

FERNAND PELLETIER

**Singularités d'ordre supérieur de 1-formes, 2-formes et équations de Pfaff**

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 61 (1985), p. 129-169

[http://www.numdam.org/item?id=PMIHES\\_1985\\_\\_61\\_\\_129\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1985__61__129_0)

© Publications mathématiques de l'I.H.É.S., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Publications mathématiques de l'I.H.É.S. » (<http://www.ihes.fr/IHES/Publications/Publications.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SINGULARITÉS D'ORDRE SUPÉRIEUR DE 1-FORMES, 2-FORMES ET ÉQUATIONS DE PFAFF

*par* FERNAND PELLETIER

## TABLE DES MATIÈRES

|   |     |
|---|-----|
| INTRODUCTION .....  | 129 |
| CHAPITRE I. — <b>Symbole d'un germe de 2-forme</b> .....  | 137 |
| 1.1. Symbole et étendard d'une 2-forme extérieure sur un drapeau .....  | 137 |
| 1.2. Symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux emboîtés .....   | 140 |
| 1.3. Symbole d'un germe de 2-forme .....  | 142 |
| CHAPITRE II. — <b>Singularités de rang des 2-formes et 2-formes fermées. Singularités de classe d'équations de Pfaff et de 1-formes</b> ..... | 145 |
| 2.1. Notations, Généralités .....   | 145 |
| 2.2. Singularités du rang des 2-formes .....  | 146 |
| 2.3. Relation entre les ensembles $\Sigma_{S_0} \dots S_k(\omega)$ d'un germe de 2-forme et les singularités $\Sigma_{S_0} \dots S_k$ .....   | 149 |
| 2.4. Cas des 2-formes fermées .....   | 150 |
| 2.5. Comportement générique du rang d'une 2-forme sur une variété. Cas des 2-formes fermées .....   | 153 |
| 2.6. Comportement générique de la classe d'une équation de Pfaff .....  | 157 |
| 2.7. Quelques singularités d'ordre supérieur de la classe d'une 1-forme .....   | 159 |
| CHAPITRE III. — <b>Construction des singularités dans <math>\Lambda_k^2</math> et <math>\Omega_k^2</math></b> .....                           | 162 |
| 3.1. Plan de démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1 .....   | 162 |
| 3.2. Démonstration de la proposition 3.1.3 (esquisse) .....   | 167 |

## INTRODUCTION

Soit  $\omega$  une forme différentielle sur une variété  $M$  de dimension  $n$ . Le *rang* de  $\omega$  en un point  $x$  de  $M$  est la codimension de l'espace associé à  $\omega$ , ou noyau de  $\omega$ , c'est-à-dire l'espace

$$K_\omega(x) = \{u \in T_x M \mid u \lrcorner \omega_x = 0\}$$

( $u \lrcorner \omega_x$  désigne le produit intérieur de  $\omega_x$  par  $u$ ). La *classe* de  $\omega$  en  $x$  est la codimension de l'intersection des noyaux de  $\omega$  et de  $d\omega$  en  $x$  c'est-à-dire l'espace  $K_\omega(x) \cap K_{d\omega}(x)$ . La classe et le rang sont invariants par le groupe des difféomorphismes de la variété.

En mécanique analytique, les formes de rang et de classe constants jouent un rôle essentiel, comme, par exemple, les formes symplectiques et les formes de contact. (Rappelons qu'une forme symplectique est une 2-forme fermée de rang maximum sur une variété de dimension paire, une forme de contact est une 1-forme de classe maximale sur une variété de dimension impaire.)

En général, le rang ou la classe varient d'un point à un autre. Le lieu des points où le rang, ou la classe, s'abaissent est une singularité de la forme, c'est-à-dire un ensemble de points où les propriétés de la forme changent localement.

Une situation analogue se présente pour le rang d'une application. La théorie des singularités de rang d'applications différentiables d'une variété  $M$  dans une variété  $P$ , les singularités de Thom-Boardman ([1], [2], [9], [12], [13], [17]), repose sur les deux principes suivants :

- A) la donnée d'un invariant numérique  $\rho$ , c'est-à-dire d'une application  $\rho : M \times C^\infty(M, P) \rightarrow N$  invariante par l'action du groupe des difféomorphismes de  $M$  et de  $P$ . Pour les applications, l'invariant est le rang;  
 B) la construction d'ensembles singuliers :

- 1) On définit les ensembles singuliers  $\Sigma_{r_1}(f) = \{x \in M \mid \rho(f, x) = r_1\}$ . Ce sont les premiers ensembles singuliers.  
 2) Supposons défini  $\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f)$ . Lorsque cet ensemble est une sous-variété régulière de  $M$  on peut étudier

$$\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1} r_i}(f) = \{x \in \Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f) \mid \rho(f_i, x) = r_i\},$$

où  $f_i$  est la restriction de  $f$  à  $\Sigma_{r_1 \dots r_{i-1}}(f)$ .

L'ensemble  $\Sigma_{r_1 \dots r_i}(f)$ , quand il peut être défini, n'est pas toujours une sous-variété régulière. Grâce aux théorèmes classiques de transversalité de René Thom ([18]), génériquement (c'est-à-dire pour un ensemble résiduel d'applications  $f$ ), les ensembles  $\Sigma_{r_1}(f), \dots, \Sigma_{r_1 \dots r_i}(f)$  sont des sous-variétés régulières de  $M$ .

Une première étude des *singularités de rang et de classe de formes différentielles* a été entreprise par Jean Martinet dans sa thèse ([10]). Voici rappelés ses principaux résultats.

Soit  $\omega$  une  $p$ -forme différentielle ou une  $p$ -forme fermée sur  $M$  :

- si  $p \neq 2$ , génériquement le rang de  $\omega$  est maximum en tout point de  $M$ , sauf peut-être sur un ensemble de points isolés où  $\omega$  s'annule (cette dernière situation se présente pour  $p = 1, n - 1, n$ );  
 — si  $p = 2$ , génériquement le rang de  $\omega$  est  $n - c$  le long d'une sous-variété régulière  $\Sigma_c$  de codimension  $\frac{c(c-1)}{2}$ , lorsque  $n - c$  est pair.

La classe d'une forme fermée est égale à son rang. La situation générique de la classe d'une  $p$ -forme est analogue à celle du rang, à la différence près que ce sont les 1-formes au lieu des 2-formes qui ont un comportement particulier.

L'étude de Jean Martinet concerne également le comportement générique de la

classe d'une équation de Pfaff. Rappelons que la *classe d'une équation de Pfaff*  $\sigma$  en  $x$  est la codimension du noyau  $K_{\omega \wedge d\omega}(x)$ , si  $\omega$  est une 1-forme représentant localement  $\sigma$ . La situation générique est alors la même que pour le rang d'une 2-forme. Dans le cas particulier des 2-formes fermées sur  $\mathbf{R}^4$ , il a poursuivi l'étude en montrant que la variété :

$$\Sigma_2(\omega) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid \text{rg}_x \omega = 2\}$$

peut être encore stratifiée en sous-variétés par la valeur de la dimension de l'intersection  $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_2(\omega)$  (voir aussi [14]). De cette manière, Jean Martinet suggérait que l'on pourrait construire pour les formes une théorie des singularités d'ordre supérieur, analogue à la théorie de Thom-Boardman. L'objet de ce travail est de faire partiellement une telle étude.

Comme le montrent tous les résultats rappelés plus haut, le rang (resp. la classe) d'une  $p$ -forme est un mauvais invariant pour  $p = 1$ , et  $3 \leq p \leq n - 2$  (resp.  $2 \leq p \leq n$ ), dans le sens où, génériquement, il est maximal en tout point. La description complète des ensembles singuliers d'ordre supérieur des  $(n - 1)$ -formes et  $(n - 1)$ -formes fermées et des  $n$ -formes ayant été réalisée par Golubitsky et Tischler dans [6], la théorie des ensembles singuliers d'ordre supérieur de formes n'a de raison d'être que dans les cas suivants :

- le rang d'une 2-forme;
- le rang d'une 2-forme fermée;
- la classe d'une 1-forme;
- la classe d'une équation de Pfaff.

C'est pourquoi les résultats que nous obtenons concernent ces quatre situations.

Comme pour les applications, les ensembles singuliers d'ordre supérieur de forme définis par Martinet, Tischler et Golubitsky possèdent la propriété caractéristique suivante :

Le noyau de la restriction de  $\omega$  au premier ensemble singulier  $\Sigma_r(\omega)$  est égal à l'intersection  $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_r(\omega)$ ,  $K_{\omega}(x)$  étant le noyau de  $\omega$  en  $x$ . Pour les formes, en général, on a seulement l'inclusion  $K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_r(\omega) \subset K_{\bar{\omega}}(x)$ , où  $K_{\bar{\omega}}(x)$  est le noyau en  $x$  de la restriction  $\bar{\omega}$  de  $\omega$  à  $\Sigma_r(\omega)$ . *Cette inclusion peut être stricte* comme le montre l'exemple suivant.

Soit  $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$  la 2-forme symplectique canonique sur  $\mathbf{R}^4$ ; la restriction  $\bar{\omega}$  de  $\omega$  au plan Lagrangien d'équation  $x_1 = x_2 = 0$  est nulle et on a l'inclusion stricte

$$K_{\bar{\omega}}(x) = L \supsetneq K_{\omega}(x) \cap L = \{0\}.$$

C'est pourquoi, pour étudier les singularités d'ordre supérieur du rang, il est naturel d'introduire les dimensions des espaces

$$K_{\omega}(x) \cap T_x \Sigma_c(\omega) \quad \text{et} \quad K_{\bar{\omega}}(x).$$

On définit ainsi

$$\Sigma_{c_1}(\Sigma_c(\omega)) = \{x \in \Sigma_c(\omega) \mid \dim(K_\omega(x) \cap T_x \Sigma_c(\omega)) = c_1 \text{ et } \dim K_\omega(x) = c_1\}$$

et on note cet ensemble  $\Sigma_{c_1}(\omega)$ .

Afin de donner le résultat général pour les 2-formes, il est nécessaire d'introduire les notations suivantes : soient  $M = M_0 \supset \dots \supset M_l \supset \dots \supset M_k$  des sous-variétés régulières de  $M$  et  $i_l : M_l \rightarrow M$  l'inclusion. On désigne par  $i_l^* : \Lambda^2 T^* M \rightarrow \Lambda^2 T^* M_l$

l'application induite par  $i_l$  et par  $\omega_l$  la forme induite  $i_l^* \omega$ . Pour tout  $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^k$  on définit l'ensemble

$$\Sigma_S^\omega[M_0, \dots, M_k] = \{x \in M_k \mid \dim(K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_k) = s_i, i = 0, \dots, k\}.$$

Le symbole de  $\omega$  en  $x \in M_k$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  est l'élément  $(S_0, \dots, S_k)$  de  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ si } s_i^j = \text{codim}[K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_j].$$

Le symbole se présente sous forme d'un tableau triangulaire :

$$\begin{array}{cccccc} S_0 & S_1 & \dots & S_j & \dots & S_k \\ s_0^0 & s_0^1 & \dots & s_0^j & \dots & s_0^k \\ & s_1^1 & \dots & s_1^j & \dots & s_1^k \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & s^j & \dots & s_j^k \leftarrow \dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x M \dots] \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & s_k^k \\ & & & & \uparrow & \\ & & & & \dim[K_{\omega \dots}(x) \cap T_x M_j] & \end{array}$$

Le résultat est alors le suivant (énoncé dans le § 2.2) :

*Théorème.* — Dans l'espace des 2-formes sur une variété  $M$  de dimension  $n$ , les propriétés suivantes sont génériques :

Pour tout entier  $k$  et tout  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$ , si  $n$  est assez grand, les ensembles  $\Sigma_{S_0}(\omega), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$  sont des sous-variétés régulières de  $M$ , où  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$  est défini par récurrence :

$$\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega) = \Sigma_{S_j}^\omega[M, \Sigma_{S_0}(\omega), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)].$$

Le symbole d'un élément générique  $\omega$  est  $(S_0, \dots, S_k)$  en tout point de  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$ . Lorsque  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$  est non vide, sa codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  est donnée par la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} \nu_{S_0 \dots S_k} = \nu_{S_0 \dots S_{k-1}} + & \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ & + s_{k-1}^k (\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_i^k). \end{aligned}$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}(\omega)$  soit non vide sont précisées dans le § 2.2. De plus, dans [15] on donne une méthode de construction d'exemples génériques à coefficients polynomiaux présentant en  $o \in \mathbf{R}^n$  la singularité  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}$ , lorsqu'elle existe.

Pour les 2-formes fermées le résultat s'énonce de la même manière mais avec l'hypothèse restrictive suivante sur  $(S_0 \dots S_k)$  : sauf pour au plus un entier  $1 \leq j \leq k$ ,  $S_j$  vérifie

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \quad 2 \leq j \leq k.$$

Si, pour tout  $j$ , la condition (\*) est satisfaite, dans les 2-formes et les 2-formes fermées les ensembles singuliers ont même codimension. Par contre, lorsqu'il existe un entier  $j$  ne vérifiant pas (\*), la codimension n'est plus la même. Il faut retrancher à  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  :

$$\begin{aligned} \rho_k = & \frac{(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)}{6} (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 2) \\ & + (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k) (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) \frac{s_{k-1}^k}{2} \\ & + \sum_{i=1}^{k-3} (s_i^{k-2} - s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-2} + s_{i-1}^{k-1}) \frac{s_{i-1}^k}{2} + (\nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-3}} \\ & + s_{k-2}^{k-2} - s_{k-1}^{k-1} + 2s_{k-2}^{k-1}) (s_{k-3}^k - 1) \frac{s_{k-3}^k}{2}. \end{aligned}$$

Enfin dans les autres cas, en général, les ensembles singuliers seront des ensembles semi-algébriques non réguliers. Pour illustrer ces résultats voici des symboles  $(S_0, \dots, S_k)$

qui conduisent à des genericités différentes dans les 2-formes et les 2-formes fermées :

|         |   |         |         |         |   |                  |
|---------|---|---------|---------|---------|---|------------------|
| 222     |   | 2220    | 2220    | 2221    | } | 2-formes fermées |
| 32      | → | 320     | 320     | 321     |   |                  |
| 3       |   | 30      | 31      | 31      |   |                  |
| codim 6 |   | 0       | 2       | 2       |   |                  |
|         |   | codim 6 | codim 7 | codim 8 |   |                  |

|         |   |         |          |          |   |          |
|---------|---|---------|----------|----------|---|----------|
| 222     |   | 2220    | 2221     | 2220     | } | 2-formes |
| 32      | → | 320     | 321      | 321      |   |          |
| 3       |   | 30      | 31       | 31       |   |          |
| codim 7 |   | 1       | 1        | 3        |   |          |
|         |   | codim 7 | codim 10 | codim 10 |   |          |

Le résultat sur les singularités de classe d'une équation de Pfaff s'exprime, comme pour les 2-formes, avec l'hypothèse (\*) sur  $(S_0, \dots, S_k)$  et l'hypothèse supplémentaire suivante :

L'équation de Pfaff  $\sigma$  ne s'annule pas en restriction aux ensembles singuliers  $\Sigma_{s_0 \dots s_j}(\sigma)$ ,  $0 \leq j \leq k$  (voir § 2.6).

Pour les singularités de classe d'une 1-forme il est nécessaire d'introduire un invariant supplémentaire permettant de comparer les intersections de  $K_\omega \cap K_{d\omega}$  et de  $K_{d\omega}$  avec les espaces tangents  $T\Sigma_{s_0}, \dots, T\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ . Cet invariant se présente sous forme d'un tableau triangulaire  $(V_0, \dots, V_k)$ . On définit des ensembles singuliers  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}^{V_0 \dots V_k}$ . Le résultat se formule de manière analogue à l'énoncé du théorème sur les 2-formes moyennant des hypothèses du type (\*) sur  $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$  et l'hypothèse supplémentaire : la 1-forme ne s'annule pas en restriction aux différents ensembles singuliers. Tous ces résultats sont développés dans le § 2.7.

Nous allons indiquer comment sont établis tous ces théorèmes. Comme pour les singularités de Thom-Boardman, leur démonstration se ramène, grâce aux théorèmes de transversalité de Thom, à la construction de singularités convenables dans un espace de jets, selon le développement rappelé maintenant.

Soient  $L_k$  le groupe des  $(k + 1)$ -jets en 0 de difféomorphismes de  $\mathbf{R}^n$  conservant l'origine et  $\Lambda_k^2$  l'espace des  $k$ -jets en 0 de 2-formes dans  $\mathbf{R}^n$ . On construit une singularité  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  dans l'espace  $\Lambda_k^2$ , c'est-à-dire une sous-variété  $L_k$ -invariante. L'espace  $\Lambda_k^2(M)$  des  $k$ -jets de 2-formes sur une variété  $M$  est l'espace total d'une fibration  $\Lambda_k^2(M) \rightarrow M$  de fibre type  $\Lambda_k^2$  et de groupe structural  $L_k$ . La singularité  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  étant  $L_k$ -invariante, elle permet de construire un sous-ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(M)$  de  $\Lambda_k^2(M)$  fibré sur  $M$  de fibre type  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ . Les théorèmes classiques de transversalité de Thom assurent la genericité des résultats annoncés. Avant d'indiquer comment est définie  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ , précisons les données algébriques utilisées.

Soit  $\omega$  un germe en  $o \in \mathbf{R}^n$  de 2-forme. Par définition,  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  est l'ensemble des points de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$  tels que

$$\dim[\mathbf{K}_{\omega_i}(x) \cap T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)] = s_i^j$$

(voir les notations introduites avant le théorème sur les 2-formes). Pour définir  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  à partir de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$ , il suffit de l'idéal de définition  $\sigma_\omega^k$  de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$  et de la famille d'espaces

$$[\mathbf{K}_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)] \quad 0 \leq i \leq k.$$

Par récurrence, la définition de  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  nécessite les idéaux de définitions  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$  des ensembles  $\Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{k-1}}(\omega)$  et la famille d'espaces  $[\mathbf{K}_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_j}(\omega)]$   $0 \leq i \leq j \leq k$  ou, de manière équivalente, la famille des espaces orthogonaux  $[\mathbf{K}_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_j}(\omega)]^\perp$   $0 \leq i \leq j \leq k$ .

Si maintenant on considère  $\omega \in \Lambda_k^2$  comme un germe à coefficient polynomial, l'idéal  $\sigma_\omega^1$  sera défini modulo  $\mathfrak{m}^{k+1}$  ( $\mathfrak{m}$  étant l'idéal maximal de l'anneau des germes de fonctions en  $o \in \mathbf{R}^n$ ). D'une manière générale,  $\sigma_\omega^j$  sera défini modulo  $\mathfrak{m}^{k-j+1}$ .

Nous allons maintenant indiquer comment est construit  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  (Chap. II). Soit  $A_k$  l'anneau des  $k$ -jets en  $o$  de fonction sur  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathfrak{m}_k$  son idéal maximal. A tout  $k$ -jet  $\omega$  appartenant à  $\Lambda_k^2$  on va associer canoniquement, c'est-à-dire de façon invariante pour l'action du groupe  $L_k$  :

- 1° Des idéaux  $\sigma_\omega^j \subset \mathfrak{m}_{k-j+1}$   $1 \leq j \leq k$ .
- 2° Une famille d'espaces  $A_i^j(\omega) \subset (\mathbf{R}^n)^*$   $0 \leq i \leq j \leq k$ .

Le symbole du  $k$ -jet  $\omega$  est  $(S_0, \dots, S_k)$  avec  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  si  $s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega)$ .

Dans chaque espace  $\Lambda_h^2$ ,  $0 \leq h \leq k$ , on définit les ensembles semi-algébriques  $\bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_h} = \{\omega \text{ dont le symbole est } (S_0, \dots, S_h)\}$ .

L'ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  annoncé est alors

$$\{\omega \in \bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_k} \mid \text{codim } \sigma_\omega^{h+1}(o) = \dim \bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_h}, 0 \leq j \leq k-1\}.$$

Par un argument de transversalité on montre facilement que

$$\text{codim}(\bar{\Sigma}_{s_0 \dots s_k} - \Sigma_{s_0 \dots s_k}) > n.$$

En d'autres termes seul « l'ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  apparaît génériquement ». Comme  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  est  $L_k$ -invariant, il faut montrer qu'il est une variété : c'est l'objet du chapitre III.

Ce travail est décomposé en trois chapitres. Dans le premier, on rappelle les résultats de classification des orbites de  $GL_n(\mathbf{R})$  sur  $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^* \times D_k$ . On introduit ensuite la notion fondamentale de symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux



emboîtés. On construit enfin par récurrence une famille d'idéaux emboîtés  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ , associés à tout germe de 2-forme  $\omega$ , et caractérisés par le fait que,  $\sigma_\omega^{l+1}$  est l'idéal de définition de l'ensemble singulier  $\Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega)$  si  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^l$  sont réguliers. Le chapitre II est le chapitre essentiel de ce travail. On y définit d'abord le symbole et l'étendard d'un  $k$ -jet de 2-forme, à partir du symbole d'un germe  $\tilde{\omega}$  et de la famille  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$  d'idéaux associés. On définit ensuite les singularités  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  et  $\xi_{s_0 \dots s_k}$  de 2-formes et de 2-formes fermées. Enfin, on énonce les résultats de généralité obtenus. Dans ce chapitre, on rappelle également les résultats sur les singularités de classe d'équations de Pfaff et de 1-formes de [15]. Enfin dans le chapitre III, on donne une esquisse de démonstration des résultats sur les singularités  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  et  $\xi_{s_0 \dots s_k}$  de 2-formes et de 2-formes fermées.

Les résultats sur la stabilité des formes et la construction de modèles [6], [10], [16] s'appuient sur les propriétés des ensembles singuliers définis par J. Martinet. On peut espérer que ce travail permettra d'obtenir de nouveaux résultats de stabilité ou d'obtenir une écriture sous formes normales des 1-formes et 2-formes génériques construites. Par exemple, on pourra peut-être ainsi donner une réponse au problème de la stabilité des 2-formes fermées, problème qui reste encore ouvert à ma connaissance.

Dans [8], Jakubczyk et Przytycki ont défini des singularités de  $k$ -uples de champs de vecteurs. Ils ont montré qu'il existe une bijection entre les singularités génériques de deux champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^3$  et les singularités de classe de l'équation de Pfaff définie par ces deux champs. Il est bien certain que les singularités de champs de vecteurs ne se ramènent pas à l'étude des singularités de formes et inversement. Cependant, il existe certaines relations entre elles. Par exemple, la donnée de  $n - 1$  champs de vecteurs indépendants sur  $\mathbf{R}^n$  équivaut à la donnée d'une équation de Pfaff sur  $\mathbf{R}^n$ . On peut se demander s'il existe certaines correspondances entre les singularités définies dans [8] et les singularités d'équations de Pfaff que nous définissons. La détermination de formes normales dans un cas permettrait d'obtenir des formes normales dans l'autre cas.

## I. — SYMBOLE D'UN GERME DE 2-FORME

### 1.1. Symbole et étendard d'une 2-forme extérieure sur un drapeau [15]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Son dual est noté  $E^*$  et on identifie  $\Lambda^p E^*$  à l'espace des  $p$ -formes alternées sur  $E$ . Le produit intérieur de  $\omega \in \Lambda^p E^*$  par  $x$  de  $E$  est noté  $x \lrcorner \omega$ . On appelle *support* (resp. *noyau*) de  $\omega$  l'image  $S_\omega$  (resp. le noyau  $K_\omega$ ) de l'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E^*, \\ x &\rightarrow x \lrcorner \omega. \end{aligned}$$

Le *rang* (resp. le *corang*) de  $\omega$  est la dimension de  $S_\omega$  (resp.  $K_\omega$ ). Pour les éléments de  $\Lambda^2 E^*$  rappelons que l'on a le résultat suivant :

**1.1.1. Proposition** [5] [10]. — *Le rang de  $\omega \in \Lambda^2 E^*$  est pair et on a les équivalences suivantes :*

- (i) *le rang de  $\omega$  est  $2r$ ;*
- (ii)  *$\omega^r \neq 0$  et  $\omega^{r+1} = 0$  où  $\omega^r = \omega \wedge \dots \wedge \omega$   $r$  fois;*
- (iii) *il existe des 1-formes indépendantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2r}$  telles que*

$$\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \dots + \alpha_{2r-1} \wedge \alpha_{2r}.$$

Pour tout élément  $g$  du groupe  $GL(E)$  des automorphismes de  $E$ , on note  $g^*$  l'automorphisme de  $\Lambda^p E^*$  induit par  $g$ . Le rang d'une  $p$ -forme est invariant sous l'action de  $GL(E)$  sur  $\Lambda^p E^*$ . Soit  $\Sigma_r$  l'ensemble des éléments de  $\Lambda^2 E^*$  dont le rang est égal à  $r$ . On peut reformuler la proposition 1.1.1 de la manière suivante :

**1.1.1'. Proposition.** — *Les ensembles  $\Sigma_r$ ,  $0 \leq r \leq n$ , s'identifient aux orbites de l'action de  $GL(E)$  sur  $\Lambda^2 E^*$ .*

Soit  $i: F \rightarrow E$  l'inclusion d'un sous-espace vectoriel  $F$  de codimension  $p < n$ . Etant donné une  $q$ -forme  $\omega$  sur  $E$ , on note  $\bar{\omega} = i^* \omega$  la restriction de  $\omega$  à  $F$ . Le noyau  $K_{\bar{\omega}}$  contient l'intersection  $K_\omega \cap F$  mais en général l'inclusion est stricte (voir l'introduction). L'orthogonal de  $K_{\bar{\omega}} \cap F$  est l'espace  $S_\omega + F^\perp$ . On appelle *support de  $\omega$  sur  $F$*  l'espace  $S_\omega(F) = (K_{\bar{\omega}})^\perp$ . Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  est une base de  $F^\perp$ , on voit immédiatement que  $S_\omega(F)$  est égal au support de la  $(p+q)$ -forme  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega$ . Le résultat suivant se démontre facilement :

**1.1.2. Lemme.** — Soit  $\omega$  une 2-forme sur  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(1) On a l'inclusion  $S_\omega(F) \subset S_\omega + F^\perp$ .

(2) La dimension de  $S_\omega(F)$  est de la forme  $p + 2r$  et les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $\dim S_\omega(F) = p + 2r$ ;

(ii)  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega^r \neq 0$  et  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \omega^{r+1} = 0$ ;

(iii) le rang de la restriction de  $\omega$  à  $F$  est  $2r$ .

(3) Pour tout automorphisme  $g$  de  $E$ ,

$$S_{g^*\omega}[g^{-1}(F)] = g^*[S_\omega(F)].$$

Au couple  $(\omega, F)$  formé d'une 2-forme et d'un sous-espace de  $E$  on a associé les espaces  $(S_\omega, S_\omega(F), S_\omega + F^\perp)$ . Les dimensions de ces espaces sont des invariants de l'action de  $GL(E)$  sur le produit  $\Lambda^2 E^* \times \Gamma_p(E)$  où  $\Gamma_p(E)$  est la grassmannienne des  $(n - p)$ -plans de  $E$ . On verra plus loin que ces invariants caractérisent complètement les orbites de l'action de  $GL(E)$  sur ce produit d'espaces. Plus généralement, on se propose dans ce paragraphe de rappeler la construction d'un système d'invariants qui caractérisent complètement les orbites de  $GL(E)$  sur  $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$  (théorème 1.1.4) où  $D_k(E)$  est l'ensemble des drapeaux de longueur  $k$  de  $E$  (c'est-à-dire des suites d'espaces  $F_0 = E \supset F_1 \supset \dots \supset F_k$ ).

Soit  $F_0 = E \supset F_1 \supset \dots \supset F_k$  un drapeau de  $E$  et  $\omega$  une 2-forme sur  $E$ . Comme précédemment, à  $(\omega, F_0, \dots, F_k)$  on associe la famille d'espaces

$$S_\omega(F_i) + F_j^\perp \quad 0 \leq i \leq j \leq k.$$

En utilisant le lemme 1.1.2 (1) et (3) on démontre facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l}
 a) \{0\} = F_0^\perp \subset S_\omega \subset S_\omega + F_1^\perp \subset \dots \subset S_\omega + F_i^\perp \subset \dots \subset S_\omega + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad F_1^\perp \subset S_\omega(F_1) \subset \dots \subset S_\omega(F_1) + F_i^\perp \subset \dots \subset S_\omega(F_1) + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \subset \dots \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad F_i^\perp \subset S_\omega(F_i) \subset \dots \subset S_\omega(F_i) + F_k^\perp \\
 \qquad \qquad \qquad \subset \dots \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \qquad \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \qquad \cup \\
 \qquad \qquad \qquad F_k^\perp \subset S_\omega(F_k)
 \end{array}$$

b) La famille  $S_\omega(F_i) + F_j^\perp$  est équivariante sous l'action de  $GL(E)$ .

**1.1.3. Définition.** — Soit  $\omega$  une 2-forme sur  $E$  et  $(F_0, \dots, F_k)$  un drapeau de longueur  $k$ .

- (i) La famille  $S_\omega(F_i) + F_j^\perp$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ , est appelée *étendard* de  $\omega$  sur  $(F_0, \dots, F_k)$ .  
(ii) On appelle *symbole* de  $\omega$  sur  $(F_0, \dots, F_k)$  l'élément  $(S_0, \dots, S_k)$  de  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \quad \text{si } s_i^j = \text{codim } S_\omega(F_i) + F_j^\perp.$$

A partir des propriétés *a)* ci-dessus et du lemme 2.1.2 *b)*, on montre facilement que le symbole  $(S_0, \dots, S_k)$  d'une 2-forme  $\omega$  sur  $(F_0, \dots, F_k)$  vérifie :

- c)*  $n \geq s_j^j \geq \dots \geq s_i^j \geq \dots \geq s_0^j$ ,  
*d)*  $n \geq \dim F_i \geq s_i^i \geq s_i^{i+1} \geq \dots \geq s_i^i \geq \dots \geq s_i^k$ ,  
*e)* il existe une suite décroissante d'entiers  $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_k$  tels que :

$$\dim F_i - s_i^i = 2\ell_i \quad 0 \leq i \leq k.$$

On a alors le résultat suivant (voir [15]).

**1.1.4. Théorème.** — Soient  $\omega$  et  $\omega'$  des 2-formes sur  $E$  et  $(F_0, \dots, F_k)$ ,  $(F'_0, \dots, F'_k)$  des drapeaux de  $E$  de longueur  $k$ . Il existe un automorphisme  $g$  de  $E$  tel que

$$g(F'_i) = F_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \text{et } g^* \omega = \omega',$$

si et seulement si

- (i)  $\dim F_i = \dim F'_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ,  
(ii) le symbole de  $\omega$  sur  $(F_0, \dots, F_k)$  est égal au symbole de  $\omega'$  sur  $(F'_0, \dots, F'_k)$ .

Etant donné  $(S_0, \dots, S_k, T_k)$  appartenant à  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$ , on désigne par  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$  l'ensemble des  $(\omega, F_0, \dots, F_k)$  de  $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$  tels que :

$$\bullet \dim F_i = t_i \quad \text{si } T_k = \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix},$$

- le symbole de  $\omega$  sur  $(F_0, \dots, F_k)$  est  $(S_0, \dots, S_k)$ .

Le théorème 1.1.4 peut également se formuler de la manière suivante :

**1.1.4. Théorème.** — La partition de  $\Lambda^2 E^* \times D_k(E)$  définie par les ensembles  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$  s'identifie à la partition de cet ensemble par les orbites de l'action de  $GL(E)$ .

Nous allons terminer ce paragraphe par la *définition du symbole, en un point, d'une 2-forme différentielle sur une famille de variétés emboîtées*. Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  et  $\Lambda^2 T^*M$  le fibré des 2-formes différentielles sur  $M$ . Le *noyau*, le *support*, le *rang* de  $\omega$  en  $x \in M$  sont respectivement le noyau  $K_\omega(x)$ , le support  $S_\omega(x)$  et le rang de la 2-forme extérieure  $\omega(x)$ . Soient  $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$  des sous-variétés emboîtées de  $M$ . On note  $\omega_\ell$  la 2-forme sur  $M_\ell$  induite par la 2-forme  $\omega$ , pour  $0 \leq \ell \leq k$ .

**1.1.5. Définition.** — On appelle *symbole*  $(S_0, \dots, S_k)$  de  $\omega$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  en  $x \in M_k$  le symbole (au sens de 1.1.3) de la 2-forme extérieure  $\omega(x)$  sur le drapeau  $(T_x M_0, T_x M_1, \dots, T_x M_k)$  de  $T_x M$  c'est-à-dire :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ si et seulement si } \begin{aligned} s_0^j &= \dim[K_{\omega_0}(x) \cap T_x M_j], \\ s_i^j &= \dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x M_j], \\ s_j^j &= \dim[K_{\omega_j}(x) \cap T_x M_j]. \end{aligned}$$

Pour tout  $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$  on désigne par  $\Sigma_S^\omega(M_0, \dots, M_k)$  l'ensemble des  $x$  de  $M_k$  tels que l'on ait

$$\dim[K_{\omega_\ell}(x) \cap T_x M_k] = s_\ell \quad 0 \leq \ell \leq k.$$

Par exemple, l'ensemble  $\Sigma_{S_0}^\omega(M)$ , pour  $S_0 = (s_0^0)$ , est l'ensemble des points  $x$  de  $M$  où le rang de  $\omega$  est  $n - s_0^0$ . Si cet ensemble est une variété,  $\Sigma_{S_1}^\omega(M, \Sigma_{S_0}^\omega(M))$ , pour  $S_1 = \begin{pmatrix} s_0^1 \\ s_1^1 \end{pmatrix}$ , est l'ensemble des points  $x$  de  $\Sigma_{S_0}^\omega(\omega)$  où le symbole de  $\omega$  sur  $(M, \Sigma_{S_0}^\omega(\omega))$  est  $(S_0, S_1)$ . D'une manière générale, si  $M_0 = M$ ,  $M_1 = \Sigma_{S_0}^\omega(M)$ ,  $M_2 = \Sigma_{S_1}^\omega(M, M_1)$ ,  $\dots$ ,  $M_k = \Sigma_{S_{k-1}}^\omega(M_0, \dots, M_{k-1})$  sont des sous-variétés de  $M$ ,  $\Sigma_{S_k}^\omega(M_0, M_1, \dots, M_k)$  est l'ensemble des  $x$  de  $M_k$  où le symbole de  $\omega$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  est  $(S_0, \dots, S_k)$ . Cet ensemble sera désigné par  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^\omega(\omega)$ .

## 1.2. Symbole d'un germe de 2-forme et d'une famille d'idéaux emboîtés

Etant donné un germe de 2-forme en  $o$  dans  $\mathbf{R}^n$  et une famille  $J_0, \dots, J_k$  d'idéaux emboîtés, on va définir une famille de modules de 1-formes et un symbole en  $x \in \mathbf{R}^n$  voisin de  $o \in \mathbf{R}^n$ . Pour ce, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

**1.2.1.** Soit  $\mathbf{A}$  l'anneau des germes de fonction  $C^\infty$  en  $o \in \mathbf{R}^n$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal. On désigne par  $\Lambda^p$ ,  $1 \leq p \leq n$  (resp.  $\chi$ ), le module des germes en  $o$  de formes différentielles de degré  $p$  (resp. de champ de vecteurs) sur  $\mathbf{R}^n$ . Etant donné un sous-

module  $M$  de  $\Lambda^1$ , de type fini, engendré par  $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ , on note  $M(x)$  le sous-espace de  $(\mathbf{R}^n)^*$  engendré par  $\omega_1(x), \dots, \omega_\ell(x)$  pour  $x$  voisin de  $o$ . Le *rang de  $M$*  est par définition la dimension de l'espace  $M(o)$ .

L'*idéal jacobien* d'un sous-module de type fini  $M$  de  $\Lambda^1$  est l'idéal  $jc(M)$  engendré par les  $(r+1) \times (r+1)$  mineurs de la matrice  $(\alpha(\mathbf{X}))$  ( $\alpha \in M$ ,  $\mathbf{X} \in \chi$ ) où  $r$  est le rang de  $M$ . A tout idéal  $J$  de  $\mathbf{A}$ , on associe le sous-module  $dJ$  de  $\Lambda^1$  engendré par les différentielles  $df$ , pour  $f \in J$ . On dira que  $J$  est *régulier*, s'il possède un système de  $r$  générateurs où  $r$  est le rang de  $dJ$ . Le *support* d'une  $p$ -forme  $\omega \in \Lambda^p$  est le sous-module  $S_\omega$  de  $\Lambda^1$  engendré par l'image de l'application

$$\begin{aligned} \chi^{p-1} &\rightarrow \Lambda^1 \\ (\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_{p-1}) &\rightarrow \omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}). \end{aligned}$$

Par exemple le support d'une 2-forme  $\omega$  est le sous-module engendré par les 1-formes  $\omega \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \cdot \right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées de  $\mathbf{R}^n$ . Le *rang du module  $S_\omega$*  est le rang de la matrice antisymétrique  $\left( \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mid 0 \leq i < j \leq n \right)$  en  $o$ , c'est-à-dire le rang de la 2-forme extérieure  $\omega(o)$ .

Enfin le *support*  $S_\omega(J)$  d'une 2-forme  $\omega \in \Lambda^2$  *relativement* à un idéal  $J$  de  $\mathbf{A}$  est le sous-module de  $\Lambda^1$  engendré par les sous-modules  $S_{\alpha \wedge \omega}$  où  $\alpha$  est un élément de  $\Lambda^r dJ$ ,  $r = \text{rang de } dJ$ . Par exemple, si  $J$  est régulier,  $[S_\omega(J)]^\perp(o)$  est égal à  $K_{\bar{\omega}}(o)$  où  $\bar{\omega}$  est la forme induite par  $\omega$  sur la variété définie par  $J = o$ .

**1.2.2.** Soit  $\omega$  un germe de 2-forme et  $J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_k \subset \mathbf{A}$  une suite d'idéaux emboîtés. Si  $J_0, \dots, J_k$  sont réguliers et définissent des variétés  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_k$ , les espaces tangents  $T_x V_0, \dots, T_x V_k$  en  $x \in V_k$  voisin de  $o$  forment un drapeau de  $T_x V_0$ . La 2-forme extérieure  $\omega(x)$  et ce drapeau déterminent *un étendard et un symbole dépendant de  $x$ , appelé symbole de  $(\omega, J_0, \dots, J_k)$  en  $x$ .*

Ces définitions s'étendent en fait, de manière naturelle, aux cas où  $J_0 \subset \dots \subset J_k$  sont des idéaux quelconques (de type fini) en utilisant les notions de support relatif, idéaux jacobiens... introduites précédemment. On désigne toujours par  $V_i$  l'ensemble des zéros de  $J_i$  et on procède comme suit :

- a) On forme les sous-modules  $S_\omega(J_i)$  qui définissent, si  $J_i$  est régulier, les noyaux des restrictions  $\omega_i$  de  $\omega$  aux variétés  $V_i$ .
- b) On forme ensuite les sous-modules  $S_\omega(J_i) + dJ_j$ ,  $0 \leq i < j \leq k$ , qui définissent (dans le cas régulier) la position relative du noyau de  $\omega_i$  et de l'espace tangent à  $V_j$ .

On considère le tableau de sous-modules (de type fini) et d'inclusions (évidentes).

$$\begin{array}{c}
 J_0 \subset S_\omega \subset \dots \subset S_\omega + dJ_i \subset \dots \subset S_\omega + dJ_k \\
 \subset \quad \quad \quad \cup \quad \quad \quad \cup \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 dJ_i \subset S_\omega(J_i) \subset \dots \subset S_\omega(J_i) + dJ_k \\
 \subset \quad \quad \quad \cup \quad \quad \quad \cup \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 dJ_k \subset S_\omega(J_k)
 \end{array}$$

En chaque point  $x$  de  $V_k$  voisin de  $o$ , ces modules définissent un étendard dans  $(\mathbf{R}^n)^*$  et donc un symbole en  $x$  de  $(\omega, J_0, \dots, J_k)$ . L'ensemble des points  $x$  de  $V_k$  où ce symbole reste égal au symbole en  $o$  est caractérisé par la somme des idéaux jacobiens de tous les modules  $S_\omega(J_i) + dJ_j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ .

Finalem<sup>ent</sup>, à tout germe  $\omega$  de 2-forme et toute suite d'idéaux emboîtés  $J_0 \subset \dots \subset J_k$  nous avons associé des sous-modules  $S_\omega(J_i) + dJ_j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ , et un *nouvel idéal*  $\sigma(\omega, J_0, \dots, J_k)$ , engendré par  $J_k$  et les idéaux jacobiens des sous-modules  $S_\omega(J_i) + dJ_j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ . Soit  $L$  le groupe des difféomorphismes locaux de  $\mathbf{R}^n$  qui fixent l'origine. De manière évidente les modules  $S_\omega(J_i) + dJ_j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ , et l'idéal  $\sigma(\omega, J_0, \dots, J_k)$  associés à  $(\omega, J_0, \dots, J_k)$  sont compatibles avec les différentes actions de  $L$  sur les 2-formes, les idéaux de  $A$ , les sous-modules de  $\Lambda^1, \dots$

**1.3. Symbole d'un germe de 2-forme**

Soit  $\omega$  un germe de 2-forme. La construction faite dans le paragraphe précédent va nous permettre de définir, pour chaque entier  $k$ , par récurrence, un symbole « d'ordre  $k$  » en  $o$  qui ne dépendra que du  $k$ -jet de  $\omega$ .

(0) On part du couple  $(\omega, J_0 = \{o\} = \sigma_\omega^0)$ . En appliquant 1.2.2 on obtient le tableau trivial de sous-modules

$$dJ_0 = \{o\} \subset S_\omega.$$

Le symbole de  $\omega$  en  $o$  est le corang  $s_\omega^0$  de  $\omega$  en  $o$  ( $n - s_\omega^0$  est le rang de  $\omega$  en  $o$ ). L'idéal  $\sigma(\omega, J_0) = \sigma_\omega^1$  est égal à l'idéal jacobien de  $S_\omega$ .

(1) On applique 1.2.2 à  $(\omega, J_0, J_1 = \sigma_\omega^1)$ . Le tableau de sous-modules correspondant est

$$\begin{array}{c}
 dJ_0 = o \subset S_\omega \subset S_\omega + d\sigma_\omega^1 \\
 \subset \quad \quad \quad \cup \\
 d\sigma_\omega^1 \subset S_\omega(\sigma_\omega^1)
 \end{array}$$

le symbole de  $\omega$  en  $o$  est  $\begin{pmatrix} s_0^0 & s_0^1 \\ & s_1^1 \end{pmatrix}$ , où

$$s_0^0 = \text{codim } S_\omega(o), \quad s_0^1 = \text{codim}[S_\omega + d\sigma_\omega^1](o),$$

$$s_1^1 = \text{codim}[S_\omega(\sigma_\omega^1)](o).$$

(2) Par récurrence on définit l'idéal  $\sigma(\omega, \sigma^1, \dots, \sigma^{k-1}) = \sigma^k$ .

En appliquant 1.2.2 à  $(\omega, \sigma_\omega^0, \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k)$  on obtient le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc} d\sigma_\omega^0 \subset S_0^0(\omega) \subset \dots \subset S_0^i(\omega) \subset \dots \subset S_0^j(\omega) \subset \dots \subset S_0^k(\omega) & & & & & & \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ d\sigma_\omega^i \subset S_i^i(\omega) \subset \dots \subset S_i^j(\omega) \subset \dots \subset S_i^k(\omega) & & & & & & \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ d\sigma_\omega^j \subset S_j^j(\omega) & & & & & & \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ d\sigma_\omega^k \subset S_k^k(\omega) & & & & & & \end{array}$$

où  $S_i^j(\omega) = S_\omega(\sigma_\omega^i) + d\sigma_\omega^j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ .

Le symbole « d'ordre  $k$  » de  $\omega$  en  $o$  est  $(S_0, S_1, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  où

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ si } s_i^j = \text{codim } S_i^j(\omega)(o).$$

En conclusion, à tout germe de 2-forme on a associé un symbole  $S_0$  d'ordre  $0$ , un symbole  $(S_0, S_1)$  d'ordre  $1, \dots$ , un symbole  $(S_0, \dots, S_k)$  d'ordre  $k$  respectivement égaux au symbole de  $(\omega, \sigma_\omega^0)$ ,  $(\omega, \sigma_\omega^0, \sigma_\omega^1)$ ,  $\dots$ ,  $(\omega, \sigma_\omega^0, \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k)$  en  $o$  (voir 1.2.2);  $\sigma_\omega^{\ell+1}$  étant l'idéal engendré par  $\sigma_\omega^\ell$  et les idéaux jacobiens des modules  $S_\omega(\sigma_\omega^i) + d\sigma_\omega^j$  pour  $0 \leq i \leq j \leq \ell$ . Par construction, les zéros de l'idéal  $\sigma_\omega^1$  forment l'ensemble  $\Sigma_{S_0}(\mathbf{R}^n)$  des points où le rang de  $\omega$  est égal à  $n - s_0^0$ . Plus généralement, il résulte de la construction précédente :

**Lemme 1.3.1.** — Soit  $\omega$  un germe en  $o \in \mathbf{R}^n$  de 2-forme et  $(S_0, \dots, S_k)$  son symbole d'ordre  $k$  en  $o$ . Si les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell$ ,  $0 < \ell < k$ , sont réguliers et définissent des variétés  $V_1, \dots, V_\ell$ , l'ensemble des zéros de  $\sigma_\omega^{\ell+1}$  est l'ensemble :

$$\begin{aligned} & \Sigma_{S_\ell}^\omega(\mathbf{R}^n, V_1, \dots, V_\ell) \\ & = \{x \in V_\ell \text{ voisin de zéro où } \text{codim}[S_i^\ell(\omega)](x) = s_i^\ell, 0 \leq i \leq \ell\} \text{ si } S_\ell = \begin{pmatrix} s_0^\ell \\ \vdots \\ s_\ell^\ell \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(voir les notations introduites à la fin du § 1.1).

Si les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell$  sont réguliers, l'ensemble  $V_{\ell+1}$  des zéros de  $\sigma_\omega^{\ell+1}$  est égal à

$$\Sigma_{S_\ell}^\omega(\mathbf{R}^n, V_1, \dots, V_\ell)$$



c'est-à-dire

$$V_{\ell+1} = \Sigma_{s_0 s_1 \dots s_\ell}(\omega)$$

(voir les notations introduites à la fin du § 1.1).

D'autre part, l'idéal  $\sigma_\omega^1$  étant l'idéal jacobien de  $S_\omega$ , il ne dépend que du 1-jet de  $\omega$  en  $o$ . De même, les modules  $S_1^1(\omega) = S_\omega(\sigma_\omega^1)$  et  $S_0^1(\omega) = S_\omega + d\sigma_\omega^1$  ne dépendent que du 1-jet de  $\omega$ . D'une manière générale,  $\sigma_\omega^k$  étant engendré par  $\sigma_\omega^{k-1}$  et les idéaux jacobiens des modules  $S_i^j(\omega)$  pour  $0 \leq i \leq j \leq k-1$ , l'idéal  $\sigma_\omega^k$  et les  $S_0^k(\omega), \dots, S_i^k(\omega), \dots, S_k^k(\omega)$  ne dépendront que du  $k$ -jet de  $\omega$  en  $o$ . On obtient ainsi la

*Proposition 1.3.2.* — Soit  $\omega$  un germe en  $o \in \mathbf{R}^n$  de 2-forme. Son symbole  $(S_0, \dots, S_k)$  d'ordre  $k$  en  $o$  ne dépend que du  $k$ -jet de  $\omega$ . Si les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$  sont réguliers, chaque ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$  défini plus haut est une sous-variété régulière de  $\mathbf{R}^n$  d'équation  $\sigma_\omega^{\ell+1} = 0$  pour  $1 < \ell < k$ .

Lorsque les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^{\ell-1}$  sont réguliers, l'ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$  est l'ensemble des  $x$  de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$ , voisins de  $o$ , pour lesquels on a :

$$\begin{aligned} \dim[K_{\omega_i}(x) \cap T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)] &= s_i^\ell \\ &= \dim[K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)] \text{ si } S_\ell = \begin{pmatrix} s_0^\ell \\ \vdots \\ s_i^\ell \\ \vdots \\ s_\ell^\ell \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour définir  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$  à partir de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$ , il suffit donc de l'idéal de définition de  $\Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega)$ , c'est-à-dire  $\sigma_\omega^\ell$ , et de la famille d'espaces

$$K_{\omega_i}(o) \cap T_o \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega), \quad 0 \leq i \leq \ell,$$

c'est-à-dire  $[S_i^\ell(\omega)](o)$  par passage à l'orthogonal. On a ainsi établi :

*Proposition 1.3.3.* — Soit  $\omega$  un germe de 2-forme. Si les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$  sont réguliers, les ensembles  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$ ,  $0 \leq \ell \leq k$ , sont complètement caractérisés par les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell$  et la famille d'espaces  $[S_i^j(\omega)](o)$ ,  $0 \leq i \leq j \leq \ell$ ,  $(S_0, \dots, S_k)$  étant le symbole d'ordre  $k$  de  $\omega$ .

**II. — SINGULARITÉS DE RANG DES 2-FORMES  
ET 2-FORMES FERMÉES  
SINGULARITÉS DE CLASSE D'ÉQUATIONS DE PFAFF  
ET DE 1-FORMES**

**2.1. Notations, généralités**

On désigne par  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathfrak{m}_k$ ,  $\Lambda_k^p$  (resp.  $L_k$ ) l'espace des  $k$ -jets (resp.  $(k+1)$ -jets) en  $o \in \mathbf{R}^n$  d'éléments de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{m}$ ,  $\Lambda^p$  (resp.  $L$ ) et par  $\pi_k$  la projection des espaces de germes sur les espaces de  $k$ -jets. Soit  $\omega$  un  $k$ -jet de 2-forme et choisissons un germe  $\tilde{\omega}$  dont le  $k$ -jet  $\pi_k \tilde{\omega}$  est égal à  $\omega$ . Comme dans le § 1.3, on peut associer à  $\tilde{\omega}$  :

- 1) les idéaux  $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^k$  qui sont définis modulo  $\mathfrak{m}^k, \dots, \mathfrak{m}^{k-\ell+1}, \dots$ , respectivement,
- 2) les modules  $S_0^0(\tilde{\omega}), \dots, S_i^\ell(\tilde{\omega}), 0 \leq i \leq \ell, \dots, S_i^k(\omega), 0 \leq i \leq k$ , définis modulo  $\mathfrak{m}^k \Lambda^1, \dots, \mathfrak{m}^{k-\ell} \Lambda^1, \dots, \mathfrak{m} \Lambda^1$  respectivement,
- 3) un symbole  $(S_0, \dots, S_k)$  : le symbole d'ordre  $k$  de  $\tilde{\omega}$ .

Si les idéaux  $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^{k-1}$  sont réguliers (ce qui ne dépend que de  $\omega$ ), les ensembles  $\Sigma_{S_0 \dots S_\ell}(\tilde{\omega}), 0 \leq \ell \leq k$ , sont caractérisées par  $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$  et par les espaces  $[S_i^\ell(\tilde{\omega})](o)$  pour  $0 \leq i \leq \ell$  (voir proposition 1.3.3). D'autre part, si  $\tilde{\omega}'$  est un autre germe de  $k$ -jet  $\omega$ , les ensembles  $\Sigma_{S_0 \dots S_\ell}(\tilde{\omega})$  et  $\Sigma_{S_0 \dots S_\ell}(\tilde{\omega}')$  ont un contact d'ordre  $k - \ell$  en  $o$  (proposition 1.3.2).

Ainsi lorsque les idéaux  $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^{k-1}$  sont réguliers, les ensembles  $\Sigma_{S_0 \dots S_\ell}(\tilde{\omega}), 0 \leq \ell \leq k$  sont déterminés à l'ordre «  $k - \ell + 1$  près » par les idéaux  $\sigma_{\tilde{\omega}}^1, \dots, \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$  et les espaces  $[S_i^j(\tilde{\omega})](o), 0 \leq i \leq j \leq \ell$ .

A tout  $k$ -jet  $\omega$  de  $\Lambda_k^2$  on va donc associer :

- 1) les idéaux  $\sigma_\omega^0 = \{0\}, \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^\ell, \dots, \sigma_\omega^k$ , où  $\sigma_\omega^\ell = \pi_{k-\ell} \sigma_{\tilde{\omega}}^\ell$  est un idéal de l'anneau quotient  $\mathbf{A}_{k-\ell}$ ;
- 2) des espaces vectoriels  $A_i^j(\omega) = [S_i^j(\tilde{\omega})](o) \subset \Lambda_0^1 = (\mathbf{R}^n)^*$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ , où  $\tilde{\omega}$  est un germe de 2-forme de  $k$ -jet  $\omega$ .

Si  $B_\omega^\ell$  désigne l'espace  $[d\sigma_\omega^\ell](o), 0 \leq \ell \leq k$ , l'étendard de la 2-forme extérieure  $\omega(o)$  sur  $(B_\omega^{0,1}, \dots, B_\omega^{k,1})$  (voir déf. 1.1.3) est égal à

$$[A_0^0(\omega), \dots, A_i(\omega), \dots, A_k^k(\omega)].$$

Le symbole de  $\omega(o)$  sur  $(B_\omega^{0,1}, \dots, B_\omega^{k,1})$  est égal à  $(S_0, \dots, S_k)$ , où

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_k^j \end{pmatrix} \text{ si } s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega).$$

*Définition.* — Soit  $\omega$  un élément de  $\Lambda_k^2$ .

i) On appelle *étendard* de  $\omega$  la famille d'espaces

$$A_0^0(\omega), \dots, A_i^j(\omega), \dots, A_k^k(\omega).$$

ii) On appelle *symbole* de  $\omega$ , l'élément  $(S_0, \dots, S_k)$  de  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  défini par :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ où } s_i^j = \text{codim } A_i^j(\omega).$$

## 2.2. Singularités du rang des 2-formes

Etant donné  $(S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$  on désigne par  $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$  l'ensemble des  $\omega$  de  $\Lambda_k^2$  dont le symbole est  $(S_0, \dots, S_k)$  et tels que :

$$\dim B_\omega^i = t_i, \quad 0 \leq i \leq k, \quad \text{si } T = \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}.$$

On note  $G_\ell$  la grassmannienne des  $n - \ell$  plans de  $(\mathbf{R}^n)^*$  et  $G_{s_\ell} = G_{s_0^\ell} \times \dots \times G_{s_k^\ell}$

le produit des grassmanniennes  $G_{s_0^\ell}, \dots, G_{s_k^\ell}$  où  $S = \begin{pmatrix} s_0^\ell \\ \vdots \\ s_i^\ell \\ \vdots \\ s_k^\ell \end{pmatrix}$ . L'application

$$\sigma_{s_0 \dots s_k T} : \varepsilon_{s_0 \dots s_k T} \rightarrow G_{s_0} \times G_{s_1} \times \dots \times G_{s_k} \times G_T = G_{s_0 \dots s_k T}$$

qui à  $\omega$  associe  $(A_0^0(\omega), A_0^1(\omega), A_1^1(\omega), \dots, A_0^k(\omega), \dots, A_k^k(\omega), B_\omega^0, \dots, B_\omega^k)$  commute avec l'action de  $L_k$  sur  $\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}$  et sur  $G_{s_0 \dots s_k T}$ . (L'action de  $L_k$  sur  $G_{s_0 \dots s_k T}$  est définie via la projection  $\pi_k : L_k \rightarrow L_0 \equiv \text{GL}_n(\mathbf{R})$ .)

Comme  $(A_0^j(\omega), \dots, A_0^k(\omega), \dots, A_k^k(\omega))$  est l'étendard de la 2-forme extérieure  $\omega(o)$  sur le drapeau  $(B_\omega^{0,1}, \dots, B_\omega^{k,1})$ , l'image  $D_{s_0 \dots s_k T} = \sigma_{s_0 \dots s_k T}(\varepsilon_{s_0 \dots s_k T})$  de  $\sigma_{s_0 \dots s_k T}$  est

une orbite de l'action de  $L_k$  sur  $G_{S_0 \dots S_k T}$  (voir [15] chap. II). Il est facile de voir que, s'il est non vide, l'ensemble  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T}$  est un ensemble semi-algébrique. Pour tout

$I = \begin{pmatrix} i_0 \\ \vdots \\ i_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$ , on note  $I_\ell$  l'élément  $\begin{pmatrix} i_0 \\ \vdots \\ i_\ell \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{N}^{\ell+1}$  correspondant.

Etant donné  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  on définit  $\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$  de la manière suivante :

$$\tau_0 = n$$

$$\tau_i = \inf\{\text{codim } B_\omega^i, \omega \in \pi_{i-1}^{-1}(\varepsilon_{S_0 \dots S_{i-1} T_{i-1}})\} \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

On a alors le résultat suivant :

**2.2.1. Théorème.** — 1) S'il est non vide, l'ensemble  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k^2$  dont la codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$  et on a :

$$\tau_i = n - \nu_{S_0 \dots S_{i-1}} \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

En fait,  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\nu_{S_0} = \frac{s_0^0(s_0^0 - 1)}{2},$$

$$\begin{aligned} \nu_{S_0 \dots S_k} = \nu_{S_0 \dots S_{k-1}} + & \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^{k-1})}{2} \\ & + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_i^k) \\ & + s_{k-1}^k (\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k), \end{aligned}$$

avec  $\nu_{S_0 \dots S_{k-2}} = 0$  pour  $k = 1$ .

2) S'il est non vide, l'ensemble semi-algébrique  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T}$  pour  $T \neq \mathcal{E}_k$  est de codimension strictement plus grande que  $n$ .

(Pour la démonstration de ce théorème voir le chapitre III.)

Puisque les ensembles  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$  sont invariants par l'action de  $L_k$  et sont des sous-variétés régulières de  $\Lambda_k$ , chacun d'eux est, par définition, une singularité d'ordre  $k$  de 2-formes que l'on notera  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}$  (la dimension de  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k T_k}$  ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$ ).

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}$  soit non vide sont les suivantes :

**2.2.2. Théorème.** — La singularité  $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \subset \Lambda^2 k$  est non vide si et seulement si :

- 1) les  $(s_j^j, \dots, s_i^i, \dots, s_0^0)$ , et  $(\nu_{S_0 \dots S_i}, s_j^j, s_j^{j+1}, \dots, s_j^k)$  sont des suites décroissantes d'entier ;
- 2)  $\nu_{S_0 \dots S_i} - \nu_{S_0 \dots S_{i-1}} \geq \sup\{s_{i-1}^{i-1} - s_{i-1}^i, s_{i-1}^{i-1} - s_i^i, s_i^{i+1} + s_i^i - 2s_1^{i+1}\}$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ ,  
 $\nu_{S_0 \dots S_k} \geq s_k^k - s_{k-1}^k$  et  $\nu_{S_0} \geq s_0^0 + s_1^1 - 2s_1^1$ ;

$$3) n \geq \left\{ \sup_{i,j} s_i^j - s_{i-1}^{i-1} - s_{i-1}^j, \sum_{\ell=0}^{i-2} s_\ell^\ell - s_{\ell+1}^{\ell+1}, \nu_{S_0 \dots S_i} + \sum_{\ell=0}^{i-1} s_\ell^\ell - s_{\ell+1}^{\ell+1}, \nu_{S_0 \dots S_i} + s_i^i \right\};$$

4) il existe une suite décroissante  $(r_0, \dots, r_k)$  d'entiers tels que :

$$n - s_0^0 = 2r_0 \quad \text{et} \quad n - \nu_{S_0 \dots S_i} - s_{i+1}^{i+1} = 2r_{i+1} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k - 1$$

où  $S_i = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  et  $\nu_{S_0 \dots S_i}$  est la codimension de  $\Sigma_{S_0 \dots S_i} \subset \Lambda_i^2$ .

(Pour la démonstration de ce résultat, voir [15].)

Voici quelques exemples de symboles  $(S_0, \dots, S_k)$  pour lesquels  $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \neq \emptyset$  avec la valeur de la codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$ . En outre, on cite toutes les singularités qui existent pour  $n \leq 6$ .

Pour  $n$  pair

$k = 1$

|         |         |         |         |          |          |             |             |
|---------|---------|---------|---------|----------|----------|-------------|-------------|
| 21      | 22      | 40      | 41      | 41       | 42       | 43          | 44          |
| 1       | 3       | 0       | 2       | 4        | 4        | 4           | 4           |
| codim 1 | codim 3 | codim 6 | codim 9 | codim 12 | codim 16 | codim 21    | codim 24    |
|         |         |         |         |          |          | (fermée 20) | (fermée 20) |

$k = 2$

|         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| 220     | 221     | 222     | 222     | 222      |
| 31      | 31      | 32      | 33      | 33       |
| 1       | 1       | 3       | 3       | 3        |
| codim 3 | codim 4 | codim 7 | codim 9 | codim 10 |

$k = 3$

|         |         |         |          |          |          |
|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 2210    | 2211    | 2220    | 2221     | 2220     | 2220     |
| 310     | 311     | 320     | 321      | 321      | 330      |
| 10      | 11      | 30      | 31       | 31       | 50       |
| 0       | 2       | 1       | 1        | 3        | 0        |
| codim 4 | codim 5 | codim 7 | codim 10 | codim 11 | codim 10 |

$k = 4$

|         |         |
|---------|---------|
| 22110   | 22110   |
| 3110    | 31110   |
| 110     | 1110    |
| 21      | 210     |
| 1       | 10      |
|         | 0       |
| codim 5 | codim 6 |

Pour  $n$  impair

$k = 1$

|         |         |         |          |          |          |
|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 30      | 31      | 32      | 32       | 33       | 33       |
| 0       | 2       | 2       | 4        | 4        | 6        |
| codim 3 | codim 4 | codim 7 | codim 10 | codim 12 | codim 15 |

$k = 2$

|         |         |         |         |         |          |          |
|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| 310     | 311     | 311     | 320     | 320     | 330      | 330      |
| 21      | 21      | 22      | 20      | 20      | 40       | 40       |
| 1       | 1       | 1       | 0       | 2       | 1        | 3        |
| codim 4 | codim 5 | codim 5 | codim 7 | codim 8 | codim 12 | codim 15 |

$k = 3$

|         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| 3110    | 3111    | 3110    | 3110    | 3111     |
| 210     | 211     | 220     | 221     | 222      |
| 10      | 11      | 31      | 31      | 32       |
| 0       | 2       | 1       | 1       | 3        |
| codim 5 | codim 6 | codim 6 | codim 7 | codim 10 |

$k = 4$

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 31110   | 31110   | 31110   | 31110   | 31110   |
| 2110    | 2110    | 2110    | 2111    | 2111    |
| 110     | 111     | 111     | 111     | 111     |
| 21      | 21      | 22      | 21      | 22      |
| 1       | 1       | 3       | 1       | 3       |
| codim 6 | codim 7 | codim 8 | codim 7 | codim 8 |

### 2.3. Relation entre les ensembles $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ d'un germe de 2-forme et les singularités $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$

Soit  $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$  le fibré des  $k$ -jets de 2-formes sur  $\mathbf{R}^n$ . Ce fibré a pour fibre type  $\Lambda_k^2$  et pour groupe structural  $L_k$ . Chaque singularité  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  étant  $L_k$ -invariante va donner naissance à un sous-fibré  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$  de  $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$  de fibre type  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ ;  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$  de codimension  $\nu_{s_0 \dots s_k} = \text{codim } \Sigma_{s_0 \dots s_k}$ . On a alors :

**2.3.1. Théorème.** — Soit  $\omega$  un germe de 2-forme sur  $\mathbf{R}^n$  dont le  $k$ -jet  $j_k \omega$  est transverse à  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$  en  $o$  :

- 1)  $j_\ell \omega$  est transverse à  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n)$  en  $o$  pour  $0 \leq \ell \leq k$ ;
- 2) l'ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$  (défini à la fin du § 1.3) est égal à la variété  $(j_\ell \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n))$ .  
En particulier, le symbole de  $\omega$  sur  $(\mathbf{R}^n, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{\ell-1}}(\omega))$  est  $S_0, \dots, S_\ell$  en tout point de  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\omega)$  pour  $1 \leq \ell \leq k$ .

*Démonstration.* — Soit  $\pi_{k\ell}$  la projection canonique de  $\Lambda_k^2(\mathbf{R}^n)$  sur  $\Lambda_\ell^2(\mathbf{R}^n)$ ;  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$  est une sous-variété de  $\pi_{k\ell}^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n))$ . La transversalité de  $j_k \omega$  à  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\mathbf{R}^n)$  en  $o$  implique donc la transversalité de  $j_\ell \omega = \pi_{k\ell} \circ j_k \omega$  à  $\Sigma_{s_0 \dots s_\ell}(\mathbf{R}^n)$  en  $o$ .

Au germe de 2-forme  $\omega$  sont associés les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$ . Puisque  $j_k \omega(o)$  appartient à  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$ , par définition de  $\Sigma_{s_0 \dots s_k} = \varepsilon_{s_0 \dots s_k} \subset \Lambda_k^2$ , on a :

$$\begin{aligned} n - \tau_{l+1} &= \dim d\sigma_\omega^{l+1}(o) = \sup\{\dim \sigma_\alpha^{l+1}(o), \alpha \in \pi_l^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_l})\} \\ &= \nu_{s_0 \dots s_l} = \text{codim } \Sigma_{s_0 \dots s_l} \end{aligned}$$

(voir aussi le théorème 2.2.1). Ainsi tous les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^k$  sont réguliers et on a  $\dim d\sigma_\omega^{l+1}(x) = \nu_{s_0 \dots s_l}$  pour  $1 \leq l \leq k$ .

D'après la proposition 1.3.2, chaque ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega)$ ,  $1 \leq l \leq k$  est donc une sous-variété régulière de  $\mathbf{R}^n$  de codimension  $\nu_{s_0 \dots s_l}$ . Démontrons l'égalité

$$\Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega) = (j_l \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_l} \mathbf{R}^n) \quad \text{pour } 1 \leq l \leq k.$$

Rappelons que  $\Sigma_{s_0 \dots s_l}$  est l'ensemble des  $l$ -jets  $\omega \in \Lambda_l^2$  tels que :

- le symbole de  $\omega(o)$  sur  $\{[d\sigma_\omega^0(o)]^\perp, [d\sigma_\omega^1(o)]^\perp, \dots, [d\sigma_\omega^l(o)]^\perp\}$  est  $(S_0, \dots, S_l)$ ;
- $\dim[d\sigma_\omega^i(o)] = n - \tau_i = \nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq l$ .

Les idéaux  $\sigma_\omega^i$ ,  $0 \leq i \leq k$ , étant réguliers on a, d'autre part,

$$[d\sigma_\omega^i(x)]^\perp = T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} &(j_l \omega)^{-1}(\Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega)) \\ &= \{x \text{ voisins de } o \text{ tels que } j_l \omega(x) \text{ appartient à la fibre } \Sigma_{s_0 \dots s_l}(x)\} \\ &= \{x \text{ voisins de } o \text{ tels que le symbole de } \omega(x) \\ &\quad \text{sur } (T_x \mathbf{R}^n, \dots, T_x \Sigma_{s_0 \dots s_{k+1}}(\omega)) \text{ est } (S_0 \dots S_k)\} \\ &= \Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega) \quad (\text{par définition de } \Sigma_{s_0 \dots s_l}(\omega), \text{ voir la fin du } \S 1.1) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

#### 2.4. Cas des 2-formes fermées

La stratification  $\{\varepsilon_{s_0 \dots s_k T}, (S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}\}$  de  $\Lambda_k^2$  induit une stratification  $\{\varepsilon'_{s_0 \dots s_k T}, (S_0, \dots, S_k, T) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}\}$  dans l'espace  $\Omega_k^2$  des  $k$ -jets de 2-formes fermées. Comme dans  $\Lambda_k^2$ , étant donné

$(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  on définit encore  $\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= n, \\ \tau_i &= \inf\{\text{codim } B_\omega^i, \omega \in \pi_{i, i-1}^{-1}(\varepsilon'_{s_0 \dots s_{i-1}} \sigma_{i-1})\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Dans ce cas on a seulement le résultat partiel suivant :

**2.4.1. Théorème.** — Pour  $k = 0, 1$ , s'il est non vide, l'ensemble  $\varepsilon'_{S_0 \dots S_k} \varepsilon_k$  est une sous-variété régulière de  $\Omega_k^2$  dont la codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  ne dépend que de  $(S_0 \dots S_k)$ ; plus précisément on a :

$$\nu_{S_0} = \frac{s_0^0(s_0^0 - 1)}{2},$$

$$\nu_{S_0 S_1} = (s_0^1 + 1) \nu_{S_0} + \frac{(s_1^1 - s_0^1)(s_1^1 - s_0^1 - 1)}{2} - s_0^1(s_0^0 - s_1^0) - \rho_1$$

avec  $\rho_1 = 0$  si  $0 \leq s_0^1 \leq 2$  et  $\rho_1 = \frac{s_0^1(s_0^1 - 1)(s_0^1 - 2)}{6}$  pour  $2 \leq s_0^1$ .

Les autres strates  $\varepsilon'_{S_0 \dots S_k T}$  pour  $T \neq \varepsilon_k$  sont de codimension strictement plus grande que  $n$ .

Pour  $k \geq 2$ , soit  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  possédant la propriété suivante

sauf pour au plus un entier  $1 \leq j \leq k$  :  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  est tel que

$$s_0^1 \leq 2 \quad \text{si } j = 1 \quad \text{et} \quad \{s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1, s_i^j \leq 1, 0 \leq i \leq j - 2\}$$

si  $2 \leq j \leq k$ .

Dans cette hypothèse, si  $\varepsilon'_{S_0 \dots S_k} \varepsilon_k$  n'est pas vide, c'est une sous-variété régulière de  $\Omega_k^2$  dont la codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$  et on a  $n - \nu_{S_0 \dots S_{i-1}} = \tau_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Plus précisément,  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  est définie à partir de  $\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} \varepsilon_{k-1}$  par la formule :

$$\begin{aligned} \nu_{S_0 \dots S_k} &= \nu_{S_0 \dots S_{k-1}} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ &\quad + s_{k-1}^k (\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_{i-1}^k) - \rho_k, \end{aligned}$$

avec  $\rho_k = \frac{(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)}{6} (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1)(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 2)$

$$+ (s_{k-1}^k - s_{k-2}^k)(s_{k-1}^k - s_{k-2}^k - 1) \frac{s_{k-2}^k}{2}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-3} (s_i^{k-2} - s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-2} + s_{i-1}^{k-1})(s_{i-1}^k - 1) \frac{s_{i-1}^k}{2}$$

$$+ (\nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-3}} - s_{k-2}^{k-2} - s_{k-1}^{k-1} + 2s_{k-2}^{k-1})(s_{k-3}^k - 1) \frac{s_{k-3}^k}{2}.$$

(en particulier  $\rho_k = 0$  si  $s_{k-1}^k - s_{k-2}^k \leq 1$  et  $s_i^k \leq 1$  pour  $0 \leq i \leq k - 2$ ).

Les ensembles  $\varepsilon'_{S_0 \dots S_k T}$  pour  $T \neq \varepsilon_k$  sont de codimension strictement plus grande que  $n$ .

(Pour la démonstration de ce résultat voir le chapitre III.)



Si  $(S_0, \dots, S_k)$  est tel que pour chaque  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  on a

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_j^j \leq 1 \end{array} \right\} 2 \leq j \leq k,$$

le terme  $\rho_j$  est nul dans l'expression de  $v_{s_0 \dots s_j}$  en fonction de  $v_{s_0 \dots s_{j-1}}$  et des  $s_i^j$ . La codimension de  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$  dans  $\Lambda_j^2$  est alors égale à la codimension de  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j \cap \Omega_j^2$  dans  $\Omega_j^2$  et ainsi  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$  est transverse à  $\Omega_j^2$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ . Par contre dès que, pour un entier  $1 \leq j \leq k$ ,  $s_{j-1}^j - s_{j-2}^j > 1$  ou  $s_j^j > 1$ , alors  $\rho_j \neq 0$  et  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$  n'est plus transverse à  $\Omega_j^2$  et toutes les variétés  $\varepsilon_{s_0 \dots s_h} \sigma_h$  ne sont pas transverses à  $\Omega_h^2$  pour  $j \leq h \leq k$ . Comme dans le § 2.3, chaque ensemble  $\varepsilon'_{s_0 \dots s_k} \sigma_k$  (pour  $(S_0, \dots, S_k)$  vérifiant les hypothèses du théorème 2.4.1) définit une singularité dans  $\Omega_k^2$  que l'on désigne par  $\zeta_{s_0 \dots s_k}$ . On dira que  $\zeta_{s_0 \dots s_k}$  est une singularité de  $k$ -jet de 2-formes fermées. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de ces singularités sont les mêmes que pour les singularités de rang de 2-formes.

Cependant, il faut remarquer que si  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j \subset \Lambda_j^2$  n'est pas transverse à  $\Omega_j^2$  pour un certain entier  $1 \leq j \leq k$ , la codimension de  $\varepsilon_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$  dans  $\Lambda_j^2$  est plus grande que la codimension de  $\varepsilon'_{s_0 \dots s_j} \sigma_j$  dans  $\Omega_j^2$ . Par suite si par exemple  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}$  est non vide, en général  $\xi_{s_0 \dots s_k}$  sera vide. Voici des exemples de symboles pour lesquels  $\xi_{s_0 \dots s_k}$  n'est pas vide et la valeur de leurs codimensions : on pourra comparer avec les symboles dans le cas des 2-formes. (On trouvera toutes les singularités qui existent pour  $n \leq 6$ ).

Pour  $n$  pair

$k = 1$

|         |         |         |         |          |          |                                   |                                   |
|---------|---------|---------|---------|----------|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 21      | 22      | 40      | 41      | 41       | 42       | 43                                | 44                                |
| 1       | 3       | 0       | 2       | 4        | 4        | 4                                 | 4                                 |
| codim 1 | codim 3 | codim 6 | codim 9 | codim 12 | codim 16 | codim 20                          | codim 20                          |
|         |         |         |         |          |          | (codim 21<br>dans $\Lambda_1^2$ ) | (codim 24<br>dans $\Lambda_1^2$ ) |

$k = 2$

|         |         |                                  |                                  |                                   |
|---------|---------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 220     | 221     | 222                              | 222                              | 222                               |
| 31      | 31      | 32                               | 33                               | 33                                |
| 1       | 1       | 3                                | 3                                | 5                                 |
| codim 3 | codim 4 | codim 6                          | codim 8                          | codim 9                           |
|         |         | (codim 7<br>dans $\Lambda_2^2$ ) | (codim 9<br>dans $\Lambda_2^2$ ) | (codim 10<br>dans $\Lambda_2^2$ ) |

$k = 3$

|         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2210    | 2211    | 2220    | 2220    | 2221    | 2220    |
| 310     | 311     | 320     | 320     | 321     | 330     |
| 10      | 11      | 30      | 31      | 31      | 50      |
| 0       | 2       | 0       | 2       | 2       | 1       |
| codim 4 | codim 5 | codim 6 | codim 7 | codim 8 | codim 9 |

(n'existent pas dans  $\Lambda_3^2$ )

|         |         |
|---------|---------|
| $k = 4$ | $k = 5$ |
| 22110   | 221110  |
| 3110    | 31110   |
| 110     | 1110    |
| 21      | 210     |
| 1       | 10      |
|         | 0       |
| codim 5 | codim 6 |

Pour  $n$  impair

|         |         |         |          |   |   |
|---------|---------|---------|----------|---|---|
| $k = 1$ |         |         |          |   |   |
| 30      | 31      | 32      | 32       | 33  | 33  |
| 0       | 2       | 2       | 4        | 4   | 6   |
| codim 3 | codim 4 | codim 7 | codim 10 | codim 11<br>(codim 12<br>dans $\Lambda_1^2$ ) | codim 14<br>(codim 15<br>dans $\Lambda_1^2$ ) |

|         |         |         |         |         |          |
|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $k = 2$ |         |         |         |         |          |
| 310     | 311     | 311     | 320     | 320     | 330      |
| 21      | 21      | 22      | 20      | 20      | 40       |
| 1       | 1       | 1       | 0       | 2       | 3        |
| codim 4 | codim 5 | codim 5 | codim 7 | codim 8 | codim 15 |

|         |         |         |         |  |
|---------|---------|---------|---------|--|
| $k = 3$ |         |         |         |  |
| 3110    | 3111    | 3110    | 3110    | 3111   |
| 210     | 211     | 220     | 221     | 222  |
| 10      | 11      | 31      | 31      | 32   |
| 0       | 2       | 1       | 1       | 3  |
| codim 5 | codim 6 | codim 6 | codim 7 | codim 9<br>(codim 10<br>dans $\Lambda_3^2$ ) |

|         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| $k = 4$ |         |         |         |         |
| 31110   | 31110   | 31110   | 31110   | 31110   |
| 2110    | 2110    | 2110    | 2111    | 2111    |
| 110     | 111     | 111     | 111     | 111     |
| 21      | 21      | 22      | 21      | 22      |
| 1       | 1       | 3       | 1       | 3       |
| codim 6 | codim 7 | codim 8 | codim 7 | codim 8 |

## 2.5. Comportement générique du rang d'une 2-forme sur une variété. Cas des 2-formes fermées

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$  et  $\Lambda_\infty^2(M)$  l'espace des 2-formes de classe  $C^\infty$  sur  $M$ . L'ensemble  $\Lambda_k^2(M)$  des  $k$ -jet de 2-formes sur  $M$  est l'espace total d'une fibration sur  $M$  de fibre type  $\Lambda_k^2$  et de groupe structural  $L_k$ . Une *singularité* de  $k$ -jet est par définition une sous-variété  $\Sigma$  de  $\Lambda_k^2$ ,  $L_k$ -invariante. Toute singularité  $\Sigma \subset \Lambda_k^2$  donne naissance à une sous-variété  $\Sigma(M)$  de  $\Lambda_k^2(M)$ , fibrée sur  $M$  de fibre type  $\Sigma$ . Pour  $\omega \in \Lambda_\infty^2(M)$  l'ensemble  $\Sigma(\omega)$  des  $x \in M$  où  $M_k \omega(x)$  appartient à  $\Sigma(M)$  est appelé le lieu singulier de type  $\Sigma$  de  $\omega$  et chaque point  $x$  de  $\Sigma(\omega)$  est appelé *un point singulier de type  $\Sigma$  de  $\omega$* . Il est bien

connu que dans  $\Lambda_k^2(M)$ , l'ensemble des  $\omega$  pour lesquels  $j_k \omega$  est transverse à  $\Sigma(M)$  est un ensemble résiduel (voir [10]). De plus si la codimension  $c$  de  $\Sigma(M)$  est plus petite que  $n$  et si  $j_k \omega$  est transverse à  $\Sigma(M)$ ,  $\Sigma(\omega)$  est une sous-variété régulière de codimension  $c$  de  $M$ . On dira que  $\Sigma(\omega)$  est génériquement une sous-variété régulière de codimension  $c$ . Pour les 2-formes fermées on a des résultats analogues. En appliquant ces résultats à  $\Sigma_{s_0 \dots s_k} \subset \Lambda_k^2$ , il résulte alors des théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 que

**2.5.1. Théorème dans  $\Lambda_\infty^2(M)$ .** — Les propriétés suivantes sont génériques. Pour tout entier  $k$  et tout élément  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}^{k+1}$ , si  $n$  est assez grand, les ensembles  $\Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  sont des sous-variétés régulières de  $M$ , l'ensemble  $\Sigma_{s_0 \dots s_i}(\omega)$  étant défini par récurrence de la manière suivante :

$$\Sigma_{s_0 \dots s_i}(\omega) = \Sigma_{s_i}^\omega[M, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega)]$$

(voir les notations introduites à la fin du § 1.1). Le symbole d'un élément générique  $\omega$  sur  $(M, \Sigma_{s_0}(\omega), \dots, \Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega))$  est  $(S_0, \dots, S_k)$  en chaque point de  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ . Si  $\Sigma_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  n'est pas vide, sa codimension ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$  et sa valeur est donnée dans le théorème 3.2.1.

(On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que cette variété soit non vide dans le théorème 3.2.2.)

En utilisant les résultats analogues pour les 2-formes fermées, on a :

**2.5.2. Théorème dans  $\Omega_\infty^2(M)$ .** — Les propriétés suivantes sont génériques. Pour tout entier  $k$  et tout élément  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}^{k+1}$  possédant la propriété (i) donnée plus bas, les ensembles  $\zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega)$  sont des sous-variétés régulières de  $M$ , où  $\zeta_{s_0 \dots s_i}(\omega)$  est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\zeta_{s_0 \dots s_i}(\omega) = \Sigma_{s_i}^\omega[M, \zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_{i-1}}(\omega)].$$

Le symbole d'un élément générique  $\omega$  sur  $(M, \zeta_{s_0}(\omega), \dots, \zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega))$  est  $(S_0, \dots, S_k)$  en chaque point de  $\zeta_{s_0 \dots s_k}(\omega)$ . La codimension de  $\zeta_{s_0 \dots s_k}$  ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$  et sa valeur est donnée dans le théorème 2.4.1.

Propriété (i) pour  $(S_0 \dots S_k)$ . Soit  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  pour  $0 \leq j \leq k$ . Sauf pour au plus

un entier  $1 \leq j \leq k$ ,  $S_j$  vérifie les inégalités :

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1, \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \text{ pour } 2 \leq j \leq k.$$

Nous allons terminer ce paragraphe par des exemples de comportement génériques de 2-formes et de 2-formes fermées pour  $n = 5, 6$  et illustrer ces descriptions par un exemple de 2-formes génériques sur  $\mathbf{R}^6$ .

La situation générique du rang d'une 2-forme fermée en dimension  $n = 4$  est décrite par J. Martinet dans [10].

*Singularités génériques du rang d'une 2-forme et d'une 2-forme fermée en dimension  $n = 5$*

o)  $\omega$  est de rang maximum sur l'ouvert  $\Sigma_1(\omega)$ . En tout point du complémentaire de  $\Sigma_1(\omega)$  le rang de  $\omega$  est 2, c'est-à-dire sur la variété  $\Sigma_3(\omega)$  de dimension 2.

1) L'ensemble des points  $x$  où le noyau  $K_\omega(x)$  est transverse à  $T_x \Sigma_3(\omega)$  est ouvert dans  $\Sigma_3(\omega)$  et le symbole de  $\omega$  est alors  $30$ . Le complémentaire  $\Sigma_3(\omega) - \Sigma_{30}(\omega)$  est la sous-variété  $\Sigma_{31}(\omega)$  de dimension 1.

2) Sur  $\Sigma_{310}(\omega)$  le noyau  $K_\omega(x)$  et  $T_x \Sigma_{31}(\omega)$  ont une intersection nulle. Le complémentaire  $\Sigma_{31}(\omega) - \Sigma_{310}(\omega)$  est un ensemble de points isolés où le symbole de  $\omega$  est

$$\begin{matrix} 3110 \\ 210 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$$

*Singularités génériques du rang d'une 2-forme et d'une 2-forme fermée en dimension  $n = 6$*

o)  $\omega$  est de rang maximum sur l'ouvert  $\Sigma_0(\omega)$ . Sur la variété  $\Sigma_2(\omega)$  de dimension 5 le rang de  $\omega$  est 4 tandis qu'il s'abaisse à 2 sur un ensemble de points isolé  $\Sigma_4(\omega)$ .

1) Sur  $\Sigma_2(\omega)$  l'ensemble des points où le noyau  $K_\omega(x)$  et  $T_x \Sigma_2(\omega)$  sont transverses est l'ouvert  $\Sigma_{21}(\omega)$ . Le complémentaire  $\Sigma_2(\omega) - \Sigma_{21}(\omega)$  est la variété  $\Sigma_{22}(\omega)$  de dimension 3 des points où  $K_\omega(x)$  est contenu dans  $T_x \Sigma_2(\omega)$  c'est-à-dire où le symbole est  $22$ .

En tout point de  $\Sigma_4(\omega)$  le symbole de  $\omega$  est  $40$ .

2) Dans les 2-formes fermées,  $\zeta_{22}(\omega)$  est réunion de :

$\zeta_{220}(\omega)$  ouverte dans  $\zeta_{22}(\omega)$ ;

$\zeta_{221}(\omega)$  variété de dimension 2;

$\zeta_{222}(\omega)$ , ensemble de points isolés. En ces points le symbole de  $\omega$  est

$$\begin{matrix} 2220 \\ 320 \\ 30 \\ 0 \end{matrix}$$

Dans les 2-formes  $\Sigma_{222}(\omega)$  est vide.

3)  $\Sigma_{221}(\omega)$  est la réunion des variétés suivantes :

$\Sigma_{2210}(\omega)$  qui est ouverte dans  $\Sigma_{221}(\omega)$ .

$\Sigma_{2211}(\omega)$ , variété de dimension 1.

4) Sauf sur l'ensemble  $\Sigma_{22111}(\omega)$  de points isolés, le symbole de  $\omega$  sur  $\Sigma_{2211}(\omega)$  est

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 22110 | 3111 | 311 |
| 3110  | 111  | 11  |
| 110   | 21   | 2   |
| 21    | 1    |     |
| 1     |      |     |

Nous allons illustrer ces descriptions par un exemple de 2-forme fermée générique sur  $\mathbf{R}^6$ . Précisons que la situation décrite ci-dessous est générique dans les 2-formes fermées et non dans les 2-formes : l'ensemble  $\xi_{222}(\omega)$  est génériquement vide dans les 2-formes.

Sur  $\mathbf{R}^6$  rapporté aux coordonnées  $(x, y, z, t, u, v)$  on considère la 2-forme fermée

$$\omega = dx \wedge dt + dy \wedge dz + d\left(yt + \frac{1}{2}z^2 - xv\right) \wedge du + d\left(ux + \frac{1}{2}t^2 + zv\right) \wedge dv + d\left(yuv - \frac{1}{3}uv^3\right) \wedge du.$$

*Ensemble singulier du 1<sup>er</sup> ordre*

Le rang de  $\omega$  est partout supérieur ou égal à 4. La variété  $\xi_2(\omega)$  des points où  $\omega$  est de rang 4 a pour équation  $x = 0$  : c'est la variété définie par

$$\omega^3 = 12 x dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \wedge du \wedge dv = 0.$$

*Ensembles singuliers du 2<sup>e</sup> ordre*

Soit  $\bar{\omega}$  la restriction de  $\omega$  à  $\xi_2(\omega)$ . On a

$$\bar{\omega} = dy \wedge dz + d\left(yt + \frac{1}{2}z^2\right) \wedge du + d\left(zv + \frac{1}{2}t^2\right) \wedge dv + d\left(yuv - \frac{1}{3}uv^3\right) \wedge du.$$

L'ensemble  $\xi_{22}(\omega)$  des points  $x$  de  $\xi_2(\omega)$  où le symbole de  $\omega$  est  $22$  c'est-à-dire

$\dim [K_\omega(x) \cap T_x \xi_2(\omega)] = 2$  et  $\dim K_{\bar{\omega}}(x) = 3$  est la variété d'équation  $x = y = t = 0$ . Cette variété est définie par l'équation  $\bar{\omega}^2 = 0$ . Sur le complémentaire  $\xi_2(\omega) - \xi_{22}(\omega)$

le symbole de  $\omega$  est  $21$  c'est-à-dire :

$$\dim [K_\omega(x) \cap T_x \xi_2(\omega)] = \dim K_{\bar{\omega}}(x) = 1.$$

Enfin, en tout point de  $\xi_4(\omega)$  le symbole de  $\omega$  est  $40$ .

*Ensembles singuliers du 3<sup>e</sup> ordre*

Soit  $\bar{\omega}$  la restriction de  $\omega$  à  $\xi_{22}(\omega)$ . On a

$$\bar{\omega} = v dz \wedge dv + z dz \wedge du + uv^2 du \wedge dv.$$

La variété  $\xi_{22}(\omega)$  ( $\xi_{22}(\omega) = (\text{l'hyperplan des } \{z, u, v\})$ ) est réduite à  $0 \in \mathbf{R}^6$ .

La variété  $\xi_{221}(\omega)$  est le plan des coordonnées  $\{z, u\}$  privé de l'origine. En tout point du complémentaire dans  $\xi_{22}(\omega)$  de  $\xi_{222}(\omega) \cup \xi_{221}(\omega)$  le symbole de  $\omega$  est  $\begin{matrix} 220 \\ 31 \\ 1 \end{matrix}$

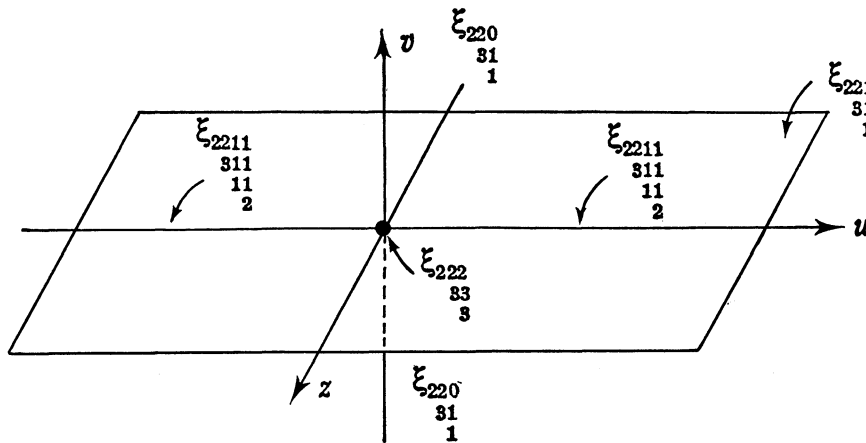
*Ensembles singuliers du 4<sup>e</sup> ordre*

L'ensemble des points de  $\xi_{221}(\omega)$ , où la restriction de  $\omega$  à cette variété s'annule est la variété  $\xi_{2211}(\omega)$  : c'est l'axe des  $u$  privé de l'origine. Sur le complémentaire de l'axe des  $u$  dans  $\xi_{221}(\omega)$  (= plan des  $\{z, u\}$ ) le symbole de  $\omega$  est  $\begin{matrix} 2210 \\ 310 \\ 10 \\ 0 \end{matrix}$

*Ensemble singulier du 5<sup>e</sup> ordre*

En tout point de  $\xi_{2211}(\omega)$  le noyau de la restriction de  $\omega$  à  $\xi_{22}(\omega)$  est transverse à cette variété.

En résumé dans  $\xi_{22}(\omega) = \text{hyperplan des } \{z, u, v\}$  on a la situation suivante :



**2.6. Comportement générique de la classe d'une équation de Pfaff**

On rappelle qu'une *équation de Pfaff* sur une variété  $M$  est la donnée d'une section  $\sigma$  du fibré projectif  $PM$  associé au fibré vectoriel cotangent  $T^*M$  de  $M$ . Soit  $T_0^*M$  le com-

plémentaire de la section nulle de  $T^*M \rightarrow TM$  et  $q: T_0^*M \rightarrow PM$  la projection canonique. Etant donné une section  $\sigma$  de  $PM$  et  $U$  un ouvert de  $M$ , toute 1-forme  $\gamma$  sans zéros, définie sur  $U$ , est un relèvement de  $\sigma$  sur  $U$  si  $\sigma = q \circ \gamma$ . Une équation de Pfaff admet des relèvements locaux mais en général il n'y a pas de relèvements globaux. Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux relèvements de  $\sigma$  sur  $U$  il existe une fonction  $f$  non nulle sur  $U$  telle que  $\gamma' = f\gamma$ . La classe d'une équation de Pfaff  $\sigma$  en un point  $x$  de  $M$  est l'entier  $r$  tel que  $\gamma \wedge d\gamma^r(x) \neq 0$  et  $\gamma \wedge d\gamma^{r+1}(x) = 0$ ,  $\gamma$  étant un relèvement local de  $\sigma$  en  $x$ . Il est évident que la classe de  $\sigma$  en  $x$  ne dépend pas du relèvement choisi. La classe de  $\sigma$  est un invariant qui porte sur le couple  $(\gamma, d\gamma)$ . Soient  $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$  des sous-variétés

régulières de  $M$  et  $\sigma$  une équation de Pfaff sur  $M$ . Pour tout  $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_\ell \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \in \mathbf{N}^{k+1}$  et  $u = 0$

ou 1 on désigne par  $\Sigma_u^\sigma(M_0, \dots, M_k)$  l'ensemble des  $x$  de  $M_k$  tels que :

$$\dim[\mathbf{K}_{\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell}(x) \cap T_x M_k] = s_\ell, \quad 0 \leq \ell \leq k.$$

$$\gamma_\ell(x) = 0 \quad \text{si } u = 0,$$

$$\gamma_\ell(x) \neq 0 \quad \text{si } u = 1,$$

où  $\gamma$  est un relèvement local de  $\sigma$  en  $x$ ,  $\gamma_\ell$  est la 1-forme induite par  $\gamma$  sur  $M_\ell$  et  $\mathbf{K}_{\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell}(x)$  est le noyau de  $\gamma_\ell \wedge d\gamma_\ell$  en  $x$  de  $M_\ell$ .

Le symbole de  $\sigma$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  en  $x$  de  $M_k$  est l'élément  $(S_0, \dots, S_k, U)$  de  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$  défini par

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_k^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } s_i^j = \dim[\mathbf{K}_{\gamma_i \wedge d\gamma_i}(x) \cap T_x M_j],$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_j = 0 \quad \text{si } \gamma_j(x) = 0 \quad \text{et } u_j = 1 \quad \text{si } \gamma_j(x) \neq 0.$$

On désigne par  $\mathcal{Q}_i$  l'élément  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{N}^{i+1}$ . Comme pour les 2-formes fermées on a le résultat partiel suivant :

**2.6.1. Théorème.** — Dans l'espace  $P(M)$  des équations de Pfaff sur  $M$ , la propriété suivante est générique :

Pour tout entier  $k$  et tout élément  $(S_0, \dots, S_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$  vérifiant la propriété (i) donnée plus bas les ensembles

$$\Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$$

sont des sous-variétés régulières de  $M$ , si  $\Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma)$  est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\Sigma_{S_0 \dots S_i} \omega_i(\sigma) = \Sigma_{S_i, 1}^\sigma(M, \Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{i-1}} \omega_{i-1}(\sigma)).$$

Le symbole d'un élément générique  $\sigma$  sur  $(M, \Sigma_{S_0} \omega_0(\sigma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma))$  est  $(S_0, \dots, S_k \omega_k)$  en tout point de  $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$ . La codimension de  $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$  ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k)$  et sa valeur est donnée dans le théorème 3.4.2.1 de [15].

On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Sigma_{S_0 \dots S_k} \omega_k(\sigma)$  soit non vide dans le théorème 3.4.2.2 de [15]).

Propriété (i) pour  $S_0, \dots, S_k$ . Pour  $0 \leq j \leq k$  soit  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$ . Sauf pour au plus un entier  $1 \leq j \leq k$ ,  $S_j$  vérifie les inégalités :

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 2 \quad \text{pour } j = 1 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \end{array} \right\} \text{pour } 2 \leq j \leq k.$$

Comme dans le cas des 2-formes, la démonstration du théorème 2.6.1 se ramène à construire des singularités convenables dans  $P_{k+1}$ .

Pour plus de détails et pour la démonstration de ces résultats, voir [15].

## 2.7. Quelques singularités d'ordre supérieur de la classe d'une 1-forme

Soit  $\gamma$  une 1-forme sur une variété  $M$ . La classe de  $\gamma$  en  $x$  est l'entier  $r$  défini par

$$\gamma \wedge d\gamma^k(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad d\gamma^{k+1}(x) = 0 \quad \text{si } r = 2k + 1,$$

$$d\gamma^k(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \gamma \wedge d\gamma^k(x) = 0 \quad \text{si } r = 2k.$$

Le rang de  $\gamma$  en  $x$  est aussi la codimension dans  $T_x M$  de l'espace  $H_\gamma(x) = K_\gamma(x) \cap K_{d\gamma}(x)$ ,  $K_\gamma(x)$  et  $K_{d\gamma}(x)$  étant les noyaux respectifs de  $\gamma(x)$  et  $d\gamma(x)$ .

Soient  $M_0 = M \supset M_1 \supset \dots \supset M_k$  des sous-variétés de  $M$  et  $\gamma$  une 1-forme sur  $M$ .



Pour tout  $S = \begin{pmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathbf{N}^{k+1}$  et  $u = 0$  ou  $1$ , on désigne

par  $\Sigma_{S^{\gamma} V^u}^{\gamma}(M_0, \dots, M_k)$  l'ensemble des  $x$  de  $M_k$  tels que

$$\dim[K_{\gamma_{\ell}}(x) \cap K_{d\gamma_{\ell}}(x) \cap T_x M_k] = s_{\ell},$$

$$\dim[K_{\gamma_{\ell} \wedge d\gamma_{\ell}}(x) \cap T_x M_k] = v_{\ell},$$

$$\gamma_k(x) = 0 \quad \text{si } u = 0,$$

$$\gamma_k(x) \neq 0 \quad \text{si } u = 1,$$

où  $\gamma_{\ell}$  désigne la 1-forme induite par  $\gamma$  sur  $M_{\ell}$ .

On appelle symbole de  $\gamma$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  en  $x \in M_k$  l'élément  $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k, U)$  de  $\mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$  défini par

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_i^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } s_i^j = \dim[(K_{\gamma_i}(x) + K_{d\gamma_i}(x)) \cap T_x M_j],$$

$$V_j = \begin{pmatrix} v_0^j \\ \vdots \\ v_i^j \\ \vdots \\ v_j^j \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad \text{si } v_i^j = \dim[(K_{\gamma_i \wedge d\gamma_i}(x) + K_{d\gamma_i}(x)) \cap T_x M_j],$$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_j = 0 \quad \text{si } \gamma_j(x) = 0 \quad \text{et } u_j = 1 \quad \text{si } \gamma_j(x) \neq 0.$$

Le symbole de  $\gamma$  sur  $(M_0, \dots, M_k)$  se présente sous la forme de tableaux triangulaires.

Pour tout entier  $i$ , on désigne par  $\mathcal{U}_i$  l'élément  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{N}^{k+1}$ . On a alors le résultat partiel suivant :

**2.7.1. Théorème.** — Dans l'espace  $\Lambda_{\infty}^1(M)$ , la propriété suivante est générique : pour tout entier  $k$  et tout élément

$$(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1}$$

vérifiant la propriété (ii) donnée plus bas les ensembles

$$\Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma),$$

s'ils sont non vides, sont des sous-variétés régulières de  $M$ ,  $\Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma)$  étant défini par

$$\Sigma_{S_0 \dots S_i}^{V_0 \dots V_i} \mathcal{U}_i(\gamma) = \Sigma_{S_i V_i, 1}^{\gamma}(M, \Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_{i-1}}^{V_0 \dots V_{i-1}} \mathcal{U}_{i-1}(\gamma)).$$

Le symbole d'un élément générique  $\gamma$  sur  $(M, \Sigma_{S_0}^{V_0} \mathcal{U}_0(\gamma), \dots, \Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma))$  est  $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k, \mathcal{U}_k)$  en tout point de  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma)$ . La codimension de  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma)$ , si cet ensemble est non vide, ne dépend que de  $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$  et elle est donnée dans le théorème 3.5.2.1 de [15].

On trouvera une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Sigma_{S_0 \dots S_k}^{V_0 \dots V_k} \mathcal{U}_k(\gamma) \neq \emptyset$  dans le théorème 3.5.1.2 de [15].

Propriété (ii) pour  $(S_0, \dots, S_k, V_0, \dots, V_k)$ . Soit  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  et  $V_j = \begin{pmatrix} v_0^j \\ \vdots \\ v_i^j \\ \vdots \\ v_j^j \end{pmatrix}$  pour

$0 \leq j \leq k$ . Sauf pour au plus un entier  $j$ ,  $S_j$  et  $V_j$  vérifient les inégalités

$$\left. \begin{array}{l} s_0^1 \leq 1 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j \leq 1 \\ s_i^j \leq 1 \quad 0 \leq i \leq j-2 \\ v_i^j = s_i^j \quad 0 \leq i \leq j-1 \end{array} \right\} \text{ pour } 2 \leq j \leq k.$$

Une fois de plus, la démonstration des théorèmes 2.7.1 revient à construire des singularités convenables dans  $\Lambda_{k+1}^1$ . Pour plus de détails et la démonstration de ces résultats voir [15].

### III. — CONSTRUCTION DES SINGULARITÉS DANS $\Lambda_k^2$ ET $\Omega_k^2$

Ce chapitre est consacré à la démonstration des résultats sur les singularités du rang des 2-formes et de 2-formes fermées décrits dans les § 2.2 et § 2.4. La méthode est la même que celle utilisée par Mather dans [12] pour les singularités d'applications : construction d'une fibration de chacune des singularités sur une orbite dans un produit de grassmanniennes.

#### 3.1. Plan de démonstration des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1

Les démonstrations des théorèmes 2.2.1 et 2.4.1 sont du même type. Nous allons donc faire une seule démonstration. Aussi nous adoptons des notations communes. Avec les notations des § 2.2 et 2.4 on désigne par

$$\begin{aligned} \Lambda_h & \text{ un des espaces } \Lambda_h^2 \text{ ou } \Omega_h^2 \text{ pour } 0 \leq h \leq k, \\ \tau_{kh} & \text{ la projection canonique de } \Lambda_k \text{ sur } \Lambda_h, \\ X_{S_0 \dots S_h T_h} & \left\{ \begin{array}{l} \text{l'ensemble } \varepsilon_{S_0 \dots S_h T_h} \subset \Lambda_h^2 \text{ lorsque } \Lambda_h = \Lambda_h^2 \\ \text{l'ensemble } \varepsilon'_{S_0 \dots S_h T_h} \subset \Omega_h^2 \text{ lorsque } \Lambda_h = \Omega_h^2 \end{array} \right\} \text{ pour } 0 \leq h \leq k. \end{aligned}$$

De plus lorsque  $\Lambda_h = \Omega_h^2$ ,  $(S_0 \dots S_h)$  vérifie : sauf pour au plus un entier  $1 \leq j \leq h$ ,

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix} \text{ est tel que}$$

$$\begin{aligned} s_0^1 & \leq 2 \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j & \leq 2 \quad \text{et} \quad s_j^j \leq 1 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq j-1 \text{ et } 2 \leq j \leq h. \end{aligned}$$

Avec ces notations, les théorèmes 2.2.1 et 2.4.1 ont une version commune qui est la suivante :

**3.1.1. Théorème.** — 1)  $X_{S_0 \dots S_k \sigma_k}$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$ , si elle est non vide, et sa codimension  $\nu_{S_0 \dots S_k}$  est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_{S_0} &= \frac{s_0^0(s_0^0 - 1)}{2} \quad \text{pour } k = 0, \\ \nu_{S_0 \dots S_k} &= \nu_{S_0 \dots S_{k-1}} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)(s_k^k - s_{k-1}^k - 1)}{2} \\ & \quad + s_{k-1}^k (\nu_{S_0 \dots S_{k-1}} - \nu_{S_0 \dots S_{k-2}} - s_{k-1}^{k-1} + s_{k-1}^k) \\ & \quad + \sum_{i=1}^{k-1} s_{i-1}^k (s_i^{k-1} - s_i^k - s_{i-1}^{k-1} + s_{i-1}^k) - \rho_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \nu_{s_0 \dots s_k} &= 0 \quad \text{pour } k < 0 \\ s_i^j &= 0 \quad \text{pour } i < 0 \text{ et } j < 0, \\ \rho_k &= 0 \quad \text{si } \Lambda_k = \Lambda_k^2, \end{aligned}$$

$\rho_k$  défini comme dans 2.4.1 si  $\Lambda_k = \Omega_k^2$ .

2) Pour  $T_k \neq \mathcal{E}_k$ , la codimension de  $X_{s_0 \dots s_k T_k}$  est strictement plus grande que  $n$ .

Pour  $k = 0$ , le théorème 4.1.1 est une version partielle des résultats de [10]. La démonstration de ce théorème va se faire par récurrence sur  $k$  en utilisant une méthode de fibration que nous allons exposer maintenant.

La construction des singularités de Thom Boardman faite par J. Mather dans [12] est du type suivant. Un ensemble  $\Sigma \subset \Lambda_k$  est invariant par l'action du groupe  $G_k$  et il existe une application continue  $\sigma$  de  $\Sigma$  dans une variété  $D$  sur laquelle  $G_k$  agit transitivement. L'application  $\sigma$  est équivariante. On montre ensuite qu'il existe  $a \in D$  tel que  $V = \sigma^{-1}(a)$  soit une sous-variété régulière. Alors on en déduit que  $\Sigma$  est une sous-variété régulière grâce à la proposition suivante :

**3.1.2. Proposition** [12] [15]. — Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de Lie de  $L_k$  et  $\Gamma \times D \rightarrow D$  une action transitive de  $\Gamma$  sur une variété  $D$ . On considère un sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\Lambda_k$  invariant par  $\Gamma$  et une application équivariante et continue  $\sigma : \Sigma \rightarrow D$ . S'il existe  $a \in D$  tel que  $V = \sigma^{-1}(a)$  soit une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$  alors  $\Sigma$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$  et sa codimension est égale à  $\text{codim } V - \dim D$ . Si de plus,  $\sigma$  est analytique, alors  $\sigma$  est une fibration de  $\Sigma$  sur  $D$  de fibre type  $V$ .

Pour tout  $0 \leq h \leq k$  on a une application  $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$  de  $\pi_{k,h}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h})$  dans le produit de grassmanniennes  $G_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} = G_{s_0} \times \dots \times G_{s_k} \times G_{\mathcal{E}_k}$  qui à  $\omega$  associe son étendard (voir § 2.2). Rappelons que l'image  $D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$  de  $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$  est une orbite de l'action de  $L_h$  sur  $D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$ . On désigne par  $F_h$  l'image réciproque du point  $[(M_0^0) \dots (M_0^h, \dots, M_h^h)(N_0, \dots, N_h)]$  par la projection  $\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$  :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k,h}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}) & & \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h} & & \text{étendard de } \omega. \end{array}$$

Soit  $G_h$  le sous-groupe des éléments de  $L_h$  qui fixent  $F_h$ . Pour  $\omega \in F_h$ , les idéaux  $\sigma'_\omega$  sont des idéaux réguliers de dimension  $n - \tau_\ell$ . On désigne par  $\nu_i$  la codimension dans le  $\mathbf{R}$ -espace  $\mathfrak{m}_{k-\ell+1}$  du  $\mathbf{R}$ -espace  $\sigma'_\omega$  et par  $G_{\nu_i \mu_i}$  la grassmannienne des  $\nu_i$ -plans de  $\mathfrak{m}_{k-\ell+1}$ . On a une application  $\Delta_h$  de  $F_h$  dans  $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$  qui à  $\omega$  associe

$(\tau_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h)$ . On va montrer que l'image de cette application est une orbite  $D_h$  de l'action de  $G_h$  sur  $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$ . On a alors une projection

$$\begin{array}{ccc} F_h & & \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_h & & (\tau_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h). \end{array}$$

Soit  $H_k$  l'image réciproque d'un élément  $(\bar{\omega}, J_k^1, \dots, J_k^k) \in D_h$  où  $\bar{\omega}$  est le modèle construit dans le chapitre II de [15]. Le schéma de démonstration de la proposition 3.1.2 est alors le suivant :

- 1) Montrer que  $H_k$  est une variété (proposition 3.1.3).
- 2) On en déduit, grâce à la proposition 3.1.2 que la projection

$$\begin{array}{c} F_k \\ \downarrow \\ D_k \end{array}$$

est une fibration de fibre-type  $H_k$  et que  $F_k$  est une variété.

- 3) En appliquant à nouveau la proposition 3.1.2 on montre que la projection :

$$\begin{array}{c} X_{s_0 \dots s_k \sigma_k} \\ \downarrow \\ D_{s_0 \dots s_k \sigma_k} \end{array}$$

est une fibration de fibre  $F_k$ .

#### Démonstration du théorème 3.1.1.

On se place dans l'hypothèse de récurrence suivante :  $(P_{k-1})$  le théorème 3.1.1 est vrai dans  $\Lambda_h$  pour  $0 \leq h \leq k-1$ .

1<sup>re</sup> étape. — Les propriétés de  $H_k$  contenues dans la proposition suivante sont essentielles pour les deux autres étapes.

**3.1.3. Proposition.** —  $H_k$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$  et sa codimension est donnée à partir de la codimension de  $H_{k-1}$  dans  $\Lambda_k$  par :

$$\text{codim } H_k = \text{codim } H_{k-1} + (\tau_k - \tau_{k-1}) \tau_k - \rho_k$$

( $\rho_k$  est défini dans le théorème 3.1.1).

Nous admettrons ce résultat dans ce paragraphe. La démonstration sera esquissée au paragraphe suivant.

- 2<sup>e</sup> étape. — Les propriétés de  $F_k$  sont rassemblées dans la proposition suivante :

**3.1.4. Proposition.** — 1) Pour  $1 \leq i \leq k$  on a  $\tau_i = n - \nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$ , si  $\nu_{s_0 \dots s_{i-1}}$  est la codimension de la variété  $X_{s_0 \dots s_{i-1}}$  dans  $\Lambda_{i-1}$ .

2) L'ensemble  $F_k$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$  et sa codimension est donnée à partir de la codimension de  $F_{k-1}$  dans  $\Lambda_k$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{codim } F_k &= \text{codim } F_{k-1} + \frac{(s_k^k - s_{k-1}^k)}{2} (s_k^k - s_{k-1}^k - 1) \\ &+ (s_k - s_k^k) (s_k^k - s_{k-1}^k) + \sum_{i=1}^{k-1} (s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-1} - s_i^k + s_{i-1}^k) (s_{i-1}^k - s_i^k) \\ &+ (\tau_{k-1} - \tau_k) \tau_k - \rho_k, \end{aligned}$$

où  $\rho_k$  a la même définition que dans le théorème 3.1.1.

*Démonstration de la proposition 3.1.4.*

La propriété (1) se démontre par un simple argument de transversalité (voir [15]). Nous allons établir la propriété (2). Pour  $0 \leq h \leq k$ ,  $F_h$  est l'ensemble des  $\omega$  dont l'étendard est égal à  $[(M_0^0), \dots, (M_h^h, \dots, M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$ . Pour  $\omega$  appartenant à  $F_h$ , les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h$  sont des idéaux réguliers. Il en résulte que la dimension du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\sigma_\omega^\ell \subset \mathfrak{m}_{k-\ell+1}$ ,  $1 \leq \ell \leq h$ , ne dépend que de  $n - \tau_i = \dim_{\mathbf{R}}(\sigma_\omega^\ell / \mathfrak{m}_{k-\ell-1} \sigma_\omega^\ell)$ . Soit  $\nu_i$  (resp.  $\mu_i$ ) la dimension sur  $\mathbf{R}$  de  $\sigma_\omega^\ell$  (resp.  $\mathfrak{m}_{k-\ell+1}$ ). Comme on a vu plus haut, soit  $\Delta_h$  l'application de  $F_h$  dans  $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$ , l'application qui à  $\omega$  associe  $(\pi_{k0}(\omega), \sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h)$ , ( $G_{\nu_\ell \mu_\ell}$  étant la grassmannienne de  $\nu_\ell$ -plans de l'espace  $\mathfrak{m}_{k-\ell+1}$ ). Nous allons d'abord montrer que l'image  $D_h = \Delta_h(F_h)$  est une orbite de l'action de  $G_h$  sur  $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$ .

Soit  $J_h^\ell$  l'idéal de  $\mathfrak{m}_{k-\ell+1}$  engendré par les coordonnées  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-\tau_\ell}}$ , où  $dx_{i_1}, \dots, dx_{i_{n-\tau_\ell}}$  engendrent l'espace  $N_\ell$ . Rappelons que le groupe  $G_h$  est l'ensemble des éléments de  $L_h$  qui laissent invariant  $[(M_0^0), \dots, (M_h^h, \dots, M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$  donc en particulier les espaces  $N_1, \dots, N_\ell, \dots, N_h$ . Les idéaux  $\sigma_\omega^1, \dots, \sigma_\omega^h$  étant réguliers, il existe un élément  $g$  de  $G_h$  tel que  $\sigma_{g^* \omega}^\ell = J_h^\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, h$ , pour tout élément  $\omega$  de  $F_h$ . D'autre part, dans le chapitre II, § 2.3, on a vu que, pour  $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$  vérifiant  $(S_\omega(F_i) + F_j^\perp) = M_i^j$ ,  $0 \leq i \leq j \leq h$ , et  $F_\ell^\perp = N_\ell$ ,  $1 < \ell < h$ , il existe un automorphisme  $\varphi$  de  $\mathbf{R}^n$  qui fixe  $[(M_0^0), \dots, (M_h^h, \dots, M_0^h), (N_0, \dots, N_h)]$  et tel que  $\varphi^* \omega = \bar{\omega}$  (« modèle » défini dans [15]). L'espace  $\Lambda_0^2$  étant identifié à  $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ ,  $D_h$  est donc une orbite de l'action de  $G_h$  sur  $\Lambda_0^2 \times G_{\nu_1 \mu_1} \times \dots \times G_{\nu_h \mu_h}$ . Par un argument classique de géométrie algébrique (voir [4]), on en déduit que  $D_h$  est une variété. On sait que  $H_h$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_k$  pour tout  $0 \leq h \leq k$  (proposition 3.1.3 et hypothèse de récurrence  $P_{k-1}$ ). En appliquant la proposition 3.1.2 à la situation  $\Delta_h : F_h \rightarrow D_h$  on en déduit que  $F_h$  est une sous-variété régulière de  $\Lambda_h$  et que l'on a  $\text{codim } F_h = \text{codim } H_h - \dim D_h$ . Par suite

$$\begin{aligned} \text{codim } F_k &= \text{codim } F_{k-1} + (\text{codim } H_k - \text{codim } H_{k-1}) \\ &\quad - (\dim D_k - \dim D_{k-1}) \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1.3,

$$\text{codim } H_k = \text{codim } H_{k-1} + (\tau_{k-1} - \tau_k) \tau_k - \rho_k.$$

Il reste donc à calculer  $\dim D_k - \dim D_{k-1}$ . Nous allons indiquer comment on peut calculer la dimension de  $D_h$  pour  $0 \leq h \leq k$ .

Soit  $K_h$  le sous-groupe de  $G_h$  des éléments qui fixent  $(\bar{\omega}, J_h^1, \dots, J_h^h)$ . On a  $\dim D_h = \dim G_h/K_h$ . Désignons par  $K'_h$  le sous-groupe des éléments de  $G_h$  qui fixe  $\bar{\omega}$  et  $K''_h$  le sous-groupe des éléments de  $G_h$  qui fixent  $J_h^1, \dots, J_h^h$ . On a évidemment  $K_h = K'_h \cap K''_h$ . Dans  $GL_n(\mathbf{R})$  soit  $\bar{K}'_h$  le sous-groupe des automorphismes de  $\mathbf{R}^n$  qui fixe le modèle  $\bar{\omega}$ . Si  $\pi_{h0}$  désigne la projection canonique de  $L_h$  sur  $L_0 = GL_n(\mathbf{R})$  le groupe  $K'_h$  n'est autre que  $\pi_{h0}^{-1}(K'_h)$ . D'autre part, puisque  $\pi_{h0}(G_h) \subset GL_n(\mathbf{R})$  fixe les espaces  $N_0, \dots, N_l, \dots, N_h$ , on a  $\pi_{h0}(K''_h) = \pi_{h0}(G_h) \supset \bar{K}'_h$ . On a donc la décomposition suivante :

$$K_h = \bar{K}'_h \oplus K''_h \cap \text{Ker } \pi_{h0}.$$

La codimension de  $K_h$  dans  $G_h$  est donc égale à :

$$\begin{array}{ccc} [\text{codim } \bar{K}'_h \text{ dans } \pi_{h0}(G_h)] & + & [\text{codim } K''_h \text{ dans } G_h] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{fixe } \bar{\omega} \text{ dans } \Lambda_0^2 & & \text{fixe } J_h^1, \dots, J_h^h. \end{array}$$

On obtient ainsi [15]

$$\begin{aligned} \dim D_k - \dim D_{k-1} &= \sum_{i=1}^{k-1} (s_i^{k-1} - s_{i-1}^{k-1} - s_i^k + s_{i-1}^k) (s_{i-1}^k - s_i^k) \\ &\quad (+ \tau_k - s_k^k) (s_k^k - s_{k-1}^k) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

3<sup>e</sup> étape. — A partir de la proposition 3.1.4, nous allons établir le théorème 3.1.2. Il résulte de l'hypothèse de récurrence ( $P_{k-1}$ ) que l'application

$$\sigma_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h} : \pi_{kh}^{-1} X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h} \rightarrow D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}$$

est une submersion pour  $0 \leq h \leq k-1$  dont la fibre est  $F_h$ .

Pour  $h = k$ ,  $\sigma_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} : X_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} \rightarrow D_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k}$  est analytique équivariante et la contre-image  $F_k$  de  $[(M_0^0, \dots, (M_k^k, \dots, M_0^k), (N_0, \dots, N_k)]$  est une variété (proposition 3.1.4). En appliquant à nouveau la proposition 3.1.2, on en déduit que cette application est une submersion de fibre-type  $F_k$ . Par suite, pour tout  $0 \leq h \leq k$  on a :

$$\text{codim } \pi_{kh}^{-1}(X_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}) = \text{codim } F_h - \dim D_{s_0 \dots s_h \mathcal{E}_h}.$$

Ainsi on a la formule de récurrence

$$\begin{aligned} v_{s_0 \dots s_k} &= \text{codim } X_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} = \text{codim } X_{s_0 \dots s_{k-1} \mathcal{E}_{k-1}} \\ &\quad + \text{codim } F_k - \text{codim } F_{k-1} - \dim D_{s_0 \dots s_k \mathcal{E}_k} - \dim D_{s_0 \dots s_{k-1} \mathcal{E}_{k-1}}. \end{aligned}$$

Par un calcul élémentaire on obtient alors le résultat annoncé.

Pour montrer que  $\text{codim } X_{s_0 \dots s_k \mathcal{T}_k} > n$  si  $\mathcal{T}_k \neq \mathcal{E}_k$  on utilise un simple argument de transversalité (voir [15]).

### 3.2. Démonstration de la proposition 3.1.3 (esquisse)

On rappelle que le système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbf{R}^n$  et la base  $\varepsilon_1 = dx_1, \dots, \varepsilon_n = dx_n$  de  $E^* = (\mathbf{R}^n)^*$  sont fixés.

On écrit  $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_\ell + \dots + \omega_k$  où  $\omega_\ell$  est un élément de  $\Lambda_k^2$  à coefficients polynomiaux homogènes de degré  $\ell$ . On pose :

$$\omega_\ell = \sum_{1 \leq u < v \leq n} b_{uv}^\ell dx_u dx_v,$$

$$b_{uv}^\ell = \sum_{|L|=\ell} b_{uv}^L x^L,$$

où  $L = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^n$ ,  $x^L = x_1^{\ell_1} \dots x_n^{\ell_n}$ ,  $|L| = \ell_1 + \dots + \ell_n$ .

L'élément  $(S_0, \dots, S_k \mathcal{E}_k) \in \mathbf{N} \times \dots \times \mathbf{N}^{k+1} \times \mathbf{N}^{k+1}$  est fixé de sorte que  $X_{S_0, \dots, S_k} \mathcal{E}_k \neq \emptyset$ . On rappelle que l'on a posé :

$$S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{E}_k = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \vdots \\ \tau_k \end{pmatrix}.$$

On se place dans l'ensemble  $\mathcal{H}_k$  des  $\omega \in \Lambda_k$  tels que  $\pi_{k0}(\omega) = \bar{\omega}$ , le modèle dans  $\Lambda_0^2$  associée à  $(S_0, \dots, S_k \mathcal{E}_k)$  (voir [15]).

La démonstration de la proposition 3.1.3 se décompose en 3 parties.

*1<sup>re</sup> partie* (voir [15]). A  $\omega \in \mathcal{H}_k$  on associe une famille  $(\mathbf{a}_i^j)$ ,  $0 \leq i \leq j \leq k$ , de champs de matrices des composantes de  $\omega$ , sur un voisinage de  $o \in \mathbf{R}^n$  avec la propriété suivante : pour  $j = 0, \dots, k-1$ , soit

$$\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega) = \{x \in \Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega) \mid \text{rg } \mathbf{a}_i^j(x) = \tau_j - s_i^j, i = 0, \dots, j\}.$$

Si  $\omega \in H_j$ , l'idéal  $\sigma_\omega^{j+1}$  est l'idéal des  $(k-j)$ -jets en  $o$  de l'idéal de définition de l'ensemble  $\Sigma_{S_0 \dots S_j}(\omega)$ . Par récurrence sur  $j$ , on montre que chaque matrice  $\mathbf{a}_i^j$  contient une sous-matrice  $\bar{\mathbf{a}}_i^j$  telle que sur  $\Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)$  le rang de  $\bar{\mathbf{a}}_i^j$  est égal au rang de  $\mathbf{a}_i^j$ . La valeur  $\mathbf{a}_i^j(o)$  permet de définir dans  $\mathbf{a}_i^j$  une  $(\tau_j - s_i^j) \times (\tau_j - s_i^j)$  matrice de rang maximum sur  $\Sigma_{S_0 \dots S_{j-1}}(\omega)$ . Comme dans [9], la condition  $\text{rg } \mathbf{a}_i^j = \text{rg } \bar{\mathbf{a}}_i^j = \tau_j - s_i^j$  se traduit par une équation matricielle du type :  $T_i^j - Y_i^j (X_i^j)^{-1} Z_i^j = 0$ , où  $\{X_i^j, Y_i^j, Z_i^j, T_i^j\}$  est une décomposition de  $\bar{\mathbf{a}}_i^j$  en blocs du type

|         |         |
|---------|---------|
| $X_i^j$ | $Y_i^j$ |
| $Z_i^j$ | $T_i^j$ |



Par suite, l'ensemble  $\psi_{j+1}(\omega)$  des  $(k-j)$ -jets en  $o$  des termes de

$$\det X_i^j (T_i^j - Y_i^j (X_i^j)^{-1} Z_i^j) \quad i = 0, \dots, j$$

est alors un système générateur de  $\sigma_\omega^{j+1}$  modulo  $\sigma_\omega^j$ , pour  $\omega \in H_j$ . Modulo  $\sigma_\omega^j$ , l'idéal  $\sigma_\omega^{j+1}$  sera alors engendré par l'ensemble  $\psi_{j+1}(\omega)$  des  $(k-j)$ -jets en  $o$  des termes de  $(T_i^j - Y_i^j (X_i^j)^{-1} Z_i^j) \times \det X_i^j \quad i = 0, \dots, j$  pour  $\omega \in H_j$ . Rappelons que  $H_j$  est l'ensemble des  $\omega \in \mathcal{H}_k$  tels que :

$$\begin{aligned} \sigma_\omega^\ell &\subset J_k^\ell, \quad \ell = 0, \dots, j, \\ \text{rg } \sigma_\omega^\ell &= n - \tau_\ell. \end{aligned}$$

Chaque élément de  $\psi_{j+1}(\omega)$  est un polynôme dans les composantes de  $\omega$ .

Comme les composantes de  $\omega_0$  sont des constantes, de tels polynômes sont fonctions des composantes

$$b_{vw} = b_{vw}^1 + \dots + b_{vw}^\ell + \dots + b_{vw}^k$$

$$\text{de } \omega_1 = \omega_1 + \dots + \omega_\ell + \dots + \omega_k.$$

On a posé

$$b_{vw}^\ell = \sum_{|L|=\ell} b_{vw}^L x^L,$$

où  $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$  et  $|L| = \ell_1 + \dots + \ell_n$ . Un élément de  $\psi_{j+1}(\omega)$  est, par l'intermédiaire des  $b_{vw}$ , un polynôme en  $x_1 \dots x_n$  du type  $\sum_I Q_I x^I$ , où  $Q_I$  est un polynôme en  $b_{vw}^L$  pour  $i \leq v \leq w \leq n$  et  $i \leq |L| \leq |I|$ . L'inclusion  $\sigma_\omega^{j+1} \subset J_k^{j+1}$  va se traduire par l'annulation d'un certain nombre de  $Q_I$  c'est-à-dire des équations polynomiales en  $b_{vw}^L$ . Ainsi la fermeture  $\bar{H}_k$  de  $H_k$  dans  $\mathcal{H}_k$ , c'est-à-dire  $\{\omega \in \mathcal{H}_k \mid \sigma_\omega^{j+1} \subset J_k^{j+1} \quad j = 0, \dots, k-1\}$  est défini par un système d'équations polynomiales en  $b_{vw}^L$ ,  $i \leq v \leq w \leq n$  et  $i \leq |L| \leq k$ . On va montrer que l'ensemble formé par les parties linéaires de chacune de ces équations est un système de rang maximum par rapport aux  $b_{vw}^L$ ; ce rang est égal au nombre des équations du système. Dans le cas  $\Lambda_k = \Omega_k^2$ , les coordonnées  $b_{vw}^L$  étant indépendantes, on pourra achever la démonstration de la proposition 3.1.3.

2<sup>e</sup> partie (voir [15]). Pour les 2-formes fermées, c'est-à-dire  $\Lambda_k = \Omega_k^2$ , les composantes  $b_{vw}^L$  ne sont plus indépendantes puisque  $\omega$  est fermée. L'espace  $\Omega_k^2$  s'identifie au sous-espace de  $\Lambda_k^2$  défini par les relations entre les  $b_{vw}^L$  exprimant que  $\omega$  est fermée,  $b_{vw}^L$  étant considérée comme des formes linéaires sur  $\Lambda_k^2$ . L'étude du système formé par ces relations va nous permettre de donner un critère d'indépendance de l'ensemble  $\mathcal{C}_k$  des  $b_{uv}^L$  qui apparaissent dans la partie linéaire des équations de  $H_k$ . Dans les hypothèses suivantes :

pour tout entier  $j$ ,  $S_j = \begin{pmatrix} s_0^j \\ \vdots \\ s_j^j \end{pmatrix}$  vérifie

$$\begin{aligned} s_0^1 &\leq 2, \\ s_{j-1}^j - s_{j-2}^j &\leq 1 \quad \text{et} \quad s_i^j \leq 1 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq j-2 \quad \text{si } 2 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

on montre l'indépendance des équations qui définissent  $H_k$ . En fait, sous ces hypothèses la strate  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k} \subset \Lambda_k^2$  définie dans le § 2.2 est transverse à  $\Omega_k^2$ .

3<sup>e</sup> partie (voir [15]). Dans le cas où il existe un entier (et un seul) pour lequel  $S_j$  et  $V_j$  ne vérifient pas les inégalités précédentes,  $\varepsilon_{S_0 \dots S_k} \subset \Lambda_k^2$  n'est plus transverse à  $\Omega_k^2$ . L'étude du système d'équations construit dans la 1<sup>re</sup> partie va nécessiter le calcul de la partie quadratique en  $b_{vw}^L$  de chaque équation. On transforme ce système en un système équivalent dont les équations sont indépendantes sous l'hypothèse qu'il existe au plus un entier  $j$  pour lequel  $S_j$  ne vérifie pas les inégalités ci-dessus.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. J. ARNOLD, Singularities of smooth mappings, *Russian Math. Surveys* **23** (1968), 1-43.
- [2] J.-M. BOADMAN, Singularities of Differentiable Maps, *Publ. Math. I.H.E.S.* **33** (1967), 21-57.
- [3] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.
- [4] C. CHEVALLEY, *Séminaire de géométrie algébrique*, Paris, 1955-1956.
- [5] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et Mécanique analytique*, Paris, Hermann, 1969.
- [6] M. GOLUBITSKY et O. TISCHLER, On the local stability of differential forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **223** (1976), 205-221.
- [7] M. GOLUBITSKY, et O. TISCHLER, An example of module for singular symplectic forms, *Invent. Math.* **38** (1977), 219-225.
- [8] B. JAKUBCZYK et F. PRZYTYCKI, *Singularities of k-tuples of vector fields*, Preprint 15, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1978.
- [9] H. I. LEVINE, Singularities of differentiable mappings, in *Proceedings of the Liverpool Singularities Symposium I*, Springer, *Lecture Notes Math.* **192** (1970), 1-96.
- [10] J. MARTINET, Sur les singularités de formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier* **20** (1) (1970), 95-178.
- [11] J. MATHER, Stability of  $C^\infty$ -mappings : V-transversality, *Advances in Math.* **4** (1970), 301-336.
- [12] J. MATHER, On Thom-Boardman Singularities, in *Salvador Symposium on dynamical Systems*, 1971, 239-248 (Springer).
- [13] B. MORIN, *Calcul Jacobien*, Thèse, Orsay, 1972.
- [14] F. PELLETIER, *Comportement générique d'une 2-forme fermée en dimension paire*, Préprint, Dijon, 1978.
- [15] F. PELLETIER, *Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles*, Thèse, Dijon, 1980.
- [16] R. ROUSSARIE, Modèles locaux de champs et de formes, *Astérisque* **30** (1975).
- [17] R. THOM, Les singularités d'applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier* **6** (1956), 43-87.
- [18] R. THOM, Un lemme sur les applications différentiables, *Bul. Soc. Math. Mexico*, 2<sup>e</sup> série, **1** (1956), 59-71.

*Manuscrit reçu le 19 janvier 1981,*

*Révisé le 26 avril 1984.*

Laboratoire de Topologie  
 ERA CNRS n° 945  
 Université de Dijon  
 BP 138  
 21000 Dijon Cedex  
 et Université de Corse  
 7, av. Jean Nicoli  
 20250 Corté