisent du critère principal et au § 1 on étudie sous différents aspects les variétés projectives définies sur un corps de nombres. Enfin, en appendice, nous montrons qu'une des hypothèses essentielles du critère principal est naturelle.

Pensant que cette introduction serait parcourue par des lecteurs plus archimédiens qu'ultramétriques, nous nous y sommes résolument placés dans le domaine complexe, mais il est connu depuis longtemps que la nature des critères d'indépendance algébrique est très algébrique et dépend peu du complété de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans lequel on se place, aussi traiterons-nous dans tout ce qui suit les critères d'indépendance algébrique simultanément pour toutes les places de $\mathbf{Q}$ (ou du corps de nombres envisagé).

Pour conclure cette introduction, je voudrais remercier D. Bertrand et M. Waldschmidt pour leurs bienveillants conseils et encouragements lors de la gestation de ce texte.

I. — LES OUTILS GÉOMÉTRICO-ARITHMÉTIQUES

1. Idéaux U-éliminants

Soient R un anneau commutatif nœthérien et $A = R[X_0, \ldots, X_n]$ l'anneau des polynômes en les variables $X_0, \ldots, X_n$ à coefficients dans R. On note $\mathscr{M}_d$ l'ensemble des monômes unitaires en $X_0, \ldots, X_n$ de degré d (*i.e.* des expressions de la forme $X_0^{\alpha_0} \ldots X_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N}$ et $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n = d$). Soient r un entier $\geqslant 0$ et $\mathbf{d}$ un élément de $\mathbf{N}^r$. Si $r = 0$ on pose $R[\mathbf{d}] = R$ (resp. $A[\mathbf{d}] = A$) et si $r \geqslant 1$ on note $R[\mathbf{d}]$ (resp. $A[\mathbf{d}]$) l'anneau des polynômes à coefficients dans R (resp. A) en les variables

$$\{u_{\mathfrak{m}}^{(j)};\, j = 1, \ldots, r \text{ et } \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}\}.$$

Et toujours lorsque $r \geqslant 1$ on appelle U_j, pour $j = 1, \ldots, r$, l'élément de $A[\mathbf{d}]$ suivant

$$U_j = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}} u_{\mathfrak{m}}^{(j)} . \mathfrak{m}.$$

Enfin, soit I un idéal homogène de A (*i.e.* engendré par des éléments de A homogènes en les variables $X_0, \ldots, X_n$). Si $r = 0$ on pose $I[\mathbf{d}] = I$ et si $r \geqslant 1$ on note $I[\mathbf{d}]$ l'idéal de $A[\mathbf{d}]$ engendré par I et les polynômes $U_1, \ldots, U_r$.

Définition (1.1). — *On appelle idéal* U*-éliminant d'indice* $\mathbf{d}$ *de* I, *que l'on note* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$, *l'idéal de* $R[\mathbf{d}]$ *formé des éléments* a *tels que pour tout* $i = 0, \ldots, n$ *il existe un entier* $N_i \in \mathbf{N}$ *tel que* $a . X_i^{N_i} \in I[\mathbf{d}]$. *En d'autres termes, si on pose*

$$\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(I) = \bigcup_{k \geqslant 1} (I[\mathbf{d}] :_{A[\mathbf{d}]} \mathscr{M}_k) = \bigcup_{k \geqslant 1} \{f \in A[\mathbf{d}];\, f . \mathscr{M}_k \subset I[\mathbf{d}]\},$$

on a $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I) = \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(I) \cap R[\mathbf{d}]$.

Remarque. — Dans la définition de $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(I)$, à cause de la nœthérianité de $A[\mathbf{d}]$, la réunion infinie est en fait égale à une réunion finie et, les idéaux étant emboîtés, il existe donc un $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(I) = I[\mathbf{d}] :_{A[\mathbf{d}]} \mathscr{M}_N .$$

Considérons l'algèbre $\mathfrak{S}A[\mathbf{d}]$ des polynômes à coefficients dans A en les variables

$$\{s_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'}^{(j)};\, j = 1, \ldots, r \text{ et } \mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}\}$$

liées algébriquement par les seules relations

$$s_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}}^{(j)} = 0 \quad \text{et} \quad s_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'}^{(j)} + s_{\mathfrak{m}', \mathfrak{m}}^{(j)} = 0.$$

Le morphisme de A-algèbres suivant nous sera utile :

$$\mathfrak{d} : \mathrm{A}[\mathbf{d}] \to \mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$$
$$u_{\mathfrak{m}}^{(j)} \to \mathfrak{d}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}) = \sum_{\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}} s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)} . \mathfrak{m}'.$$

Lemme **(1.2)**. — *Pour* $f \in \mathrm{A}[\mathbf{d}]$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$;

(ii) *il existe un entier* N *tel que* $\mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si $f \in \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ alors $f.\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}[\mathbf{d}]$. Mais on remarque que

$$\mathfrak{d}(\mathrm{U}_j) = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}} \mathfrak{d}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}) . \mathfrak{m} = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}} \sum_{\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}} s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)} . \mathfrak{m}\mathfrak{m}' = 0$$

et donc $\mathfrak{d}(\mathrm{I}[\mathbf{d}]) \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ d'où $\mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pour $i = 0, \ldots, n$ soit M_i l'ensemble multiplicatif formé des puissances > 0 de X_i, $\mathrm{M}_i = \{\mathrm{X}_i^m, m = 1, 2, \ldots\}$. On définit alors pour tout i un morphisme de A-algèbres

$$\mathfrak{s}_i : \mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}] \to \mathrm{M}_i^{-1}.\mathrm{A}[\mathbf{d}]$$
$$\mathfrak{s}_i(s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)}) = \begin{cases} u_{\mathfrak{m}}^{(j)}/\mathrm{X}_i^{d_j} & \text{si } \mathfrak{m}' = \mathrm{X}_i^{d_j} \text{ et } \mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}, \\ -\, u_{\mathfrak{m}'}^{(j)}/\mathrm{X}_i^{d_j} & \text{si } \mathfrak{m} = \mathrm{X}_i^{d_j} \text{ et } \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que pour tout $j = 1, \ldots, r$ et $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}$ on a

$$\mathfrak{s}_i \circ \mathfrak{d}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}) - u_{\mathfrak{m}}^{(j)} \in \mathrm{M}_i^{-1}.\mathrm{I}[\mathbf{d}]$$

d'où l'on déduit que pour tout $f \in \mathrm{A}[\mathbf{d}]$

$$\mathfrak{s}_i \circ \mathfrak{d}(f) - f \in \mathrm{M}_i^{-1}.\mathrm{I}[\mathbf{d}].$$

Lorsqu'on suppose que $\mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ on a $\mathfrak{s}_i \circ \mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{M}_i^{-1}.\mathrm{I}[\mathbf{d}]$ et avec la conclusion ci-dessus il découle que $f.\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{M}_i^{-1}.\mathrm{I}[\mathbf{d}]$.

Ceci, étant vrai pour tout $i = 0, \ldots, n$ entraîne l'existence d'un entier N′ tel que $f.\mathscr{M}_{\mathrm{N}+\mathrm{N}'} \subset \mathrm{I}[\mathbf{d}]$ et donc, d'après la Définition (1.1), tel que $f \in \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$.

Proposition **(1.3)**. — *Soit* I *un idéal homogène de* A :

(i) *si* $\mathscr{M}_1 \subset \sqrt{\mathrm{I}}$ *alors* $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}[\mathbf{d}]$ *et* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}) = \mathrm{R}[\mathbf{d}]$,

(ii) *si* I *est premier et* $\mathscr{M}_1 \not\subset \mathrm{I}$ *alors* $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ *et* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ *sont premiers,*

(iii) *si* I *est primaire et* $\mathscr{M}_1 \not\subset \sqrt{\mathrm{I}}$ *alors* $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ *et* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ *sont primaires et de plus* $\sqrt{\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})} = \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\sqrt{\mathrm{I}})$ *et donc* $\sqrt{\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})} = \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\sqrt{\mathrm{I}})$,

(iv) *si* $\mathrm{I} = \bigcap_{h=1}^{t} \mathrm{I}_h$ *est une décomposition primaire normale de* I, *alors* $\mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}) = \bigcap_{h=1}^{t} \mathfrak{U}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}_h)$ *et donc* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}) = \bigcap_{h=1}^{t} \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}_h)$.

Démonstration

(i) est clair d'après la définition de $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$.

(ii) Si $fg \in \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ on a, par le lemme (1.2) : $\mathfrak{d}(fg).\mathscr{M}_\mathrm{N} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$. Comme A est nœthérien et $\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ est un anneau de polynômes sur A, il est facile de vérifier que lorsque I est supposé premier, $\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ est nécessairement premier (ou cf. [No], Prop. 6, p. 263). Or si $\mathscr{M}_1 \not\subset \mathrm{I}$ on a $\mathscr{M}_1 \not\subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ d'où il résulte que

$$\mathfrak{d}(fg) = \mathfrak{d}(f)\,\mathfrak{d}(g) \in \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}];$$

ceci entraîne que $\mathfrak{d}(f)$ ou $\mathfrak{d}(g)$ doit être dans $\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$, donc que f ou g est dans $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$. On a montré que $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ est premier, il suit facilement que $\mathfrak{E}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ est également premier.

(iii) Si $fg \in \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ on a encore, par le lemme (1.2) : $\mathfrak{d}(fg).\mathscr{M}_\mathrm{N} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$. On vérifie comme précédemment que lorsque I est primaire et que $\mathscr{M}_1 \not\subset \sqrt{\mathrm{I}}$, alors $\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ est également primaire et vérifie $\mathscr{M}_1 \not\subset \sqrt{\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]}$ (ou cf. [No], Prop. 8, p. 264). Il vient donc que $\mathfrak{d}(fg) = \mathfrak{d}(f)\,\mathfrak{d}(g) \in \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$. Supposons $f \notin \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$, alors $\mathfrak{d}(f) \notin \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ et la primarité de $\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ impose que $\mathfrak{d}(g) \in \sqrt{\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]}$. Il existe alors un entier M vérifiant $\mathfrak{d}(g)^\mathrm{M} = \mathfrak{d}(g^\mathrm{M}) \in \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ d'où $g^\mathrm{M} \in \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$. On a ainsi établi que $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ est primaire, ce qui entraîne que $\mathfrak{E}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ est aussi primaire. Il nous reste à déterminer le radical de $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$. Mais dire que f appartient à ce radical est équivalent, d'après le lemme (1.2), à dire qu'il existe un entier M tel que $\mathfrak{d}(f^\mathrm{M}).\mathscr{M}_\mathrm{MN} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$. On vérifie aisément que $\sqrt{\mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]} = \sqrt{\mathrm{I}}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ (ou cf. [No], Prop. 8, p. 264) et $f \in \sqrt{\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})}$ équivaut donc à dire que $\mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_\mathrm{N} \subset \sqrt{\mathrm{I}}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]$. En réutilisant le lemme (1.2), on a $f \in \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\sqrt{\mathrm{I}})$ et on a montré que $\sqrt{\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})} = \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\sqrt{\mathrm{I}})$ ce qui achève la preuve de (iii).

(iv) Le lemme (1.2) énonce que

$$f \in \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I}) \quad \text{si} \quad \mathfrak{d}(f).\mathscr{M}_\mathrm{N} \subset \mathrm{I}.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}] = \bigcap_{h=1}^{t} (\mathrm{I}_h.\mathfrak{S}\mathrm{A}[\mathbf{d}]),$$

cette dernière égalité résultant par exemple de [No], Prop. 9, p. 265. Et ce même lemme affirme que cette dernière condition est équivalente au fait que $f \in \bigcap_{h=1}^{t} \mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I}_h)$. Le point (iv) et la proposition (1.3) se trouvent donc ainsi complètement démontrés.

Remarque. — Lorsque I est primaire et $\mathscr{M}_1 \not\subset \sqrt{\mathrm{I}}$, il est aisé de vérifier que l'idéal primaire $\mathfrak{U}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ a même exposant que I (l'exposant d'un idéal primaire $\mathfrak{Q}$ est le plus petit entier e tel que $(\sqrt{\mathfrak{Q}})^e \subset \mathfrak{Q}$), et donc que l'exposant de l'idéal primaire $\mathfrak{E}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ est inférieur ou égal à celui de I. Quand R est supposé intègre, on peut montrer, bien que nous n'en aurons pas besoin ici, en reprenant le travail de Y. V. Nesterenko (voir § 1 de [N1]), que $\mathfrak{E}_\mathbf{d}(\mathrm{I})$ et I ont même exposant.

Venons-en maintenant à l'interprétation géométrique de l'idéal U-éliminant.

Proposition (**1.4**) *(théorème de l'élimination* I*). — Soit* $\rho : \mathrm{R}[\mathbf{d}] \to \mathbf{k}$ *un homomorphisme d'anneau de* $\mathrm{R}[\mathbf{d}]$ *dans un corps* $\mathbf{k}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})) = (0)$;

(ii) *il existe une extension* K *de* $\mathbf{k}$ *et un zéro non trivial de* $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$ *dans* K^{n+1} (*i.e.* : $\exists\, \mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathrm{K}^{n+1}\backslash\{0\}/\forall\, p \in \mathrm{I}[\mathbf{d}],\ \rho(p)(\mathbf{x}) = 0$).

Remarques. — On a encore noté ρ le prolongement évident de ρ en un homomorphisme de $\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ dans $\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

La proposition ci-dessus généralise le théorème dit des zéros de Hilbert : on prend $r = 0$, $\mathrm{R} = \mathbf{k}$ et $\rho = \mathrm{id}_{\mathbf{k}}$; si I n'a pas de zéro non trivial dans K^{n+1} pour toute extension K de $\mathbf{k}$ alors $\mathscr{M}_1 \subset \sqrt{\mathrm{I}}$.

Démonstration. — (ii) $\Rightarrow$ (i) est clair car si $a \in \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})$ alors $a.\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}[\mathbf{d}]$ et donc si $(x_0, \ldots, x_n)$ est un zéro non trivial de $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$ dans K^{n+1} on écrit pour un indice i tel que $x_i \neq 0$ que $\rho(a).x_i^{\mathrm{N}} = 0$ d'où $\rho(a) = 0$.

Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), on distingue deux cas :

• Si ρ est l'homomorphisme nul, alors tout point de $\mathbf{k}^{n+1}$ est un zéro de $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]) = (0)$. En particulier il y a bien un zéro non trivial de $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$ dans $\mathbf{k}^{n+1}$.

• Si ρ n'est pas l'homomorphisme nul, montrons que pour tout entier $\mathrm{N} > 0$ on a $\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \not\subset \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$. Appelons $\mathbf{k}_0$ le corps des fractions de $\rho(\mathrm{R}[\mathbf{d}])$; c'est un sous-corps de $\mathbf{k}$. Il est facile de vérifier que si $\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$ alors $\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]) \cap \mathbf{k}_0[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ ce qui implique qu'il existe un élément $a \in \mathrm{R}[\mathbf{d}]$ tel que $\rho(a).\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}])$ et $\rho(a) \neq 0$. Ceci entraîne qu'il existe des éléments $(a_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'})_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{\mathrm{N}}}$ de $\mathrm{Ker}\,\rho$ dans $\mathrm{R}[\mathbf{d}]$ tels que pour tout $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{\mathrm{N}}$ on ait $\sum_{\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{\mathrm{N}}} (a_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} + a\,\delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'})\,\mathfrak{m}' \in \mathrm{I}[\mathbf{d}]$, où $\delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}$ désigne le symbole de Kronecker. Si Δ est le déterminant de la matrice $(a_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} + a\,\delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'})_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{\mathrm{N}}}$ on vérifie sans peine les propriétés suivantes :

$$\Delta.\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{I}[\mathbf{d}] \quad \text{donc } \Delta \in \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I}),$$

et
$$\rho(\Delta) = \rho(a)^{|\mathscr{M}_{\mathrm{N}}|} \neq 0$$

où $|\mathscr{M}_{\mathrm{N}}|$ est le cardinal de l'ensemble $\mathscr{M}_{\mathrm{N}}$, qui contredisent l'hypothèse (i), à savoir que $\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathrm{I})) = (0)$. Il est donc établi que $\mathscr{M}_{\mathrm{N}} \not\subset \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]).\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

Soit i un indice dans $\{0, \ldots, n\}$ tel que pour tout entier $\mathrm{N} > 0$ on ait $\mathrm{X}_i^{\mathrm{N}} \notin \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]).\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ L'élément $1 - \mathrm{X}_i$ de $\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ n'est pas inversible modulo $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]).\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$. En effet s'il n'en était pas ainsi, notons $p_0 + \ldots + p_{\mathrm{M}}$ cet inverse avec p_j polynôme homogène de degré j. Alors $(1 - \mathrm{X}_i)(p_0 + \ldots + p_{\mathrm{M}}) - 1$ appartient à l'idéal homogène $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]).\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ ce qui entraîne que $p_0 - 1$, $\mathrm{X}_i p_0 - p_1, \ldots, \mathrm{X}_i p_{\mathrm{M}-1} - p_{\mathrm{M}}$ et $\mathrm{X}_i p_{\mathrm{M}}$ appartiennent à ce même idéal, et donc on devrait avoir $\mathrm{X}_i^{\mathrm{M}+1} \in \rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]).\mathbf{k}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ contrairement au choix de l'indice i. En conséquence de ceci, $1 - X_i$ appartient nécessairement à un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ contenant $\rho(I[\mathbf{d}])$ et ρ induit donc un homomorphisme

$$\tilde{\rho}: A[\mathbf{d}] \to \mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{M} =: K$$

de $A[\mathbf{d}]$ vers un corps K contenant $\mathbf{k}$, qui vérifie $\tilde{\rho}(X_i) = 1 \neq 0$ et $\tilde{\rho}(p) = 0$ pour tout $p \in I[\mathbf{d}]$. Or $\tilde{\rho}(p) = \rho(p)(\tilde{\rho}(X_0), \ldots, \tilde{\rho}(X_n))$, ce qui permet de conclure que $(\tilde{\rho}(X_0), \ldots, \tilde{\rho}(X_n))$ est bien un zéro non trivial de $\rho(I[\mathbf{d}])$ dans K^{n+1} et achève la preuve de la proposition (1.4).

Pour la suite de notre exposition et de ce paragraphe, nous allons supposer que R *est un anneau intègre et principal.*

Nous appellerons codimension d'un idéal premier $\mathfrak{P}$ de A le plus grand entier h tel qu'il existe une suite d'idéaux premiers deux à deux distincts

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \supset \mathfrak{P}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{P}_h = (0).$$

C'est le « rang » de [No], Déf., p. 214; l'appellation codimension est justifiée dans notre cas par le fait que l'anneau que nous considérons est Cohen-Macaulay (cf. [No], Déf., p. 257 et Th. 17, p. 271).

Proposition **(1.5)**. — *Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal homogène premier de* A *de codimension* $\leqslant n - r + 1$,

(i) *si* $\mathfrak{P} \cap R \neq (0)$, *alors* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P} \cap R).R[\mathbf{d}]$,

(ii) *si* $\mathfrak{P} \cap R = (0)$, *alors* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) = (0)$ *si et seulement si* $\mathfrak{P}$ *est de codimension* $< n - r + 1$,

(iii) *si* $\mathfrak{P} \cap R = (0)$ *et si* $\mathfrak{P}$ *est de codimension* $n - r + 1$, *alors* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})$ *est principal.*

La démonstration de ce lemme repose sur les deux faits suivants et sera donnée après les preuves de ces deux faits.

Fait **(1.6)**. — *Si* $\mathfrak{P}$ *est un idéal premier de* $\mathfrak{A}[X]$ *où* $\mathfrak{A}$ *est un anneau de polynômes sur* R *et si* $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{A} = (0)$, *alors* $\mathfrak{P}$ *est principal.*

Fait **(1.7)**. — *Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal homogène premier de* A *tel que* $\mathfrak{P} \cap R = (0)$ *et* $X_0 \notin \mathfrak{P}$. *On note* $\mathfrak{r}$ *le sous-anneau de* $R[\mathbf{d}]$ *des polynômes à coefficients dans* R *en les variables* $\{u_{\mathfrak{m}}^{(j)};\, j = 1, \ldots, r$ *et* $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j} \backslash \{X_0^{d_j}\}\}$.

Pour alléger l'écriture on note $u_0^{(j)} = u_{\mathfrak{m}}^{(j)}$ *quand* $\mathfrak{m} = X_0^{d_j}$. *Alors, si* $t < n + 1 - \operatorname{codim} \mathfrak{P}$ *et* $1 \leqslant t \leqslant r$, *on a*

$$\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{r}[u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(t)}] = (0).$$

Démonstration du fait (1.6). — Soit K le corps des fractions de $\mathfrak{A}$. L'idéal $\mathfrak{P}.K[X]$ engendré par $\mathfrak{P}$ dans K[X] est donc principal; soit f un générateur dans K[X] de cet idéal. On peut supposer que $f \in \mathfrak{P}$ et, comme $\mathfrak{A}$ est factoriel, que f est de contenu 1 (en effet si c est le contenu de f on a $f/c \in \mathfrak{P}$ car $c \in \mathfrak{A}$ donc $c \notin \mathfrak{P}$, cet élément f/c

de $\mathfrak{P}$ est de contenu 1 et engendre $\mathfrak{P}.K[X]$). Montrons que $\mathfrak{P} = f\mathfrak{A}[X]$, et pour cela soit $g \in \mathfrak{P}$; il existe $h \in \mathfrak{A}[X]$ et $b \in \mathfrak{A}$ tels que $b.g = f.h$ et donc b divise le contenu de $h.f$ qui n'est autre que le contenu de h, d'où $h/b \in \mathfrak{A}[X]$ et $g = f.h/b$.

Démonstration du fait (1.7). — Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un élément $a \in \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{r}[u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(t)}]$ non nul. Il existe donc un entier N tel que

$$a.\mathcal{M}_N \subset \mathfrak{P}[\mathbf{d}],$$

et en posant formellement pour $j = t+1, \ldots, r$

$$u_0^{(j)} = -\sum_{\mathfrak{m} \neq X_0^{d_j}} u_{\mathfrak{m}}^{(j)}\, \mathfrak{m}/X_0^{d_j},$$

on montre que, a ne dépendant pas de $u_0^{(t+1)}, \ldots, u_0^{(r)}$, on a

$$a.\mathcal{M}_N \subset \mathfrak{P}[d_1, \ldots, d_t].A[\mathbf{d}],$$

car $X_0 \notin \mathfrak{P}$ et donc $X_0 \notin \mathfrak{P}[d_1, \ldots, d_t]$. D'où l'on déduit que les coefficients de a, vu comme polynôme de $(R[d_1, \ldots, d_t])[d_{t+1}, \ldots, d_r]$, sont dans $\mathfrak{E}_{(d_1, \ldots, d_t)}(\mathfrak{P})$, et comme a est non nul, il suit que ce dernier idéal est non nul.

Appelant $\mathbf{k}$ le corps des fractions de R la non-nullité de $\mathfrak{E}_{(d_1, \ldots, d_t)}(\mathfrak{P})$ entraîne, *via* la proposition (1.4), l'existence de polynômes homogènes $p_1, \ldots, p_t$ de degrés $d_1, \ldots, d_t$ de $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ tels que l'idéal $(\mathfrak{P}, p_1, \ldots, p_t)$ de $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ n'admette pas de zéro non trivial dans $\bar{\mathbf{k}}^{n+1}$ ($\bar{\mathbf{k}}$ désignant une clôture algébrique de $\mathbf{k}$). Ceci entraîne que $\operatorname{codim}(\mathfrak{P}, p_1, \ldots, p_t) \geqslant n+1$ et donc, par le théorème de l'idéal principal de Krull (cf. [No], Th. (22), p. 217), que $\operatorname{codim} \mathfrak{P} \geqslant n - t + 1$, contredisant l'hypothèse de l'énoncé.

Démonstration de la proposition (1.5) — La proposition est claire si $r = 0$, sinon l'idéal $\mathfrak{P}$ étant de codimension $\leqslant n - r + 1 < n + 1$ on a $\mathfrak{P} \not\supset (X_0, \ldots, X_n)$ et l'on peut supposer que $X_0 \notin \mathfrak{P}$, quitte à réindexer $X_0, \ldots, X_n$.

(i) Comme $\mathfrak{P} \cap R \neq (0)$, posons $R' = R/\mathfrak{P} \cap R$; c'est un anneau intègre et principal et l'idéal $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap R$ de $R'[X_0, \ldots, X_n]$ est de codimension $< \operatorname{codim} \mathfrak{P} \leqslant n - r + 1$ et vérifie $\mathfrak{P}' \cap R' = (0)$. Il suffit donc de montrer (ii) pour obtenir que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}') = (0)$ d'où l'on déduit bien que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P} \cap R).R[\mathbf{d}]$.

(ii) La codimension de $\mathfrak{P}$ étant $< n - r + 1$, prenons $t = r < n + 1 - \operatorname{codim} \mathfrak{P}$. Comme $X_0 \notin \mathfrak{P}$, le fait (1.7) entraîne que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) \cap R[\mathbf{d}] = (0)$. Inversement si $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) = (0)$ la proposition (1.4), où l'on prend pour $\mathbf{k}$ le corps des fractions de R, affirme que, pour tout r-uplet de polynômes homogènes $p_1, \ldots, p_r$ de degrés $d_1, \ldots, d_r$ de $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$, l'idéal $(\mathfrak{P}, p_1, \ldots, p_r)$ de $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ admet un zéro non trivial dans K^{n+1} où K est une extension de $\mathbf{k}$. Ceci entraîne que $\operatorname{codim}(\mathfrak{P}, p_1, \ldots, p_r) < n + 1$ pour tout r-uplet $p_1, \ldots, p_r$ et donc, comme $\mathfrak{P} \cap R = (0)$, que $\operatorname{codim} \mathfrak{P} < n - r + 1$.

(iii) On utilise le fait (1.7) avec $t = r - 1$; on a bien $t < n + 1 - \operatorname{codim} \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P} \cap R = (0)$ et $X_0 \notin \mathfrak{P}$, ce qui entraîne que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) \cap \mathfrak{r}[u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(r-1)}] = (0)$. Le fait (1.6) montre alors que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})$, qui est premier, est aussi principal.

Remarque. — Lorsque l'on prend $I = (0)$ dans $A = \mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n]$ et $r = n+1$, l'idéal $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{d}]$ est premier, principal et, au signe près, son générateur coïncide avec le résultant des $n+1$ polynômes homogènes $U_1, \ldots, U_{n+1}$ de $A[\mathbf{d}]$ (cf. [M]).

Concluons ce paragraphe par un lemme donnant une majoration du degré, en tant que polynômes de $R[\mathbf{d}]$, des générateurs de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$ quand I est pur de codimension $n+1-r$. On rappelle que si $\mathbf{k}$ désigne le corps des fractions de R on définit le degré d'un idéal homogène I de codimension $n+1-r$ comme l'entier

$$\deg I = \lim_{D\to\infty} \frac{r!}{D^r} \cdot \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]/I.\mathbf{k})_D,$$

où $(\ )_*$ désigne l'espace vectoriel des éléments homogènes de degré $*$ de $(\ )$. Notons que si $I \cap R \neq (0)$ on a $\deg I = 0$.

Lemme (**1.8**). — *Soit* I *un idéal homogène pur de* A *de codimension* $n+1-r$. *L'idéal* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$ *est principal et ses générateurs sont des polynômes de* $R[\mathbf{d}]$ *homogènes, pour* $j = 1, \ldots, r$, *par rapport au groupe de variables* $\mathscr{U}_j = \{u_{\mathfrak{m}}^{(j)};\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}\}$ *de degré* $\leqslant \deg I . \prod_{l \neq j} d_l$.

Démonstration. — La principalité de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$ résulte facilement des propositions (1.5) (iii) et (1.3). Comme $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I.\mathbf{k}) = \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I).\mathbf{k}$ où $\mathbf{k}$ est le corps des fractions de R, on peut se contenter de démontrer le lemme lorsque R est un corps $\mathbf{k}$. D'autre part, il est clair que $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I) = \mathfrak{E}_{d_1}((I, U_2, \ldots, U_r))$ et que le degré de l'idéal $(I, U_2, \ldots, U_r)$ est égal à $\deg I . \prod_{l=2}^{r} d_l$. Quitte à permuter les polynômes $U_1, \ldots, U_r$ et à remplacer $\mathbf{k}$ par le corps des fractions de $R[(d_2, \ldots, d_r)]$ il suffit d'établir la majoration du degré donnée dans le lemme lorsque $r = 1$. Dans ce cas, notons pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ associé à I, $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ l'ensemble des zéros de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{P}_n(\bar{\mathbf{k}})$ ($\bar{\mathbf{k}}$ est une clôture algébrique du corps $\mathbf{k}$) : $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ est un ensemble fini et son cardinal est égal à $\deg \mathfrak{P}$. Si l'on choisit convenablement pour chaque élément de $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ des coordonnées dans $\bar{\mathbf{k}}^{n+1}$ on vérifie à l'aide des propositions (1.3) (ii) et (1.4) que le polynôme de $\mathbf{k}[d]$

$$\prod_{\mathbf{x} \in \mathscr{Z}(\mathfrak{P})} \Big(\sum_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_d} u_{\mathfrak{m}} . \mathfrak{m}(\mathbf{x}) \Big)$$

est un générateur de $\mathfrak{E}_d(\mathfrak{P})$. Le degré de ce polynôme homogène est donc égal au cardinal de $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ qui n'est autre que $\deg \mathfrak{P}$. Comme on sait que $\sum_{\mathfrak{P} \supset I} e_{\mathfrak{P}} \deg \mathfrak{P} \leqslant \deg I$ où $e_{\mathfrak{P}}$ est l'exposant de la composante primaire de I de radical $\mathfrak{P}$ (voir par exemple [BM] p. 282 et lemme 1) il résulte de la proposition (1.3) et de la remarque consécutive qu'un générateur (et donc tout générateur) de $\mathfrak{E}_d(I)$ est homogène de degré $\leqslant \deg I$. Ceci achève d'établir le lemme.

Remarques. — 1) Si I est un idéal homogène premier de codimension $n+1-r$, on a $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I) = \mathfrak{E}_{d_r}(I[d_1, \ldots, d_{r-1}]) = \mathfrak{E}_{d_r}(\mathfrak{U}_{(d_1, \ldots, d_{r-1})}(I))$, or $\mathfrak{U}_{(d_1, \ldots, d_{r-1})}(I)$ est un idéal premier de $A[(d_1, \ldots, d_{r-1})]$ de codimension n d'après la proposition (1.3) (ii) et l'on déduit facilement de la démonstration du lemme précédent que le degré en les variables de $\mathscr{U}_r$ d'un générateur de $\mathfrak{E}_{d_r}(\mathfrak{U}_{(d_1, \ldots, d_{r-1})}(I))$, et par suite de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$, *est égal* à $\deg I . \prod_{\ell=1}^{r-1} d_\ell$. On a bien sûr un résultat similaire pour les variables de $\mathscr{U}_j$ $(j = 1, \ldots, r-1)$.

2) Supposons $d_r \leqslant d_1, \ldots, d_{r-1}$ et I un idéal homogène de A de codimension $n+1-r$. Si l'on remplace pour $j = 1, \ldots, r-1$ la forme U_j par $\rho(U_j) = U_j + \lambda_j U_r . X_0^{d_j - d_r}$ il est clair que l'on a $\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)) = \mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I) . R[\mathbf{d}][\boldsymbol{\lambda}]$. On en déduit que si f est un générateur de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$, alors f divise $\rho(f)$ dans $R[\mathbf{d}][\boldsymbol{\lambda}]$; développant suivant les puissances des λ_j on vérifie que $\rho(f) = f$.

2. Élimination et complexe de Koszul

On reprend les notations du paragraphe précédent et l'on pose

$$p_{1-r} = U_1, \ldots, p_0 = U_r;$$

ce sont des polynômes homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_r$. On suppose que l'idéal I de A est engendré par des polynômes $p_1, \ldots, p_m$ homogènes de degrés $d_{r+1}, \ldots, d_{r+m}$. On définit alors une permutation σ de $\{1, \ldots, r+m\}$ telle que

$$d_{\sigma(1)} \geqslant d_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant d_{\sigma(r+m)}.$$

Soit ρ un homomorphisme de $R[\mathbf{d}]$ dans un corps $\mathbf{k}'$ de caractéristique zéro, et $A' = \mathbf{k}'[X_0, \ldots, X_n]$. On note h la codimension de l'idéal $\rho(I[\mathbf{d}])$ de A'. Le lemme suivant m'a été fourni par D. W. Masser.

Lemme (**1.9**). — *Il existe des polynômes* $q_1, \ldots, q_h$ *homogènes de degrés* $d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(h)}$ *formant une suite régulière dans* $\rho(I[\mathbf{d}])$, *c'est-à-dire appartenant à* $\rho(I[\mathbf{d}])$ *et vérifiant pour* $i = 1, \ldots, h-1$ *la condition*

$$(q_1, \ldots, q_i) :_{A'} q_{i+1} = (q_1, \ldots, q_i).$$

De plus les polynômes q_i *pour* $i = 1, \ldots, h$ *peuvent être pris de la forme*

$$(*)\ q_i = \sum_{j \in S_i} (\Sigma \lambda_{j,\mathfrak{m}} . \mathfrak{m})\ \rho(p_{\sigma(j)-r}),$$

où la somme est étendue aux $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_{\sigma(i)} - d_{\sigma(j)}}$, *où* S_i *est un sous-ensemble de* $\{i, \ldots, r+m\}$ *de cardinal* $\leqslant \prod_{\ell=1}^{i-1} d_{\sigma(\ell)} + 1$ *et où les* $\lambda_{j,\mathfrak{m}}$ *sont des entiers rationnels de valeurs absolues inférieures ou égales à* $\prod_{\ell=1}^{i-1} d_{\sigma(\ell)}$.

Démonstration. — Soit i_0 le plus petit entier tel que

$$\rho(p_{\sigma(i_0)-r}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_{\sigma(1)} - d_{\sigma(i_0)}};$$

on prend $q_1 = \mathfrak{m}.\rho(p_{\sigma(i_0)-r})$ et l'on raisonne par récurrence pour construire $q_2, \ldots, q_h$. Supposons construits les polynômes $q_1, \ldots, q_i$ pour $i < h$ de telle manière que $\rho(\mathrm{I}[\mathbf{d}]) \subset \mathrm{J}_i$, où J_i désigne l'idéal $(q_1, \ldots, q_i, \rho(p_{\sigma(i+1)-r}), \ldots, \rho(p_{\sigma(r+m)-r}))$ de A'. On sait que l'anneau A' est de Cohen-Macaulay (cf. [No], Th. (17), p. 271) et donc l'idéal $(q_1, \ldots, q_i)$ de codimension i est pur. Notons N le nombre d'idéaux premiers qui lui sont associés, ce nombre est majoré par le degré de l'idéal qui est égal à $\prod_{\ell=1}^{i} d_{\sigma(\ell)}$. Posons $\mathbf{d} = (d_{\sigma(i+1)}, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}^{n-i+1}$. L'idéal $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}((q_1, \ldots, q_i))$ de $\mathbf{k}'[\mathbf{d}]$ est principal et l'on sait d'après le lemme (1.8) que ses générateurs sont de degré $\leqslant \prod_{\ell=1}^{i} d_{\sigma(\ell)}$ en les variables de $\mathscr{U}_1 = \{u_{\mathfrak{m}}^{(1)};\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_{\sigma(i+1)}}\}$. Comme $i < h$, il existe, pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ associé à $(q_1, \ldots, q_i)$, un polynôme $\rho(p_{\sigma(i_{\mathfrak{P}})-r})$, avec $i < i_{\mathfrak{P}} \leqslant r + m$, n'appartenant pas à $\mathfrak{P}$. On appelle S_{i+1} l'ensemble des indices $i_{\mathfrak{P}}$, lorsque $\mathfrak{P}$ parcourt les idéaux premiers associés à $(q_1, \ldots, q_i)$, auquel on adjoint l'indice $i + 1$. Le cardinal de S_{i+1} est $\leqslant \mathrm{N} + 1 \leqslant \prod_{\ell=1}^{i} d_{\sigma(\ell)} + 1$. Le principe des tiroirs permet alors de trouver un polynôme q'_{i+1} de la forme (*) qui n'est dans aucun des idéaux premiers associés à $(q_1, \ldots, q_i)$, ce qui montre que lorsque l'on substitue dans un générateur f de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}((q_1, \ldots, q_i))$ les coefficients du polynôme générique de la forme (*) aux variables $\{u_{\mathfrak{m}}^{(1)};\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_{\sigma(i+1)}}\}$ on obtient un polynôme homogène non identiquement nul en les variables $\{\lambda_{j,\mathfrak{m}};\ j \in \mathrm{S}_{i+1},\ \mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_{\sigma(i+1)} - d_{\sigma(j)}}\}$ de degré en ces variables majoré par $\prod_{\ell=1}^{i} d_{\sigma(\ell)}$. On en déduit l'existence d'entiers rationnels $\lambda_{j,\mathfrak{m}}$ tous non nuls, de valeurs absolues $\leqslant \prod_{\ell=1}^{i} d_{\sigma(\ell)}$ et n'annulant pas le générateur f de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}((q_1, \ldots, q_i))$. Il suit de la proposition (1.4) que le polynôme q_{i+1} de la forme (*) associé à ces entiers $\lambda_{j,\mathfrak{m}}$ n'appartient à aucun idéal premier associé à $(q_1, \ldots, q_i)$, et donc que l'on a bien

$$(q_1, \ldots, q_i) :_{\mathrm{A}'} q_{i+1} = (q_1, \ldots, q_i).$$

Comme les $\lambda_{j,\mathfrak{m}}$ sont tous non nuls, on a $\rho(p_{\sigma(i+1)-r}) \in \mathrm{J}_{i+1}$, ce qui achève la construction de q_{i+1} et la preuve du lemme (1.9).

A la suite $q_1, \ldots, q_h$ fournie par le lemme (1.9), on associe un complexe de Koszul, c'est la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{A}'_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathrm{A}'_1 \xrightarrow{\partial_1} \cdots \xrightarrow{\partial_{h-2}} \mathrm{A}'_{h-1} \xrightarrow{\partial_{h-1}} \mathrm{A}'_h$$

où A'_ℓ est la partie homogène en degré ℓ de l'algèbre extérieure libre sur A' engendrée par les symboles $z_1, \ldots, z_h$ et où les applications ∂_ℓ sont données par

$$\partial_\ell(\Sigma a_{i_1,\ldots,i_\ell}\, z_{i_1} \wedge \ldots \wedge z_{i_\ell}) = \sum_{j=1}^{h} \Sigma a_{i_1,\ldots,i_\ell} . q_j\, z_j \wedge z_{i_1} \wedge \ldots \wedge z_{i_\ell},$$

où les sommes sont étendues aux $(i_1, \ldots, i_\ell)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant h$.

On déduit facilement du fait que la suite $q_1, \ldots, q_h$ est régulière que le complexe ci-dessus est exact, son conoyau étant isomorphe à $A'/(q_1, \ldots, q_h)$ avec l'augmentation

$$\begin{aligned} \varepsilon : \ & A'_h \twoheadrightarrow A'/(q_1, \ldots, q_h), \\ & az_1 \wedge \ldots \wedge z_h \mapsto a \bmod (q_1, \ldots, q_h). \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que si l'on désigne par A'_* et $(q_1, \ldots, q_h)_*$ les éléments homogènes de degré $*$ en $X_0, \ldots, X_n$ de A' et de $(q_1, \ldots, q_h)$ respectivement on a l'identité

$$\dim_{\mathbf{k}'} A'_D/(q_1, \ldots, q_h)_D = \sum_{\ell=0}^{h} (-1)^\ell \sum \dim_{\mathbf{k}'} A'_{D - d_{\sigma(i_1)} - \ldots - d_{\sigma(i_\ell)}},$$

où la somme est étendue aux $(i_1, \ldots, i_\ell)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\ell \leqslant h$.

Ce qui montre que le nombre $\dim_{\mathbf{k}'} A'_D/(q_1, \ldots, q_h)_D$ ne dépend que de D et des degrés des éléments de la suite régulière $q_1, \ldots, q_h$ choisie.

Proposition **(1.10)** (*théorème de l'élimination* II). — *Soit* $\rho : R[\mathbf{d}] \to R'$ *un homomorphisme de* $R[\mathbf{d}]$ *dans un anneau* R'.

(i) $\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)) \subset \bigcup_{k \geqslant 1} \rho(I[\mathbf{d}]) :_{R'} \mathscr{M}_k$.

(ii) *Si* R' *est intègre, de caractéristique zéro, de corps de fractions* $\mathbf{k}'$, *on a*

$$\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)).\mathbf{k}' = \bigcup_{k \geqslant 1} \rho(I[\mathbf{d}]) :_{\mathbf{k}'} \mathscr{M}_k = \rho(I[\mathbf{d}]) :_{\mathbf{k}'} \mathscr{M}_M,$$

où $M \geqslant d_{\sigma(1)} + \ldots + d_{\sigma(n+1)} - n$ *si* $n + 1 \leqslant r + m$ *et* $M \geqslant 1$ *sinon.*

Démonstration. — (i) résulte de la définition de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$. Quant à la première égalité de (ii) c'est une reformulation de la proposition (1.4) si on remarque que $\rho(\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)).\mathbf{k}'$ est égal à (0) si $\mathscr{M}_1 \not\subset \sqrt{\rho(I[\mathbf{d}])}$ et à $\mathbf{k}'$ sinon.

Pour établir la proposition il suffit de montrer que $\rho(I[\mathbf{d}]) :_{\mathbf{k}'} \mathscr{M}_M = \mathbf{k}'$ dès que $\bigcup_{k \geqslant 1} \rho(I[\mathbf{d}]) :_{\mathbf{k}'} \mathscr{M}_k = \mathbf{k}'$. Or cette dernière hypothèse signifie que l'idéal engendré par $\rho(I[\mathbf{d}])$ dans $A' = \mathbf{k}'[X_0, \ldots, X_n]$ est de codimension $n + 1$. En particulier $r + m \geqslant n + 1$ et utilisant le lemme (1.9), on construit dans $\rho(I[\mathbf{d}]).\mathbf{k}'$ une suite régulière $q_1, \ldots, q_{n+1}$ de polynômes homogènes de degrés $d_{\sigma(1)}, \ldots, d_{\sigma(n+1)}$. La remarque précédant l'énoncé de la proposition montre que pour tout entier D on a

$$\dim_{\mathbf{k}'} A'_D/(q_1, \ldots, q_{n+1})_D = \dim_{\mathbf{k}'} A'_D/(X_0^{d_{\sigma(1)}}, \ldots, X_n^{d_{\sigma(n+1)}})_D,$$

mais on vérifie aisément que $A'_D/(X_0^{d_{\sigma(1)}}, \ldots, X_n^{d_{\sigma(n+1)}})_D$ est nul pour tout $D \geqslant M$ et il en est donc de même de $A'_D/(q_1, \ldots, q_{n+1})_D$, d'où il résulte que

$$\mathscr{M}_M \subset (q_1, \ldots, q_{n+1}) \subset \rho(I[\mathbf{d}]).\mathbf{k}',$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. Hauteurs sur les polynômes et les variétés

Soit K un corps de nombres, S l'ensemble des places à l'infini de K et pour toute place v de K on note K_v le complété de K pour une valeur absolue $|.|_v$ associée à v. On note encore $\mathbf{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v, et σ_v le plongement de K dans $\mathbf{C}_v$ étendant le plongement canonique de K dans K_v. On a $|x|_v = |\sigma_v(x)|_{(v)}$ pour tout $x \in K$, où $|.|_{(v)}$ désigne la valeur absolue de $\mathbf{C}_v$ étendant la valeur absolue ordinaire de $\mathbf{Q}$ si $v \in S$ et telle que $|p|_{(v)} = 1/p$ si $v \notin S$ et si p est le premier de $\mathbf{Z}$ divisant v. Enfin on note n_v le degré local en v, c'est-à-dire le degré de K_v sur $\mathbf{Q}_p$ ou $\mathbf{R}$ suivant les cas.

Soit P un polynôme en des variables $T_1, T_2, \ldots$ à coefficients dans le corps K. Pour chaque place v de K on note $\sigma_v(P)$ le polynôme déduit de façon évidente de P. Nous allons définir une mesure locale de P en v de la façon suivante :

• si $v \notin S$, $M_v(P)$ est le maximum des valeurs absolues v-adiques $|.|_{(v)}$ des coefficients de $\sigma_v(P)$ et c'est aussi le maximum des valeurs absolues v-adiques $|.|_v$ des coefficients de P;

• si $v \in S$, $M_v(P)$ est la mesure de Mahler de $\sigma_v(P)$ qui est définie par $M(0) = 0$ et, si $\sigma_v(P) \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_m]\backslash\{0\}$,

$$M(\sigma_v(P)) = \exp\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \log|\sigma_v(P)(e^{2i\pi u_1}, \ldots, e^{2i\pi u_m})|\, du_1 \ldots du_m\right).$$

L'intégrabilité de $\log|\sigma_v(P)|$ (cf. par exemple, [Ru], Th. (3.3.5), p. 46) entraîne que $M_v(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$.

Par la suite on utilisera également la notation $M_v(P)$ pour $P \in \mathbf{C}_v[T_1, \ldots, T_m]$. Si $P \in K[T_1, \ldots, T_m]\backslash\{0\}$ il n'y a qu'un nombre fini de places v de K telles que $M_v(P) \neq 1$. On peut donc poser les définitions :

Définition (**1.11**). — *On appelle* $\bar{\mathbf{h}}$ *et* $\mathbf{h}$ *les applications hauteur et hauteur invariante*

$$\bar{\mathbf{h}}, \mathbf{h} : \bigcup_{m \geqslant 0} K[T_1, \ldots, T_m] \to \mathbf{R}$$

définies par $\bar{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{h}(0) = 0$ *et, pour* $P \neq 0$,

$$\bar{\mathbf{h}}(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \cdot \sum_v n_v \cdot \max(0, \log M_v(P))$$

$$\mathbf{h}(P) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \cdot \sum_v n_v \log M_v(P).$$

Remarques

• Si $K \subset K'$ est une extension de corps de nombres, on peut voir tout élément de $K[T_1, \ldots, T_m]$ comme un élément de $K'[T_1, \ldots, T_m]$; on vérifie sans peine que les hauteurs $\bar{\mathbf{h}}(P)$ et $\mathbf{h}(P)$ ne dépendent pas du corps de base choisi (et c'est pourquoi nous ne l'avons pas fait figurer dans la notation). Ceci permet de prolonger $\mathbf{h}$ (resp. $\bar{\mathbf{h}}$) à l'ensemble $\bigcup_{m\geqslant 0} \overline{\mathbf{Q}}[T_1, \ldots, T_m]$.

• Si $\lambda \in K$ on notera que $\bar{\mathbf{h}}(\lambda)$ n'est rien d'autre que la hauteur de Weil logarithmique et absolue de λ.

Les premières propriétés de ces hauteurs qui nous seront utiles sont réunies dans la proposition suivante :

Proposition **(1.12)**. — *Si* $P, Q \in K[T_1, \ldots, T_m]\backslash\{0\}$ *et* $\lambda \in K^*$ *on a*

(i) $\bar{\mathbf{h}}(P) \geqslant \mathbf{h}(P)$,

(ii) $\mathbf{h}(\lambda) = 0$,

(iii) $\mathbf{h}(PQ) = \mathbf{h}(P) + \mathbf{h}(Q)$ *et* $\bar{\mathbf{h}}(PQ) \leqslant \bar{\mathbf{h}}(P) + \bar{\mathbf{h}}(Q)$,

(iv) $\bar{\mathbf{h}}(P) \leqslant \bar{\mathbf{h}}(PQ) + \bar{\mathbf{h}}(Q) - \mathbf{h}(Q)$,

(v) $\bar{\mathbf{h}}(P)$ *et* $\mathbf{h}(P) \geqslant 0$,

(vi) *pour toute place* v, $M_v(P) \geqslant \exp\left(-\dfrac{[K:\mathbf{Q}]}{n_v}\bar{\mathbf{h}}(P)\right)$,

(vii) *il existe* $\mu = \mu(P) \in K^*$ *tel que* $\bar{\mathbf{h}}(\mu P) = \mathbf{h}(\mu P) = \mathbf{h}(P)$.

La démonstration sera donnée après celle du lemme suivant sur lequel elle s'appuie.

Lemme **(1.13)**. — *Soient* $P, Q \in \mathbf{C}_v[T_1, \ldots, T_m]$ *de degrés* d_P *et* d_Q, *on écrit* $P(T_1, \ldots, T_m) = \Sigma a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} T_1^{\alpha_1} \ldots T_m^{\alpha_m}$ *où la somme est étendue aux* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *tels que* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqslant d_P$. *Soit* $m' \in \{0, \ldots, m\}$ *et posons* $\alpha_0 = d_P - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{m'}$. *Si* $P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}} \in \mathbf{C}_v[T_{m'+1}, \ldots, T_m]$ *désigne le polynôme*

$$\Sigma a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}, \alpha'_{m'+1}, \ldots, \alpha'_m} T_{m'+1}^{\alpha'_{m'+1}} \ldots T_m^{\alpha'_m},$$

où la somme est étendue aux $(\alpha'_{m'+1}, \ldots, \alpha'_m)$ *tels que* $\alpha'_{m'+1} + \ldots + \alpha'_m \leqslant \alpha_0$, *on a les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} &\textit{si } v \in S, && M_v(P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}}) \leqslant \frac{d_P!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_{m'}!} M_v(P) \\ &\textit{et} && M_v(P+Q) \leqslant M_v(P)(m+1)^{d_P} + M_v(Q)(m+1)^{d_Q}; \\ &\textit{si } v \notin S, && M_v(P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'}}) \leqslant M_v(P) \\ &\textit{et} && M_v(P+Q) \leqslant \max\{M_v(P), M_v(Q)\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour les places $v \notin S$ le lemme est évident, soit donc $v \in S$. Démontrons pour commencer la première inégalité. Il suffit de traiter le cas $m' = 1$

pour tout nombre $m \geqslant 1$ de variables, le cas général s'en déduisant comme suit. On a successivement, en appliquant ce résultat avec $m - m' + 1, \ldots, m$ variables, les inégalités

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m'}}) \leqslant \frac{(d_\mathrm{P} - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{m'-1})!}{\alpha_0!\,\alpha_{m'}!}\,\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m'-1}})$$

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m'-1}}) \leqslant \frac{(d_\mathrm{P} - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{m'-2})!}{(d_\mathrm{P} - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{m'-1})!\,\alpha_{m'-1}!}\,\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m'-2}})$$

. . . .

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1}) \leqslant \frac{d_\mathrm{P}!}{(d_\mathrm{P} - \alpha_1)!\,\alpha_1!}\,\mathrm{M}_v(\mathrm{P})$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité annoncée.

Pour traiter le cas $m' = 1$ on utilise le fait bien connu que pour un polynôme $a \in \mathbf{C}[\mathrm{T}]$ s'écrivant $a(\mathrm{T}) = a_0\,\mathrm{T}^d + \ldots + a_d = a_0 \prod_{h=1}^{d} (\mathrm{T} - \alpha_h)$ on a

$$\mathrm{M}(a) = |a_0| \prod_{h=1}^{d} \max(1, |\alpha_h|)$$

et donc, pour $h = 0, \ldots, d$,

$$|a_h| = |a_0|\,|\Sigma\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_h}| \leqslant \mathrm{M}(a).\Sigma 1 \leqslant \frac{d!}{h!(d-h)!}\,\mathrm{M}(a),$$

où les sommes sont étendues aux $(i_1, \ldots, i_h)$ tels que $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant d$.

On en déduit que pour $t_2, \ldots, t_m \in \mathbf{C}$ et $\alpha_1 \leqslant d_\mathrm{P}$ on a

$$|\mathrm{P}_{\alpha_1}(t_2, \ldots, t_m)| \leqslant \frac{d_\mathrm{P}!}{\alpha_1!(d_\mathrm{P} - \alpha_1)!} \exp\left(\int_0^1 \log|\mathrm{P}(e^{2i\pi u_1}, t_2, \ldots, t_m)|\,du_1\right)$$

et donc que

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_v(\mathrm{P}_{\alpha_1}) &= \exp\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \log|\mathrm{P}_{\alpha_1}(e^{2i\pi u_2}, \ldots, e^{2i\pi u_m})|\,du_2 \ldots du_m\right)\\ &\leqslant \frac{d_\mathrm{P}!}{\alpha_1!(d_\mathrm{P} - \alpha_1)!}\,\mathrm{M}_v(\mathrm{P})\end{aligned}$$

ce qui achève d'établir la première inégalité.

Pour montrer la seconde inégalité, on remarque que la première entraîne pour tout $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{C}$ la majoration

$$|\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_m)| \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{P})\,(1 + |t_1| + \ldots + |t_m|)^{d_\mathrm{P}}$$

et la majoration correspondante pour Q. Comme les t_i intervenant dans la définition de M_v sont de modules égaux à un, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_v(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \leqslant \exp\Big(\int_0^1 \ldots \int_0^1 &\log(\mathrm{M}_v(\mathrm{P}).(m+1)^{d_\mathrm{P}}\\ &+ \mathrm{M}_v(\mathrm{Q})\,(m+1)^{d_\mathrm{Q}})\,du_1 \ldots du_m\Big)\end{aligned}$$

ce qui démontre la seconde inégalité et termine la preuve du lemme.

Remarque. — Si $v \in S$, on a de façon générale les inégalités suivantes que nous utiliserons très souvent par la suite ($P \in \mathbf{C}_v[T_1, \ldots, T_m]$ comme dans le lemme (1.13)) :

$$M_v(P) \leqslant \Sigma \,| a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} |_v \leqslant (m+1)^{d_P}. M_v(P),$$

où la somme est étendue aux $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqslant d_P$. La seconde inégalité est une conséquence du lemme (1.13) et la première découle de la définition de $M_v(P)$.

Démonstration de la proposition (1.12). — (i) est clair, (ii) résulte de la formule du produit sur K (*i.e.* $\prod_v |x|_v^{n_v} = 1$ si $x \in K^*$), (iii) est une conséquence de la multiplicativité de M_v pour toute place v (lemme de Gauss lorsque $v \notin S$). Pour (iv) on écrit

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{h}}(P) &= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \max(0, \log M_v(PQ) - \log M_v(Q)) \\ &\leqslant \bar{\mathbf{h}}(PQ) - \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \log M_v(Q) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \max(0, \log M_v(Q)) \\ &\leqslant \bar{\mathbf{h}}(PQ) - \mathbf{h}(Q) + \bar{\mathbf{h}}(Q).\end{aligned}$$

On démontre les propriétés (v), (vi) et (vii) par récurrence sur le nombre de variables m. Pour $m = 0$, (v) est une conséquence de (i) et (ii), (vi) est l'inégalité de la taille sur K (conséquence de la formule du produit) et (vii) est clair avec $\mu = 1/P$ d'après (ii). Si $m \geqslant 1$ supposons ces trois propriétés établies pour les éléments de $K[T_1, \ldots, T_{m-1}]$ et soit $P \in K[T_1, \ldots, T_m]$. Appelons $T_m^{\alpha_m}$ la plus grande puissance de T_m divisant P et posons $P_0 = P/T_m^{\alpha_m}$; comme $M_v(T_m^{\alpha_m}) = 1$ pour toute place v il suffit de prouver les propriétés (v), (vi) et (vii) pour P_0 afin qu'elles soient vérifiées par P. Le polynôme $P_0' = P_0(T_1, \ldots, T_{m-1}, 0) \in K[T_1, \ldots, T_{m-1}]$ est non nul et vérifie donc les propriétés (v), (vi) et (vii). On déduit alors du lemme (1.13) que pour toute place v on a

$$(*) \qquad M_v(P_0) \geqslant M_v(P_0') > 0.$$

Il résulte que

$$\mathbf{h}(P_0) = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \log M_v(P_0) \geqslant \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_v n_v \log M_v(P_0') = \mathbf{h}(P_0') \geqslant 0$$

d'où (v) pour P_0. Ensuite

$$M_v(P_0) \geqslant M_v(P_0') \geqslant \exp\left(-\frac{[K:\mathbf{Q}]}{n_v} \bar{\mathbf{h}}(P_0')\right),$$

d'où l'on déduit (vi) pour P_0 car $\bar{\mathbf{h}}(P_0') \leqslant \bar{\mathbf{h}}(P_0)$ est une conséquence directe de $(*)$. Enfin il existe $\mu = \mu(P_0') \in K^*$ tel que $M_v(\mu P_0') \geqslant 1$ pour tout v. On déduit encore de (*) que $M_v(\mu P_0) \geqslant M_v(\mu P_0') \geqslant 1$ d'où $\bar{\mathbf{h}}(\mu P_0) = \mathbf{h}(\mu P_0) = \mathbf{h}(P_0)$ ce qui démontre (vii) pour P_0 et achève la preuve de la proposition (1.12).

Nous allons maintenant passer aux variétés ou plus précisément aux idéaux. Soient I un idéal homogène de $A = K[X_0, \ldots, X_n]$ de codimension $n - r + 1$ et $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$, on *appellera forme* U-*éliminante d'indice* $\mathbf{d}$ *de* I *tout générateur de la partie principale de* $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$ (c'est-à-dire tout p.g.c.d. des éléments de $\mathfrak{E}_{\mathbf{d}}(I)$) et l'on pose :

Définition (**1.14**). — $\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(I) =: \mathbf{h}(f)$ *et* $\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(I) =: d^\circ f$ *(degré total) où f est une forme* U-*éliminante d'indice* $\mathbf{d}$ *de* I *quelconque.*

Remarque. — Il est clair d'après la proposition (1.12) que ces définitions ne dépendent pas de la forme f choisie. D'autre part il faut noter que d'après le lemme (1.8) on a

$$\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(I) \leqslant \deg I \times d_1 \ldots d_r \times \left(\sum_{i=1}^{r} 1/d_i\right),$$

l'inégalité pouvant être stricte. Toutefois si I est premier la remarque finale du § 1 montre qu'il y a égalité dans ce cas.

Soit $X \subset \mathbf{P}_n$ et $I(X) = \{P \in A;\ P(X) = 0\}$, on posera parfois

$$\dim X = n - \operatorname{codim} I(X),$$

et
$$\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(X) = \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(I(X)), \quad \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(X) = \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(I(X)) \quad \text{pour } \mathbf{d} \in \mathbf{N}^{1+\dim X}.$$

On considère maintenant une place v de K et un idéal I homogène de codimension $n + 1 - r$ de $\mathbf{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$. Soit $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_v^{n+1}$, on note comme auparavant $\mathscr{Z}(I)$ l'ensemble des zéros de I dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$.

On utilisera le morphisme suivant

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}} :\ & \mathbf{C}_v[\mathbf{d}] \to \mathfrak{S}\mathbf{C}_v[\mathbf{d}] \\ & u_{\mathfrak{m}}^{(j)} \mapsto \mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}) = \sum_{\mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}} s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(j)} \cdot \mathfrak{m}'(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

que l'on notera également $\mathfrak{d}_{\mathbf{x}}$ ou simplement $\mathfrak{d}$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur les indices. Pour simplifier les notations, nous utiliserons à plusieurs reprises dans la suite de cet article le morphisme $\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathfrak{d}}$) défini par $\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}) = \mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)}/m_{v,j,\mathbf{x}})$, pour $j = 1, \ldots, r$ et $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}$, et où $m_{v,j,\mathbf{x}} = M_v(U_j(\mathbf{x}))$ si $v \in S$ et $m_{v,j,\mathbf{x}} = \mathfrak{m}'(\mathbf{x})$, où on choisit $\mathfrak{m}'$ tel que $|\mathfrak{m}'(\mathbf{x})|_{(v)} = M_v(U_j(\mathbf{x}))$ si $v \notin S$ (ici $U_j(\mathbf{x})$ est la forme linéaire $U_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}} u_{\mathfrak{m}}^{(j)} \cdot \mathfrak{m}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}_v[d_j]$).

Définition (**1.15**). — $$\begin{aligned} \|I\|_{\mathbf{x},v,\mathbf{d}} &=: M_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))/M_v(f) \cdot \prod_{j=1}^{r} M_v(U_j(\mathbf{x}))^{d^\circ_{\mathfrak{u}_j} f} \\ &= M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))/M_v(f), \end{aligned}$$

où f est une forme U-*éliminante d'indice* $\mathbf{d}$ *de* I. *Si* $X \subset \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ *on pose*

$$\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(X, \mathbf{x}) = \|I(X)\|_{\mathbf{x},v,\mathbf{d}} \quad \textit{pour } \mathbf{d} \in \mathbf{N}^{1+\dim X},$$

où $I(X) = \{P \in \mathbf{C}_v[X_0, \ldots, X_n];\ P(X) = 0\}$.

On vérifie facilement que cette définition est indépendante de f et ne dépend que du point défini par $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. Également on vérifie, en utilisant la proposition (1.4) et lorsque I est pur, que $\mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \in \mathscr{Z}(\mathrm{I})$; on a donc en général

$$||\mathrm{I}||_{\mathbf{x},v,\mathbf{d}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathscr{Z}(\mathrm{I}), \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathscr{Z}(\mathrm{I}).$$

(Nous continuons de noter $\mathbf{x}$ le point de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ défini par $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_v^{n+1}$.)

N.B. — Comme nous l'a fait remarquer le référé, pour définir $\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))$ nous devons choisir un ensemble de variables $s^{(j)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}$ formant une base de $\mathfrak{S}\mathbf{C}_v[\mathbf{d}]$; on vérifie alors que $\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))$ ne dépend pas de ce choix.

Fixons la place v de K. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$; nous allons comparer $\mathrm{Dist}_{v,1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, que nous noterons simplement $\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, à la métrique de la carte affine $\{\mathrm{X}_0 \neq 0\}$ de $\mathbf{P}_n$ définie par $||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \left| \frac{y_i}{y_0} - \frac{x_i}{x_0} \right|_{(v)} \right\}$ lorsque $x_0 y_0 \neq 0$ et où $(x_0, \ldots, x_n)$ (resp. $(y_0, \ldots, y_n)$) désigne n'importe quel système de coordonnées projectives de $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$).

Lemme **(1.16)**. — *On suppose que* $x_0 \neq 0$.

(i) *Si* $y_0 = 0$ *on a*

$$[(n+1)^2 . \max\{1, ||\mathbf{x}||\}]^{-1} \leqslant \mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant (n+1)^2.$$

(ii) *Si* $y_0 \neq 0$ *on a*

$$\frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{||\mathbf{y} - \mathbf{x}||}{\max\{1, ||\mathbf{x}||\} \max\{1, ||\mathbf{y}||\}} \leqslant \mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant (n+1)^2 . \frac{||\mathbf{y} - \mathbf{x}||}{\max\{1, ||\mathbf{x}||, ||\mathbf{y}||\}}.$$

Démonstration. — On a par les définitions (1.1) et (1.15)

$$\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x}}(\mathrm{U}(\mathbf{y})))/\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x}))\, \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y}))$$

et
$$\mathfrak{d}_{\mathbf{x}}(\mathrm{U}(\mathbf{y})) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} s_{i,j}(x_i y_j - x_j y_i),$$

ce qui montre en particulier que $\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathrm{Dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Supposons d'abord $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$. On a, d'après le lemme (1.13),

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|_{(v)}\} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x})), \quad \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \{|y_j|_{(v)}\} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y}))$$

et
$$\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x}}(\mathrm{U}(\mathbf{y}))) \leqslant \frac{(n+1)^2}{2} \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \{|x_i y_j - x_j y_i|_{(v)}\} \leqslant (n+1)^2 \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|_{(v)}\} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \{|y_j|_{(v)}\},$$

d'où la majoration de $\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ dans (i). Pour la minoration on écrit, car $y_0 = 0$ et $x_0 = 1$, que

$$\max_{0 \leqslant j \leqslant n}\{|y_j|_{(v)}\} \leqslant \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n}\{|x_i y_j - x_j y_i|_{(v)}\} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_\mathbf{x}(\mathrm{U}(\mathbf{y})))$$

et que
$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y})) \leqslant (n+1) \max_{0 \leqslant j \leqslant n}\{|y_j|_{(v)}\}$$

et
$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x})) \leqslant (n+1) \max\{1, \|\mathbf{x}\|\}$$

ce qui permet de conclure.

Supposons ensuite $x_0 = y_0 = 1$, on a alors

$$\max\{1, \|\mathbf{x}\|\} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x})), \ \max\{1, \|\mathbf{y}\|\} \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y}))$$

et
$$\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_\mathbf{x}(\mathrm{U}(\mathbf{y}))) \leqslant \frac{(n+1)^2}{2} \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n}\{|x_i y_j - x_j y_i|_{(v)}\}.$$

Si $\|\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{y}\|$ on écrit pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ que

$$|x_i y_j - x_j y_i|_{(v)} = |x_i(y_j - x_j) - x_j(y_i - x_i)|_{(v)} \leqslant 2\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \max\{1, \|\mathbf{x}\|\}$$

d'où l'on déduit que

$$\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_\mathbf{x}(\mathrm{U}(\mathbf{y}))) \leqslant (n+1)^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \max\{1, \|\mathbf{x}\|\}$$

et enfin $\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant (n+1)^2 \dfrac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|}{\max\{1, \|\mathbf{y}\|\}}$.

Si $\|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\|$ on échange les rôles de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, ce qui conduit à la majoration du (ii) de $\mathrm{Dist}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Pour la minoration, on écrit, car $x_0 = y_0 = 1$, que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\{|y_j - x_j|_{(v)}\} &\leqslant \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n}\{|x_i y_j - x_j y_i|_{(v)}\} \\ &\leqslant \mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_\mathbf{x}(\mathrm{U}(\mathbf{y})))\end{aligned}$$

et
$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x})) \leqslant (n+1) \max\{1, \|\mathbf{x}\|\}$$

et
$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y})) \leqslant (n+1) \max\{1, \|\mathbf{y}\|\}$$

d'où la minoration du (ii). Le lemme (1.16) est ainsi démontré.

Remarque. — Comme $\mathfrak{d}_{\mathbf{x},d}(\mathrm{U}(\mathbf{y})) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_d} s_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'}(\mathfrak{m}(\mathbf{x})\, \mathfrak{m}'(\mathbf{y}) - \mathfrak{m}(\mathbf{y})\, \mathfrak{m}'(\mathbf{x}))$ on vérifie que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$ on a $\mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Également, on vérifie à l'aide du lemme (1.13) que l'on a, pour tout $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, v et d,

$$\begin{aligned}\mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathrm{M}_v(\mathfrak{d}_{\mathbf{x},d}(\mathrm{U}(\mathbf{y})))}{\mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{x}))\, \mathrm{M}_v(\mathrm{U}(\mathbf{y}))} &\leqslant (n+1)^{4d} \quad \text{si } v \in \mathrm{S} \\ \text{et} \qquad &\leqslant 1 \qquad\qquad \text{si } v \notin \mathrm{S}.\end{aligned}$$

Nous terminons ce paragraphe en établissant une propriété supplémentaire des mesures M_v sur les anneaux de polynômes.

Proposition (**1.17**). — *Soient* $P \in \mathbf{C}_v[T_1, \dots, T_p]$ *un polynôme de degré d, et*

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} : \mathbf{C}_v[T_1, \dots, T_p] \to \mathbf{C}_v[S_1, \dots, S_q]$$

deux homomorphismes de $\mathbf{C}_v$*-algèbres tels que pour* $\ell = 1, 2$ *et* $i = 1, \dots, p$ *on ait*

$$\varphi^{(\ell)}(T_i) = \varphi^{(\ell)}_{i,0} + \sum_{j=1}^{q} \varphi^{(\ell)}_{i,j} S_j \quad \textit{avec } \varphi^{(\ell)}_{i,j} \in \mathbf{C}_v.$$

Alors

$$M_v(\varphi^{(1)}(P) - \varphi^{(2)}(P))/M_v(P) \leqslant C_v^d . \max\{|\varphi^{(1)}_{i,j} - \varphi^{(2)}_{i,j}|_{(v)}\} . \max\{1, |\varphi^{(\ell)}_{i,j}|_{(v)}\}^{d-1},$$

où $C_v = 4(p+1)(q+1)$ *si* $v \in S$ *et* $C_v = 1$ *si* $v \notin S$ *et où les maxima sont pris sur les* $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{0, \dots, q\}$ *et de plus* $\ell \in \{1, 2\}$ *pour le second.*

Démonstration. — Nous la donnerons uniquement pour les places v de S, la preuve pour les autres places étant similaire et plus simple.

Pour $\ell = 1, 2$ posons $t^{(\ell)}_i(\mathbf{u}) = \varphi^{(\ell)}_{i,0} + \sum_{j=1}^{q} \varphi^{(\ell)}_{i,j} . e^{2i\pi u_j}$; on a donc

$$|t^{(\ell)}_i(\mathbf{u})|_{(v)} \leqslant (q+1) . \max\{|\varphi^{(\ell)}_{i,j}|_{(v)}\}$$

où le maximum est pris sur les $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{0, \dots, q\}$. On écrit

$$M_v(\varphi^{(1)}(P) - \varphi^{(2)}(P)) = \exp \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |\Delta(\mathbf{u})|_{(v)} \, du_1 \dots du_q,$$

où $\Delta(\mathbf{u}) = P(t_1(\mathbf{u}) + \tau_1(\mathbf{u}), \dots, t_p(\mathbf{u}) + \tau_p(\mathbf{u})) - P(t_1(\mathbf{u}), \dots, t_p(\mathbf{u}))$, $t_i(\mathbf{u}) = t^{(2)}_i(\mathbf{u})$ et $\tau_i(\mathbf{u}) = t^{(1)}_i(\mathbf{u}) - t^{(2)}_i(\mathbf{u})$. On remarque alors que si $P = \sum_\alpha p_\alpha T_1^{\alpha_1} \dots T_p^{\alpha_p}$ on a

$$\begin{aligned} &P(t_1 + \tau_1, \dots, t_p + \tau_p) \\ &\quad = \sum_\alpha p_\alpha \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{i_p=0}^{\alpha_p} \binom{\alpha_1}{i_1} \dots \binom{\alpha_p}{i_p} \tau_1^{i_1} \dots \tau_p^{i_p} . t_1^{\alpha_1 - i_1} \dots t_p^{\alpha_p - i_p}, \end{aligned}$$

et que pour $i = 1, \dots, p$ on a

$$|\tau_i(\mathbf{u})|_{(v)} \leqslant \sum_{j=0}^{q} |\varphi^{(1)}_{i,j} - \varphi^{(2)}_{i,j}|_{(v)} \leqslant 2(q+1) . \max\{|\varphi^{(1)}_{i,j}|_{(v)}, |\varphi^{(2)}_{i,j}|_{(v)}\},$$

où le maximum est pris sur les $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{0, \dots, q\}$. En utilisant la majoration des coefficients de P qui se déduit du lemme (1.13) on obtient

$$\begin{aligned} &|P(t_1 + \tau_1, \dots, t_p + \tau_p) - P(t_1, \dots, t_p)|_{(v)} \\ &\quad \leqslant M_v(P)\,(2p+1)^d \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \{|\tau_i|_{(v)}\} \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \{1, |t_i|_{(v)}, |\tau_i|_{(v)}\}^{d-1}. \end{aligned}$$

Ceci combiné aux majorations de $|t_i(\mathbf{u})|_{(v)}$ et $|\tau_i(\mathbf{u})|_{(v)}$ déjà mentionnées établit l'inégalité et termine notre démonstration de la proposition (1.17).

En guise de conclusion à ce paragraphe nous voudrions signaler que l'on peut montrer pour $v \notin S$ et $d \in \mathbf{N}^*$ que la fonction $\mathrm{Dist}_{v,d}(\cdot, \cdot)$ définit une distance ultramétrique sur $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. Lorsque $v \in S$, $d \in \mathbf{N}^*$ et $n = 1$ on vérifie encore que $\mathrm{Dist}_{v,d}(\cdot, \cdot)$ est une distance sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, mais pour $n > 1$ nous ne sommes pas parvenus à montrer que cette fonction satisfait l'inégalité du triangle. La vérifie-t-elle néanmoins?

II. — LES CRITÈRES D'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

1. Étude des idéaux d'un anneau de polynômes

Soient K un corps de nombres et pour $n \geqslant 1$, $A = K[X_0, \ldots, X_n]$. On reprend les notations du § 3 de la partie précédente.

Soit I un idéal homogène pur de A de codimension $n+1-r$ et soit $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbf{N}^r$. On considère un homomorphisme $\rho : K[d_r] \to K$ et l'on suppose que $\rho(U_r) \notin \mathfrak{P}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ associé à I, on prolonge de façon évidente ρ à $K[\mathbf{d}]$. Si f est une forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}$ de I, il suit de la proposition (1.4) que $\rho(f) \neq 0$.

Lemme **(2.1)**. — *On a les inégalités*

(i) $d^\circ \rho(f) \leqslant \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(I)$,

(ii) $\mathbf{h}(\rho(f)) \leqslant \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(I) + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(U_r)) + 6(d_1 + \ldots + d_r)\log(n+1))\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(I)$.

Démonstration. — (i) étant clair, nous montrons (ii). On a, pour toute place v de K et d'après la proposition (1.17) avec $\varphi^{(1)} = \rho : K[\mathbf{d}] \to K[d_1, \ldots, d_{r-1}]$ et $\varphi^{(2)} = 0$, la majoration

$$M_v(\rho(f))/M_v(f) \leqslant [a_v^{2(d_1 + \cdots + d_r)} \max_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_r}} \{1, |\rho(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})|_{(v)}\}]^{d^\circ f},$$

où $a_v = 2(n+1)$ si $v \in S$ et $a_v = 1$ si $v \notin S$. Mais d'après le lemme (1.13) on a $|\rho(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})|_{(v)} \leqslant a_v^{d_1 + \cdots d_r} . M_v(\rho(U_r))$, et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\rho(f)) &= \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} . \sum_v n_v \log M_v(\rho(f)) \\ &\leqslant \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \{\sum_v n_v \log M_v(f) + [\sum_{v \in S} n_v . 3(d_1 + \ldots + d_r)\log a_v \\ &\qquad + \sum_v n_v \max\{0, \log M_v(\rho(U_r))\}]\, d^\circ f\}\end{aligned}$$

d'où le lemme (2.1), car $\sum_{v \in S} n_v = [K:\mathbf{Q}]$.

Nous utiliserons à plusieurs reprises le lemme suivant.

Lemme **(2.2)**. — *Soient* $1 \leqslant r \leqslant n$, $d \in \mathbf{N}^r$, $f \in \mathbf{C}_v[\mathbf{d}]$ *et* $\rho : \mathbf{C}_v[d_r] \to \mathbf{C}_v$ *un homomorphisme de* $\mathbf{C}_v$*-algèbres. Pour* $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ *on a*

$$M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f)) \leqslant \left[M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(f)) + \frac{|\rho(U_r)(\mathbf{x})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{x}))} . M_v(f)\right] \times [(n+1)^{9(d_1 + \cdots + d_r)} . \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}]^{d^\circ f}.$$

Démonstration. — L'énoncé étant indépendant du choix du système de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{x}$ on peut supposer sans perte de généralité que $|x_0|_{(v)} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n}\{|x_i|_{(v)}\} = 1$ et on a alors $1 \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}_j(\mathbf{x})) \leqslant (n+1)^{d_j}$ pour $j = 1, \ldots, r$. Soit $\widetilde{\rho}$ l'homomorphisme

$$\widetilde{\rho}: \mathbf{C}_v[d_r] \to \mathbf{C}_v$$

tel que $\widetilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}}^{(r)}) = \rho(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})$ si $\mathfrak{m} \neq \mathrm{X}_0^{d_r}$ et $\widetilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}}^{(r)}) = \rho(u_{\mathfrak{m}}^{(r)}) - \rho(\mathrm{U}_r(\mathbf{x}))/x_0^{d_r}$ si $\mathfrak{m} = \mathrm{X}_0^{d_r}$; on étend $\widetilde{\rho}$ à $\mathbf{C}_v[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n][\mathbf{d}]$. Appelons $\widetilde{\rho}'$ l'homomorphisme

$$\widetilde{\rho}': \mathfrak{S}\mathbf{C}_v[d_r] \to \mathbf{C}_v$$

tel que $\widetilde{\rho}'(s_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}^{(r)}) = \widetilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})/x_0^{d_r}$ si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' = \mathrm{X}_0^{d_r}$, $-\widetilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}'}^{(r)})/x_0^{d_r}$ si $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m} = \mathrm{X}_0^{d_r}$ et o sinon; on étend $\widetilde{\rho}'$ à $\mathfrak{S}\mathbf{C}_v[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n][\mathbf{d}]$. On vérifie aisément que, posant $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{\mathbf{x}}$, on a $\mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}(f) = \widetilde{\rho}' \circ \mathfrak{d}(f)$, car $\widetilde{\rho}(\mathrm{U}_r)(\mathbf{x}) = 0$. En remarquant que l'on a

$$\max_{\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_r}}\{1, |\widetilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})|_{(v)}, |\rho(u_{\mathfrak{m}}^{(r)})|_{(v)}\} \leqslant (n+1)^{2(d_1+\cdots+d_r)}.\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\},$$

on déduit de la proposition (1.17), avec $\varphi^{(1)} = \mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}$ et $\varphi^{(2)} = 0$ puis $\varphi^{(2)} = \mathfrak{d} \circ \rho$,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_v(\mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}(f)) &= \mathrm{M}_v(\widetilde{\rho}' \circ \mathfrak{d}(f)) \\ &\leqslant \mathrm{M}_v(\mathfrak{d}(f)).[(n+1)^{6(d_1+\cdots+d_r)}.\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]^{d^\circ f},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}_v(\mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}(f) - \mathfrak{d} \circ \rho(f)) \\ &\quad \leqslant |\rho(\mathrm{U}_r)(\mathbf{x})|_{(v)}.\mathrm{M}_v(f).[(n+1)^{6(d_1+\cdots+d_r)}.\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]^{d^\circ f}.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (1.13) on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_v(\mathfrak{d} \circ \rho(f)) &\leqslant [\mathrm{M}_v(\mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}(f)) \\ &\quad + \mathrm{M}_v(\mathfrak{d} \circ \widetilde{\rho}(f) - \mathfrak{d} \circ \rho(f))].(n+1)^{2(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f},\end{aligned}$$

ce qui, avec les inégalités précédentes et la définition (1.15), achève la preuve du lemme (2.2) en remarquant que l'on a choisi $\mathbf{x}$ de sorte que $1 \leqslant \mathrm{M}_v(\mathrm{U}_j(\mathbf{x})) \leqslant (n+1)^{d_j}$ pour $j = 1, \ldots, r$ et que d'après le lemme (1.8), f est homogène par rapport à chaque groupe de variables $\mathscr{U}_j$.

Comme première conséquence du lemme (2.2) nous énonçons :

Corollaire **(2.3)**. — *On reprend les notations du début du paragraphe et on suppose que* $\mathrm{I} = \mathfrak{P}$ *est un idéal premier de* A. *Soient* v *une place de* K *et* $\mathbf{x} \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$; *on a alors*

$$\frac{\mathrm{M}_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f))}{\mathrm{M}_v(\rho(f))} \leqslant \left[\|\mathfrak{P}\|_{\mathbf{x},v,\mathbf{d}} + \frac{|\rho(\mathrm{U}_r)(\mathbf{x})|_{(v)}}{\mathrm{M}_v(\mathrm{U}_r(\mathbf{x}))}\right]$$

$$\times \exp[13[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(\mathrm{U}_r)) + (d_1 + \ldots + d_r)\log(n+1))\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})\}].$$

Démonstration. — En notant que d'après la définition (1.15) on a

$$\|\mathfrak{P}\|_{\mathbf{x},v,\mathbf{d}} = \frac{\mathrm{M}_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(f))}{\mathrm{M}_v(f)},$$

on constate qu'il suffit de majorer $\dfrac{\mathrm{M}_v(f)}{\mathrm{M}_v(\rho(f))}[(n+1)^{10(d_1+\dots+d_r)}.\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]^{d^\circ f}$ pour déduire le corollaire du lemme (2.2). Mais d'après la proposition (1.17) avec $\varphi^{(1)} = \rho$ et $\varphi^{(2)} = 0$ on a

$$\mathrm{M}_v(\rho(f))/\mathrm{M}_v(f) \leqslant \begin{cases} \max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}^{d^\circ f} & \text{si } v \notin \mathrm{S}, \\ [(n+1)^{3(d_1+\dots+d_r)}.\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]^{d^\circ f} & \text{si } v \in \mathrm{S}; \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{h}}(\rho(f)) &= \sum_v \frac{n_v}{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}.\max\{0, \log \mathrm{M}_v(\rho(f))\} \\ &\leqslant \sum_{v\in\mathrm{S}} \frac{n_v}{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}\{\max\{0, \log \mathrm{M}_v(f)\} + [3(d_1+\dots+d_r)\log(n+1) \\ &\qquad + \max\{0, \log \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]\, d^\circ f\} + \dots \\ &\quad + \sum_{v\notin\mathrm{S}} \frac{n_v}{[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]}\{\max\{0, \log \mathrm{M}_v(f)\} + \max\{0, \log \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}\, d^\circ f\} \\ &\leqslant \bar{\mathbf{h}}(f) + [3(d_1+\dots+d_r)\log(n+1) + \bar{\mathbf{h}}(\rho(\mathrm{U}_r))]\, d^\circ f, \end{aligned}$$

d'où, en reportant dans la proposition (1.12) (vi),

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_v(\rho(f)) \geqslant \exp[-[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\{\bar{\mathbf{h}}(f) \\ + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(\mathrm{U}_r)) + 3(d_1+\dots+d_r)\log(n+1))\, d^\circ f\}] \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{M}_v(f)}{\mathrm{M}_v(\rho(f))}[(n+1)^{10(d_1+\dots+d_r)}\max\{1, \mathrm{M}_v(\rho(\mathrm{U}_r))\}]^{d^\circ f} \\ &\qquad \leqslant \exp[13[\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\{\bar{\mathbf{h}}(f) + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(\mathrm{U}_r)) + (d_1+\dots+d_r)\log(n+1))\, d^\circ f\}]. \end{aligned}$$

On conclut la preuve du corollaire en remarquant que son énoncé est indépendant de la forme U-éliminante de $\mathfrak{P}$ choisie et que l'on peut donc d'après la proposition (1.12) (vii) supposer que $\bar{\mathbf{h}}(f) = \mathbf{h}(f) = \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})$ et l'on sait que $d^\circ f = \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})$ (définition (1.14)).

Moralement la majoration du corollaire (2.3) est intéressante lorsque $|\rho(\mathrm{U}_r)(\mathbf{x})|_{(v)}$ est inférieur à $\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathscr{Z}(\mathfrak{P}), \mathbf{x})$ (où $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ est la variété des zéros de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$). Mais nous aurons également à considérer des ρ tels que $|\rho(\mathrm{U}_r)(\mathbf{x})|_{(v)}$ est de l'ordre de $\min_{\mathbf{y}\in\mathscr{Z}(\mathfrak{P})}\{\mathrm{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$ et, comme le lemme (2.7) (voir plus bas) le laisse possible, nous devons envisager le cas où cette quantité est beaucoup plus grande que $\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathscr{Z}(\mathfrak{P}), \mathbf{x})$. Aussi utiliserons-nous dans ce dernier une approche différente que nous expliquons plus loin après avoir éclairci la signification de la forme $\rho(f)$. On vérifie facilement que $\rho(f) \in \mathfrak{E}_{(d_1,\dots,d_{r-1})}(\rho(\mathfrak{P}[d_r]))$ et l'on serait tenté de dire que $\rho(f)$ est une forme U-éliminante d'indice $(d_1, \dots, d_{r-1})$ de $\rho(\mathfrak{P}[d_r])$. Mais il se peut que l'on ait $\operatorname{Deg}_{(d_1, \ldots, d_{r-1})}(\rho(\mathfrak{P}[d_r])) < \deg \rho(\mathfrak{P}[d_r])\, d_1 \ldots d_{r-1} \times (\sum_{i=1}^{r-1} 1/d_i) = d^\circ \rho(f)$, aussi $\rho(f)$ ne peut être dans ce cas une forme U-éliminante de $\rho(\mathfrak{P}[d_r])$. On a néanmoins la propriété suivante.

Proposition **(2.4)**. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps commutatif,* $\mathfrak{P}$ *un idéal homogène premier de* $\mathbf{k}[X_0, \ldots, X_n]$ *de codimension* $n + 1 - r$, $\mathbf{d} \in \mathbf{N}^r$ *et* $f \in \mathbf{k}[\mathbf{d}]$ *une forme* U-*éliminante d'indice* $\mathbf{d}$ *de* $\mathfrak{P}$. *Soit* $\rho : \mathbf{k}[d_r] \to \mathbf{k}$ *un homomorphisme tel que* $\rho(f) \neq 0$ *(ou de façon équivalente* $\rho(U_r) \notin \mathfrak{P}$*). L'idéal* $\rho(\mathfrak{P}[d_r])$ *est alors de codimension* $n + 2 - r$ *et appelons* $f_1, \ldots, f_t$ *des formes* U-*éliminantes d'indice* $(d_1, \ldots, d_{r-1})$ *des idéaux premiers minimaux qui lui sont associés. Il existe des entiers naturels non nuls* $\ell_1, \ldots, \ell_t$ *et un élément* $\lambda \in \mathbf{k}$ *tels que*

$$\rho(f) = \lambda \prod_{h=1}^{t} f_h^{\ell_h}.$$

Démonstration. — Pour tout homomorphisme $\rho' : \mathbf{k}[\mathbf{d}] \to \bar{\mathbf{k}}$ (clôture algébrique de $\mathbf{k}$) prolongeant ρ, on utilise la proposition (1.4) qui s'énonce :

$$\begin{aligned} \rho'(f) = 0 &\Leftrightarrow \rho'(\mathfrak{P}[\mathbf{d}]) \text{ a un zéro non trivial dans } \bar{\mathbf{k}}^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \rho'((\mathfrak{P}, \rho(U_r))[d_1, \ldots, d_{r-1}]) \text{ a un zéro non trivial dans } \bar{\mathbf{k}}^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \exists\, h \in \{1, \ldots, t\} \quad \text{tel que } \rho'(f_h) = 0, \end{aligned}$$

car une forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}$ de $\sqrt{(\mathfrak{P}, \rho(U_r))}$ est $f_1 \ldots f_t$ d'après la proposition (1.3). Ceci signifie que l'hypersurface $\mathscr{X}(\rho(f))$ a les mêmes points définis sur $\bar{\mathbf{k}}$ que la réunion des hypersurfaces $\bigcup_{h=1}^{t} \mathscr{X}(f_h)$, la conclusion de la proposition s'en déduit immédiatement.

Remarque. — Il serait intéressant de déterminer les exposants $\ell_1, \ldots, \ell_t$ de la proposition (2.4). Notons qu'en réappliquant la proposition (2.4) à chaque idéal premier minimal associé à $\rho(\mathfrak{P}[d_r])$ on étend cette proposition (2.4) aux homomorphismes $\rho : \mathbf{k}[d_{r-1}, d_r] \to \mathbf{k}$ et idéaux $\rho(\mathfrak{P}[d_{r-1}, d_r])$ et plus généralement à $\rho : \mathbf{k}[d_i, \ldots, d_r] \to \mathbf{k}$ et $\rho(\mathfrak{P}[d_i, \ldots, d_r])$. C'est souvent sous cette forme que la proposition (2.4) nous sera utile.

Nous revenons maintenant à notre approche alternative au corollaire (2.3).

Proposition **(2.5)**. — *On reprend les notations du début du paragraphe et du corollaire* (2.3). *On suppose en outre que pour des nombres réels* $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ *et* $H \geqslant 1$ *on a*

$$|\rho(U_r)(\mathbf{x})|_{(v)} / M_v(U_r(\mathbf{x})) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathscr{X}(\mathfrak{P})} \{1, H \operatorname{Dist}_{v, d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x})^\eta\},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f))}{M_v(\rho(f))} &\leqslant \|\mathfrak{P}\|_{\mathbf{x}, v, \mathbf{d}}^{\eta} \cdot H^{\operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})} \\ &\times \exp[26[K : \mathbf{Q}]\{\operatorname{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(U_r)) + (d_1 + \ldots + d_r) \log(n + 1)) \operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})\}]. \end{aligned}$$

Démonstration. — On remarque tout d'abord que pour toute place w de K et $P \in \mathbf{C}_w[T_1, \ldots, T_m]$ on a

$$M_w(P) \leqslant \sup_{|t_i|_{(w)}=1} \{|P(t_1, \ldots, t_m)|_{(w)}\};$$

cela est clair si $w \in S$, et si $w \notin S$ on a même une égalité qui résulte, par exemple, de [A] (lemme (4.1.7) et corollaire (4.1.12)). On peut supposer que $\max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|_{(v)}\} = 1$ et donc que $1 \leqslant M_v(U_j(\mathbf{x})) \leqslant (n+1)^{d_j}$ pour $j = 1, \ldots, r$.

Soit un homomorphisme $\tilde{\rho} : \mathfrak{S}\mathbf{C}_v[d_1, \ldots, d_{r-1}] \to \mathbf{C}_v$ quelconque vérifiant $|\tilde{\rho}(s^{(j)}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'})|_{(v)} = 1$ pour $j = 1, \ldots, r-1$ et $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}$.

Supposons $\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_1, \ldots, d_{r-1})}(f) \neq 0$; alors

$$\mathscr{Y} = \mathscr{Z}(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_1, \ldots, d_{r-1})}(\mathfrak{P}[d_1, \ldots, d_{r-1}]))$$

est un sous-ensemble de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ de cardinal fini contenu dans $\mathscr{Z}(\mathfrak{P}) \subset \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. (L'idéal de définition de $\mathscr{Y}$ est de codimension $\geqslant n$ d'après la proposition (1.5) et $\leqslant n$ d'après le théorème de l'idéal principal de Krull (cf. [No], Th. 22, p. 217).)

D'après la proposition (2.4) il existe des entiers naturels non nuls $(\ell_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}}$ et un $\lambda \in \mathbf{C}_v$ tels que (voir remarque après la preuve de la proposition (2.4))

$$\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_1, \ldots, d_{r-1})}(f) = \lambda . \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} U_r(\mathbf{y})^{\ell_{\mathbf{y}}} \in \mathbf{C}_v[d_r].$$

Du lemme (2.2) appliqué à $f = U_r(\mathbf{y}) \in \mathbf{C}_v[d_r]$ on déduit que pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a

$$|\rho(U_r)(\mathbf{y})|_{(v)} \leqslant \left[M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(U_r(\mathbf{y}))) + \frac{|\rho(U_r)(\mathbf{x})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{x}))} . M_v(U_r(\mathbf{y})) \right] \times (n+1)^{9d_r} . \max\{1, M_v(\rho(U_r))\},$$

ce qui se réécrit

$$\frac{|\rho(U_r)(\mathbf{y})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{y}))} \leqslant \left[\mathrm{Dist}_{v, d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \frac{|\rho(U_r)(\mathbf{x})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{x}))} \right] . (n+1)^{9d_r} \times \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}.$$

Comme on a fait l'hypothèse que

$$\frac{|\rho(U_r)(\mathbf{x})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{x}))} \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathscr{Z}(\mathfrak{P})} \{1, H\, \mathrm{Dist}_{v, d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x})^{\eta}\},$$

il suit que pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a

$$\frac{|\rho(U_r)(\mathbf{y})|_{(v)}}{M_v(U_r(\mathbf{y}))} \leqslant \max\{\mathrm{Dist}_{v, d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), H\, \mathrm{Dist}_{v, d_r}(\mathbf{y}, \mathbf{x})^{\eta}\} . 2(n+1)^{9d_r} \times \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}.$$

En faisant le produit des puissances $\ell_{\mathbf{y}}$, pour $\mathbf{y}$ parcourant $\mathscr{Y}$, des inégalités ci-dessus on obtient, en utilisant l'hypothèse $H \geqslant 1$,

$$\frac{|\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})} \circ \rho(f)|_{(v)}}{M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f))} \leqslant \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} [H \operatorname{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y},\mathbf{x})^{\eta}]^{\ell_{\mathbf{y}}} \times \ldots$$
$$\times \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}^*} \operatorname{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y},\mathbf{x})^{\ell_{\mathbf{y}}} . [2(n+1)^{9d_r} \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}]^{d^\circ f},$$

où $\mathscr{Y}^* = \{\mathbf{y} \in \mathscr{Y};\ \operatorname{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y},\mathbf{x}) > H^{1/1-\eta} \geqslant 1\}$.

Mais on a d'une part

$$\prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \operatorname{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y},\mathbf{x})^{\ell_{\mathbf{y}}} = \frac{M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))}{M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f))}$$

et d'autre part, il résulte de la proposition (1.17) avec $\varphi^{(1)} = \tilde{\rho}$ et $\varphi^{(2)} = 0$ que l'on a

$$M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f)) \leqslant M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f)) . (n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f}$$

et pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a d'après la remarque suivant la démonstration du lemme (1.16)

$$\operatorname{Dist}_{v,d_r}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \leqslant (n+1)^{4d_r}.$$

Donc d'après la remarque faite au début de la démonstration, on a

$$\begin{aligned} M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f)) &\leqslant \sup_{\tilde{\rho}} \{|\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f)|_{(v)}\} \\ &\leqslant \sup_{\tilde{\rho}} \{M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f))\}^{1-\eta} . M(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))^{\eta} \\ &\qquad . [H(n+1)^{19(d_1+\cdots+d_r)} . \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}]^{d^\circ f}. \end{aligned}$$

Utilisant à nouveau la proposition (1.17), avec $\varphi^{(1)} = \tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}$ et $\varphi^{(2)} = 0$, on montre

$$M_v(\tilde{\rho} \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)) \leqslant M_v(f)\,(n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f},$$

et comme $0 \leqslant 1 - \eta \leqslant 1$, on en déduit que

$$\frac{M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \rho(f))}{M_v(\rho(f))} \leqslant \frac{M_v(f)}{M_v(\rho(f))} [H(n+1)^{23(d_1+\cdots+d_r)} . \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}]^{d^\circ f}$$
$$\times \left[\frac{M_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},\mathbf{d}}(f))}{M_v(f)}\right]^{\eta}.$$

Pour achever la démonstration de la proposition (2.5) il suffit de prouver que

$$\frac{M_v(f)}{M_v(\rho(f))} [(n+1)^{23(d_1+\cdots+d_r)} \max\{1, M_v(\rho(U_r))\}]^{d^\circ f}$$
$$\leqslant \exp[26[K:\mathbf{Q}]\{\operatorname{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) + (\bar{\mathbf{h}}(\rho(U_r)) + (d_1, \ldots + d_r)\log(n+1)) \operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})\}],$$

mais ceci se démontre comme dans la preuve du corollaire (2.3), et la proposition (2.5) est donc bien établie.

Remarque. — Dans le cours de la démonstration de la proposition (2.5) nous avons vu qu'il suit de la proposition (1.17) que

$$M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)) \leqslant M_v(f).(n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f}.$$

Il est intéressant de noter que l'on a également l'inégalité

$$M_v(f) \leqslant M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)).(n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f}$$

dès que $d_r \leqslant d_1, \ldots, d_{r-1}$.

Pour voir cela normalisons les coordonnées de $\mathbf{x}$ de sorte que $\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{|x_i|_{(v)}\} = 1$ (le morphisme $\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}$ ne dépend pas d'une telle normalisation) et supposons, pour fixer les idées, que $|x_0|_{(v)} = 1$. Considérons l'homomorphisme

$$\widetilde{\rho}:\ \mathfrak{S}\mathbf{C}_v[d_1, \ldots, d_{r-1}] \to \mathbf{C}_v(\mathbf{d})$$

défini par $\widetilde{\rho}(s^{(j)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}) = (u^{(r)}_{\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}_0}.u^{(j)}_{\mathfrak{m}} - u^{(r)}_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_0}.u^{(j)}_{\mathfrak{m}'})/U_r(\mathbf{x}).\mathfrak{m}(\mathbf{x})$ pour $j = 1, \ldots, r-1$ et $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_{d_j}$, où $\mathfrak{m}_0 = X_0^{d_j-d_r}$ et avec la convention $u^{(r)}_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_0} = 0$ si $\mathfrak{m}_0 \nmid \mathfrak{m}$. Il suit alors de la remarque 2 à la fin du § 1 de la première partie que

$$\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f) = f$$

car $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(U_j) = U_j - \dfrac{U_j(\mathbf{x})}{U_r(\mathbf{x}).\mathfrak{m}_0(\mathbf{x})}.U_r.\mathfrak{m}_0$ pour $j = 1, \ldots, r-1$.

Pour tout homomorphisme $\rho : \mathbf{C}_v[\mathbf{d}] \to \mathbf{C}_v$ tel que $|\rho(u^{(j)}_{\mathfrak{m}})|_{(v)} = 1$ ($j = 1, \ldots, r$ et $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{d_j}$) on a d'après la proposition (1.17) avec $\varphi^{(1)} = \rho\circ\widetilde{\rho}$ et $\varphi^{(2)} = 0$

$$\begin{aligned}|\rho(f)|_{(v)} &= |\rho\circ\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)|_{(v)}\\ &\leqslant M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)).(n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f}/|\rho(U_r(\mathbf{x}))|^{d^\circ f}_{(v)},\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned}M_v(f).M_v(U_r(\mathbf{x}))^{d^\circ f} &= M_v(f.U_r(\mathbf{x})^{d^\circ f})\\ &\leqslant M_v(\widetilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x},(d_1,\ldots,d_{r-1})}(f)).(n+1)^{4(d_1+\cdots+d_r)d^\circ f}.\end{aligned}$$

Il suffit pour conclure de remarquer que $M_v(U_r(\mathbf{x})) \geqslant 1$, d'après le lemme (1.13).

Reprenons maintenant l'idéal I de A introduit au début du paragraphe. Nous ne le supposons plus nécessairement pur, ni de codimension $n+1-r$, par contre nous allons supposer que

$$I = (\mathcal{E}, p_1, \ldots, p_m)$$

où $\mathcal{E}$ est un idéal homogène premier de A de codimension $n-k$, et $p_1, \ldots, p_m$ des polynômes homogènes de A de degrés $d_{r+1}, \ldots, d_{r+m}$. Nous poserons

$$H = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\bar{\mathbf{h}}(p_j)\} \quad \text{et} \quad D = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\{d^\circ p_j\};$$

on a alors le résultat suivant :

Proposition **(2.6)**. — *Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal premier minimal (ou isolé) associé à* I, *de codimension* $n+1-r$ $(k+1 \geqslant r)$. *Soit* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbf{N}^r$ *et posons*

$$\mathbf{d}' = (d_1, \ldots, d_r, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}) \in \mathbf{N}^{k+1};$$

on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) &\leqslant \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}'}(\mathscr{E})\\ &\quad + (k+1-r)[\mathrm{H} + 6(d_1 + \ldots + d_r + (k+1-r)\,\mathrm{D})\log(n+1)]\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}'}(\mathscr{E}),\\ \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) &\leqslant \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}'}(\mathscr{E}).\end{aligned}$$

Démonstration. — Pour démontrer la proposition on construit par récurrence une suite d'idéaux premiers $\mathscr{E} = \mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{k+1-r} = \mathfrak{P}$ telle que $\mathfrak{P}_j$ soit de codimension $n-k+j$ et vérifie

$$(*)\quad \begin{cases}\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_j}(\mathfrak{P}_j) \leqslant \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{j-1}}(\mathfrak{P}_{j-1})\\ \quad + [\mathrm{H} + 6(d_1 + \ldots + d_r + (k+2-j-r)\,\mathrm{D})\log(n+1)]\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{j-1}}(\mathfrak{P}_{j-1})\\ \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_j}(\mathfrak{P}_j) \leqslant \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{j-1}}(\mathfrak{P}_{j-1})\end{cases}$$

où $\mathbf{d}_j = (d_1, \ldots, d_r, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{D}) \in \mathbf{N}^{k+1-j}$ $(\mathbf{d}_{k+1-r} = \mathbf{d})$. Soit $j \in \{1, \ldots, k+1-r\}$; l'idéal $\mathfrak{P}_{j-1}$ étant de codimension $n-k+j-1 < n+1-r$ et $\mathfrak{P}$ étant un idéal premier minimal de codimension $n+1-r$ associé à I, il résulte que $\mathrm{I} \not\subset \mathfrak{P}_{j-1}$ et qu'il existe au moins un polynôme p_i n'appartenant pas à $\mathfrak{P}_{j-1}$. Définissons l'homomorphisme $\rho : \mathrm{K}[\mathrm{D}] \to \mathrm{K}$ par $\rho(\mathrm{U}_{k+2-j}) = \mathrm{X}_\ell^{\mathrm{D}-d_{r+i}}.p_i$, où $\mathrm{X}_\ell \notin \mathfrak{P}_{j-1}$ $(\ell \in \{0, \ldots, n\})$. Soit f une forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}_{j-1}$ de $\mathfrak{P}_{j-1}$. On déduit de la proposition (2.4) que toute forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}_j$ de tout idéal premier minimal de codimension $n-k+j$ associé à $(\mathfrak{P}_{j-1}, p_i) \supset \rho(\mathfrak{P}_{j-1}[\mathrm{D}])$ divise $\rho(f)$. On choisit $\mathfrak{P}_j$ l'un de ces idéaux premiers de codimension $n-k+j$ contenant $\mathfrak{P}$ et le lemme (2.1) combiné à la proposition (1.12) fournit les inégalités $(*)$. La proposition résulte facilement des inégalités $(*)$ pour $j = 1, \ldots, k+1-r$.

Nous allons maintenant établir une relation entre $\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathrm{X}, \mathbf{x})$ et $\min_{\mathbf{y}\in\mathrm{X}}\{\mathrm{Dist}_{v,d_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$.

Lemme **(2.7)**. — *Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal premier de codimension* $n+1-r$ *de* A. *Appelons* $\mathrm{X} = \mathscr{Z}(\mathfrak{P}) \subset \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ *et soit* $\mathbf{d} \in (\mathbf{N}^*)^r$ *tel que* $d_1 \leqslant d_2, \ldots, d_r$. *Soit* $\mathbf{x} \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. *Il existe au moins un point* $\mathbf{y}$ *de* X *tel que*

$$\mathrm{Dist}_{v,d_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant \mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathrm{X}, \mathbf{x})^{1/\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})} \times (n+1)^{13r(d_1 + \ldots + d_r)}.$$

Remarque. — En direction opposée on peut montrer que

$$\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\mathrm{X}, \mathbf{x}) \leqslant \mathrm{Dist}_{v,d_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \times \exp[\mathrm{C}(n, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,(d_1 + \ldots + d_r)\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})]$$

pour tout $\mathbf{y} \in \mathrm{X}$.

Démonstration. — D'après la remarque liminaire à la démonstration de la proposition (2.5) on peut choisir un homomorphisme $\rho : \mathfrak{S}\mathbf{C}_v[d_2, \ldots, d_r] \to \mathbf{C}_v$ tel que pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' \in \mathscr{M}_{d_j}$ $(j = 2, \ldots, r)$ on ait $|\rho(s^{(j)}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'})|_{(v)} \leqslant 1$ et $\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f)) \geqslant \mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_2, \ldots, d_r)}(f))$ (donc $\tilde{\rho}(f) \neq 0$) où $\tilde{\rho} = \rho \circ \tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_2, \ldots, d_r)}$, et f est une forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}$ de $\mathfrak{P}$. On vérifie facilement que $\tilde{\rho}(f) \in \mathfrak{E}_{d_1}(\tilde{\rho}(\mathfrak{P}[d_2, \ldots, d_r]))$ et utilisant la proposition (2.4) on déduit que dans $\mathbf{C}_v[d_1]$ on a (cf. remarque après la démonstration de la proposition (2.4))

$$\tilde{\rho}(f) = \lambda \prod_{h=1}^{t} f_h^{\ell_h},$$

où $\lambda \in \mathbf{C}_v$ et $f_1, \ldots, f_t$ sont des formes U-éliminantes d'indice d_1 des idéaux premiers minimaux de codimension n associés à $\tilde{\rho}(\mathfrak{P}[d_2, \ldots, d_r])$ dans $\mathbf{C}_v[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et $\ell_1, \ldots, \ell_t$ sont des entiers naturels non nuls. Itérant l'utilisation du lemme (2.2) on montre que, comme $\rho(\mathrm{U}_i(\mathbf{x})) = 0$ pour $i = 2, \ldots, r$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}} \circ \tilde{\rho}(f))}{\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f))} &\leqslant \frac{\mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(f))}{\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f))} \times (n+1)^{9r(d_1 + \ldots + d_r) \operatorname{Deg}_{\mathbf{d}} \mathfrak{P}} \\ &\leqslant \|\mathfrak{P}\|_{\mathbf{x}, v, \mathbf{d}} \times (n+1)^{13r(d_1 + \ldots + d_r) \operatorname{Deg}_{\mathbf{d}} \mathfrak{P}}, \end{aligned}$$

car $\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f)) \geqslant \mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_2, \ldots, d_r)}(f))$ et, d'après la remarque suivant la proposition (2.5), $\mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}, (d_2, \ldots, d_r)}(f)) \geqslant \mathrm{M}_v(f) \cdot (n+1)^{-r(d_1 + \ldots + d_r) d^\circ f}$.

Comme $\ell_1 + \ldots + \ell_t = d^\circ_{\mathscr{U}_1} f \leqslant \operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})$, il résulte de l'inégalité ci-dessus que pour un $h \in \{1, \ldots, t\}$ on a

$$\frac{\mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(f_h))}{\mathrm{M}_v(f_h)} \leqslant \|\mathfrak{P}\|_{\mathbf{x}, v, \mathbf{d}}^{1/\operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})} \times (n+1)^{13r(d_1 + \ldots + d_r)}.$$

Mais l'idéal premier dont f_h est une forme U-éliminante d'indice d_1 est de codimension n dans $\mathbf{C}_v[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et sa variété des zéros dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ est réduite à un point $\mathbf{y}$ situé sur X. Enfin on a $\dfrac{\mathrm{M}_v(\tilde{\mathfrak{d}}_{\mathbf{x}}(f_h))}{\mathrm{M}_v(f_h)} = \operatorname{Dist}_{v, d_1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ par définition, ce qui achève d'établir le lemme (2.7).

Nous consacrons la fin de ce paragraphe à l'étude de la variation en fonction de l'indice $\mathbf{d}$ des quantités $\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}$, $\operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}$, $\|\ \|_{\mathbf{d}}$ ou $\operatorname{Dist}_{\mathbf{d}}$. Pour simplifier les notations nous omettrons cet indice lorsqu'il sera égal à $(1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}^r$. Soient $\mathfrak{P}$ un idéal homogène premier de codimension $n + 1 - r$ de A et $\mathbf{d} \in (\mathbf{N}^*)^r$ on a alors :

Proposition **(2.8)**

(i) $\operatorname{Deg}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P}) = d_1 \ldots d_r \cdot \dfrac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r} \dfrac{1}{d_i}\right) \operatorname{Deg}(\mathfrak{P})$

(ii) $\mathrm{Ht}(\mathfrak{P}) - \log(n+1) \operatorname{Deg}(\mathfrak{P}) \leqslant \dfrac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})}{d_1 \ldots d_r} \leqslant \mathrm{Ht}(\mathfrak{P}) + \log(n+1) \operatorname{Deg}(\mathfrak{P})$.

Démonstration. — (i) se déduit facilement de la remarque qui suit la définition (1.14). Pour (ii) considérons d'abord f et f_1 des formes U-éliminantes d'indices $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)$ et $\mathbf{d}_1 = (d_1, \ldots, d_{r-1}, 1)$ respectivement de $\mathfrak{P}$. Nous procédons de façon similaire à la démonstration de la proposition (2.5). Soit v une place de K et $\tilde{\rho} : \mathbf{C}_v[d_1, \ldots, d_{r-1}] \to \mathbf{C}_v$ un homomorphisme quelconque vérifiant $|\tilde{\rho}(u_{\mathfrak{m}}^{(j)})|_{(v)} = 1$ pour $j = 1, \ldots, r-1$ et $\mathfrak{m} \in \mathscr{M}_{d_j}$, et $\tilde{\rho}(f) \neq 0$ ainsi que $\tilde{\rho}(f_1) \neq 0$. Alors $\mathscr{Y} = \mathscr{Z}(\tilde{\rho}(\mathfrak{P}[d_1, \ldots, d_{r-1}]))$ est un sous-ensemble de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ de cardinal fini et, d'après la proposition (2.4), il existe des entiers naturels non nuls $(\ell_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}}$, $(\ell_{\mathbf{y}}^1)_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}}$ et $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{C}_v$ tels que

$$\sum_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \ell_{\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \ell_{\mathbf{y}}^1 = d_1 \ldots d_{r-1} \deg \mathfrak{P},$$

$$\tilde{\rho}(f) = \lambda_0 \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \mathrm{U}_r(\mathbf{y})^{\ell_{\mathbf{y}}} \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}(f_1) = \lambda_1 \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \mathrm{L}_r(\mathbf{y})^{\ell_{\mathbf{y}}^1}$$

(notons que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a fixé un système de coordonnées projectives dont dépendent λ_0 et λ_1). Montrons que $\lambda_0/\lambda_1^{d_r}$ est un élément de K indépendant de $\tilde{\rho}$ et que $\ell_{\mathbf{y}} = \ell_{\mathbf{y}}^1$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$.

Pour cela on considère l'homomorphisme $\rho : \mathrm{K}[d_r] \to \mathrm{K}[1]$ défini par $\rho(\mathrm{U}_r) = (\mathrm{L}_r)^{d_r}$; on vérifie à l'aide de la proposition (1.4) que $\rho(f) = \lambda f_1^{d_r}$ pour un certain $\lambda \in \mathrm{K}$ (indépendant de $\tilde{\rho}$). On calcule alors que

$$\lambda_0 . \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \mathrm{L}_r(\mathbf{y})^{d_r \ell_{\mathbf{y}}} = \rho \circ \tilde{\rho}(f) = \tilde{\rho} \circ \rho(f) = \lambda \tilde{\rho}(f_1)^{d_r} = \lambda . \lambda_1^{d_r} . \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Y}} \mathrm{L}_r(\mathbf{y})^{d_r \ell_{\mathbf{y}}^1},$$

ce qui montre bien que $\lambda_0/\lambda_1^{d_r} = \lambda \in \mathrm{K}$ et $\ell_{\mathbf{y}} = \ell_{\mathbf{y}}^1$ pour tout $\mathbf{y} = \mathscr{Y}$.

Si $v \notin \mathrm{S}$ on vérifie aisément que pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}_r(\mathbf{y})) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{ |y_i|_{(v)} \}^{d_r} = \mathrm{M}_v(\mathrm{L}_r(\mathbf{y}))^{d_r},$$

d'où il suit que $\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f)) = |\lambda|_v \, \mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f_1))^{d_r}$ et enfin, d'après la remarque liminaire de la démonstration de la proposition (2.5),

$$\mathrm{M}_v(f) = |\lambda|_v \, \mathrm{M}_v(f_1)^{d_r}.$$

Si $v \in \mathrm{S}$ la définition de M_v et le lemme (1.13) permettent d'établir que pour tout $\mathbf{y} \in \mathscr{Y}$ on a (voir remarque après la preuve du lemme (1.13))

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}_r(\mathbf{y})) \leqslant (n+1)^{d_r} \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{ |y_i|_{(v)} \}^{d_r} \leqslant [(n+1) \, \mathrm{M}_v(\mathrm{L}_r(\mathbf{y}))]^{d_r}$$

et

$$\mathrm{M}_v(\mathrm{U}_r(\mathbf{y})) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{ |y_i|_{(v)} \}^{d_r} \geqslant [(n+1)^{-1} . \mathrm{M}_v(\mathrm{L}_r(\mathbf{y}))]^{d_r}.$$

On en déduit aussitôt que

$$(n+1)^{-d_1 \ldots d_r \deg \mathfrak{P}} . \mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f_1))^{d_r} \leqslant \frac{\mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f))}{|\lambda|_v} \leqslant (n+1)^{d_1 \ldots d_r \deg \mathfrak{P}} . \mathrm{M}_v(\tilde{\rho}(f_1))^{d_r}.$$

Reportant cet encadrement dans la définition de $\mathrm{M}_v(f/\lambda)$ on trouve

$$(n+1)^{-d_1 \ldots d_r \deg \mathfrak{P}} . \mathrm{M}_v(f_1)^{d_r} \leqslant \frac{\mathrm{M}_v(f)}{|\lambda|_v} \leqslant (n+1)^{d_1 \ldots d_r \deg \mathfrak{P}} . \mathrm{M}_v(f_1)^{d_r}.$$

En sommant les résultats obtenus sur toutes les places v de K on a enfin

$$d_r\,\mathbf{h}(f_1) - d_1 \ldots d_r \log(n+1) \deg \mathfrak{P} \leqslant \mathbf{h}(f) \leqslant d_r\,\mathbf{h}(f_1) + d_1 \ldots d_r \log(n+1) \deg \mathfrak{P},$$

car $\sum_v n_v \log |\lambda|_v = [\mathrm{K}:\mathbf{Q}]\,\mathbf{h}(\lambda) = 0$. Cet énoncé peut se réécrire

$$\frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_1}(\mathfrak{P})}{d_1 \ldots d_{r-1}} - \log(n+1) \deg \mathfrak{P} \leqslant \frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})}{d_1 \ldots d_r} \leqslant \frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_1}(\mathfrak{P})}{d_1 \ldots d_{r-1}} + \log(n+1) \deg \mathfrak{P},$$

et en itérant le procédé on montre finalement que :

$$\mathrm{Ht}(\mathfrak{P}) - r \log(n+1) \deg \mathfrak{P} \leqslant \frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}}(\mathfrak{P})}{d_1 \ldots d_r} \leqslant \mathrm{Ht}(\mathfrak{P}) + r \log(n+1) \deg \mathfrak{P}.$$

Comme $\mathrm{Deg}(\mathfrak{P}) = r \deg \mathfrak{P}$ la proposition est établie.

Remarque. — En reprenant la remarque suivant la démonstration de la proposition (1.5) on déduit de la proposition (2.8), avec $\mathfrak{P} = (0)$ et $r = n+1$ dans $\mathrm{A} = \mathbf{Q}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$, et du lemme (1.13) que les coefficients dans $\mathbf{Z}$ du résultant des $n+1$ polynômes homogènes $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_{n+1}$ de $\mathrm{A}[\mathbf{d}]$ sont de valeurs absolues inférieures à $(n+1)^{3(n+1)d_1 \ldots d_{n+1}}$.

Lemme **(2.9)**. — *Soit v une place de* K *et* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ *et* $d \in \mathbf{N}^*$.

Si $v \in \mathrm{S}$ *on a*

$$(2(n+1))^{-2(d+1)}.\mathrm{Dist}_v(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant \mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant (2(n+1))^{2(d+1)}.\mathrm{Dist}_v(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Si $v \notin \mathrm{S}$ *on a*

$$\mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathrm{Dist}_v(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Démonstration. — On se ramène à supposer que $|x_{i_0}|_{(v)} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\}_{(v)} = 1$ et que $|y_{j_0}|_{(v)} = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \{|y_j|_{(v)}\} = 1$. On a alors, pour tout $d' \in \mathbf{N}^*$,

$$(*) \quad \begin{cases} (n+1)^{-2d'} \max\{\Delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}\} \leqslant \mathrm{Dist}_{v,d'}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant (n+1)^{2d'} \max\{\Delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}\} & \text{si } v \in \mathrm{S}, \\ \mathrm{Dist}_{v,d'}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \max\{\Delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'}\} & \text{si } v \notin \mathrm{S}, \end{cases}$$

où l'on a posé $\Delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} = |\mathfrak{m}(\mathbf{x})\,\mathfrak{m}'(\mathbf{y}) - \mathfrak{m}(\mathbf{y})\,\mathfrak{m}'(\mathbf{x})|_{(v)}$ et les maxima sont pris sur $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}' \in \mathcal{M}_{d'}$. On pose encore $\varepsilon_v = 1/2$ et $a_v = 2(n+1)$ si $v \in \mathrm{S}$ et $\varepsilon_v = a_v = 1$ si $v \notin \mathrm{S}$.

Soient $\mathfrak{m} = \prod_{\ell=1}^{d} \mathrm{X}_{i_\ell}$ et $\mathfrak{m}' = \prod_{\ell=1}^{d} \mathrm{X}_{j_\ell}$ deux monômes distincts de $\mathcal{M}_d$; on vérifie que $\mathfrak{m}(\mathbf{x})\,\mathfrak{m}'(\mathbf{y}) = \prod_{\ell=1}^{d} [(x_{i_\ell} y_{j_\ell} - x_{j_\ell} y_{i_\ell}) + x_{j_\ell} y_{i_\ell}]$, d'où l'on déduit que $\Delta_{\mathfrak{m},\mathfrak{m}'} \leqslant \varepsilon_v^{-2d} \max_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \{\Delta_{\mathrm{X}_i,\mathrm{X}_j}\}$. Ceci conjugué aux relations $(*)$ pour $d' = d$ et $d' = 1$ entraîne que $\mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqslant a_v^{2(d+1)}\,\mathrm{Dist}_v(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Pour montrer la minoration, considérons des indices i, j tels que

$$\Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j} = \max_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \{\Delta_{\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_\ell}\}.$$

On distingue trois cas :

1° Si $\Delta_{\mathrm{X}_{i_0}, \mathrm{X}_{j_0}} < \varepsilon_v^{2d} \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$, soient $\mathfrak{m} = \mathrm{X}_i \mathrm{X}_{j_0}^{d-1}$ et $\mathfrak{m}' = \mathrm{X}_j \mathrm{X}_{i_0}^{d-1}$; on vérifie que $\Delta_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'} \geqslant \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j} - \varepsilon_v^{-2d+1} \Delta_{\mathrm{X}_{i_0}, \mathrm{X}_{j_0}} \geqslant \varepsilon_v \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$.

2° Si $\Delta_{\mathrm{X}_{i_0}, \mathrm{X}_{j_0}} \geqslant \varepsilon_v^{2d} \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$ et $|x_{j_0} y_{i_0}|_{(v)} < \varepsilon_v^{1/d}$, soient $\mathfrak{m} = \mathrm{X}_{i_0}^d$ et $\mathfrak{m}' = \mathrm{X}_{j_0}^d$; on vérifie que $\Delta_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'} \geqslant \varepsilon_v \geqslant \varepsilon_v^2 \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$, car $\Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j} \leqslant \varepsilon_v^{-1}$.

3° Si $\Delta_{\mathrm{X}_{i_0}, \mathrm{X}_{j_0}} \geqslant \varepsilon_v^{2d} \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$ et $|x_{j_0} y_{i_0}|_{(v)} \geqslant \varepsilon_v^{1/d}$, soient $\mathfrak{m} = \mathrm{X}_{i_0} . \mathrm{X}_{j_0}^{d-1}$ et $\mathfrak{m}' = \mathrm{X}_{j_0}^d$; on vérifie que $\Delta_{\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'} \geqslant |x_{j_0} y_{j_0}|_{(v)}^{d-1} \Delta_{\mathrm{X}_{i_0}, \mathrm{X}_{j_0}} \geqslant \varepsilon_v^{2d+1} \Delta_{\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j}$, car $|x_{j_0}|_{(v)} \geqslant \varepsilon_v^{1/d}$ et $|y_{j_0}|_{(v)} = 1$.

Dans les trois cas, on reprend les relations $(*)$ pour $d' = d$ et $d' = 1$ qui permettent de conclure que $\mathrm{Dist}_{v,d}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \geqslant a_v^{-2(d+1)} . \mathrm{Dist}_v(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, ce qui achève de montrer le lemme (2.9).

Corollaire **(2.10)**. — *Soit* $\mathfrak{P}$ *un idéal homogène premier de codimension* n *de*

$$\mathrm{A} = \mathrm{K}[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n], \quad d \in \mathbf{N}^*,$$

v une place de K *et* $x \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. *On a alors,*

$$\text{si } v \in \mathrm{S}, \quad ||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v} . (2(n+1))^{-2(d+1)\operatorname{Deg}\mathfrak{P}} \leqslant ||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v,d} \leqslant ||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v} . (2(n+1))^{2(d+1)\operatorname{Deg}\mathfrak{P}},$$

$$\text{si } v \notin \mathrm{S}, \quad ||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v,d} = ||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer (cf. démonstration du lemme (1.8) que pour tout $d' \in \mathbf{N}$ on a

$$||\mathfrak{P}||_{\mathbf{x},v,d'} = \prod_{\mathbf{y} \in \mathscr{Z}(\mathfrak{P})} \mathrm{Dist}_{v,d'}(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

où $\mathscr{Z}(\mathfrak{P})$ est l'ensemble de cardinal $\operatorname{Deg}\mathfrak{P}$ des zéros de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$, et d'appliquer le lemme (2.9) à chaque facteur.

2. Énoncé du critère principal et démonstrations des corollaires

L'énoncé que nous appelons critère principal est le théorème suivant.

Théorème **(2.11)** *(critère principal).* — *Soient* K *un corps de nombres, v une place de* K *et* $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{C}_v^n$. *On suppose qu'il existe un idéal premier* $\mathscr{E}$ *de* $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ *de codimension* $n - k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ *tel que pour tout* $\mathrm{P} \in \mathscr{E}$ *on ait* $\mathrm{P}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$. *Soient* σ, δ, R *et* S *quatre fonctions croissantes de* $\mathbf{N}$ *dans l'ensemble des nombres réels* $\geqslant 1$. *On suppose que* $\tau = \sigma + \delta$ *tend vers l'infini avec* N, *que* $\mathrm{S}/\tau\delta^k$ *est une fonction croissante de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{R}_+$ *et que pour tout* $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ *on a :*

$$\mathrm{S}(\mathrm{N})^{k+2} \geqslant \mathrm{C}\tau(\mathrm{N}+1)\,\delta(\mathrm{N}+1)^k\,[\mathrm{S}(\mathrm{N})^{k+1} + \mathrm{R}(\mathrm{N}+1)^{k+1}],$$

où $C = C(n, [K:\mathbf{Q}], \mathscr{E})$ *est un nombre réel* $\geqslant 1$ *ne dépendant que de* n, $[K:\mathbf{Q}]$ *et* $\mathscr{E}$. *Sous ces hypothèses il n'existe pas de suite d'idéaux* $(I_N)_{N \geqslant N_0}$ *de* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *telle que pour tout* $N \geqslant N_0$ *l'ensemble des zéros de* I_N *dans la boule fermée* $B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-R(N)))$ *de* $\mathbf{C}_v^n$ *soit de cardinal fini et que l'idéal* I_N *soit engendré par des polynômes* $Q_1^{(N)}, \ldots, Q_{m(N)}^{(N)}$ *de degrés* $\leqslant \delta(N)$, *de hauteurs* $\bar{\mathbf{h}} \leqslant \sigma(N)$ *et vérifiant*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m(N)} \{ |Q_i^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n)|_{(v)} \} \leqslant \exp(-S(N)).$$

Remarques. — Dans l'énoncé ci-dessus on peut, quitte à remplacer les fonctions $R(N)$ (resp. $\delta(N)$) par la fonction $\max\{S(N-1), R(N)\}$ (resp. $[\delta(N)] + 1$) et C par $C/2^{k+1}$, supposer que pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a $S(N) \leqslant R(N+1)$ (et donc en particulier que $R(N)$ tend vers l'infini avec N) et $\delta(N) \in \mathbf{N}^*$.

• On peut encore supposer sans perte de généralité que $\|\boldsymbol{\theta}\|_{(v)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|\theta_i|_{(v)}\} \leqslant 1$. Il suffit en effet, si $|\theta_1|_{(v)} > 1$, d'appliquer à $\mathscr{E}$ et aux $Q_i^{(N)}$ $(i = 1, \ldots, m(N))$ la transformation

$$P(X_1, \ldots, X_n) \mapsto X_1^{d^\circ_{X_1} P} . P\left(\frac{1}{X_1}, X_2, \ldots, X_n\right)$$

pour se ramener, quitte à remplacer la fonction $R(N)$ qui tend vers l'infini avec N par la fonction $2R(N)$ et C par $C/2^{k+1}$ et à modifier l'indice N_0, aux hypothèses du théorème pour le point $\left(\frac{1}{\theta_1}, \theta_2, \ldots, \theta_n\right)$ qui vérifie $\left|\frac{1}{\theta_1}\right|_{(v)} \leqslant 1$.

On procède pareillement pour tous les j tels que $|\theta_j|_{(v)} > 1$.

Nous déduisons maintenant les corollaires (0.1) à (0.6), énoncés dans l'introduction, du théorème ci-dessus.

Déduction du corollaire (0.1). — On prend $K = \mathbf{Q}$, v la place à l'infini et $n = 1$ avec $\theta \in \mathbf{C}$ et $\mathscr{E} = (0)$ $(k = 1)$. On choisit encore pour tout $N \in \mathbf{N}$, $R(N) = 1$, $S(N) = C_0 \tau(N+1) \delta(N+1)$ où $C_0 > C(1, 1, (0))$, le théorème (2.11) assure qu'il n'existe pas de suite d'idéaux $(I_N)_{N \in \mathbf{N}}$ avec $I_N = (P_N)$ telle que $t(P_N) \leqslant \tau(N)$, $d^\circ P_N \leqslant \delta(N)$ et $0 < |P_N(\theta)| \leqslant \exp(-C_0 \tau(N+1) \delta(N+1))$, ce qui est la conclusion du corollaire (0.1).

Remarque. — On peut énoncer le critère de Gel'fond sans supposer que les fonctions $\tau(N)$ et $\delta(N)$ sont croissantes, l'encadrement imposé est alors de la forme

$$\begin{aligned} 0 < |P_N(\theta)| \leqslant \exp(-3(t(P_{N-1}) &+ t(P_N) \\ &+ t(P_{N+1}))(d^\circ P_{N-1} + d^\circ P_N + d^\circ P_{N+1})). \end{aligned}$$

Ce dernier résultat, plus fort que le corollaire (0.1), ne se déduit pas du théorème (2.11).

Déduction du corollaire (0.2). — On prend $K = \mathbf{Q}$, v la place à l'infini et $\mathscr{E} = (0)$ $(k = n)$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$ on pose $\tau(N) = 2N$, $S(N) = N^{\eta + a_2}$ et $R(N) = 3N^{\eta + a_1}$. La minoration de $|P_N(\theta_1, \ldots, \theta_n)|$ assure que l'idéal $I_N = (P_N)$ n'a pas de zéro dans la boule $B(\mathbf{0}, \exp(-R(N)))$ de $\mathbf{C}^n$. Les conditions reliant les fonctions σ, δ, R et S se traduisent pour N assez grand par les inégalités

$$0 < \eta + a_2 - n - 1 \quad \text{et} \quad a_1 - a_2 < \frac{1}{n+1}(\eta + a_2 - n - 1),$$

qui sont clairement vérifiées si $\eta \geqslant n + 1$ et $0 < a_1 < a_2\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Ceci montre donc et améliore le corollaire (0.2).

Remarque. — On pourra également montrer si on le désire que le théorème (2.11) entraîne et améliore, comme pour le corollaire (0.2), le théorème plus général de [R] (voir également [N2]).

Soit v une place de $\mathbf{Q}$ et $x_1, \ldots, x_k$ (resp. $y_1, \ldots, y_\ell$) des éléments de $\mathbf{C}_v$ tels que les valeurs $e^{x_i y_j}$ $(i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, \ell)$ soient définies et que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $X \geqslant X(\varepsilon)$ et tout k-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ (resp. ℓ-uplet $(\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$) d'entiers rationnels, non tous nuls, tels que $|\lambda_i| \leqslant X$ $(i = 1, \ldots, k)$ (resp. $|\mu_j| \leqslant X$ $(j = 1, \ldots, \ell)$), on ait

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right| \geqslant \exp(-X^\varepsilon) \, (\text{resp.} \left|\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j y_j\right| \geqslant \exp(-X^\varepsilon)).$$

Le théorème (0.3) est alors une conséquence triviale du cas (ii) du théorème suivant.

Théorème **(2.12)**. — *Avec les conditions ci-dessus on a*

(i) $\quad \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(x_i, y_j, e^{x_i y_j}) \geqslant k\ell/(k + \ell),$

(ii) $\quad \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(x_i, e^{x_i y_j}) \geqslant (k\ell - \ell)/(k + \ell),$

(iii) $\quad \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(e^{x_i y_j}) \geqslant (k\ell/(k + \ell)) - 1,$

où $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}}$ *désigne le degré de transcendance sur* $\mathbf{Q}$.

Démonstration. — On reprend [P1] jusque et y compris le § 4. (Bien que [P1] soit écrit dans le cas où la place v est finie, les arguments se transposent sans difficulté au cas de la place v infinie.) Au § 5 on substitue au critère d'indépendance algébrique mentionné le corollaire (0.2) avec $\eta = n + 1$. Le reste de la démonstration est un exercice, par exemple pour le (i), si $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(x_i, y_j, e^{x_i y_j}) = n < \kappa - 1$, où $\kappa = \frac{k\ell}{k+\ell} + 1$, on pose $a_1 = a_2\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \varepsilon$ avec $a_2 = \kappa - n - 1 - \frac{q}{d} - \varepsilon$ et l'on vérifie que $n + 1 + a_1 > \kappa$, ce qui permet d'appliquer le corollaire (0.2) pour montrer l'impossibilité de la construction faite sous l'hypothèse $\kappa > n + 1$ et donc que

$$n = \operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(x_i, y_j, e^{x_i y_j}) \geqslant \kappa - 1 = \frac{k\ell}{k+\ell}.$$

Déduction du corollaire (0.4). — On prend $K = \mathbf{Q}$, v la place à l'infini et $\mathscr{E} = (0)$ $(k = n)$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$ on pose $\tau(N) = 2N$, $R(N) = 1$, $S(N) = C_0(N+1)^{n+1}$ où $C_0 > 2^{n+1}\, C(n, 1, (0))$. Les hypothèses du corollaire (0.4) assurent que pour tout $N \geqslant N_0$ l'idéal $\widetilde{I}_N = (P_{i,N}(1, X_1, \ldots, X_n); i = 1, \ldots, m(N))$ de $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans la boule $B\left(\boldsymbol{\theta}, \frac{1}{e}\right)$ de $\mathbf{C}^n$ et le théorème (2.11) entraîne la conclusion du corollaire (0.4).

Déduction des corollaires (0.5) *et* (0.6). — On prend $K = \mathbf{Q}$, v la place à l'infini et $\mathscr{E} = (0)\,(k = n)$. Pour $N \in \mathbf{N}$ on pose $\tau(N) = 2N$, $S(N) = C_0(N+1)^{\eta}$ et $R(N) = 3C_0 N$ où $C_0 > (2^{k+1} + 6^{k+1}).C(n, 1, (0))$. Les conditions reliant les fonctions σ, δ, R et S se traduisent alors par la minoration $\eta \geqslant n + 1$ et le théorème (2.11) entraîne donc le corollaire (0.6) et améliore le corollaire (0.5).

Remarque. — Le corollaire (0.5) avec la condition $\eta \geqslant n+1$ est un cas particulier du corollaire (0.6) puisque l'on y demande que l'ensemble des zéros communs aux polynômes $P_{1,N}, \ldots, P_{m(N),N}$ dans la boule $B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-3C_0 N^{\eta}))$ de $\mathbf{C}^n$ soit vide.

3. Démonstration du critère principal

Dans tout ce paragraphe v est la place du corps de nombres K fixée dans l'énoncé du théorème (2.11) et $\boldsymbol{\theta}$ le point $(1, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. On considère K plongé dans $\mathbf{C}_v$ et pour simplifier les notations nous ne rappellerons pas les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ et v en indices des fonctions $\mathrm{Dist}_{v,\mathbf{d}}(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\theta},v,\mathbf{d}}$, $|\cdot|_{(v)}$ et M_v. On notera encore pour

$$\mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$$

tel que $y_0 \neq 0$, comme dans le lemme (1.16), $\|\mathbf{y}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{|y_i/y_0|\}$. Si $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_n]$ on notera ${}^hP$ le polynôme homogène

$${}^hP(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{d^\circ P}.P\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right)$$

de $\mathbf{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$ et si I est un idéal de $\mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_n]$ (ou $K[X_1, \ldots, X_n]$) on notera ${}^hI$ l'idéal de $\mathbf{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$ (ou $K[X_0, \ldots, X_n]$) engendré par les polynômes ${}^hP$ lorsque P parcourt I. Nous nous plaçons dorénavant sous les hypothèses du théorème (2.11) et nous nous ramenons, grâce aux remarques suivant l'énoncé de ce théorème, à considérer que $\|\boldsymbol{\theta}\| \leqslant 1$ et que pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a $S(N) \leqslant R(N+1)$ et $\delta(N) \in \mathbf{N}^*$.

Nous supposons qu'il existe une suite $(I_N)_{N \geqslant N_0}$ *d'idéaux de* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *telle que pour tout* $N \geqslant N_0$ *l'ensemble des zéros de* I_N *dans la boule* $B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-R(N)))$ *de* $\mathbf{C}_v^n$ *soit de cardinal fini et que l'idéal* I_N *soit engendré par des polynômes* $Q_1^{(N)}, \ldots, Q_{m(N)}^{(N)}$ *de degrés* $\leqslant \delta(N)$, *de hauteurs* $\bar{\mathbf{h}} \leqslant \sigma(N)$ *et vérifiant*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m(N)}\{|Q_i^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n)|\} \leqslant \exp(-S(N)).$$

Cette hypothèse, dite auxiliaire, sera faite dans tout ce § 3 et nous allons en déduire, pourvu que la constante C soit suffisamment grande, une contradiction qui établira donc le théorème (2.11) en montrant que pour une infinité de $N \geqslant N_0$ le point $\boldsymbol{\theta}$ est un zéro de l'idéal ${}^h\mathbf{I}_N$ dans $\mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$ (et donc que l'on a $Q_i^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m(N)$).

Considérons pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ l'assertion suivante (sans préjuger de sa véracité).

Assertion (A_r). *Il existe un entier* $N_r \geqslant N_0$ *et une suite* $(\mathfrak{P}_{N,r})_{N \geqslant N_r}$ *d'idéaux homogènes premiers de* $A = K[X_0, \ldots, X_n]$ *de codimension* $n + 1 - r' \geqslant n + 1 - r$ *vérifiant, avec* $\mathbf{d}_{N,r'} = (\delta(N), \ldots, \delta(N)) \in (\mathbf{N}^*)^{r'}$,

$(0)_{N,r}$ $\quad {}^h\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}_{N,r+1} \subset \mathfrak{P}_{N,r},$

$(\mathrm{i})_{N,r}$ $\quad \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r}) \leqslant c_1^{k-r+2}\,\tau(N)\,\delta(N)^k$ *et* $\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r}) \leqslant c_1\,\delta(N)^k$

$(\mathrm{ii})_{N,r}$ $$\|\mathfrak{P}_{N,r}\|_{\mathbf{d}_{N,r'}} < \exp\left\{-\left(\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r}) + \tau(N)\,.\,\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r})\right).\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{r/(k+1)}\right\}$$

où $c_1 \geqslant 1$ *est un nombre réel ne dépendant que de* n *et* $\mathscr{E}$.

On a alors le lemme suivant.

Lemme **(2.13)**. — *Sous les hypothèses du théorème* (2.11) *l'assertion* (A_{k+1}) *est vraie.*

Démonstration. — On choisit $N_{k+1} = N_0$ et pour tout $N \geqslant N_{k+1}$ on pose $\mathfrak{P}_{N,k+1} = {}^h\mathscr{E}$. Comme $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ est un zéro de $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{C}_v^n$ on a $\|\mathfrak{P}_{N,k+1}\|_{\mathbf{d}_{N,k+1}} = 0$ pour tout $N \geqslant N_{k+1}$ et les inégalités $(\mathrm{ii})_{N,k+1}$ sont donc vérifiées. Pour tout $N \geqslant N_{k+1}$ les quantités $\mathrm{Ht}(\mathfrak{P}_{N,k+1})$ et $\mathrm{Deg}(\mathfrak{P}_{N,k+1})$ ne dépendent que de n et $\mathscr{E}$, et les majorations $(\mathrm{i})_{N,k+1}$ découlent donc de la proposition (2.8). Le lemme est ainsi établi ($(0)_{N,k+1}$ est clair si l'on pose $\mathfrak{P}_{N,k+2} = {}^h\mathscr{E}$).

Nous allons maintenant montrer par récurrence le lemme suivant.

Lemme **(2.14)**. — *Sous les hypothèses du théorème* (2.11) *l'assertion* (A_1) *est vraie.*

Démonstration. — Comme (A_{k+1}) est vraie, il nous suffit de démontrer que pour $r = k + 1, \ldots, 2$ l'assertion (A_r) entraîne l'assertion (A_{r-1}). Supposons donc pour $r \in \{k+1, \ldots, 2\}$ que l'assertion (A_r) est vraie. Pour $N \geqslant N_r$ posons $X_{N,r} = \mathscr{Z}(\mathfrak{P}_{N,r}) \subset \mathbf{P}_n(\mathbf{C}_v)$. On déduit du lemme (2.7) et de l'inégalité $(\mathrm{ii})_{N,r}$ pour tout $N \geqslant N_r$ que

$$\min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{\mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\} \leqslant \exp\left\{\left(c_2 - \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{r/(k+1)}\right).\left(\tau(N) + \frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r})}{\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r})}\right)\right\},$$

où c_2 est un nombre réel > 0 ne dépendant que de n.

Comme $\dfrac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k} \geqslant C > (c_2 + 12 \log 3(n+1))^{k+1}$ on en déduit que

$$\min_{y \in X_{N,r}} \{\mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\} < [3(n+1)]^{-12\delta(N)}.$$

Soit $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in X_{N,r}$ réalisant le minimum ci-dessus; comme $\|\boldsymbol{\theta}\| \leqslant 1$, il découle des lemmes (2.9) et (1.16) (i) que $x_0 \neq 0$ et des lemmes (2.9) et (1.16) (ii) que $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\| < \frac{1}{2}\max\{1, \|\mathbf{x}\|\}$ (car sinon $\mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \geqslant [2(n+1)]^{-6\delta(N)}$).

Utilisant à nouveau les lemmes (2.9) et (1.16) (ii) on conclut enfin que

$$\min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} \leqslant \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\| \leqslant \mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \,.\, (2(n+1))^{6\delta(N)} . \max\{1, \|\mathbf{x}\|\}.$$

Vu que $\|\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\| + \|\boldsymbol{\theta}\| \leqslant \dfrac{3}{2} + \dfrac{\|\mathbf{x}\|}{2}$, d'où $\|\mathbf{x}\| \leqslant 3$, on a donc

$$\min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} \leqslant \exp\left\{\left(6 \log 3(n+1) + c_2 - \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{r/(k+1)}\right) . \left(\tau(N) + \frac{\mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r})}{\mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{N,r'}}(\mathfrak{P}_{N,r})}\right)\right\}.$$

Ceci montre que $\min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, car $\tau(N)$ tend vers l'infini avec N. Soit N_{r-1} un entier $\geqslant N_r$ tel que pour tout $N \geqslant N_{r-1}$ on ait

$$\exp(-R(N_0)) > \min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}.$$

Pour tout $N \geqslant N_{r-1}$ on définit alors M comme étant l'entier $\geqslant N_0$, dépendant de N, le plus grand tel que d'une part $M \leqslant N$ et d'autre part $\exp(-R(M)) > \min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}$. On a ou bien $M = N$, ou bien $M < N$ avec

$$\exp(-R(M+1)) \leqslant \min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} < \exp(-R(M));$$

nous distinguerons ces deux cas plus bas dans la construction de l'idéal $\mathfrak{P}_{N,r-1}$.

Dans les deux cas, si $\operatorname{codim} \mathfrak{P}_{N,r} \geqslant n - r + 2$, on pose $\mathfrak{P}_{N,r-1} = \mathfrak{P}_{N,r}$ (les conditions $(\mathrm{i})_{N,r-1}$ et $(\mathrm{ii})_{N,r-1}$ résultent de la formulation des conditions $(\mathrm{i})_{N,r}$ et $(\mathrm{ii})_{N,r}$). Sinon on a $\operatorname{codim} \mathfrak{P}_{N,r} = n - r + 1 < n$, c'est-à-dire $\dim X_{N,r} = r - 1 > 0$, ce qui conjugué au fait que $\exp(-R(M)) > \min_{y \in X_{N,r}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}$ montre que le cardinal de l'ensemble $X_{N,r} \cap B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-R(M)))$ est infini. L'hypothèse auxiliaire dit que $\mathscr{Z}(I_M) \cap B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-R(M)))$ est fini, ce qui entraîne que $X_{N,r} \not\subset \overline{\mathscr{Z}(I_M)}$ et donc qu'il existe un des générateurs de I_M, soit $Q_i^{(M)}$, tel que ${}^hQ_i^{(M)} \notin \mathfrak{P}_{N,r}$. Soit X_j tel que $X_j \notin \mathfrak{P}_{N,r}$, nous définissons un $A[\mathbf{d}_{N,r-1}]$-homomorphisme

$$\rho : A[\mathbf{d}_{N,r}] \to A[\mathbf{d}_{N,r-1}]$$

par $\rho(U_r) = X_j^{\delta(N) - d^\circ Q_i^{(M)}} . {}^hQ_i^{(M)}$, et soit f une forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}_{N,r}$ de $\mathfrak{P}_{N,r}$.

Considérons la forme $\rho(f) \in K[\mathbf{d}_{N,r-1}]$; comme $\rho(U_r) \notin \mathfrak{P}_{N,r}$, elle s'écrit, d'après la proposition 2.4,

$$\rho(f) = \lambda \prod_{h=1}^{t} f_h^{l_h},$$

où $f_1, \ldots, f_t$ sont des formes U-éliminantes d'indice $\mathbf{d}_{N,r-1}$ des idéaux premiers minimaux de codimension $n - r + 2$ associés à $\rho(\mathfrak{P}_{N,r}[\delta(N)])$. Le lemme 2.1 en liaison avec la proposition (1.12) (iii) et (v) et l'hypothèse $(\mathrm{i})_{N,r}$ montrent que pour tout $h = 1, \ldots, t$ on a

$$\begin{cases} \mathbf{h}(f_h) \leqslant \mathbf{h}(f) + (3r\log(n+1)+1)\,\tau(N)\,d^\circ f \leqslant c_1^{k-r+3}\,\tau(N)\,\delta(N)^k, \\ d^\circ f_h \leqslant d^\circ f \leqslant c_1\,\delta(N)^k, \end{cases}$$

car $\bar{\mathbf{h}}(\rho(U_r)) = \bar{\mathbf{h}}({}^hQ_i^{(M)}) = \bar{\mathbf{h}}(Q_i^{(M)}) \leqslant \tau(N)$ et $c_1 \geqslant 3r\log(n+1) + 2$.

Nous distinguons maintenant les deux cas mentionnés plus haut pour majorer la quantité $M(\widetilde{\mathfrak{d}} \circ \rho(f))/M(\rho(f))$.

Premier cas : si $M = N$. — D'après le corollaire (2.3) et l'hypothèse auxiliaire, on a

$$\frac{M(\widetilde{\mathfrak{d}} \circ \rho(f))}{M(\rho(f))} \leqslant [\|\mathfrak{P}_{N,r}\|_{\mathbf{d}_{N,r}} + e^{-S(N)}].\exp\{c_3(\mathbf{h}(f) + \tau(N)\,d^\circ f)\},$$

où c_3 est un nombre réel ne dépendant que de n et $[K:\mathbf{Q}]$.

On déduit des hypothèses du théorème (2.11) que, si C est assez grand en fonction de c_1, c_3 et n,

$$S(N) > \left\{\left[\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{(r-1)/(k+1)} + c_3 + \log(n+1)\right] 2c_1^{k-r+2}\,\tau(N)\,\delta(N)^k + \log 2\right\} .\log((n+1)^{3r}) + 1,$$

et

$$\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{r/(k+1)} > \left\{\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{(r-1)/(k+1)} + c_3 + \log 2\right\}\log((n+1)^{3r}) + 1.$$

En utilisant ces remarques et les estimations $(\mathrm{i})_{N,r}$ et $(\mathrm{ii})_{N,r}$ on déduit de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} \frac{M(\widetilde{\mathfrak{d}} \circ \rho(f))}{M(\rho(f))} &< \exp\left\{-(\mathbf{h}(f) + \tau(N)\,d^\circ f).\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{(r-1)/(k+1)}.(1 + 3r\log(n+1))\right\} \\ &< \exp\left\{-(\mathbf{h}(\rho(f)) + \tau(N)\,d^\circ \rho(f)).\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{(r-1)/(k+1)}\right\} \end{aligned}$$

grâce au lemme (2.1).

Deuxième cas : si $M < N$. — On a,

$$\exp(-R(M+1)) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{ \| \mathbf{y} - \boldsymbol{\theta} \| \} \leqslant (3(n+1))^{6\delta(N)} \cdot \min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{ \mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \}$$

et comme on a déjà vu que $\min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{ \mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) \} < (3(n+1))^{-12\delta(N)}$, il suit que

$$\exp(-R(M+1)) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{ \mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^{1/2} \}.$$

D'où,
$$\frac{|\rho(U_r)(\boldsymbol{\theta})|}{M(U_r(\boldsymbol{\theta}))} \leqslant e^{-S(M)} \leqslant \min_{\mathbf{y} \in X_{N,r}} \{ 1, \mathrm{Dist}_{\delta(N)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^{\eta} \},$$

si l'on pose $\eta = S(M)/2R(M+1) \geqslant 0$.

On a $\eta \leqslant 1$ car on s'est ramené à supposer $S(M) \leqslant R(M+1)$, et donc la proposition (2.5) entraîne avec l'inégalité $(\mathrm{ii})_{N,r}$ la majoration

$$\frac{M(\tilde{\mathfrak{d}} \circ \rho(f))}{M(\rho(f))} \leqslant \exp \left\{ -(\mathbf{h}(f) + \tau(N)\, d^\circ f) \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\, \delta(N)^k} \right)^{r/(k+1)} \cdot \frac{S(M)}{R(M+1)} - c_4 \right] \right\},$$

où c_4 est un nombre réel ne dépendant que de n et $[K : \mathbf{Q}]$.

Mais on a

$$\left(\frac{S(N)}{\tau(N)\, \delta(N)^k} \right)^{1/(k+1)} \cdot \frac{S(M)}{R(M+1)} \geqslant \left(\frac{S(M)^{k+2}}{R(M+1)^{k+1}\, \tau(M)\, \delta(M)^k} \right)^{1/(k+1)} \geqslant C^{1/(k+1)}$$

et C étant suffisamment grand en fonction de n et $[K : \mathbf{Q}]$ on déduit du lemme (2.1) et de l'inégalité ci-dessus que

$$\frac{M(\tilde{\mathfrak{d}} \circ \rho(f))}{M(\rho(f))} < \exp \left\{ -(\mathbf{h}(\rho(f)) + \tau(N)\, d^\circ \rho(f)) \cdot \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\, \delta(N)^k} \right)^{(r-1)/(k+1)} \right\}.$$

Dans les deux cas on démontre donc la même majoration. Utilisant la décomposition de $\rho(f)$ déjà indiquée plus haut, on déduit de cette majoration qu'il existe un idéal premier minimal de codimension $n - r + 2$ associé à $\rho(\mathfrak{P}_{N,r}[\delta(N)])$, et que nous posons dorénavant égal à $\mathfrak{P}_{N,r-1}$, de forme U-éliminante d'indice $\mathbf{d}_{N,r}$, égale à $f_h (1 \leqslant h \leqslant t)$ et tel que :

$$\| \mathfrak{P}_{N,r-1} \| = \frac{M(\tilde{\mathfrak{d}}(f_h))}{M(f_h)} < \exp \left\{ -(\mathbf{h}(f_h) + \tau(N)\, d^\circ f_h) \cdot \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\, \delta(N)^k} \right)^{(r-1)/(k+1)} \right\}.$$

Comme $\mathbf{h}(f_h) = \mathrm{Ht}_{\mathbf{d}_{N,r-1}}(\mathfrak{P}_{N,r-1})$ et $d^\circ f_h = \mathrm{Deg}_{\mathbf{d}_{N,r-1}}(\mathfrak{P}_{N,r-1})$ il suit que l'idéal $\mathfrak{P}_{N,r-1}$ vérifie $(\mathrm{ii})_{N,r-1}$ et aussi $(\mathrm{i})_{N,r-1}$ d'après ce qui a déjà été remarqué après la décomposition de $\rho(f)$. Nous venons donc, en supposant l'assertion (A_r) vraie, de construire pour tout $N \geqslant N_{r-1}$ un idéal $\mathfrak{P}_{N,r-1}$ premier dans A de codimension $\geqslant n - r + 2$ et vérifiant $(0)_{N,r-1}$, $(\mathrm{i})_{N,r-1}$ et $(\mathrm{ii})_{N,r-1}$. Ceci montre que si (A_r) est vraie, alors (A_{r-1}) est également vraie pour $r \in \{k+1, k, \ldots, 2\}$. Mais le lemme (2.13) assure que l'assertion (A_{k+1}) est vraie, il en résulte que l'assertion (A_1) est vraie et le lemme (2.14) est établi.

Il faut encore montrer le lemme suivant.

Lemme **(2.15)**. — *Sous les hypothèses du théorème* (2.11) *la suite* $(\mathfrak{P}_{N,1})_{N \geqslant N_1}$ *de l'assertion* (A_1) *est à valeurs dans un ensemble fini d'idéaux homogènes premiers de codimension* n *de* A.

Démonstration. — Comme $\|\mathfrak{P}_{N,1}\|_{d_{N,r'}} < 1$ pour $N \geqslant N_1$, les idéaux $(\mathfrak{P}_{N,1})_{N \geqslant N_1}$ sont tous de codimension n. Soit $N \geqslant N_1$ et M le plus petit entier compris entre N_0 et N tel que les deux conditions ci-dessous soient vérifiées. On pose $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{N,1}$.

$$(*) \qquad \mathrm{Ht}_{\delta(M)}(\mathfrak{P}) \leqslant c_1^{k+2}\, \tau(M)\, \delta(M)^k,$$

$$(**) \qquad \mathrm{Deg}_{\delta(M)}(\mathfrak{P}) \leqslant c_1\, \delta(M)^k;$$

cet entier M existe car N vérifie les conditions $(*)$ et $(**)$.

1) *Supposons d'abord que* $\min_{\mathbf{y} \in X_{N,1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} < \exp(-R(M))$, et montrons qu'alors $M = N_0$. Pour cela considérons l'éventualité $M > N_0$ et il existe un générateur $Q_i^{(M-1)}$ de I_{M-1} tel que ${}^hQ_i^{(M-1)} \notin \mathfrak{P}$ et j tel que $X_j \notin \mathfrak{P}$; on définit le A-homomorphisme

$$\rho : A[\delta(M)] \to A$$

par $\rho(U_1) = X_j^{\delta(M) - d^\circ Q_i^{(M-1)}}.{}^hQ_i^{(M-1)}$. Le corollaire (2.3) appliqué à cet homomorphisme s'écrit en utilisant l'hypothèse auxiliaire

$$(\mathrm{I}) \qquad 1 \leqslant [\|\mathfrak{P}\|_{\delta(M)} + \exp(-S(M-1))].\exp\{c_5(\mathrm{Ht}_{\delta(M)}(\mathfrak{P}) + \tau(M)\,\mathrm{Deg}_{\delta(M)}(\mathfrak{P}))\},$$

où c_5 est un nombre réel ne dépendant que de n et $[K : \mathbf{Q}]$.

On sait d'après le corollaire (2.10), la proposition (2.8) (i) et l'inégalité $(\mathrm{ii})_{N,1}$ que

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{P}\|_{\delta(M)} &\leqslant \|\mathfrak{P}\|_{\delta(N)}.\exp(c_6\,\tau(N)\,\mathrm{Deg}_{\delta(N)}(\mathfrak{P})) \\ &\leqslant \exp\left\{(\mathrm{Ht}_{\delta(N)}(\mathfrak{P}) + \tau(N)\,\mathrm{Deg}_{\delta(N)}(\mathfrak{P})) \times \left(c_6 - \left(\frac{S(N)}{\tau(N)\,\delta(N)^k}\right)^{1/(k+1)}\right)\right\}, \end{aligned}$$

où c_6 est un nombre réel ne dépendant que de n.

Comme on a encore $S(M-1) \geqslant C\tau(M)\,\delta(M)^k$, on en déduit en utilisant la proposition (2.8) que l'inégalité (I) est intenable et donc que

$$({}^hQ_1^{(M-1)}, \ldots, {}^hQ_{m(M-1)}^{(M-1)}) \subset \mathfrak{P}.$$

On a également les inclusions

$${}^h\mathscr{E} = \mathfrak{P}_{N,k+1} \subset \mathfrak{P}_{N,k} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_{N,1} = \mathfrak{P},$$

mais comme on suppose que $\min_{\mathbf{y} \in X_{N,1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} < \exp(-R(M))$ on déduit de l'hypothèse auxiliaire que $\mathfrak{P}$ est un idéal premier minimal associé à $({}^h\mathscr{E}, {}^hQ_1^{(M-1)}, \ldots, {}^hQ_{m(M-1)}^{(M-1)})$. Il suit alors de la proposition (2.6) que

$$\mathrm{Ht}_{\delta(\mathrm{M}-1)}(\mathfrak{P}) \leqslant 4(n+1)^2 \log(n+1)\, c_1\, \tau(\mathrm{M}-1)\, \delta(\mathrm{M}-1)^k$$

et $$\mathrm{Deg}_{\delta(\mathrm{M}-1)}(\mathfrak{P}) \leqslant c_1\, \delta(\mathrm{M}-1)^k$$

ce qui contredit la minimalité de M et montre que l'on a bien $\mathrm{M} = \mathrm{N}_0$ dans ce cas.

2) *Il reste encore à étudier l'éventualité* $\exp(-\mathrm{R}(\mathrm{M})) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N},1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}$. Dans ce cas on montre que $\mathrm{N} < \mathrm{N}'_0$ avec N'_0 un entier $\geqslant \mathrm{N}_1$ tel que pour tout $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}'_0$ on ait

$$\exp(-\mathrm{R}(\mathrm{N}_0)) > \min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N}',1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}.$$

L'existence de l'entier N'_0 résulte du fait que $\min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N}',1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} \xrightarrow[\mathrm{N}' \to \infty]{} 0$ et qui se démontre comme indiqué au début de la démonstration du lemme (2.14). Si $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}'_0$ il existe un entier $\mathrm{M}' \geqslant \mathrm{N}_0$ tel que

$$\exp(-\mathrm{R}(\mathrm{M}'+1)) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N},1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} < \exp(-\mathrm{R}(\mathrm{M}')).$$

Comme $\exp(-\mathrm{R}(\mathrm{M})) \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N},1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\}$, il est clair que $\mathrm{M}' < \mathrm{M}$. Montrons que $\mathrm{I}_{\mathrm{M}'} \subset \mathfrak{P}$. En effet, sinon soit $\mathrm{Q}_i^{(\mathrm{M}')}$ un générateur de $\mathrm{I}_{\mathrm{M}'}$ tel que ${}^h\mathrm{Q}_i^{(\mathrm{M}')} \notin \mathfrak{P}$ et soit j tel que $\mathrm{X}_j \notin \mathfrak{P}$; on définit

$$\rho : \mathrm{A}[\delta(\mathrm{M}')] \to \mathrm{A}$$

par $\rho(\mathrm{U}_1) = \mathrm{X}_j^{\delta(\mathrm{M}') - d^\circ \mathrm{Q}_i^{(\mathrm{M}')}} . {}^h\mathrm{Q}_i^{(\mathrm{M}')}$. En utilisant l'hypothèse auxiliaire on montre que, comme dans le second cas de la preuve du lemme (2.14), on a

$$\frac{|\rho(\mathrm{U}_1)(\boldsymbol{\theta})|}{\mathrm{M}(\mathrm{U}_1(\boldsymbol{\theta}))} \leqslant \min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N},1}} \{1, \mathrm{Dist}_{\delta(\mathrm{M}')}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^{\eta}\}$$

avec $\eta = \mathrm{S}(\mathrm{M}')/2\mathrm{R}(\mathrm{M}'+1) \geqslant 0$. On a $\eta \leqslant 1$ et la proposition (2.5) s'écrit alors

(II) $$1 \leqslant \|\mathfrak{P}\|_{\delta(\mathrm{M}')}^{\eta} . \exp\{c_7(\mathrm{Ht}_{\delta(\mathrm{M}')}(\mathfrak{P}) + \tau(\mathrm{M}')\, \mathrm{Deg}_{\delta(\mathrm{M}')}(\mathfrak{P}))\},$$

où c_7 est un nombre réel ne dépendant que de n et $[\mathrm{K} : \mathbf{Q}]$. Mais on a encore

$$\|\mathfrak{P}\|_{\delta(\mathrm{M}')} \leqslant \exp\left\{(\mathrm{Ht}_{\delta(\mathrm{N})}(\mathfrak{P}) + \tau(\mathrm{N})\, \mathrm{Deg}_{\delta(\mathrm{N})}(\mathfrak{P}))\left(c_6 - \left(\frac{\mathrm{S}(\mathrm{N})}{\tau(\mathrm{N})\, \delta(\mathrm{N})^k}\right)^{1/(k+1)}\right)\right\},$$

car $\mathrm{M}' < \mathrm{M} \leqslant \mathrm{N}$, et comme $\dfrac{\mathrm{S}(\mathrm{M}')}{\mathrm{R}(\mathrm{M}'+1)} . \left(\dfrac{\mathrm{S}(\mathrm{N})}{\tau(\mathrm{N})\, \delta(\mathrm{N})^k}\right)^{1/(k+1)} \geqslant \mathrm{C}^{1/(k+1)}$ il vient que l'inégalité (II) est intenable et que donc on a bien $({}^h\mathrm{Q}_1^{(\mathrm{M}')}, \ldots, {}^h\mathrm{Q}_{m(\mathrm{M}')}^{(\mathrm{M}')}) \subset \mathfrak{P}$.

Comme $\min_{\mathbf{y} \in \mathrm{X}_{\mathrm{N},1}} \{\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}\|\} < \exp(-\mathrm{R}(\mathrm{M}'))$ on déduit de l'hypothèse auxiliaire que $\mathfrak{P}$ est un idéal premier minimal associé à $({}^h\mathscr{E}, {}^h\mathrm{Q}_1^{(\mathrm{M}')}, \ldots, {}^h\mathrm{Q}_{m(\mathrm{M}')}^{(\mathrm{M}')})$ et il suit de la proposition (2.6) que

$$\mathrm{Ht}_{\delta(\mathrm{M}')}(\mathfrak{P}) \leqslant 4(n+1)^2 \log(n+1)\, c_1\, \tau(\mathrm{M}')\, \delta(\mathrm{M}')^k$$

et $$\mathrm{Deg}_{\delta(\mathrm{M}')}(\mathfrak{P}) \leqslant c_1\, \delta(\mathrm{M}')^k.$$

Ceci contredisant la minimalité de M entraîne que l'on a $N < N'_0$ dans ce cas. Dans les deux cas on établit à l'aide de la proposition (2.8) que

$$\mathrm{Ht}(\mathfrak{P}_{N,1}) + \mathrm{Deg}(\mathfrak{P}_{N,1}) \leqslant (c_1^{k+2} + c_1 + c_1 \log(n+1))\, \tau(N''_0)\, \delta(N''_0)^k,$$

avec $N''_0 = N_0$ ou N'_0 suivant le cas. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers homogènes de A de hauteur et degré bornés à l'avance, le lemme (2.15) est démontré.

Fin de la démonstration du théorème (2.11). — Grâce au lemme (2.15) on peut extraire de la suite $(\mathfrak{P}_{N,1})_{N \geqslant N_1}$ une sous-suite $(\mathfrak{P}_{N_\ell,1})_{\ell \in \mathbf{N}}$ telle que $N_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \infty$ et que $\mathfrak{P}_{N_\ell,1} = \mathfrak{P}$ soit un idéal premier fixe indépendant de ℓ. Il suit des inégalités $(\mathrm{ii})_{N_\ell,1}$ et du corollaire (2.10) que pour tout $\ell \in \mathbf{N}$ on a

$$\|\mathfrak{P}\| = \|\mathfrak{P}_{N_\ell,1}\| \leqslant \exp\left\{\tau(N_\ell)\,\mathrm{Deg}(\mathfrak{P})\left[-\left(\frac{S(N_\ell)}{\tau(N_\ell)\,\delta(N_\ell)^k}\right)^{1/(k+1)} + c_6\right]\right\}.$$

Comme $S(N) \geqslant C\tau(N)\,\delta(N)^k$ et que $\tau(N_\ell)$ tend vers l'infini avec ℓ on a donc $\|\mathfrak{P}\| = 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\theta} \in \mathscr{Z}(\mathfrak{P})$. Mais alors $\theta_1, \ldots, \theta_n$ appartiennent à une clôture algébrique $\overline{K}$ de K (dans $\mathbf{C}_v$) et les nombres $Q_i^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \overline{K}$ pour tout $N \geqslant N_0$ et $i = 1, \ldots, m(N)$ sont de taille $\leqslant \tau(N) + c_8\,\delta(N)$ où c_8 ne dépend pas de N. Comme $S(N) \geqslant C\tau(N)\,\delta(N)^k$ l'inégalité de la taille et la majoration

$$|Q_i^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n)| \leqslant \exp(-S(N))$$

pour tout $i = 1, \ldots, m(N)$ montrent que les nombres $Q_1^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n), \ldots, Q_{m(N)}^{(N)}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ sont tous nuls pour tout N assez grand. Ceci contredit l'existence d'une suite d'idéaux I_N satisfaisant l'hypothèse auxiliaire et achève donc d'établir le théorème (2.11) (critère principal) et tous ses corollaires mentionnés en introduction.

Formulons deux remarques finales. D'une part, il serait intéressant de généraliser le critère principal en substituant au corps de nombres K un corps quelconque de type de transcendance fini. D'autre part, on pourrait songer à substituer au point $\boldsymbol{\theta}$ des ensembles de points plus compliqués éventuellement munis de multiplicités.

LE CONTRE-EXEMPLE DE CASSELS

Dans cet appendice nous voulons étendre le théorème XIV (p. 94) de [Ca] pour montrer que l'hypothèse du théorème (2.11) qui impose aux idéaux I_N d'être de dimension zéro au voisinage du point $\boldsymbol{\theta}$ ne peut être éliminée. Par voie de conséquence il vient que sous l'hypothèse (5.3) (ii) de [C] (p. 359) on ne doit pas, lorsque $n \geqslant 3$, espérer que les nombres $\theta_1, \ldots, \theta_n$ sont algébriques (ni même algébriquement dépendants), et qu'aucune des hypothèses additionnelles

$$\text{a)}\quad \lim_{N \to \infty} \sigma_N/N^{n+3/2} = +\infty, \qquad \text{b)}\quad \dim I_N \leqslant n/2,$$

(ni même les deux) ne peut permettre, lorsque $n \geqslant 3$, d'arriver à une telle conclusion (contrairement à ce qui est affirmé dans [C]).

Proposition. — Soient $n \geqslant 2$ *et* $(\psi(N))_{N \in \mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels* > 0. *Il existe des nombres complexes* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *algébriquement indépendants sur* $\mathbf{Q}$ *tels que pour tout* $N \in \mathbf{N}$ *il existe une famille* $(a_{i,j})$, $i = 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, 2$ *d'entiers rationnels de valeurs absolues* $\leqslant N$ *et vérifiant pour* $i = 1, \ldots, n-1$, *d'une part* $a_{i,2} \neq 0$, *et d'autre part* $|a_{i,0} + a_{i,1}\theta_1 + a_{i,2}\theta_{i+1}| < \psi(N)$.

Remarques. — La proposition est intéressante lorsque $\psi(N)$ tend rapidement vers zéro quand N tend vers l'infini. Par exemple si $-\log \psi(N)/N^{n+3/2} \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$.

• Posons $I_N = (a_{1,0} + a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2, \ldots, a_{n-1,0} + a_{n-1,1}X_1 + a_{n-1,2}X_n)$; c'est un idéal premier de $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ de codimension $n - 1 < n$ dont les générateurs sont de hauteur $\bar{\mathbf{h}} \leqslant \log 3N$ et vérifient

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{|a_{i,0} + a_{i,1}\theta_1 + a_{i,1}\theta_{i+1}|\} < \psi(N).$$

On voit donc qu'il existe un point $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{C}^n$ et une suite d'idéaux $(I_N)_{N \in \mathbf{N}}$ de codimension $n - 1$ vérifiant les hypothèses du théorème (2.11) avec $\mathscr{E} = (0)$, $\delta(N) = 1$, $\tau(N) = 1 + \log 3N$ et $R(N+1) = S(N) = -\log \psi(N)$; exceptée celle sur les zéros de I_N dans la boule $B(\boldsymbol{\theta}, \exp(-R(N)))$. Si $-\log \psi(N)/\log N \xrightarrow[N \to \infty]{} +\infty$ ceci montre que le théorème (2.11) ne peut être vrai lorsque l'on supprime la condition, pour les idéaux I_N, d'être de dimension zéro au voisinage du point $\boldsymbol{\theta}$.

• On peut supposer, sans perte de généralité, que ψ est monotone décroissante vers zéro, quitte à remplacer $\psi(\mathrm{N})$ par $\min\left\{\frac{1}{\mathrm{N}}, \psi(1), \ldots, \psi(\mathrm{N})\right\}$.

Démonstration. — On suit la méthode de J. W. S. Cassels pour établir le théorème XIV de [Ca] (pp. 94 et suivantes). On construit une suite d'entiers $1 = \mathrm{N}_1 < \mathrm{N}_2 < \mathrm{N}_3, \ldots$, une suite de nombres réels $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots > 0$ et une suite de points $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\theta}_3, \ldots$ de $\mathbf{C}^n$ vérifiant les quatre conditions suivantes pour $s \geqslant 1$:

$(\mathrm{i})_s$ pour tout $0 < \mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}_s$ il existe une famille $(a_{i,j})$, $i = 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, 2$ d'entiers rationnels de valeurs absolues $\leqslant \mathrm{N}$ et telle que pour $i = 1, \ldots, n-1$ on ait d'une part $a_{i,2} \neq 0$ et d'autre part

$$|a_{i,0} + a_{i,1} z_1 + a_{i,2} z_{i+1}| < \psi(\mathrm{N})$$

pour tout $\mathbf{z} \in \mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$;

$(\mathrm{ii})_s$ pour tout polynôme irréductible P de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ de taille $\leqslant \mathrm{N}_{s-1}$ on a $\mathrm{P}(\mathbf{z}) \neq 0$ pour tout $\mathbf{z} \in \mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$ (si $s > 1$);

$(\mathrm{iii})_s$ $\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s) \subset \mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_{s-1}, \delta_{s-1})$ (si $s > 1$);

$(\mathrm{iv})_s$ il existe une famille $(a_{i,j}^{(s)})$, $i = 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, 2$ d'entiers rationnels de valeurs absolues $\leqslant \mathrm{N}_s$ telle que pour $i = 1, \ldots, n-1$ on ait d'une part $a_{i,2}^{(s)} \neq 0$ et d'autre part $a_{i,0}^{(s)} + a_{i,1}^{(s)} \theta_{1,s} + a_{i,2}^{(s)} \theta_{i+1,s} = 0$.

(Rappelons que $\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}, \delta) = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n ; \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|z_i - \theta_i|\} \leqslant \delta\}$.)

Il est clair que si l'on construit les $\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$ pour $s \geqslant 1$ la proposition est établie. En effet $(\mathrm{iii})_s$ entraîne qu'il existe un point $\boldsymbol{\theta} \in \bigcap_{s \geqslant 1} \mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$ et $(\mathrm{ii})_s$ que les composantes $\theta_1, \ldots, \theta_n$ de $\boldsymbol{\theta}$ sont algébriquement indépendantes sur $\mathbf{Q}$; enfin $(\mathrm{i})_s$ fournit la conclusion de la proposition.

Construisons par récurrence les $\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$. Pour $s = 1$ on pose $\mathrm{N}_1 = 1$, $\boldsymbol{\theta}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{C}^n$, $\delta_1 < \psi(1)$ et pour $i = 1, \ldots, n-1$ on prend $a_{i,2}^{(1)} = 1$ et $a_{i,0}^{(1)} = a_{i,1}^{(1)} = 0$ et $(\mathrm{i})_1$ découle de $(\mathrm{iv})_1$. Supposons $s > 1$ et $\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta}_{s-1}, \delta_{s-1})$ construit. Si $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ nous notons P_h sa partie homogène de plus haut degré et on considère le polynôme de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ homogène $\prod_{t(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}_{s-1}} \mathrm{P}_h$ où le produit est étendu aux polynômes irréductibles de $\mathbf{Z}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ de tailles $\leqslant \mathrm{N}_{s-1}$. Il existe des entiers $q_1, \ldots, q_{n-1}$ tels que $\prod_{t(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{N}_{s-1}} \mathrm{P}_h(1, -q_1, \ldots, -q_{n-1}) \neq 0$. On choisit encore un nombre rationnel r_1 suffisamment proche de $\theta_{1,s-1}$ pour que le point $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{C}^n$ (où $r_{i+1} = -(a_{i,0}^{(s-1)} + a_{i,1}^{(s-1)} r_1)/a_{i,2}^{(s-1)}$, $i = 1, \ldots, n-1$) vérifie $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|r_i - \theta_{i,s-1}|\} < \delta_{s-1}$. On note alors $a_{i,2}^{(s)} \in \mathbf{N}^*$ le p.p.c.m. des dénominateurs de r_1 et r_{i+1} pour $i = 1, \ldots, n-1$ et l'on définit

$$a_{i,1}^{(s)} = q_i a_{i,2}^{(s)} \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad a_{i,0}^{(s)} = -(q_i r_1 + r_{i+1}) a_{i,2}^{(s)} \in \mathbf{Z}.$$

On a donc pour $i = 1, \ldots, n-1$ l'égalité $a_{i,0}^{(s)} + a_{i,1}^{(s)} r_1 + a_{i,2}^{(s)} r_{i+1} = 0$.

On définit $\mathrm{N}_s = \max\{1 + \mathrm{N}_{s-1}, |a_{i,j}^{(s)}| \ (i = 1, \ldots, n-1 \text{ et } j = 0, 1, 2)\}$.

Il résulte du choix des entiers $q_1, \ldots, q_n$ que pour tout polynôme irréductible P de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de taille $\leqslant N_{s-1}$ le polynôme de $\mathbf{Q}[X_1]$

$$R(P)(X_1) = P(X_1, r_2 + q_1(r_1 - X_1), \ldots, r_n + q_{n-1}(r_1 - X_1))$$

n'est pas nul ($R(P)$ est le résultant par rapport aux variables $X_2, \ldots, X_n$ de P et des formes linéaires $a_{i,0}^{(s)} + a_{i,1}^{(s)} X_1 + a_{i,2}^{(s)} X_{i+1} (i = 1, \ldots, n-1)$).

On choisit $\theta_{1,s}$ un nombre complexe suffisamment proche de r_1 tel que

$$\prod_{t(P) \leqslant N_{s-1}} R(P)(\theta_{1,s}) \neq 0$$

(par exemple $\theta_{1,s} \notin \overline{\mathbf{Q}}$) et que le point $\boldsymbol{\theta}_s = (\theta_{1,s}, \theta_{2,s}, \ldots, \theta_{n,s}) \in \mathbf{C}^n$ vérifie d'une part $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ |\theta_{i,s} - \theta_{i,s-1}| \} < \delta_{s-1}$, et d'autre part

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{ |a_{i,0}^{(s-1)} + a_{i,1}^{(s-1)} \theta_{1,s} + a_{i,2}^{(s-1)} \theta_{i+1,s}| \} < \psi(N_s),$$

où pour $i = 1, \ldots, n-1$, on a posé $\theta_{i+1,s} = -(a_{i,0}^{(s)} + a_{i,1}^{(s)} \theta_{1,s})/a_{i,2}^{(s)}$ (on a donc $\theta_{i,s} - \theta_{i,s-1} = q_{i-1}(r_1 - \theta_{1,s}) + (r_i - \theta_{i,s-1})$ pour $i = 2, \ldots, n$).

Pour tout polynôme irréductible P de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ de taille N_{s-1} on a $P(\theta_{1,s}, \ldots, \theta_{n,s}) = R(P)(\theta_{1,s}) \neq 0$.

On choisit alors $\delta_s > 0$ suffisamment petit pour que tout point

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in B(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$$

satisfasse à

α) $$\prod_{t(P) \leqslant N_{s-1}} P(\mathbf{z}) \neq 0,$$

β) $$\mathbf{z} \in B(\boldsymbol{\theta}_{s-1}, \delta_{s-1}),$$

γ) $$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{ |a_{i,0}^{(s-1)} + a_{i,1}^{(s-1)} z_1 + a_{i,2}^{(s-1)} z_{i+1}| \} < \psi(N_s).$$

$(iv)_s$ découle alors des définitions de N_s et des $\theta_{i,s}$ $(i = 2, \ldots, n)$, $(iii)_s$ est conséquence de β), $(ii)_s$ est conséquence de α) et pour $(i)_s$ on distingue suivant que $N \leqslant N_{s-1}$ ou $N_{s-1} < N \leqslant N_s$. Dans le premier cas, $(i)_s$ se déduit de $(i)_{s-1}$ et dans le deuxième cas, la famille $(a_{i,j}^{(s-1)})$, $i = 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, 2$ est formée d'entiers rationnels de valeurs absolues $\leqslant N_{s-1} < N$ et vérifie pour $i = 1, \ldots, n-1$ d'une part $a_{i,2}^{(s-1)} \neq 0$ et d'autre part $|a_{i,0}^{(s-1)} + a_{i,1}^{(s-1)} z_1 + a_{i,2}^{(s-1)} z_{i+1}| < \psi(N_s) \leqslant \psi(N)$ pour tout $\mathbf{z} \in B(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$ d'après γ) et la décroissance de ψ. Ceci achève la construction de $B(\boldsymbol{\theta}_s, \delta_s)$ et la preuve de la proposition.

RÉFÉRENCES

[A] Amice, Y., *Les nombres p-adiques*, Paris, PUF, coll. « SUP », 1975.

[B] Brownawell, W. D., On the development of Gel'fond's method, *in Proc. Number Theory Carbondale 1979, Springer Lecture Notes in Math.*, **751** (1979), 16-44.

[BM] Brownawell, W. D., et Masser, D. W., Multiplicity estimates for analytic functions II, *Duke Mathematical Journal*, **47** (1980), 273-295.

[Ca] Cassels, J. W. S., *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[C] Chudnovsky, G. V., Criteria of algebraic independence of several numbers, dans *The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications*, *Proc. 1979-1980*, ed. D. V. et G. V. Chudnovsky, *Springer Lecture Notes in Math.*, **925** (1982), 323-368.

[D] Dvornicich, R., A criterion for the algebraic dependence of two complex numbers, *Bolletino UMI*, **15-A** (1978), 678-687.

[G] Gel'fond, A. O., *Transcendental and algebraic numbers*, Moscou, GITTL, 1952, et New York, Dover, 1960.

[M] Macaulay, F. S., *The algebraic theory of modular systems*, New York et Londres, Stechert-Hafner Service Agency, 1964.

[N1] Nesterenko, Y. V., Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk. USSR ser. Math.*, **41** (1977); *Math. USSR Izv.*, **11** (1977), 239-270.

[N2] Nesterenko, Y. V., On a sufficient criterion of algebraic independence of numbers, *Vestnik Univ. Moscou Ser. 1*, *Math. Mec.*, **12**, n° 4 (1983), 63-68 (en russe).

[N3] Nesterenko, Y. V., On the algebraic independence of algebraic numbers to algebraic powers, dans *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Ed. D. Bertrand et M. Waldschmidt, C. R. Conf. Luminy, 1982, *Birkhaüser Progress in Math.*, **31** (1983), 199-220.

[No] Northcott, D. G., *Lessons on rings, modules and multiplicities*, Cambridge University Press, 1968.

[P1] Philippon, P., Indépendance algébrique de valeurs de fonctions exponentielles p-adiques, *J. für die Reine und Angew. Math.*, **329** (1981), 42-51.

[P2] Philippon, P., *Pour une théorie de l'indépendance algébrique*, Thèse d'État de l'Université de Paris XI, juin 1983.

[R] Reyssat, E., Un critère d'indépendance algébrique, *J. für die Reine und Angew. Math.*, **329** (1981), 66-81.

[Ru] Rudin, W., *Function theory in polydiscs*, W. A. Benjamin Inc., 1969.

[S] Schneider, T., *Einfürhrung in die Transzendenten Zahlen*, Grundlehren der Math. Wiss. 81, Springer Verlag, 1957; Gauthier-Villars, 1959.

[W] Waldschmidt, M., Groupes algébriques et grands degrés de transcendance, *Acta Mathematica*, **156** (1986), 253-302.

[WZ] Waldschmidt, M. et Zhu Yao Chen, Une généralisation en plusieurs variables d'un critère de transcendance de Gel'fond, *C. R. Acad. Sc. Paris Ser. I*, **297** (1983), 229-232.

Centre Mathématique de l'Ecole Polytechnique,
Route de Saclay,
91128 Palaiseau Cédex.

Manuscrit reçu le 17 mai 1984.