PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS LEDRAPPIER

# Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï

*Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 59 (1984), p. 163-188
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1984__59__163_0>

# PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DES MESURES DE SINAÏ

par F. LEDRAPPIER

## Introduction

De nombreux systèmes en évolution sont modélisés par une transformation dont les orbites sont apparemment erratiques. On s'intéresse alors à la statistique définie par ces orbites, c'est-à-dire aux mesures de probabilité invariantes par la transformation.

En fait sous des conditions d'hyperbolicité uniforme, il existe une mesure invariante particulière qui décrit la statistique des orbites de presque tout point d'un certain ouvert (le « bassin d'attraction ») et dont on peut décrire beaucoup de propriétés en détail (cf. le livre de Bowen [1]). Cette mesure est en particulier caractérisée par une relation « variationnelle » satisfaite par son entropie moyenne (cf. [1], [15] et [22]). Ruelle [17] a conjecturé que ces propriétés peuvent être encore vraies sous des conditions plus générales et nous renvoyons à ses articles pour le lien entre ces conjectures et la description de la turbulence.

Nous nous proposons ici de répondre à une de ces questions : nous considérons un $C^{1+\alpha}$ difféomorphisme d'une variété compacte et une mesure finie invariante. Nous supposons que la valeur 0 n'apparaît pas parmi les exposants du système. Notre résultat principal (théorème 4.8) dit alors que l'entropie est égale à l'intégrale de la somme des exposants positifs si et seulement si la mesure satisfait une propriété géométrique : la continuité absolue par rapport au feuilletage instable (voir définition 2.6). La suffisance est connue comme la « formule de Pesin » ([12], [9] et [8]). On sait aussi (Ruelle [16]) que l'entropie est toujours plus petite que l'intégrale de la somme des exposants positifs. Notre résultat est donc une caractérisation variationnelle d'une certaine mesure invariante.

Nous proposons d'appeler mesure de Sinaï une mesure invariante avec les propriétés ci-dessus : c'est une mesure aussi régulière que possible le long du feuilletage instable. En revanche, cette mesure peut être singulière le long du feuilletage stable. En utilisant les propriétés de régularité de ce feuilletage invariant établies par Pesin [13], nous obtenons pour les mesures de Sinaï plusieurs propriétés attendues : les points avec une bonne orbite ont une mesure de Lebesgue positive (théorème 4.9), le système est isomorphe à un schéma de Bernoulli, peut-être à une partition dénombrable près (théorème 5.10) et l'intersection des deux feuilletages, stable et instable, définit une relation d'équivalence qui laisse la mesure quasi invariante (théorème 5.11). Ces résultats ont été annoncés dans [7].

Soulignons que nos résultats supposent l'existence d'une mesure de Sinaï et étudient ses propriétés et que nous ne discutons pas cette existence. Néanmoins, il se peut que notre résultat soit utile pour prouver cette existence : il est *a priori* plus facile de vérifier une formule que de vérifier que des mesures conditionnelles sont absolument continues. Les critères faisant intervenir la dimension (corollaire 4.11) peuvent même mener à des vérifications expérimentales.

## 1. Notations et rappels de théorie de Pesin

Nous considérons dans tout cet article M une variété riemannienne compacte sans bord, $f$ un $C^1$-difféomorphisme tel que les différentielles $T_x f$ et $T_x f^{-1}$ dépendent de $x$ dans M de façon höldérienne d'ordre $\alpha$, $\alpha > 0$, et $m$ une mesure de Radon $f$-invariante sur M, $m(M) = 1$. Considérons l'application exponentielle associée à la métrique riemannienne sur M; par compacité il existe $\delta$ tel que cette application est un $C^\infty$-difféomorphisme entre la boule de centre 0 et de rayon $r$ dans $T_x M$ et la boule de centre $x$ et de rayon $r$ dans M, pour $r \leq \delta$. D'autre part, nous notons $\mu$ la mesure de Lebesgue sur M associée à la structure riemannienne. En appliquant le théorème d'Osseledets [11] au cocycle défini par $T_x f$ nous obtenons :

**(1.1)** *Il existe un sous-ensemble borélien* B *de* M *invariant, de m-mesure* 1 *et pour tout* $x$ *de* B *il existe une décomposition de l'espace tangent* $T_x M = E_x^1 \oplus \ldots \oplus E_x^{r(x)}$ *et des nombres réels* $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) \ldots < \lambda_{r(x)}(x)$ *tels que :*

i) $E_x^i$, $\lambda_i(x)$ *et* $r(x)$ *sont des fonctions boréliennes sur* B, $\lambda_i(fx) = \lambda_i(x)$, $r(fx) = r(x)$ *et l'image de* $E_x^i$ *par* $T_x f$ *est l'espace* $E_{fx}^i$.

ii) *Pour tout* $v$ *de* $E_x^i$, $v \neq 0$ $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|T_x f^n v\| = \lambda_i(x)$.

Nous noterons le plus souvent $E_x^u = \bigoplus_{i,\lambda_i(x)>0} E_x^i$, $E_x^s = \bigoplus_{i,\lambda_i(x)<0} E_x^i$, $E_x^0 = E_x^{i_0}$ pour la valeur $i_0$ telle que $\lambda_{i_0} = 0$, $\lambda_x^u = \inf\{\lambda_i(x); \lambda_i(x) > 0\}$, $\lambda_x^s = \sup\{\lambda_i(x); \lambda_i(x) < 0\}$.

La suite des $\lambda_i(x)$ rangés en ordre décroissant avec la multiplicité $\dim E_x^i$ s'appelle la suite des exposants caractéristiques au point $x$. Nous supposerons dans toute la suite que $m$-presque partout, les sous-espaces $E_x^u$ et $E_x^s$ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Nous dirons que la mesure $m$ n'a pas d'exposant neutre si $E_x^0$ est réduit à $\{0\}$ $m$-presque partout. Nous noterons $\mathscr{J}_u(x)$ le déterminant de la restriction de l'application $T_x f$ au sous-espace $E_x^u$. Du théorème d'Osseledets suit également le fait suivant : pour $m$-presque tout $x$, on a :

$$\textbf{(1.2)} \qquad \sum_{i=1}^{r(x)} \lambda_i^+(x) \dim E_x^i = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \mathscr{J}_u(f\ x).$$

Choisissons alors $\lambda > 0$ tel que $m(B_\lambda) > 0$ avec $B_\lambda = \{x \in B; \lambda_x^u > \lambda\}$. Nous énonçons ensuite le théorème de la variété instable en suivant la présentation de Fathi, Herman et Yoccoz [3] des théorèmes de Pesin [13] et Ruelle [18].

**(1.3)** *Choisissons* $0 < \alpha' < \alpha$, $\lambda > 0$, $\varepsilon$ *et* $\rho$ *avec* $\lambda - \varepsilon > \log \rho > 2\varepsilon > 0$. *Il existe alors deux fonctions boréliennes* $\delta_\varepsilon$ *et* $\gamma_\varepsilon$ *de* $B_\lambda$ *dans respectivement* $(0, \delta)$ *et* $(1, +\infty)$ *et pour tout* $x$ *de* $B_\lambda$ *une application lipschitzienne* $\psi_x$ *de* $B^u(x, \delta_\varepsilon(x)) = \{v \in E_x^u; \|v\| \leq \delta_\varepsilon(x)\}$ *dans* $E_x^s$ *tels que :*

i) $\psi_x$ *dépend de* $x$ *de façon borélienne, et si on note* $W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$ *l'image par l'application exponentielle en* $x$ *du graphe de* $\psi_x$, $W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$ *est l'image* $C^{1+\alpha'}$ *d'un disque et dépend de* $x$ *de façon borélienne; de plus* $\mathrm{Lip}_{\alpha'}(\exp_x \psi_x) \leq \gamma_\varepsilon(x)$.

ii) *Pour tous* $y$, $z$ *de* $W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$, $n \geq 0$, *nous avons* $d(f^{-n}y, f^{-n}z) \leq \gamma_\varepsilon(x)\,\rho^{-n}\,d(y, z)$.

iii) *Si* $z$ *satisfait aux relations suivantes :* $d(x, z) \leq \dfrac{\delta_\varepsilon(x)}{\gamma_\varepsilon(f^{-1}x)}$ *et* $d(f^{-n}x, f^{-n}z) \leq \rho^{-n}\,\delta_\varepsilon(x)$, $n \geq 0$, *alors* $z$ *appartient à* $W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$.

iv) *Pour tout* $x$ *de* $B_\lambda$, $f^{-1}\left(W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon} \cap B\left(f^{-1}x, \dfrac{\delta_\varepsilon(f^{-1}x)}{\gamma_\varepsilon(f^{-1}x)}\right)\right) \subset W_{f^{-1}x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$.

v) *Pour tout* $x$ *de* $B_\lambda$ *et* $n$ *dans* $\mathbf{Z}$, $\gamma_\varepsilon(f^n x) \leq \gamma_\varepsilon(x)\,e^{\varepsilon|n|}$, $\delta_\varepsilon(f^n x) \leq \delta_\varepsilon(x)\,e^{\varepsilon|n|}$.

vi) $V(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(W_{f^{-n}x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon})$ *est un espace euclidien* $C^1$*-immergé satisfaisant à* $T_x V(x) = E_x^u$.

vii) *Désignons par* $\rho_{V(x)}$ *la distance sur* $V(x)$ *définie par la restriction à* $V(x)$ *de la métrique riemannienne. Pour tous* $y$, $z$ *de* $W_{x,\mathrm{loc}}^{\rho,\varepsilon}$ :

$$\rho_{V(x)}(y, z) \leq \gamma_\varepsilon^2(x)\,d(y, z).$$

viii) $V(x)$ *est l'ensemble des points* $y$ *tels que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}x, f^{-n}y) \leq -\lambda_x^u.$$

ix) $V(x)$ *est l'ensemble des points* $y$ *tels que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}x, f^{-n}y) < 0.$$

Ce résultat s'établit en rassemblant les théorèmes 16 et 17 de [3] appliqués à $f^{-1}$. Le point vii) remplace ici (16.6) et s'établit de la même manière.

Il suit de (1.3 ix) que la sous-variété $V(x)$ ne dépend pas du choix de $\varepsilon$, $\rho$ et est définie sur $\bigcup_{\lambda>0} B_\lambda$ c'est-à-dire $m$-presque partout. Nous appelons $V(x)$ la *variété instable* du point $x$. D'après (1.3 vi et ix) la famille des variétés instables découpe $\bigcup_\lambda B_\lambda$ en classes d'équivalence pour la relation V

$$x \,V\, y \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log d(f^{-n}x, f^{-n}y) < 0.$$

Nous appelons alors cette famille V le *feuilletage instable*. Les propriétés (1.3 i et vi) sont les propriétés d'un feuilletage borélien.

Si W est un disque $C^1$-immergé dans M, la structure riemannienne induit sur W une structure riemannienne. Nous noterons $\mu_W$ la mesure de Lebesgue sur W et $\rho_W$ la distance sur W ainsi définies. Enfin nous noterons $\rho_V$ la distance sur M définie par $\rho_V(x,y) = \rho_{V(z)}(x,y)$ s'il existe $z$ avec $x$ et $y$ dans $V(z)$ (*i.e.* si $x \, V \, y$), $\rho_V(x,y) = +\infty$ sinon.

Pour $\mu < 0$ posons $B_\mu = \{x \in B; \lambda_x^s < \mu\}$ et choisissons $\mu$ tel que $m(B_\mu) > 0$. Nous avons alors le théorème de la variété stable qui s'exprime de la même manière. Pour fixer les notations, une fois choisis $0 < \alpha' < \alpha$, $\mu < 0$, $\varepsilon'$ et $\rho'$ avec $-\mu - \varepsilon' > \log \rho' > 2\varepsilon' > 0$, on trouve des fonctions $\delta'_{\varepsilon'}$ et $\gamma'_{\varepsilon'}$ mesurables et des variétés stables locales $U_{x,\mathrm{loc}}^{\rho',\varepsilon'}$ avec les propriétés (1.3 i à ix). Nous noterons $U(x)$ la variété stable de $x$, U le feuilletage stable. Nous utiliserons une propriété de régularité du feuilletage stable, la continuité absolue établie par Pesin [13].

Supposons choisis $\alpha'$, $\mu$, $\rho'$, $\varepsilon'$ dans 1.3 et pour tout ensemble $\Lambda \subset B_\mu$, notons $\widetilde{\Lambda} = \bigcup_{x \in \Lambda} U_{x,\mathrm{loc}}^{\rho',\varepsilon'}$. Les applications canoniques d'un ensemble K dans un ensemble K' associées aux variétés stables locales $(\mu, \rho', \varepsilon', \Lambda)$ sont définies de la manière suivante :

Pour $x$ dans $K \cap \widetilde{\Lambda}$, il existe par définition $z(x)$ dans $\Lambda$ avec $x \in U_{z(x),\mathrm{loc}}^{\rho',\varepsilon'}$. On associe alors à $x$, s'il existe, s'il est unique et ne dépend pas du choix de $z(x)$, le point d'intersection de $U_{z(x),\mathrm{loc}}^{\rho',\varepsilon'}$ avec K'.

**(1.4)** *Il existe des fermés* $\Lambda'_\ell$, $m(\bigcup_\ell \Lambda'_\ell) = 1$ *et pour tout* $\ell$ *des nombres* $q_\ell$, $\varepsilon_\ell$, $\rho_\ell$, $\mu_\ell$, $\alpha_\ell$ *tels que* $\mu_\ell \to 0$ *et si* $x$ *appartient à* $\Lambda'_\ell$ *et si* K *et* K' *sont les images par l'application exponentielle de graphes dans* $T_x M$ *d'une application* $C^1$ *de* $B(E_x^u, q_\ell)$ *dans* $B(E_x^s, q_\ell)$, *de constante de Lipschitz* $\alpha_\ell$, *alors les applications canoniques associées aux variétés stables locales* $(\mu_\ell, \rho_\ell, \varepsilon_\ell, B(x, q_\ell))$ *transforment un ensemble* $\mu_K$*-négligeable en un ensemble* $\mu_{K'}$*-négligeable.*

Ce résultat est établi sous cette forme par Katok et Strelcyn [4].

Tout ce qui précède est valable en présence d'un exposant neutre. Nous allons exprimer maintenant qu'il n'y a pas d'exposant neutre par un changement de norme qui rend le système hyperbolique. Pour $\lambda > 0 > \mu$, appelons $B_{\lambda,\mu}$ l'ensemble des points $x$ où $\lambda_x^u > \lambda$, $\lambda_x^s < \mu$, et choisissons $\lambda$, $\mu$ tels que $m(B_{\lambda,\mu}) > 0$. Choisissons $0 < \alpha' < \alpha$ et définissons

$$\text{pour } v \text{ dans } E_x^u, \quad |||v||| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \, ||T_x f^{-n} v||,$$

$$\text{pour } v \text{ dans } E_x^s, \quad |||v||| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu n} \, ||T_x f^{n} v||,$$

$$\text{et si } v = v_u + v_s, \; v_i \text{ dans } E_x^i, \quad |||v||| = \max(|||v_u|||, |||v_s|||).$$

Les propriétés de cette norme sont résumées dans :

**(1.5)** *Supposons que la mesure m n'a pas d'exposant neutre,*

i) *Il existe alors une constante* K *telle que* $|||T_x f||| \leq K$, $|||T_x f^{-1}||| \leq K$. *De plus* $|||T_x f/E^s_x||| \leq e^{\mu}$, $|||T_x f^{-1}/E^u_x||| \leq e^{-\lambda}$.

ii) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $B_\varepsilon$ *définie sur* $B_{\lambda,\mu}$, *borélienne telle que*

*pour tout v de* $T_x M$, $\quad \frac{1}{2} ||v|| \leq |||v||| \leq B_\varepsilon(x) \, ||v||$,

*pour tout n de* $\mathbf{Z}$, $\quad B_\varepsilon(f^n x) \leq B_\varepsilon(x) \, e^{\varepsilon|n|}$.

iii) *De plus, pour tout* $\eta > 0$, *il existe une application borélienne* $\overline{F}$ *de la restriction de* TM *à* $B_{\lambda,\mu}$ *dans lui-même, fibrée au-dessus de* $f^{-1}$ *et une fonction* $C_\varepsilon$ *borélienne telles que, sur* $B_{\lambda,\mu}$

α) $\mathrm{Lip}^1_{|||\ |||}(\overline{F}_x - T_x f^{-1}) \leq \eta$,

β) $\mathrm{Lip}^{\alpha'}_{|||\ |||}(T\overline{F}_x) \leq 1$,

γ) $\overline{F}_x(v) = \exp^{-1}_{f^{-1}x} \circ f^{-1} \circ \exp_x v \quad$ *si* $|||v||| \leq C_\varepsilon(x)$,

δ) *Pour tout n de* $\mathbf{Z}$ $\; C_\varepsilon(f^n x) \leq C_\varepsilon(x) \, e^{\varepsilon|n|}$.

(1.5) est obtenu en appliquant les propositions 4 et 7 de [3] à $f^{-1}$ au lieu de $f$.

## 2. Rappels de théorie de la mesure

Notons $\mathscr{M}$ la σ-algèbre des boréliens de M et si $m$ est une mesure sur M, $\overline{\mathscr{M}}$ la σ-algèbre complétée de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{M}$ et les ensembles inclus dans un négligeable de $\mathscr{M}$. La plus grande partie de ce paragraphe serait valable en général pour un espace mesuré $(M, \mathscr{M}, m)$ isomorphe à l'intervalle unité muni de la σ-algèbre des boréliens et de la mesure de Lebesgue (espace de Lebesgue). Nous dirons que deux sous σ-algèbres $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de $\overline{\mathscr{M}}$ coïncident si pour tout élément B de $\mathscr{B}$, il existe B' de $\mathscr{B}'$ avec $m(B \Delta B') = 0$ et *vice versa*. Soit ξ une partition de M. Nous noterons $M_\xi$ l'espace quotient, $\mathscr{M}_\xi$ la σ-algèbre des éléments de $\overline{\mathscr{M}}$ qui sont réunions d'éléments de ξ. La partition ξ est dite mesurable si et seulement si il existe un ensemble N co-négligeable, et une suite $A_n$ $n \geq 0$ d'ensembles de $\mathscr{M}_\xi$ tels que pour tout couple $\xi_1$, $\xi_2$ d'éléments de ξ, il existe un ensemble $A_{n_0}$ avec $\xi_1 \cap N \subset A_{n_0}$, $\xi_2 \cap N \subset M \backslash A_{n_0}$. Pour $x$ dans M, nous noterons $C_\xi(x)$ l'élément de ξ contenant $x$. Nous avons alors le résultat fondamental suivant :

**(2.1)** *Soit ξ une partition mesurable; il existe un ensemble* N *conégligeable et pour chaque x dans* N *une probabilité* $m^\xi_x$ *sur* M *telle que :*

i) $m^\xi_x$ *est une mesure portée par* $C_\xi(x)$ *et qui ne dépend que de* $C_\xi(x)$;

ii) *pour tout ensemble* A *de* $\mathscr{M}$, $x \to m^\xi_x(A)$ *est une fonction mesurable et* $m(A) = \int m^\xi_x(A) \, m(dx)$.

La famille $m^\xi_x$ s'appelle famille de probabilités conditionnelles régulières pour ξ. Elle est presque sûrement unique.

Nous avons encore les propriétés suivantes :

**(2.2)** i) *Pour toute sous $\sigma$-algèbre $\mathscr{B}$ de $\overline{\mathscr{M}}$, il existe une partition mesurable $\xi$ telle que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{M}_\xi$ coïncident.*

ii) *L'espace* $\mathrm{M}_\xi$ *muni de la $\sigma$-algèbre image de $\mathscr{M}_\xi$ est isomorphe à la réunion de l'espace de Lebesgue et d'un espace dénombrable.*

Tous ces résultats se trouvent dans [19] ou s'en déduisent facilement.

Soit $\xi$ une partition d'un espace de probabilité $(\mathrm{M}, m)$. On appelle *entropie* de $\xi$ le nombre

$$\mathrm{H}(\xi) = -\int_{\mathrm{M}} \log m(\mathrm{C}_\xi(x))\, m(dx)$$
$$\left(\text{avec } \int_{\mathrm{A}} \infty\, dm = 0 \text{ si } m(\mathrm{A}) = 0, \quad = \infty \text{ si } m(\mathrm{A}) > 0\right).$$

Soit $f$ une transformation inversible de $(\mathrm{M}, \mathscr{M})$ préservant la mesure $m$. Si $\mathrm{Q}$ est une partition de M en ensembles mesurables, on forme $\mathrm{Q}_n$ la partition en les intersections des éléments de $f^i\mathrm{Q}$ $\;0 \leq i < n$ et on appelle *entropie moyenne* de $\mathrm{Q}$ la quantité

$$h_m(\mathrm{Q}, f) = \inf \frac{1}{n} \mathrm{H}(\mathrm{Q}_n).$$

L'entropie de la transformation $f$ est la quantité $h_m(f) = \sup\{h_m(\mathrm{Q}, f), \mathrm{H}(\mathrm{Q}) < +\infty\}$. On appelle *$\sigma$-algèbre de Pinsker* la classe des ensembles A de $\overline{\mathscr{M}}$ tels que l'entropie moyenne de la partition $\{\mathrm{A}, \mathrm{M}\backslash\mathrm{A}\}$ est nulle.

L'entropie et la $\sigma$-algèbre de Pinsker sont les deux invariants de la théorie ergodique auxquels nous nous intéressons ici. Il est possible de les obtenir grâce à une partition décroissante comme suit. Soient $\xi$ et $\eta$ deux partitions mesurables, on note

$$\mathrm{I}(\xi \mid \eta)(x) = -\log m_x^\eta(\mathrm{C}_\xi(x))$$

où $m_x^\eta$ désigne une famille de probabilités conditionnelles régulières pour $\eta$. Nous avons en fait $\mathrm{I}(\xi \mid \eta) = \mathrm{I}(\xi \vee \eta \mid \eta)$. Nous avons encore la formule d'addition

$$\mathrm{I}(\zeta \vee \xi \mid \eta) = \mathrm{I}(\zeta \mid \eta) + \mathrm{I}(\xi \mid \zeta \vee \eta)$$

qui se déduit facilement des règles de composition des mesures conditionnelles. Posons

$$\mathrm{H}(\xi \mid \eta) = \int \mathrm{I}(\xi \mid \eta)(x)\, m(dx).$$

Si $\eta$ est la partition triviale $\eta_0 = \{\Omega\}$, nous avons bien $\mathrm{H}(\xi \mid \eta_0) = \mathrm{H}(\xi)$. Une partition $\xi$ est dite décroissante si la partition $f^{-1}\xi$ définie par

$$\mathrm{C}_{f^{-1}\xi}(x) = f^{-1}\,\mathrm{C}_\xi(fx)$$

est plus fine que la partition $\xi$.

**(2.3)** *Si la partition* $\xi$ *est décroissante,* $h_m(f) \geq \mathrm{H}(f^{-1}\xi \mid \xi)$.

*Si de plus les σ-algèbres* $\mathcal{M}_{f^{-n}\xi}$ *engendrent* $\mathcal{M}$ *alors la σ-algèbre de Pinsker est contenue dans la σ-algèbre* $\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{M}_{f^n\xi}$.

*Si en outre on a l'égalité* $h_m(f) = \mathrm{H}(f^{-1}\xi \mid \xi) < +\infty$, *alors la σ-algèbre de Pinsker coïncide avec* $\mathcal{M}_\infty$.

(voir [20] section 7.1, théorèmes 12.1 et 12.3).

Revenons au système $(\mathrm{M}, m, f)$ avec les notations du paragraphe 1. Les partitions naturelles définies par les orbites, ou les relations V, U ou $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}$ ne sont pas mesurables, (2.1) n'est plus vrai et les relations entre comportement global et local sont complexes.

Par exemple la partition en orbites définit la σ-algèbre $\mathcal{M}_\mathrm{I}$ des ensembles invariants et donc d'après (2.2 i) et (2.1) une partition mesurable $i$ et une famille $m_x^i$ de probabilités conditionnelles régulières pour $i$. Nous avons :

**(2.4)** i) *Pour presque tout* $x$, $m_x^i$ *est ergodique (*i.e. $m_x^i$ *ne prend que les valeurs* 0 *et* 1 *sur* $\mathcal{M}_\mathrm{I}$*).*

ii) *Si* $g$ *est une fonction de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{M}, m)$, $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g(f^j x)$ *converge vers* $\int g(y)\, m_x^i(dy)$ *presque partout quand* $n$ *tend vers l'infini.*

iii) $h_m(f) = \int h_{m_x^i}(f)\, m(dx)$.

En effet, (2.4 ii) est le théorème de Birkhoff, (2.4 i) est une conséquence de (2.4 ii), et (2.4 iii) résulte de [20] théorème 8.11.

En ce qui concerne la relation V, définissons encore $\mathcal{M}_\mathrm{V}$ comme la σ-algèbre des éléments de $\overline{\mathcal{M}}$ qui sont V-saturés. Nous avons :

**(2.5)** *La σ-algèbre* $\mathcal{M}_\mathrm{V}$ *contient la σ-algèbre* $\mathcal{M}_\mathrm{I}$

(cf. par exemple [8] proposition 2.6). Nous verrons plus loin le lien entre $\mathcal{M}_\mathrm{V}$ et la σ-algèbre de Pinsker. Pour la structure locale de V, la définition suivante est essentielle dans notre étude :

**(2.6)** *Une mesure m sur* M *est dite* absolument continue *par rapport au feuilletage instable si pour chaque partition mesurable* $\xi$ *dont les éléments* $\mathrm{C}_\xi$ *vérifient m-presque partout* $\mathrm{C}_\xi(x) \subset \mathrm{V}(x)$ *et* $\mu_{\mathrm{V}(x)}(\mathrm{C}_\xi(x)) > 0$, *la famille de mesures conditionnelles* $m_x^\xi$ *par rapport à* $\xi$ *possède la propriété suivante :* $m_x^\xi$ *est absolument continue par rapport à* $\mu_{\mathrm{V}(x)}$, *m-presque partout.*

Avec les notations du théorème 1.1, nous avons :

**(2.7)** *Soit m une mesure invariante; alors*

$$h_m(f) \leq \int \sum_i \lambda_i^+(x) \dim \mathrm{E}_x^i\, m(dx)$$

*avec égalité si m est absolument continue par rapport au feuilletage instable.*

Cela suit de (1.2), Ruelle [16] et de Ledrappier-Strelcyn [8] pour l'égalité.

Nous appellerons dans toute la suite *mesure de Sinaï* une mesure invariante sans exposant neutre et absolument continue par rapport au feuilletage instable.

Soient $(M, \mathcal{M}, m)$ un espace de probabilité et A un sous-ensemble mesurable de mesure positive; on appelle probabilité *trace sur* A *de* $m$ la mesure $m_A$ donnée par

$$m_A(B) = \frac{m(A \cap B)}{m(A)}.$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

**(2.8)** *Soit* $(M, \mathcal{M})$ *un espace mesurable, $f$ une transformation mesurable. Soient* $P_1$, $P_2$ *deux propriétés que peuvent avoir les probabilités invariantes et telles que m vérifie* $P_i$ *si et seulement si toute composante ergodique de m vérifie* $P_i$. *Si sous* $P_1$, *il existe un ensemble invariant* S *de mesure positive tel que la probabilité trace de m sur* S *vérifie* $P_2$, *alors* $P_1$ *implique* $P_2$.

## 3. Construction d'une partition décroissante et applications

Dans ce paragraphe nous construisons une partition décroissante dont les éléments sont des ouverts de variété instable (proposition 3.1). Ce sera l'outil principal pour relier les propriétés géométriques et les propriétés ergodiques (cf. théorèmes 3.3 et 3.4). Dans tout ce paragraphe, l'espace $E_x^0$ n'est pas nécessairement supposé réduit à $\{0\}$.

*Proposition* **3.1.** — *Avec les notations du paragraphe* I, *choisissons* $\alpha'$, $\lambda$, $\rho$ *et* $\varepsilon$ *pour appliquer* (1.3) *et avec* $\log \rho > \frac{\varepsilon}{\alpha'}$. *Il existe alors un ensemble* S *invariant, borélien, de mesure positive,* $S \subset B_\lambda$, *et une partition mesurable* $\eta$ *de* S *tels que :*

i) *la partition* $\eta$ *est décroissante;*

ii) *pour m-presque tout point x de* S, $C_\eta(x) \subset V(x)$ *et contient un voisinage de x dans* $V(x)$;

iii) $\bigcup_n f^n C_\eta(f^{-n} x) = V(x)$ *m-presque partout sur* S, *autrement dit les σ-algèbres* $\mathcal{M}_V$ *et* $\bigcap_n \mathcal{M}_{f^n \eta}$ *coïncident;*

iv) *les partitions* $f^{-n}\eta$ *engendrent la trace de* $\mathcal{M}$ *sur* S;

v) *pour tout borélien* B *de* $\mathcal{M}$, *la fonction* $\theta$ $\theta(x) = \mu_{V(x)}(C_{\eta(x)} \cap B)$ *est une fonction mesurable et presque partout finie sur* S;

vi) *sur un ensemble* $\Gamma$, *avec* $m(S \setminus \bigcup_n f^n \Gamma) = 0$, $C_\eta(x) \subset W_{x,\,\mathrm{loc}}^{\rho,\,\varepsilon}$;

vii) *pour m-presque tout x de* S, *si z et z' appartiennent à* $C_\eta(x)$, *le produit infini* $\Delta(z, z')$ *converge :*

$$\Delta(z, z') = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_u(f^{-i} z)}{\mathcal{J}_u(f^{-i} z')};$$

viii) *il existe une constante* $\chi$ *telle que si* $x$ *appartient à* $\Gamma$ *et* $y$ *à* $C_\eta(x)$, *on a*

$$|\log \Delta(x, y)| \leq \chi(d(x, y))^{\alpha'}.$$

*Démonstration.* — A l'exception des propriétés vi) vii) viii), l'énoncé est pratiquement le même que celui de la proposition 3.1 de [8]. Nous reprenons le plan de la démonstration ([8] paragraphe 3.4) en précisant les modifications apportées.

Il faut d'abord réintroduire les ensembles $\Lambda_\ell$ et les nombres $\varepsilon(\ell)$ de Katok-Strelcyn ([8] proposition 3.3). Ici il nous suffit d'appliquer le théorème de Lusin aux applications mesurables $\delta_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon$, $\psi$ de $B_\lambda$ dans des espaces métriques complets définies par (1.3) pour obtenir des fermés $\Lambda_\ell$ de mesure arbitrairement proche de $m(B_\lambda)$ tels que les applications $\delta_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon$ et $\psi$ soient continues sur $\Lambda_\ell$. En particulier $\delta_\varepsilon^{-1}$ et $\gamma_\varepsilon$ sont bornées sur $\Lambda_\ell$ par $\delta_\ell^{-1}$ et $\gamma_\ell$. Par continuité uniforme de $\psi$ et de $T\psi$ sur $\Lambda_\ell$, il est alors facile de montrer qu'il existe des nombres $r_\ell > 0$, $\varepsilon(\ell) > 0$ et $K_\ell > 0$, tels que, si $0 < r \leq r_\ell$ :

(1) pour tout $x$ de $\Lambda_\ell$ et tout $y$ de $\Lambda_\ell \cap B(x, \varepsilon(\ell)\, r)$, $V(y, r)$ défini par

$$V(y, r) = W^{\rho, \varepsilon}_{y, \mathrm{loc}}(y) \cap B(x, r)$$

est une partie connexe de $B(x, r)$ dépendant continûment de $y$ dans $\Lambda_\ell \cap B(x, \varepsilon(\ell)\, r)$;

(2) si $z_1$ et $z_2$ sont deux points de $S(x, r)$ défini par

$$S(x, r) = \bigcup \{V(y, r) / y \in \Lambda_\ell \cap B(x, \varepsilon(\ell)\, r)\},$$

et $z_1$ et $z_2$ n'appartiennent pas à la même feuille locale $V(y', r)$, alors $\rho_V(z_1, z_2) > K_\ell\, r$.

Nous choisissons alors $\ell$ et $x_0$ dans $\Lambda_\ell$ de manière à ce que $m(S(x_0, r)) > 0$ pour tout $r$, $0 < r \leq r_\ell$. (Il suffit de prendre $x_0$ dans le support de la restriction de la mesure $m$ à $\Lambda_\ell$.) Nous définissons la partition $\xi_r$ par la partition en les ensembles $V(y, r)$ pour $y$ dans $\Lambda_\ell \cap B(x_0, \varepsilon(\ell)\, r)$ et le complémentaire de leur réunion $S(x_0, r)$. Nous définissons ensuite $\eta_r = \bigvee_{n=0}^{\infty} f^n \xi_r$, $S_r = \bigcup_{n \geq 0} f^n(S(x_0, r))$.

La partition $\eta$ sera la partition $\eta_{r_0}$ pour un $r_0$ choisi ultérieurement. L'ensemble S sera l'ensemble $\bigcap_j f^j S_{r_0}$. En posant $\Gamma = S(x_0, r)$, les propriétés i) et vi) sont évidentes sur $S_r$. Nous choisissons ensuite $r$ pour que ii) soit vraie. Pour cela définissons $\ell(z) = \inf\{\ell', z \in \Lambda_{\ell'}\}$ et

$$\beta_r(z) = \inf\left\{\frac{\delta_{\ell(z)}}{\gamma_{\ell(z)}}, \frac{K_\ell\, r}{\gamma^2_{\ell(z)}}, \frac{1}{2}\rho^n d(f^{-n} z, \partial B(x_0, r)), n \geq 0\right\}.$$

Aux notations près, on vérifie alors que si $\rho_V(y, z) < \beta_r(z)$, on a $z \in C_\eta(y)$ et que l'on peut choisir $r_0$ de façon que $\beta_{r_0} > 0$ $m$-presque partout sur $S_{r_0}$ exactement comme dans [8]. Les propriétés ii) iii) iv) et v) s'établissent également comme dans [8].

Nous allons ensuite établir vii) et viii) sur $\Gamma = S(x_0, r_0)$. Soient donc $z$ et $z'$ deux points de $C_\eta(y)$ pour un $y$ de $S(x_0, r_0)$. Nous avons $d(f^{-n} z, f^{-n} z') \leq \gamma_\ell\, \rho^{-n} d(z, z')$ et $f^{-n} z$ et $f^{-n} z'$ appartiennent à $W^{\rho, \varepsilon}_{f^{-n} y, \mathrm{loc}}$, donc, d'après (1.3 i, ii, et v),

$$\begin{aligned} D(E^u_{f^{-n} z}, E^u_{f^{-n} z'}) &\leq (d(f^{-n} z, f^{-n} z'))^{\alpha'} \gamma_\varepsilon(f^{-n} z) \\ &\leq \gamma_\ell^{\alpha'} \rho^{-n\alpha'} (d(z, z'))^{\alpha'} \gamma_\ell\, e^{n\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'autre part, par l'hypothèse sur $Tf$, il existe une constante $C_0$ telle que

$$D(T_{f^{-n}z}f, T_{f^{-n}z'}f) \leq C_0 \gamma_\ell^{\alpha'} \rho^{-n\alpha'}(d(z, z'))^{\alpha'}.$$

Par définition de $\mathscr{J}_u$, il s'ensuit, en regroupant toutes les constantes dans une seule $C_1$ (cf. Katok-Strelcyn [4] corollaire 3.1), que

$$|\log \mathscr{J}_u(f^{-n} z) - \log \mathscr{J}_u(f^{-n} z')| \leq C_1 \rho^{-n\alpha'}(d(z, z'))^{\alpha'} e^{n\varepsilon},$$

et ceci établit vii) et viii) sur $\Gamma$ avec $\chi = \dfrac{C_1}{(e^{-\varepsilon} \rho^{\alpha'}) - 1}$.

Vérifions enfin que la propriété vii) est vraie sur $S_{r_0}$. Supposons que $z$ et $z'$ appartiennent à $C_\eta(y)$, $y$ dans $S_{r_0}$. Il existe $n_0$ tel que $f^{-n_0}y$ appartienne à $S(x_0, r_0)$ et alors le produit $\Delta(f^{-n_0} z, f^{-n_0} z')$ converge. Il s'ensuit que le produit $\Delta(z, z')$, avec

$$\Delta(z, z') = \left(\prod_{i=1}^{n_0} \frac{\mathscr{J}_u(f^{-i} z)}{\mathscr{J}_u(f^{-i} z')}\right) . \Delta(f^{-n_0} z, f^{-n_0} z')$$

converge également.

*Remarque* (3.2). — Une fois que $\ell$ et $r_0$ sont choisis dans la démonstration ci-dessus, on peut, par continuité uniforme de $\psi$, trouver un nombre $s_\ell > 0$ tel que, pour tout $y$ dans $\Lambda_\ell \cap B(x_0, \varepsilon(\ell)\, r_0)$, la distance $\rho_V$ des différentes composantes connexes de $W^{\ell,\varepsilon}_{y,\mathrm{loc}} \cap B(x_0, r_0)$ est plus grande que $s_\ell$.

Nous notons $m'$ la probabilité trace de $m$ sur S. En utilisant les rappels, nous pouvons comparer $H_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta)$ à l'entropie de la transformation et à la somme des exposants positifs.

*Théorème* (3.3). — *Soit* $\eta$ *une partition mesurable avec les propriétés* (3.1); *alors*

(3) $$H_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta) \leq h_{m'}(f)$$

*et s'il y a égalité, la* $\sigma$*-algèbre de Pinsker du système* $(M, \mathscr{M}, m')$ *coïncide avec la* $\sigma$*-algèbre* $\mathscr{M}_V$ *sur* S.

Le théorème suit de (2.4) et de (3.1 i, iii et iv). Remarquons que, en général, les propriétés i) iii) et iv) n'entraînent pas l'égalité (cf. la remarque dans la note de Kolmogorov [5]), nous montrerons plus loin cette égalité en l'absence d'exposant neutre (proposition 4.5).

*Théorème* (3.4). — *Soit* $\eta$ *une partition mesurable avec les propriétés* (3.1) *et telle que*

(4) $$H_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta) = \int \log \mathscr{J}_u(x)\, m'(dx).$$

*Alors la mesure* $m'$ *est absolument continue par rapport au feuilletage instable.*

Remarquons que, au vu de (2.7), (1.2) et (2.4 iii), si la relation (4) est vérifiée, il y a automatiquement égalité dans (3) et donc la $\sigma$-algèbre de Pinsker est déterminée par (3.3).

*Démonstration de* (3.4). — Nous avons d'abord deux lemmes de calcul.

*Lemme* **(3.5)**. — *Soit* $\eta$ *une partition avec les propriétés de la proposition* 3.1. *Alors* $0 < L(y) < \infty$ *m-presque partout sur* S *où* :

$$L(y) = \int_{C_\eta(y)} \Delta(y,y')\, \mu_{V(y)}(dy').$$

*Démonstration.* — D'après (3.1 vii) le produit $\Delta(y,y')$ converge et d'après (3.1 ii) $\mu_{V(y)}(C_\eta(y)) > 0$. Nous avons donc $L(y) > 0$ $m$-presque partout sur S. D'autre part, sur $\Gamma$, nous avons d'après (3.1 viii)

$$L(y) \leq e^{\chi D^{\alpha'}} D^d,$$

où D désigne le plus grand diamètre possible des $V(z, r_0)$, $z$ décrivant $\Lambda_\ell \cap B(x, \varepsilon(\ell)\, r_0)$. Si $y$ dans S n'appartient pas à $\Gamma$, il existe $k$ tel que $f^{-k}y$ appartient à $\Gamma$ et nous avons alors :

$$C_\eta(y) = f^k\, C_{f^{-k}\eta}(f^{-k}y) \subset f^k\, C_\eta(f^{-k}y)$$

et

$$\begin{aligned} L(y) &= \int_{C_\eta(y)} \Delta(y,y')\, \mu_{V(y)}(dy') \\ &\leq \prod_{i=1}^{k} \mathscr{J}_u(f^{-i}y) \int_{f^k C_\eta(f^{-k}y)} \Delta(f^{-k}y, f^{-k}y')\, \frac{\mu_{V(y)}(dy')}{\prod_{i=1}^{k} \mathscr{J}_u(f^{-i}y')} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \mathscr{J}_u(f^{-i}y)\, L(f^{-k}v) < +\infty. \end{aligned}$$

*Lemme* **(3.6)**. — *Posons*

$$q(y) = \frac{\int_{C_{f^{-1}\eta}(y)} \Delta(y,t)\, \mu_{V(y)}(dt)}{\int_{C_\eta(y)} \Delta(y,t)\, \mu_{V(y)}(dt)};$$

$\log q$ *est une fonction intégrable, d'intégrale* $-\int \log \mathscr{J}_u\, dm'$.

*Démonstration.* — Le lemme 3.5 assure que la fonction $\log q$ est bien définie. Il est clair alors que $\log q$ est une fonction négative et donc semi-intégrable. D'autre part le même calcul que précédemment montre que

$$q(y) = \frac{1}{\mathscr{J}_u(y)} \frac{L(fy)}{L(y)}.$$

Il s'ensuit que $\log q$ a même intégrale que $-\log \mathscr{J}_u$ pour chaque mesure invariante (cf. par exemple [8], proposition 2.2).

Supposons alors (4) et notons $\mu$ la mesure sur S définie par

$$\mu(B) = \int \left( \frac{1}{L(y)} \int_{C_\eta(y) \cap B} \Delta(y, t) \; \mu_{V(y)}(dt) \right) m'(dy) \qquad \text{pour tout borélien B.}$$

Nous avons clairement $\mu = m'$ sur la $\sigma$-algèbre $\mathcal{M}_\eta$.

*Lemme* **(3.7)**. — *Si la relation* (4) *est vérifiée, les mesures* $\mu$ *et* $m'$ *coïncident sur la* $\sigma$*-algèbre* $\mathcal{M}_{f^{-1}\eta}$.

*Démonstration.* — Considérons deux familles de probabilités conditionnelles régulières par rapport à la partition $\eta$, respectivement $m_x^\eta$ pour $m'$ et $\mu_x^\eta$ pour $\mu$. Considérons d'autre part les restrictions $\overline{\mu}$ et $\overline{m}$ des mesures $\mu$ et $m'$ à la $\sigma$-algèbre $\mathcal{M}_{f^{-1}\eta}$. Comme les mesures $\mu$ et $m'$ coïncident sur $\mathcal{M}_\eta$ et que $f^{-1}\eta$ découpe chaque $C_\eta$ en une partition dénombrable (3.1 ii), nous avons

$$\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{m}}(y) = \frac{\mu_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y))}{m_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y))} \quad \overline{m}\text{-presque partout.}$$

Nous allons montrer que $\int \log \frac{d\overline{\mu}}{d\overline{m}} \, d\overline{m} = 0$. Par convexité du logarithme, ce n'est possible que si $\frac{d\overline{\mu}}{d\overline{m}} = 1$ $\overline{m}$-presque partout, c'est-à-dire si $\overline{\mu} = \overline{m}$, ce qui prouvera le lemme.

Nous avons, d'une part :

$$\log \mu_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y)) = \log \left( \frac{1}{L(y)} \int_{C_{f^{-1}\eta}(y)} \Delta(y, t) \; \mu_{V(y)}(dt) \right)$$
$$= \log q(y) \quad \text{par définition de } q,$$

et d'autre part :

$$\log m_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y)) = -\,I(f^{-1}\eta \mid \eta)(y).$$

Donc d'après (3.6), et (4)

$$\int \log m_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y)) \, dm'(y) = \int \log \mu_y^\eta(C_{f^{-1}\eta}(y)) \, dm'(y),$$

Q.E.D.

*Lemme* **(3.8)**. — *Si la relation* (4) *est vérifiée, les mesures* $\mu$ *et* $m'$ *coïncident sur la* $\sigma$*-algèbre* $\mathcal{M}$.

*Démonstration.* — Nous pouvons appliquer (3.7) à la transformation $f^n$. La partition $\eta$ joue le même rôle vis-à-vis de $f^n$ que de $f$, en remplaçant $\mathscr{J}_u$ par $\prod_{i=0}^{n-1} \mathscr{J}_u \circ f^i$. D'autre part, nous avons également, si (4) est satisfaite,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{m'}(f^{-n}\eta \mid \eta) &= n\mathrm{H}_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta) \\ &= n \int \log \mathscr{J}_u(x)\, m'(dx) \\ &= \int \log\Big(\prod_{i=0}^{n-1} \mathscr{J}_u(f^i x)\Big)\, m'(dx). \end{aligned}$$

D'après (3.7) les mesures $\mu$ et $m'$ coïncident sur la $\sigma$-algèbre $\mathscr{M}_{f^{-n}\eta}$. D'après (3.1 iv), elles coïncident sur $\mathscr{M}$.

Le lemme 3.8 signifie qu'une famille de probabilités conditionnelles par rapport à $\eta$ pour $m$ est donnée par :

$$m_y^\eta(dt) = \frac{1}{\mathrm{L}(y)}\, 1_{\mathrm{C}_\eta(y)}(t)\, \Delta(y, t)\, \mu_{\mathrm{V}(y)}(dt)$$

et donc en particulier possède la propriété de continuité absolue.

Soit alors $\xi$ une partition mesurable dont les éléments sont des parties de variété instable de mesure $\mu_{\mathrm{V}}$ positive, et soit $m_x^\xi$ une famille de probabilités conditionnelles par rapport à $\xi$. Comme les éléments de $\eta$ sont des ouverts de frontière $m_x^\xi$ négligeable pour presque tout $x$, la partition $\xi \vee \eta$ découpe $\xi$ en une partition dénombrable. De même les éléments de $\xi$ étant de mesure de Lebesgue positive, $\xi \vee \eta$ découpe $\eta$ en une partition dénombrable. La continuité absolue des mesures $m_x^\xi$ suit alors immédiatement de la continuité absolue des $m_x^\eta$, et ceci achève la démonstration du théorème 3.4.

On dira qu'une partition mesurable $\xi$ est régulière pour V si ses éléments sont des morceaux de variété instable et vérifient $m$-presque partout

$$0 < \int_{\mathrm{C}_\xi(y)} \Delta(y, t)\, \mu_{\mathrm{V}(y)}(dt) < +\infty.$$

Le calcul des densités donne alors :

*Corollaire* **(3.9)**. — *Sous les hypothèses du théorème* 3.4, *si* $\xi$ *est une partition mesurable régulière pour* V, *les probabilités conditionnelles par rapport à* $\xi$, $m_y^\xi$, *sont données par* :

$$m_y^\xi(\mathrm{B}) = \frac{\int_{\mathrm{C}_\xi(y)\cap \mathrm{B}} \Delta(y, t)\, \mu_{\mathrm{V}(y)}(dt)}{\int_{\mathrm{C}_\xi(y)} \Delta(y, t)\, \mu_{\mathrm{V}(y)}(dt)}.$$

*En particulier les mesures* $m_y^\xi$ *sont équivalentes aux mesures* $\mu_{\mathrm{V}(y)}$ *restreintes à* $\mathrm{C}_\xi(y)$.

## 4. Mesures de Sinaï

Dans ce paragraphe nous supposons que la mesure $m$ n'a pas d'exposant neutre; nous pouvons alors montrer que la partition $\eta$ de (3.1) réalise l'entropie du système.

Nous en déduisons une caractérisation de la $\sigma$-algèbre de Pinsker (théorème 4.6) et la caractérisation variationnelle des mesures de Sinaï (théorème 4.8).

*Proposition* **(4.1)**. — *Soit $m$ une mesure sans exposant neutre. Nous choisissons $\lambda$, $\mu$ tels que $m(\mathrm{B}_{\lambda,\mu}) > 0$ et appliquons la proposition* 3.1.

*Il existe une partition $\mathrm{Q}$ de* S, *d'entropie finie telle que* $\bigcap_{n\geq 0} f^n\, \mathrm{C}_{\mathrm{Q}}(f^{-n}x) \subset \mathrm{C}_\eta(x)$ *m-presque partout sur* S.

*Démonstration.* — Pour appliquer (3.1) et construire $\eta$, nous avons déjà choisi $\alpha'$, $\rho$ et $\varepsilon$. Choisissons $\eta' > 0$ et appliquons (1.5). Nous avons :

*Lemme* **(4.2)**. — *Soit* $\varepsilon' > 0$ *tel que* $\lambda - \varepsilon - \varepsilon' > \log \rho > \dfrac{\varepsilon}{\alpha'} > 0 > \mu + \varepsilon'$, *et choisissons $h$ assez petit pour que*

$$\frac{e^{-\lambda}/2 + h^{\alpha'}}{e^{-\mu} - h^{\alpha'}} \leq \frac{1}{2}, \qquad e^{-\mu} - h^{\alpha'} \geq e^{-\mu-\varepsilon'} \qquad \text{et} \qquad e^{-\lambda} + 2h^{\alpha'} \leq e^{-\lambda+\varepsilon'}.$$

*Soient alors* $y_1 = u_1 + v_1$, $y_2 = u_2 + v_2$ *deux points de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *avec $u_i$ dans $\mathrm{E}^u_x$, $v_i$ dans $\mathrm{E}^s_x$ vérifiant* $\dfrac{|||u_2 - u_1|||}{|||v_2 - v_1|||} \leq \dfrac{1}{2}$ *et* $|||y_i||| \leq h$ *pour* $i = 1, 2$. *Posons* $\overline{\mathrm{F}}y_i = u_i' + v_i'$ *avec $u_i'$ dans* $\mathrm{E}^u_{f^{-1}x}$ *et $v_i'$ dans* $\mathrm{E}^s_{f^{-1}x}$ *pour $i = 1, 2$. Alors* $\dfrac{|||u_2' - u_1'|||}{|||v_2' - v_1'|||} \leq \dfrac{1}{2}$ *et* $|||v_2' - v_1'||| \geq e^{-\mu-\varepsilon'}\, |||v_2 - v_1|||$.

*Démonstration de* (4.2). — D'après (1.5 i) la propriété est clairement vraie si l'on a $\mathrm{T}_x f^{-1}$ au lieu de $\overline{\mathrm{F}}$. Il faut donc estimer l'erreur faite en remplaçant $\mathrm{T}_x f^{-1}$ par $\overline{\mathrm{F}}$ dans les différences, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &|||\overline{\mathrm{F}}y_1 - \overline{\mathrm{F}}y_2 - \mathrm{T}_x f^{-1} v_1 + \mathrm{T}_x f^{-1} y_2||| \\ &\qquad \leq \Big(\sup_{|||y||| \leq h} |||\mathrm{T}\overline{\mathrm{F}}_x(y) - \mathrm{T}_x f^{-1}|||\Big)\, |||y_2 - y_1||| \\ &\qquad \leq h^{\alpha'}\, |||v_2 - v_1||| \quad \text{par (1.5 iii) } \beta). \end{aligned}$$

Le nombre $h$ a été choisi assez petit pour obtenir les résultats annoncés.

Choisissons également le nombre $s_l > 0$ pour appliquer la remarque 3.2.

*Lemme* **(4.3)**. — *Il existe une fonction $\mathrm{D}_\varepsilon$ borélienne positive définie sur $\mathrm{B}_{\lambda,\mu}$ possédant les propriétés suivantes.*

i) $\mathrm{D}_\varepsilon(f^n x) \leq \mathrm{D}_\varepsilon(x)\, e^{3\varepsilon|n|}$.

ii) *Soit $u$ dans l'espace $\mathrm{E}^u_x$. Si $||u||_x \leq \mathrm{D}_\varepsilon(x)$, il existe au plus un vecteur $v$ dans $\mathrm{E}^s_x$ tel que en posant $y = \exp_x(u+v)$, on ait, pour tout $n$, $d(f^{-n}x, f^{-n}y) \leq \mathrm{D}_\varepsilon(f^{-n}x)$.*

iii) *Si sous les conditions de* ii) *ce point $v$ existe, alors $y = \exp_x(u+v)$ appartient à $\mathrm{W}^{\rho,\varepsilon}_{x,\mathrm{loc}}$ et $\rho_{\mathrm{V}}(x,y) \leq s_l$.*

*Démonstration de* (4.3). — Posons

$$D_\varepsilon(x) = \inf\left(\frac{h}{B_\varepsilon(x)}, \frac{C_\varepsilon(x)}{B_\varepsilon(x)}, \frac{\delta_\varepsilon(x)}{4B_\varepsilon(x)\,\gamma_\varepsilon(f^{-1}x)}, \frac{s_\ell}{2\gamma_\varepsilon^2(x)}\right)$$

où $\delta_\varepsilon$ et $\gamma_\varepsilon$ sont donnés par (1.3), $B_\varepsilon$ et $C_\varepsilon$ par (1.5), $h$ par le lemme 4.2 et $s_\ell$ par la remarque 3.2.

La propriété i) suit immédiatement de (1.3 v), (1.5 ii) et (1.5 iii.$\delta$).

Pour vérifier ii), supposons que l'on ait $u$ dans $E^u_x$ et deux vecteurs $v_1$ et $v_2$ de $E^s_x$ tels que pour $y_1 = \exp_x(u + v_1)$ et $y_2 = \exp_x(u + v_2)$ on ait $d(f^{-n}x, f^{-n}y_i) \leq D_\varepsilon(f^{-n}x)$ pour tout $n$. D'après (1.5 ii), nous pouvons appliquer le lemme 4.2 à $y_1$ et $y_2$ et d'après (1.5 iii.$\gamma$) nous avons bien

$$\exp^{-1}_{f^{-1}x} f^{-1} y_i = \bar{F}\exp^{-1}_x y_i.$$

Nous pouvons, par récurrence, appliquer le lemme 4.2 à tous les $f^{-n}y_i$, $n \geq 0$, et obtenir donc pour tout $n$ positif :

$$|||v_1 - v_2|||\, e^{-n(\mu+\varepsilon')} \leq |||\exp^{-1}_{f^{-n}x} f^{-n}y_1 - \exp^{-1}_{f^{-n}x} f^{-n}y_2||| \leq 2h.$$

Ceci n'est possible que si $v_1 = v_2$, ce qui montre ii).

Pour établir iii) remarquons que si $y$ existe et si l'on pose

$$f^{-n}y = \exp_{f^{-n}x}(u_n + v_n), \quad u_n \text{ dans } E^u_{f^{-n}x},\ v_n \text{ dans } E^s_{f^{-n}x},$$

alors $$|||v_n||| \leq 2\,|||u_n||| \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Si en effet nous avions $|||v_{n_0}||| > |||2u_{n_0}|||$, en appliquant le même raisonnement aux suites $f^{-n_0-m}y$ et $f^{-n_0-m}x$, $m \geq 0$, nous obtiendrions $|||v_{n_0}||| = 0$, ce qui contredit l'inégalité précédente.

En reportant dans le calcul de $|||u_n|||$, il vient alors, compte tenu de ce que $e^{-\lambda} + 2h^{\alpha'} \leq e^{-\lambda+\varepsilon'}$ et de l'estimation du lemme 4.2 :

$$|||u_n||| \leq e^{-(\lambda-\varepsilon')n}\,|||u||| \leq e^{-(\lambda-\varepsilon')n}\frac{\delta_\varepsilon(x)}{4B_\varepsilon(x)\,\gamma_\varepsilon(f^{-1}x)}.$$

Nous avons bien

$$d(y, x) \leq \frac{\delta_\varepsilon(x)}{\gamma_\varepsilon(f^{-1}x)}$$

et $$d(f^{-n}y, f^{-n}x) \leq e^{-(\lambda-\varepsilon')n}\,\delta_\varepsilon(x)\,\frac{B_\varepsilon(f^{-n}x)}{B_\varepsilon(x)} \leq e^{-(\lambda-\varepsilon'-\varepsilon)n}\,\delta_\varepsilon(x)$$

$$\leq \rho^n\,\delta_\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Ce qui montre que $y$ appartient à $W^{\rho,\varepsilon}_{x,\mathrm{loc}}$ d'après (1.3 iii).

Enfin la dernière relation suit immédiatement de $|||v||| \leq 2\,|||u|||$, la définition de $D_\varepsilon$ et (1.3 vii).

Rappelons le lemme suivant :

*Lemme* **(4.4).** — *Soient $f$ un difféomorphisme de* M, *$m$ une probabilité invariante et* D *une fonction mesurable telle que il existe* A, $0 < A < 1$, *avec* $D(fx) \geq AD(x) > 0$ *m-presque partout. Il existe une partition* P *d'entropie finie et un ensemble* B *de mesure un tels que si* $x \in B$ *et si $y$ et $x$ sont dans le même élément de* $f^i P$ *pour tout* $i \geq 0$, *alors*

$$d(f^{-i}x, f^{-i}y) \leq D(f^{-i}x) \quad \textit{pour tout } i \geq 0.$$

C'est essentiellement le lemme 2 de Mañé [9].

Par (4.3 i) et (4.4) appliqué à la fonction $D_\varepsilon$, il existe un sous-ensemble B, de $m'$-mesure un, et une partition P d'entropie finie tels que si $x$ appartient à B et $y$ à $\bigcap_{n\geq 0} f^n C_P(f^{-n}x)$, alors $d(f^{-n}y, f^{-n}x) \leq D_\varepsilon(f^{-n}x)$ pour tout $n \geq 0$. Appelons Q la partition découpée par P et $\{\Gamma, S\backslash\Gamma\}$.

Si alors $x$ appartient à B et $y$ à $\bigcap_{n\geq 0} f^n C_Q(f^{-n}x)$, par (4.3 iii), (1.3 iv), la remarque 3.2 et la définition de $\xi_{r_0}$, on vérifie immédiatement que $f^{-n}y$ appartient à $C_{\xi_{r_0}}(f^{-n}x)$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire que $y$ appartient à $C_\eta(x)$ et ceci achève la démonstration de la proposition 4.1.

La proposition 4.1 va nous permettre de calculer l'entropie. Nous ne savons pas l'étendre au cas général, en présence de l'exposant zéro.

*Proposition* **(4.5).** — *Soient $m$ une mesure sans exposant neutre, $\eta$ la partition construite par* (3.1) *et $m'$ la probabilité trace de $m$ sur* S; *alors*

$$H_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta) = h_{m'}(f).$$

*Démonstration.* — Fixons $\delta' > 0$. En l'affinant au besoin par une partition d'entropie finie, nous pouvons supposer que la partition Q de la proposition 4.1 vérifie de plus :

$$h_{m'}(Q, f) \geq h_{m'}(f) - \delta'.$$

Notons $Q_n$ la partition en intersections des éléments de $f^j Q$, $0 \leq j < n$. Nous avons :

$$\begin{aligned} H_{m'}(f^{-1}\eta \mid \eta) &= \frac{1}{n} H_{m'}(f^{-n}\eta \mid \eta) \\ &\geq \frac{1}{n} H_{m'}(Q_n \mid \eta) - \frac{1}{n} H_{m'}(Q_n \mid f^{-n}\eta). \end{aligned}$$

Par (4.1) la partition $Q^+ = \bigvee_{i\geq 0} f^i Q$ est plus fine que $\eta$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H_{m'}(Q_n \mid \eta) \geq \frac{1}{n} H_{m'}(Q_n \mid Q^+) &\geq h_{m'}(Q, f) \\ &\geq h_{m'}(f) - \delta'. \end{aligned}$$

D'autre part, par (3.1 iv) il existe $m_0$ tel que $H(Q\,|\,f^{-m_0}\eta) \leq \delta'$ et donc

$$H_{m'}(Q_n\,|\,f^{-n}\eta) \leq m_0\, H(Q) + n\delta'.$$

Nous avons bien finalement

$$H_{m'}(f^{-1}\eta\,|\,\eta) \geq h_{m'}(f) - 2\delta'.$$

La proposition suit de l'arbitraire de $\delta'$ dans cette formule et de (2.3).

*Théorème* **(4.6)**. — *Soit m une mesure sans exposant neutre. La σ-algèbre de Pinsker coïncide avec* $\mathcal{M}_V$.

*Démonstration.* — D'après (4.5) et (3.3), il existe un ensemble invariant de mesure positive sur lequel le résultat est vrai. De plus les exposants étant invariants, si $m$ n'a pas d'exposant neutre, presque toute mesure $m_x^i$ de la décomposition ergodique n'a pas d'exposant neutre non plus. D'après (2.8) le résultat est alors vrai presque partout.

*Corollaire* **(4.7)**. — *Soit m une mesure sans exposant neutre. Les σ-algèbres* $\mathcal{M}_V$ *et* $\mathcal{M}_U$ *coïncident.*

En effet par définition la σ-algèbre de Pinsker pour $f$ coïncide avec la σ-algèbre de Pinsker pour $f^{-1}$ et le théorème 4.6 s'applique également au système $(M, m, f^{-1})$, le feuilletage instable étant remplacé par le feuilletage stable.

*Théorème* **(4.8)**. — *Soit m une mesure sans exposant neutre. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) *la mesure m est absolument continue par rapport au feuilletage instable* (*déf.* 2.6);
ii) *la mesure m vérifie la formule de Pesin*

$$h(m) = \int \sum_i \lambda_i^+(x) \dim E^i(x)\, m(dx).$$

*Démonstration.* — Nous savons que i) ⇒ ii) (proposition 2.7). Inversement si $m$ vérifie la formule de Pesin, d'après (2.7) et (2.4 iii), chaque mesure $m_x^i$ de la décomposition ergodique vérifie la formule de Pesin; de plus, d'après (4.5), (3.4) et (1.2), il existe alors un ensemble S invariant de mesure positive où i) est vérifiée. D'après (2.8) et comme de plus $\mathcal{M}_I$ est inclus dans $\mathcal{M}_V$ (2.5), la condition i) est vérifiée partout.

Rappelons que nous appelons mesure de Sinaï une mesure satisfaisant les conditions équivalentes de (4.8). Nous disons qu'un point $x$ de M est générique pour une mesure invariante $m$ si pour toute fonction continue $g$ sur M, la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(f^i x)$ tend vers $\int g\, dm$ quand $n$ tend vers l'infini.

*Théorème* **(4.9)**. — *Soit m une mesure de Sinaï ergodique; l'ensemble des points génériques pour m est de mesure de Lebesgue positive.*

*Démonstration.* — Cette propriété suit principalement de la continuité absolue (1.4). Considérons en effet une famille dénombrable $\{g_n, n \geq 0\}$ dense dans les fonctions continues sur M. Le théorème ergodique (2.4 ii) appliqué aux fonctions $g_n$ montre que l'ensemble des points génériques K est de $m$-mesure un. Comme $m$ est une mesure de Sinaï, et d'après (3.9), l'ensemble K est $\mu_x$-conégligeable pour $m$-presque tout $x$. (Rappelons que $\mu_x$ désigne la mesure de Lebesgue sur la variété instable du point $x$.) D'autre part, par définition et vu (1.3 ix), la variété stable d'un point générique est entièrement formée de points génériques.

Appliquons alors (1.4) en choisissant $\ell$ de manière à ce que $m(\Lambda'_\ell) > \frac{3}{4}$ et que $\mu_\ell$ soit plus grand que tous les exposants négatifs. Une fois choisis également $\alpha'$, $\rho$, $\varepsilon$ pour appliquer (1.3), la variété instable locale en $x$ est donnée par l'exponentielle du graphe d'une application $\psi_x$ de $B^n(x, \delta_\varepsilon(x))$ dans $E^s_x$, $D\psi_x(0) = 0$, $\mathrm{Lip}_{\alpha'}(\exp_x \psi_x) \leq \gamma_\varepsilon(x)$; choisissons $\delta'$, $\gamma$ tels que $m(\Lambda) \geq \frac{3}{4}$, où $\Lambda = \{\delta_\varepsilon \geq \delta', \gamma_\varepsilon \leq \gamma\}$. Nous avons $m(\Lambda \cap \Lambda'_\ell) \geq \frac{1}{2}$ et donc $\mu_y(\Lambda \cap \Lambda'_\ell) > 0$ pour certains $y$. Choisissons finalement $x_0$, point de densité de $\Lambda \cap \Lambda'_\ell$ sur la variété instable $V_{x_0}$. La variété instable locale $W^{\ell,\varepsilon}_{x_0,\mathrm{loc}}$ est définie par une application $\psi_{x_0}$ contrôlée par $\delta$ et $\gamma$. Pour tout voisinage U de $x_0$ dans $W^{\ell,\varepsilon}_{x_0,\mathrm{loc}}$, la mesure de Lebesgue de l'ensemble $K \cap U \cap \Lambda'_\ell$ est positive. Nous pouvons alors choisir le voisinage assez petit pour que $\|D\psi_{x_0}(\cdot)\| \leq \alpha_\ell$ sur U et que les applications canoniques associées aux variétés stables locales $(\mu_\ell, \rho_\ell, \varepsilon_\ell, B(x_0, q_\ell))$ soient définies sur U et appliquent U dans les exponentielles $D_v$ de plans parallèles à $E^u_{x_0}$ passant par un point $v$ de $E^s_{x_0}$, $\|v\| \leq q_\ell$. L'ensemble K contient alors toutes les images de $K \cap \Lambda'_\ell \cap U$ par les applications canoniques et donc pour chaque $v$, $\|v\| \leq q_\ell$, la mesure $\mu_{D_v}(K \cap D_v)$ est positive. En intégrant en $v$, l'ensemble K contient un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Q.E.D.

*Corollaire* **(4.10)**. — *Soit m une mesure de Sinaï, m se décompose en une combinaison dénombrable de mesures ergodiques.*

En effet, d'après (2.5) les mesures de la décomposition ergodique sont encore des mesures de Sinaï. Le théorème 4.9 associe à chacune d'elles un ensemble différent de mesure de Lebesgue positive. Il ne peut y avoir qu'un nombre dénombrable de composantes ergodiques.

Il existe également en dimension 2 un corollaire de (4.8) qui ne fait pas intervenir l'entropie. Supposons $\dim M = 2$, $m$ ergodique et notons :

$$\chi^+ = \inf_{n \geq 0} \frac{1}{n} \int \log \|T_x f^n\| \, m(dx)$$

$$\chi^- = \inf_{n \geq 0} \frac{1}{n} \int \log \|T_x f^{-n}\| \, m(dx).$$

En appliquant la formule de L. S. Young [23], nous obtenons :

*Corollaire* (4.11). — *Une mesure invariante ergodique est une mesure de Sinaï pour* $f$ *si et seulement si*

$$\chi^- \chi^+ \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log m(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} = 1 + \frac{\chi^+}{\chi^-} \text{ } m\text{-presque partout.}$$

## 5. Structure produit et applications

Si nous considérons une mesure sans exposant neutre, les feuilletages stable et instable sont presque partout transverses et définissent donc localement une structure produit. Pour une mesure de Sinaï, compte tenu de (1.4) et de (3.9) nous allons voir que la mesure elle-même et la mesure de Lebesgue sont compatibles avec cette structure produit. Le but de ce paragraphe est d'expliciter cette compatibilité et d'en déduire des propriétés du système. Par rapport aux résultats classiques de Pesin, le seul changement vient de ce qu'il faut distinguer les rôles de la mesure invariante et de la mesure de Lebesgue. A part ce point les démonstrations ne présentent pas de difficultés supplémentaires. Nous pensons néanmoins utile de présenter les résultats obtenus. Nous dirons qu'une mesure $m_1$ est absolument continue par rapport à une mesure $m_2$ sur une sous $\sigma$-algèbre $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ si tout élément $m_2$-négligeable de $\mathcal{M}'$ est $m_1$-négligeable.

*Théorème* (5.1). — *Soit $m$ une mesure de Sinaï et notons $\mu$ la mesure de Lebesgue sur* M. *Soient $\eta$ et $\zeta$ deux partitions mesurables données par la proposition* 3.1 *appliquée respectivement à $f$ et à $f^{-1}$; notons $m_x^\eta$ et $\mu_x^\zeta$ des familles de probabilités conditionnelles pour $m$ par rapport à $\eta$ (données par* (3.9)) *et pour $\mu$ par rapport à $\zeta$. Alors :*

i) *Pour $m$ presque tout $x$, $m_x^\eta$ est absolument continue par rapport à $m$ sur $\mathcal{M}_\zeta$.*
ii) *$m$ est absolument continue par rapport à $\mu$ sur $\mathcal{M}_\zeta$.*
iii) *Pour $m_\zeta$ presque tout $\zeta$, $\mu^\zeta$ est équivalente à la mesure de Lebesgue sur* $C_\zeta$, $\mu_{C_\zeta}$.

(Remarquons que d'après ii), l'ensemble des $\zeta$ auquel iii) s'applique est de mesure positive pour $\mu$.)

*Démonstration.* — La démonstration repose sur (1.4) et sur l'extension suivante. Un sous-ensemble borélien K est dit transversal au feuilletage U si K est inclus dans un disque $C^1$-plongé W tel que les espaces $T_x W$ et $T_x U$ soient complémentaires dans $T_x M$ pour $\mu_W$-presque tout $x$ de K. On note alors $\mu_K$ la mesure $\mu_W$ restreinte à K.

*Lemme* (5.2). — *Il existe un ensemble* $B_0$ *$m$-conégligeable et* U*-saturé tel que si* K *et* K' *sont deux sous-ensembles transversaux au feuilletage* U, *et $p$ une application de* K *dans* K', *mesurable, telle que $p(k)$ appartient à la feuille de $k$ pour $\mu_K$-presque tout $k$ de* K, *alors sur* $B_0$, *la mesure image $\mu_K \circ p^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{K'}$.*

*Démonstration de* (5.2). — Pour tout $\ell$, considérons les ensembles $\Lambda'_\ell$ et les nombres $q_\ell$, $\varepsilon_\ell$, $\rho_\ell$, $\mu_\ell$, $\alpha_\ell$ donnés par le lemme 1.4. Par continuité de $U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{x, \text{loc}}$ sur $\Lambda'_\ell$, il existe un nombre $\varepsilon'_\ell$ tel que pour tout $x$ de $\Lambda'_\ell$, et $z$ dans $B(x, \varepsilon'_\ell q_\ell) \cap \Lambda'_\ell$, l'ensemble $U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{z, \text{loc}} \cap B(x, q_\ell)$ est connexe. Choisissons alors un recouvrement fini de $\Lambda'_\ell$ par des boules $B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)$, $i$ décrivant I, tel que $x_i$ appartienne à $\Lambda'_\ell$.

Posons

$$B_\ell = \bigcup_{i \in I} \Big[ \bigcup_{z \in B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)} (U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{z, \text{loc}} \cap B(x_i, q_\ell)) \Big]$$

et

$$B_0 = \bigcup_\ell \Big( \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} f^{-m} B_\ell \Big).$$

Il est clair que l'ensemble $B_0$ est $m$-conégligeable et U-saturé.

Soient alors K, K′ et $p$ comme dans l'énoncé du lemme et A un sous-ensemble de $K' \cap B_0$ $\mu_{K'}$-négligeable. En chaque point $x$ de $p^{-1} A$, il existe $\ell$ tel que $x$ appartient à $\bigcap_n \bigcup_{m \geq n} f^{-m} B_\ell$ et un entier $n$ assez grand pour que $f^n x$ appartienne à un certain $B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)$, que $f^n(px)$ appartienne à $U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{f^n x, \text{loc}}$, et que la pente de $f^n K$ et de $f^n K'$ dans le repère $(E^u_{x_i}, E^s_{x_i})$ soit plus petite que $\alpha_\ell$ sur un voisinage de $f^n x$ et $f^n(px)$ respectivement. Découpons $p^{-1} A = \bigcup_{n, \ell} A_{n, \ell}$ suivant les valeurs de $n$, $\ell$. Il suffit de montrer que $\mu_K(A_{n,\ell}) = 0$ pour tout $n$, $\ell$. Or pour tout point $x$ de $A_{n,\ell}$ il existe un petit voisinage o de $x$ dans W tel que (1.4) s'applique à $f^n(o \cap A_{n,\ell})$ et $f^n(p(o \cap A_{n,\ell}))$. Comme l'ensemble $f^n(p(o \cap A_{n,\ell}))$ est $\mu_{f^n K'}$-négligeable, l'ensemble $f^n(o \cap A_{n,\ell})$ est $\mu_{f^n K}$-négligeable et donc l'ensemble $o \cap A_{n,\ell}$ est $\mu_K$-négligeable. Donc tout point de $A_{n,\ell}$ a un voisinage où la trace de $A_{n,\ell}$ est $\mu_K$-négligeable. D'après le théorème de densité de Lebesgue, $A_{n,\ell}$ est $\mu_K$-négligeable. Q.E.D.

Nous avons alors la propriété suivante :

*Lemme* **(5.3)**. — *Soient m une mesure de Sinaï, $\mu$ la mesure de Lebesgue sur* M; *il existe un ensemble* $B_1$ *de* $\mathcal{M}_V$ *m-conégligeable tel que si x appartient à* $B_1$, *la mesure* $\mu_{C_\eta(x)}$ *soit absolument continue par rapport à* $\mu$ *sur* $\mathcal{M}_U$.

*Démonstration.* — Soit $B_0$ l'ensemble du lemme 5.2 et considérons des ensembles de Lusin $\Lambda_\ell$ pour les variétés stables locales construites par (1.3)′ et les ensembles $\widetilde{\Lambda}_\ell$ union des variétés stables locales de $z$, $z$ dans $\Lambda_\ell$. L'ensemble $B_1$ sera l'ensemble des $x$ tels que $B_0 \cap \bigcup_{\lambda, \mu} B_{\lambda, \mu} \cap \bigcup_\ell \widetilde{\Lambda}_\ell$ soit $\mu_{V(x)}$-conégligeable. Soit A un ensemble de $\mathcal{M}_U$, $\mu$-négligeable. Montrons qu'il y a suffisamment de transversales F à U avec $\mu_F(A) = 0$. Dans une boule $B(x, \varepsilon)$ $x \in \Lambda_\ell$, considérons les images $D_v$ des plans parallèles à $E^u_x$. On peut choisir $\varepsilon$ assez petit pour que les $D_v \cap \widetilde{\Lambda}_\ell$ soient des transversales à U. Comme $\mu(A \cap \widetilde{\Lambda}_\ell) = 0$, par le théorème de Fubini, il existe au moins un disque $D_{v_0}$ avec $\mu_{D_{v_0}}(A \cap \widetilde{\Lambda}_\ell) = 0$. Par compacité de chaque $\Lambda_\ell$, on peut ainsi couper toute variété stable passant par $A \cap \bigcup_\ell \Lambda_\ell$ en utilisant une famille dénombrable de disques transverses.

D'après (5.2) nous avons donc $\mu_{C_\eta}(A \cap \bigcup_\ell \Lambda_\ell) = 0$ dès que $(B_0 \cap \bigcup_{\lambda,\mu} B_{\lambda,\mu})$ est $\mu_{C_\eta}$-conégligeable, ce qui montre (5.3) par le choix de $B_1$.

*Corollaire* **(5.4)**. — *La mesure m est absolument continue par rapport à* $\mu$ *sur* $\mathscr{M}_U$.

(5.4) suit immédiatement de (5.3) et (3.9).

Le point ii) du théorème 5.1 se déduit alors de (5.4). Considérons en effet un ensemble A de $\mathscr{M}_\xi$ vérifiant $m(A) > 0$ et $\mu(A) = 0$. L'ensemble $A' = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} f^{-n} A$ vérifie $A' \in \mathscr{M}_U$, $m(A') > 0$ par le théorème de récurrence et $\mu(A') = 0$ par quasi-invariance de la mesure $\mu$, ce qui contredit (5.4).

Pour établir (5.1 iii), considérons tout d'abord comme pour le lemme 5.2 les ensembles

$$B_\ell = \bigcup_{i \in I} [(\bigcup_{z \in B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)} U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{z, \text{loc}}) \cap B(x_i, q_\ell)]$$

et

$$B_0 = \bigcup_\ell (\bigcap_n \bigcup_{m \geq n} f^{-m} B_\ell).$$

Comme $B_0$ est U-saturé et de $m$-mesure 1, nous avons d'après (5.4) $\mu(B_0) > 0$ et donc, pour $\ell$ assez grand, $\mu(B_\ell) > 0$. Comme pour $m$-presque tout $\zeta$ il existe $n$ tel que $f^n \zeta$ est contenu dans un des $B_\ell$, il suffit de montrer que pour chaque $x_i$ avec

$$\mu[(\bigcup_{z \in B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)} U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{z, \text{loc}}) \cap B(x_i, q_\ell)] > 0,$$

la mesure $\mu$ se conditionne sur les $U_{z, \text{loc}}$ par une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.

Pour cela considérons le feuilletage F de $B(x_i, q_\ell)$ en plans parallèles à $E^u_x$, $D_v$ avec $v \in E^s_x$, $||v|| \leq \frac{q_\ell}{2}$. L'ensemble $(\bigcup_{z \in B(x_i, \varepsilon'_\ell q_\ell)} U^{\rho_\ell, \varepsilon_\ell}_{z, \text{loc}}) \cap B(x_i, q_\ell)$ a une structure de produit des deux espaces quotients $X_F$ par F et $X_U$ par le feuilletage en $U_{z, \text{loc}}$. Si A est un ensemble $U_{z, \text{loc}}$-saturé $\mu$-négligeable, ou même $\mu_{D_{v_0}}$ négligeable pour un $v_0$, nous avons $\mu_{D_v}(A) = 0$ pour tout $v$ et la mesure $\mu$ est donc équivalente au produit des mesures quotients $\mu_F$ et $\mu_U$. Les classes des mesures conditionnelles de $\mu$ par rapport au feuilletage U sont donc données en projetant le long de F la mesure $\mu_F$. Comme chaque feuille locale est le graphe d'une application $C^1$ d'un espace $E^s_z$ dans un espace $E^u_z$, proche de $E^u_x$, la classe de la mesure conditionnelle ainsi obtenue est bien la classe de la mesure de Lebesgue. Ceci achève la démonstration de (5.1 iii).

Vérifions enfin la propriété (5.1 i) : soit A un ensemble de $\mathscr{M}_\zeta$, $m$-négligeable. D'après (5.1 ii) il existe un ensemble $B_2$ de $\mathscr{M}_\zeta$, $m$-conégligeable tel que $A \cap B_2$ est $\mu$-négligeable. En appliquant (5.1 iii) aux partitions $f^n \zeta$, $n \leq 0$, nous trouvons un ensemble $B_3$ de $\mathscr{M}_U$, $m$-conégligeable tel que sur $B_3$ les mesures conditionnelles $\mu^{f^n \zeta}$

sont équivalentes à la mesure de Lebesgue. En particulier il s'ensuit que l'intersection de $B_3$ et du U-saturé de $A \cap B_2$ est encore $\mu$-négligeable. D'après (5.3) $m_x^\eta(A \cap B_2 \cap B_3)$ est négligeable pour $x$ dans $B_1$. Nous avons donc $m_x^\eta$ absolument continue par rapport à $m$ sur $\mathscr{M}_\zeta$ dès que $x$ est dans $B_1$ et vérifie $m_x^\eta(B_2 \cap B_3) = 1$, c'est-à-dire $m$-presque partout. Q.E.D.

Ce théorème nous donne les propriétés qualitatives des mesures de Sinaï. En particulier (4.9) est aussi un corollaire de (5.4). Nous avons également :

*Théorème* **(5.5)**. — *Une mesure de Sinaï à la fois pour $f$ et pour $f^{-1}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* — Considérons la décomposition de la mesure $m$ par rapport à une partition $\zeta$ associée par la proposition 3.1 à $f^{-1}$.

Par définition, $m$ est absolument continue par rapport à $\int \mu_{C_\zeta}\, dm_\zeta$. Par (5.1 ii) $m$ est encore absolument continue par rapport à la mesure $\int \mu_{C_\zeta}\, d\mu_\zeta$. Par (5.1 iii) cette mesure est équivalente à $\mu$ sur un ensemble $m$-conégligeable. Cela suffit pour entraîner que $m$ est absolument continue par rapport à $\mu$.

En comparant avec (4.8) et (4.11) il vient :

*Corollaire* **(5.6)**. — *Une mesure sans exposant neutre est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si*

$$h_m(f) = \int \sum_i \lambda_i^+(x) \dim E_x^i\, m(dx)$$

$$= -\int \sum_i \lambda_i^-(x) \dim E_x^i\, m(dx).$$

*Corollaire* **(5.7)**. — *Si* $\dim M = 2$, *une mesure sans exposant neutre est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log m(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} = 2 \quad m\text{-presque partout.}$$

Considérons encore les partitions $\eta$ et $\zeta$ du théorème 5.1. Nous appelons $M_\eta$ et $M_\zeta$ les espaces quotients et nous notons $\Pi$ la projection de M dans $M_\eta \times M_\zeta$ définie par $\Pi(x) = (C_\eta(x), C_\zeta(x))$. L'application $\Pi$ est mesurable et nous avons :

*Proposition* **(5.8)**. — *Soit $m$ une mesure de Sinaï, $m_\eta$ et $m_\zeta$ les mesures images sur les espaces quotients correspondants* $M_\eta$ *et* $M_\zeta$; *l'image* $m \circ \Pi^{-1}$ *de la mesure $m$ par* $\Pi$ *est absolument continue par rapport à la mesure produit* $m_\eta \otimes m_\zeta$.

En effet, en projetant par $\Pi$, (5.1 i) entraîne que les mesures conditionnelles de $m \circ \Pi^{-1}$ par rapport à $\Pi(\eta)$ sont absolument continues par rapport à $m_\zeta$ sur $\Pi(\mathscr{M}_\zeta)$. Or la mesure $m \circ \Pi^{-1}$ est l'intégrale en $m_\eta$ de ses conditionnelles par rapport à $\Pi(\eta)$.

*Théorème* (5.9). — *Soit $m$ une mesure de Sinaï ergodique. La $\sigma$-algèbre de Pinsker du système coïncide avec une $\sigma$-algèbre finie. En particulier si $f^n$ est ergodique pour tout $n$, la $\sigma$-algèbre de Pinsker est grossière.*

*Démonstration.* — Soit $\rho$ la partition mesurable associée à la $\sigma$-algèbre de Pinsker par (2.2 i). Nous savons que la partition $\rho$ est plus fine que les partitions $\eta$ et $\zeta$ (2.3) et donc que l'application $\Pi$ se factorise en une application $\Pi'$ de M sur $M_\rho \times M_\rho$, l'image de $m_\eta \otimes m_\zeta$ étant alors la mesure $m_\rho \otimes m_\rho$.

Par définition, $\Pi'(x) = (C_\rho(x), C_\rho(x))$ et donc l'image de la mesure $m$ par $\Pi'$ est la mesure $m_\rho$ sur la diagonale de $M_\rho \times M_\rho$. Par (5.8) nous avons également $m \circ \Pi'^{-1}$ absolument continue par rapport à $m_\rho \otimes m_\rho$. Ce n'est possible que si l'espace $(M_\rho, m_\rho)$ est dénombrable. Par ergodicité enfin, une sous-algèbre invariante dénombrable est finie.

Un ensemble A sera dit surnégligeable si pour tout $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} m(B(A, \alpha^k))$ converge. Une partition finie de M est dite surrégulière si tous ses éléments ont leur frontière surnégligeable. En utilisant [8] proposition 3.2, on peut trouver des partitions surrégulières de diamètre arbitrairement petit. Si P est une partition surrégulière, d'après la construction des partitions $\eta$ et $\zeta$, les partitions $\eta' = \eta \vee \bigvee_{n \geq 0} f^n P$ et $\zeta' = \zeta \vee \bigvee_{n \geq 0} f^{-n} P$ satisfont encore les propriétés de la proposition 3.1.

Une partition finie P dans un système $(M, \mathscr{M}, m, f)$ est dite *faiblement de Bernoulli* (W.B) si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n$ tels que pour tous $q, p > 0$

$$\sum_{a, b} | m(a \cap b) - m(a)\, m(b) | < \varepsilon,$$

où la somme s'étend à tous les atomes des partitions $\bigvee_{i=0}^{q-1} f^{-i} P$ et $\bigvee_{=n}^{n+p} f^i P$ respectivement.

*Théorème* (5.10). — *Soit $m$ une mesure de Sinaï telle que le système $(M, f^n, m)$ est ergodique pour tout $n > 0$. Toute partition finie surrégulière est faiblement de Bernoulli. Le système est isomorphe à un schéma de Bernoulli.*

*Démonstration.* — La deuxième affirmation est une conséquence de la première et du fait que l'on peut trouver des partitions finies surrégulières qui engendent $\mathscr{M}$ (cf. [10]). Pour montrer la première affirmation, considérons une partition finie surrégulière P et les partitions $\eta'$ et $\zeta'$ associées.

D'après le théorème 5.8 la projection $\Pi'$ sur $M_{\eta'} \times M_{\zeta'}$ transforme la mesure $m$ en une mesure absolument continue par rapport à la mesure produit $m_{\eta'} \otimes m_{\zeta'}$. Notons $P^-$ et $P^+$ les partitions $P^- = \bigvee_{n \geq 0} f^{-i} P$, $P^+ = \bigvee_{n \geq 0} f^i P$; en projetant sur $M_{P^-} \times M_{P^+}$, l'image de la mesure $m$ est encore absolument continue par rapport à la mesure produit $m_{P^-} \otimes m_{P^+}$.

Comme la $\sigma$-algèbre de Pinsker est grossière (5.9), cela implique que P est faiblement de Bernoulli (cf. par exemple [6] ou [14]).

Dans le cas où le système est ergodique mais non totalement ergodique, en appliquant le théorème 5.10 aux composantes ergodiques des puissances de $f$ et la théorie générale [10], on voit que le système est isomorphe au produit du système fini $(M, \mathcal{M}_V, f)$ et d'un schéma de Bernoulli.

Soit R une relation d'équivalence à orbites dénombrables d'un espace $(M, \mathcal{M})$ telle que le graphe de R est mesurable dans $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$. Une mesure $m$ sur M est dite quasi invariante par R si pour tout A négligeable, le saturé de A par R est encore négligeable. Le système $(M, \mathcal{M}, m, R)$ est dit alors hyperfini si il existe une suite de relations d'équivalences à orbites finies $R_n$ telles que $R = \bigcup_n R_n$.

Soit $m$ une mesure sans exposant neutre. Nous appelons conjugaison sur $\bigcup_{\lambda,\mu} B_{\lambda,\mu}$ la relation d'équivalence $R = V \cap U$ : deux points sont conjugués s'ils ont même variété stable et même variété instable.

*Théorème* **(5.11)**. — *Soit m une mesure de Sinaï. Elle est quasi invariante par la conjugaison, le système* $(M, \mathcal{M}, m, R)$ *est hyperfini, la* $\sigma$*-algèbre* $\mathcal{M}_R$ *des ensembles* R*-saturés coïncide avec* $\mathcal{M}_U$ *et* $\mathcal{M}_V$.

*Démonstration.* — Pour montrer que $m$ est quasi invariante, il suffit de montrer que toute application mesurable inversible $\gamma$ satisfaisant $x \, R \, \gamma(x)$ presque partout préserve la classe des ensembles $m$-négligeables. Choisissons une partition $\eta$ donnée par la proposition 3.1. Pour tout $n$ considérons l'ensemble $B_n$ des points $x$ tels que

$$C_{f^n\eta}(\gamma x) = C_{f^n\eta}(x).$$

Par hypothèse et (3.1 iii) $m(\bigcup_n B_n) = 1$. Soit alors A un ensemble $m$-négligeable et fixons $n \geq 0$. Nous avons $m$-presque partout

$$\mu_{C_{f^n\eta}(x)}(A \cap B_n) = 0.$$

Pour ces mêmes ensembles $C_{f^n\eta}$, nous avons encore par (5.2), dès que $B_0$ est $\mu_{C_{f^n\eta}}$-conégligeable,

$$\mu_{C_{f^n\eta}}(\cdot)(\gamma(A \cap B_n)) = 0.$$

Donc $m(\gamma(A \cap B_n)) = 0$ et finalement $m(\gamma(A)) = 0$ ce qui montre la quasi-invariance de $m$.

Considérons également une partition $\zeta$ donnée par la proposition 3.1 appliquée à $f^{-1}$ et les projections $\Pi_n$ sur les espaces $M_{f^n\eta} \times M_{f^{-n}\zeta}$. D'après la construction de $\eta$ et de $\zeta$, on peut trouver un ensemble de mesure 1 où $\Pi_n^{-1}(x)$ est fini pour tout $n$. La relation d'équivalence $R_n$ définie par $\Pi_n$ est donc finie presque sûrement. Par (3.1 iii) appliqué à $\eta$ et à $\zeta$, nous avons bien $\bigcup_n R_n = R$, ce qui montre l'hyperfinitude. De plus la σ-algèbre $\mathscr{M}_{\mathrm{R}}$ des ensembles R-saturés coïncide donc avec la σ-algèbre intersection des $\mathscr{M}_{\mathrm{R}_n}$, $n \geq 0$. Par définition, nous avons

$$\mathscr{M}_{\mathrm{R}_n} = \mathscr{M}_{f^n\eta} \vee \mathscr{M}_{f^{-n}\zeta}.$$

D'après la proposition 5.8 la mesure $m$ est absolument continue sur $\mathscr{M}_\eta \vee \mathscr{M}_\zeta$ par rapport à une mesure qui rend $\mathscr{M}_\eta$ et $\mathscr{M}_\zeta$ indépendantes. Dans ce cas, les σ-algèbres $\bigwedge_n (\mathscr{M}_{f^n\eta} \vee \mathscr{M}_{f^{-n}\zeta})$ et $(\bigwedge_n \mathscr{M}_{f^n\eta}) \vee (\bigwedge_n \mathscr{M}_{f^{-n}\zeta})$ coïncident. Or d'après (1.3 vi) et (4.7) les σ-algèbres $\bigwedge_n \mathscr{M}_{f^{-n}\eta} = \mathscr{M}_{\mathrm{V}}$ et $\bigwedge_n \mathscr{M}_{f^{-n}\zeta} = \mathscr{M}_{\mathrm{U}}$ coïncident. Il y a donc coïncidence des σ-algèbres $\mathscr{M}_{\mathrm{R}}$, $\bigwedge_n \mathscr{M}_{\mathrm{R}_n}$, $\mathscr{M}_{\mathrm{U}} \vee \mathscr{M}_{\mathrm{V}}$ et donc $\mathscr{M}_{\mathrm{U}}$ ou $\mathscr{M}_{\mathrm{V}}$.

Ce résultat généralise aux mesures de Sinaï le formalisme de [2] (cf. [21] pour d'autres propriétés de R dans le cas des systèmes d'Anosov).

## RÉFÉRENCES


[1] R. Bowen, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, *Lect. Notes in Math.*, **470**. Springer Verlag (1975).

[2] D. Capocaccia, A definition of Gibbs state for a compact set with $\mathbf{Z}^\nu$ action, *Commun. Math. Phys.*, **48** (1976), 85-88.

[3] A. Fathi, M. Herman, J. C. Yoccoz, A proof of Pesin's stable manifold theorem, *in* Geometric Dynamics, *Lect. Notes in Math.*, **1007**, Springer Verlag (1983), 177-215.

[4] A. Katok, J. M. Strelcyn, *Invariant manifolds for smooth maps with singularities, part II : Absolute continuity*, prépublication (1981).

[5] A. N. Kolmogorov, On the entropy per time unit as a metric invariant of automorphisms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **124** (1959), 754-755.

[6] F. Ledrappier, Sur la condition de Bernoulli faible et ses applications, *in* Théorie ergodique, Rennes 73/74, *Lect. Notes in Math.*, **532**, Springer Verlag (1976), 152-159.

[7] F. Ledrappier, Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **294** (1982), 593-595.

[8] F. Ledrappier, J. M. Strelcyn, A proof of the estimation from below in Pesin entropy formula, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, **2** (1982), 203-219.

[9] R. Mañé, A proof of Pesin's formula, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, **1** (1981), 95-102.

[10] D. S. Ornstein, *Ergodic Theory, Randomness and Dynamical Systems*, Yale University Press (1974).

[11] V. I. Oseledeč, The multiplicative ergodic theorem. The Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **19** (1968), 197-231.

[12] Ya. B. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, *Russian Math. Surveys*, **32:4** (1977), 55-114.

[13] Ya. B. Pesin, Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents, *Math. of the USSR Izvestija*, **10** (1978), 1261-1305.

[14] M. Ratner, Anosov flows are also Bernoullian, *Israël J. Math.*, **17** (1974), 380-391.

[15] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Addison-Wesley (1978).

[16] D. Ruelle, An inequality for the entropy of differentiable maps, *Bol. Soc. Bras. Math.*, **9** (1978), 83-87.

[17] D. Ruelle, Sensitive dependence on initial conditions and turbulent behavior of dynamical systems, *Ann. New York Acad. Sci.*, **316** (1979), 408-416.

[18] D. Ruelle, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 27-58.
[19] V. A. Rohlin, On the fundamental ideas of measure theory, *Amer. Math. Soc. Transl.* (1), **10** (1962), 1-54.
[20] V. A. Rohlin, Lectures on the theory of entropy of transformations with invariant measures, *Russ. Math. Surveys*, **22:5** (1967), 1-52.
[21] C. Series, The Poincaré flow of a Foliation, *Amer. J. Math.*, **102** (1980), 93-128.
[22] Ya. G. Sinai, Gibbs measures in ergodic theory, *Russ. Math. Surveys*, **27:4** (1972), 21-69.
[23] L. S. Young, Dimension, entropy and Lyapunov Exponents, *Ergod. Th. and Dynam. Syst.*, **2** (1982), 109-124.

Laboratoire de Probabilités
4, place Jussieu, Tour 56, 3e étage
75230 Paris, Cedex 05

*Manuscrit reçu le 14 janvier 1983.*