PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

FRANÇOIS BRUHAT

JACQUES TITS

Groupes réductifs sur un corps local : I. Données radicielles valuées

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 5-251

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1972__41__5_0>

GROUPES RÉDUCTIFS SUR UN CORPS LOCAL

par F. BRUHAT *et* J. TITS

CHAPITRE PREMIER

DONNÉES RADICIELLES VALUÉES

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de développer l'étude des groupes algébriques réductifs sur un corps local dans la voie ouverte par N. Iwahori et H. Matsumoto. Les principaux résultats obtenus ont été annoncés, parfois sous une forme légèrement différente, dans [10] à [16] (voir aussi les conjectures de [9]).

De façon imagée, la théorie qui sera exposée ici, à partir du chapitre II, peut être décrite comme l'étude d'un groupe semi-simple défini sur un corps local K — ou plutôt du groupe G de ses points rationnels sur K — considéré comme « objet de dimension infinie » défini sur le corps résiduel k. Ce point de vue est illustré par les analogies qu'on peut établir entre nos résultats et la théorie ordinaire des groupes algébriques définis sur k. Comme pour celle-ci, il y a lieu de distinguer la théorie absolue (k algébriquement clos) de la théorie relative (k quelconque). On sait le rôle joué en théorie absolue des groupes semi-simples ([1], [18]) par les sous-groupes de Borel, sous-groupes résolubles connexes maximaux, et plus généralement par les sous-groupes paraboliques, c'est-à-dire les sous-groupes contenant un sous-groupe de Borel. Ce même rôle sera tenu ici, pour k algébriquement clos, par les *sous-groupes d'Iwahori* et les *sous-groupes parahoriques*. Dans un exposé basé sur une description *a priori* de la structure algébro-géométrique de G sur k — exposé qui reste d'ailleurs à faire —, les sous-groupes d'Iwahori pourraient sans doute être définis comme les sous-groupes prorésolubles connexes maximaux de G. En tout cas, nous verrons au chapitre II qu'ils ont une structure naturelle de groupe proalgébrique prorésoluble connexe et sont maximaux pour cette propriété. Cependant, nous les introduisons ici d'une autre façon. Lorsque G est déployé sur K, nous utilisons le procédé d'Iwahori-Matsumoto [28] consistant en une description explicite, à partir de la théorie radicielle de G sur K. Dans le cas général (k étant toujours supposé algébriquement clos), on sait que G est toujours quasi-déployé, en vertu d'un théorème de Steinberg, et nous avons à notre disposition deux procédés : une extension au cas quasi-déployé de la méthode « constructive » d'Iwahori-Matsumoto — procédé déjà utilisé dans certains cas (groupes quasi-déployés, groupes classiques) par H. Hijikata ([26], [27]) — ou la réduction au cas déployé à l'aide d'un processus de descente galoisienne.

On sait que plusieurs propriétés essentielles d'un sous-groupe de Borel (le fait d'être son propre normalisateur, la décomposition de Bruhat, la structure du treillis des sous-groupes qui le contiennent, etc.) sont conséquences du fait que ce groupe constitue, avec le normalisateur d'un tore maximal, un système de Tits [1] dont le groupe de Weyl est un groupe de Coxeter fini (groupe de Weyl du système de racines du groupe semi-simple considéré). De même, lorsque G est simplement connexe, un sous-groupe d'Iwahori B constitue avec le groupe des points rationnels du normalisateur d'un tore maximal convenable, un système de Tits, dont le groupe de Weyl est cette fois infini. Il en résulte à nouveau que B est son propre normalisateur, donne lieu à une décomposition de Bruhat, etc. Les sous-groupes parahoriques sont les sous-groupes P qui contiennent un sous-groupe d'Iwahori B et sont réunion d'un nombre fini de doubles classes suivant B. Dans le cas non simplement connexe, on rencontre des phénomènes tout à fait analogues à ceux du cas non connexe de la théorie classique. Dans cette introduction, pour simplifier le langage, nous ne considérerons généralement que le cas simplement connexe.

Comme dans le cas classique [3], le passage au cas relatif se fait par « descente ». Nous utilisons à cette occasion les techniques de descente galoisienne, ce qui nous oblige souvent à supposer le corps k parfait, bien que cette hypothèse soit probablement superflue dans bien des cas. On se rappelle qu'un groupe algébrique semi-simple défini sur k ne possède pas nécessairement de sous-groupe de Borel défini sur k, mais qu'il convient de considérer ses k-sous-groupes paraboliques minimaux, qui sont tous conjugués et donnent lieu à leur tour à des systèmes de Tits. De même, nous serons conduits à envisager les « k-sous-groupes parahoriques » minimaux de G, qui sont les « groupes B » de systèmes de Tits dont le groupe de Weyl est le groupe de Weyl affine d'un système de racines (systèmes de Tits « de type affine »). Celui-ci n'est pas nécessairement homothétique du système de racines relatives de G, mais a même groupe de Weyl (ordinaire) que ce dernier.

L'intérêt des sous-groupes parahoriques réside notamment dans les faits suivants. Les sous-groupes bornés maximaux de G — supposé simplement connexe — sont les sous-groupes parahoriques maximaux. Nous déterminons d'ailleurs complètement les sous-groupes bornés maximaux de n'importe quel groupe semi-simple sur K, généralisant ainsi les résultats obtenus par H. Hijikata pour certains groupes classiques (PGL_n, groupe d'une forme sesquilinéaire non dégénérée). D'autre part, les sous-groupes parahoriques ont des structures naturelles de groupes proalgébriques sur k; par leur truchement, diverses questions concernant G (questions de cohomologie galoisienne notamment) peuvent être ramenées par « réduction modulo p » à des problèmes concernant des groupes semi-simples (de dimension finie) sur k. Ceci nous permet de généraliser des théorèmes obtenus par M. Kneser lorsque K est localement compact de caractéristique zéro (détermination des groupes anisotropes, nullité du H^1, classification). Notons aussi que, si le groupe considéré se déploie sur une extension non ramifiée de K, les sous-groupes parahoriques

---

(1) Dans tout ce mémoire, nous avons essayé d'adhérer le plus strictement possible à la terminologie de N. Bourbaki, de manière à faciliter les références à [5]. C'est pourquoi l'un des auteurs a vivement insisté pour que ce que d'aucuns appellent une (BN)-paire dans un groupe G soit appelé ici un « système de Tits ». L'autre auteur, à son tour [3], s'y résigne.

apparaissent comme groupe des « points entiers » (ou « groupe d'unités ») de certaines « structures sur les entiers » sur le groupe envisagé, c'est-à-dire de schémas en groupes sur l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de K qui deviennent le groupe semi-simple étudié par le changement de base $\mathcal{O} \to \mathrm{K}$.

D'autres ingrédients de la théorie classique sont les tores — notamment les tores maximaux dans le cas absolu et les tores k-déployés maximaux dans le cas relatif — le système de racines — absolues ou relatives — et les sous-groupes radiciels, notés généralement U_a, qui sont des groupes additifs dans le cas absolu et des groupes unipotents de classe $\leqslant 2$ dans le cas relatif. Tous ces objets ont leurs répondants dans la « théorie locale ». En particulier, nous associons au groupe G un « système de racines affines » (absolues ou relatives), dont les éléments sont des demi-espaces affines du dual $\mathbf{A}$ de l'espace vectoriel réel engendré par le système de racines relatives Φ de G, de la forme $\alpha_{a,k} = \{x \in \mathbf{A} \mid a(x) + k \geqslant 0\}$, où a parcourt Φ et k un sous-groupe discret Γ_a de $\mathbf{R}$. A chaque racine affine α est associé un sous-groupe U_α de G. Le système des U_α est d'ailleurs étroitement lié au système des groupes radiciels usuels U_a. Plus précisément, les $\mathrm{U}_{\alpha_{a,k}}$ (pour $k \in \Gamma_a$) sont les termes d'une filtration de U_a; ces filtrations proviennent d'une « valuation » de la donnée radicielle constituée par les U_a (qu'on se souvienne qu'une valuation d'un corps n'est guère plus qu'une filtration de son groupe additif). Dans le cas absolu (k algébriquement clos), les quotients successifs de ces filtrations sont des groupes additifs sur k; dans le cas relatif, ce sont des groupes unipotents connexes de classe $\leqslant 2$.

***

Ce premier chapitre est consacré à la partie « abstraite » de la théorie, c'est-à-dire celle qui relève de la théorie des groupes « abstraits » et est indépendante de toute structure algébro-géométrique sur G ou sur les sous-groupes envisagés. De ce fait, elle s'applique aussi à des groupes G sans relations avec les groupes algébriques.

Nous exposons cette théorie en nous plaçant successivement à deux points de vue : celui des systèmes de Tits de type affine (§§ 2 à 5) et celui des données radicielles valuées (§§ 6 à 8). Le premier est plus géométrique au départ, et donne un rôle primordial aux sous-groupes parahoriques; le second, plus analytique, est essentiellement fondé sur la considération des sous-groupes radiciels U_a et de leur valuation. Il n'y a pas équivalence stricte entre les deux théories : d'une part, il existe des systèmes de Tits de type affine ne provenant pas d'une donnée radicielle valuée (dans les groupes d'automorphismes de certains arbres par exemple); en revanche, les valuations de données radicielles que nous considérons ne sont généralement pas supposées discrètes, et seules les valuations discrètes donnent lieu à de tels systèmes de Tits. Toutefois, les principales applications que nous avons en vue relèvent aussi bien de l'une des théories que de l'autre et le lecteur surtout intéressé à ces applications pourra souvent découvrir deux fois l'énoncé qu'il cherche sous des formes un peu différentes. Ces redites, dues en partie à la genèse du travail, auraient sans doute pu être évitées moyennant une refonte du mémoire que nous avons renoncé à entreprendre (nous reviendrons peut-être ailleurs sur une notion abstraite d' « immeuble », permettant une généralisation commune des deux théories); elles ont du moins l'avantage de mettre en évidence deux aspects des objets étudiés et de faire appel à des modes de raisonnement parfois très différents.

***

Le § 1 est essentiellement consacré à des rappels sur les systèmes de Tits et les groupes de Weyl de type affine.

Au § 2, nous associons à tout système de Tits de type affine (B, N) un « immeuble » $\mathscr{I}$, étroitement lié à l'ensemble combinatoire défini dans [39] ou [5] (exercices 10 à 17 du chap. IV, § 2), mais qui ne lui est cependant pas identique. Il s'agit ici d'un complexe polysimplicial géométrique muni de diverses structures, notamment d'une distance qui en fait un espace complet. Dans le cas de rang 1 (c'est-à-dire lorsque le groupe de Weyl de (B, N) est le groupe diédral infini), $\mathscr{I}$ est un *arbre*. A certains égards, cet immeuble remplace l'espace riemannien symétrique de la théorie des groupes de Lie semi-simples réels. C'est notamment le cas au § 3, où son utilisation nous permet de déterminer les sous-groupes bornés maximaux de G (pour une bornologie naturellement associée au système (B, N) et qui est la bornologie définie par la valuation de K dans le cas des groupes algébriques sur un corps local), grâce à un « lemme de point fixe » qui s'applique aussi bien à nos immeubles qu'aux espaces riemanniens symétriques, et peut être également utilisé pour la détermination des sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie réels. De même, au § 4, nous établissons, toujours à l'aide de l'immeuble, des « décompositions d'Iwasawa et de Cartan » analogues aux décompositions de même nom des groupes de Lie semi-simples réels ([1]) ([2]), ainsi que certaines relations entre doubles classes ayant des conséquences intéressantes pour la théorie des représentations des groupes semi-simples sur les corps locaux localement compacts (voir à ce sujet le n° 4).

Revenons un instant à la « décomposition d'Iwasawa ». A partir du système (B, N), nous construisons un sous-groupe $\mathfrak{B}$ de G qui, dans le cas des groupes algébriques sur un corps local K, n'est autre qu'un K-sous-groupe parabolique minimal. La décomposition d'Iwasawa est alors la relation $G=\mathfrak{B}.P$, où P est un sous-groupe borné maximal de G (mais contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, on ne peut pas en général trouver de sous-groupe R de $\mathfrak{B}$ tel que $G=R.P$ avec $R\cap P=\{1\}$). Elle n'est cependant valable que pour certains P — les « bons » sous-groupes bornés maximaux — et moyennant une hypothèse supplémentaire sur le système (B, N), toujours vérifiée par exemple dès que l'on a $G=\mathfrak{B}.N.\mathfrak{B}$.

([1]) Si G est un groupe de Lie semi-simple réel de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G, ce qui est classiquement appelé la « décomposition de Cartan » de G est la relation $G=K.P$, où P est l'image par l'application exponentielle de l'orthogonal de l'algèbre de Lie de K pour la forme de Killing. Mais on sait que P est la réunion des conjugués kAk^{-1}, où A est un sous-groupe commutatif maximal de P et où k parcourt K. De $G=K.P$ on déduit donc $G=K.A.K$ et c'est cette dernière relation dont nous démontrerons un analogue sous le nom de « décomposition de Cartan ».

([2]) Pour un autre exemple d'analogie entre immeuble et espace riemannien symétrique, voir [35].

Le § 4 appelle encore un commentaire. Nous avons dit plus haut que, du point de vue de la théorie locale, les groupes algébriques non simplement connexes se comportent comme les groupes non connexes de la théorie usuelle. Pour que nos résultats soient d'emblée applicables à ce cas, nous avons été amenés à considérer, outre le groupe G, un groupe $\hat{G}$ muni d'un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \hat{G}$ satisfaisant à certaines conditions (« homomorphisme B-N-adapté »); dans les applications, $\hat{G}$ et G seront respectivement les groupes des points rationnels d'un groupe semi-simple quelconque et du « revêtement universel » (simplement connexe) de la composante neutre de ce groupe. La nécessité de considérer simultanément les groupes G et $\hat{G}$ explique la lourdeur des notations.

Lorsque $G = \mathfrak{B}N\mathfrak{B}$, ce qui est le cas dans toutes les applications, le couple $(\mathfrak{B}, N)$ est un système de Tits de groupe de Weyl fini. Nous traduisons ce fait en parlant d'un double système de Tits. Le § 5 est consacré à une analyse axiomatique de cette situation. Elle ne présente que peu d'intérêt pour l'étude des groupes algébriques et les résultats du § 5 ne sont pas utilisés par la suite. Le lecteur peut donc, sans grand dommage, sauter ce paragraphe.

Le § 6 est consacré aux données radicielles valuées. Si Φ est un système de racines, une donnée radicielle de type Φ dans un groupe G est une famille de sous-groupes $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ soumise à certaines conditions ((6.1.1), (DR1) à (DR6)). Un exemple typique — sur lequel sont modelés les axiomes — est celui où G est le groupe des points rationnels d'un groupe semi-simple sur un corps K, T le centralisateur d'un tore déployé maximal, Φ le système des racines relatives à ce tore, et où les U_a sont les groupes radiciels unipotents associés à ces racines (groupes notés $U_{(a)}$ dans [3]). Une valuation de la donnée radicielle est un ensemble de fonctions $\varphi_a : U_a \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, satisfaisant à des conditions ((6.2.1), (V0) à (V5)) naturellement suggérées par l'étude des groupes déployés sur un corps valué. Comme nous y avons fait allusion plus haut, à une valuation discrète d'une donnée radicielle génératrice de G est associé un double système de Tits dans un sous-groupe d'indice fini de G (6.5). Mais dans la suite du chapitre, nous ne nous limitons pas au cas discret.

L'un des avantages de l'introduction de données radicielles valuées est qu'elles permettent une étude plus poussée de la structure des sous-groupes parahoriques, qui n'apparaissent plus d'ailleurs que comme des cas particuliers des sous-groupes U_f étudiés en détail au n° 6.4, notamment du point de vue de leur pronilpotence. Par exemple, dans le cas des groupes semi-simples sur un corps local de corps résiduel k, tout groupe parahorique est extension d'un groupe algébrique réductif sur k et d'un groupe pronilpotent.

Les §§ 7 et 8 transposent en quelque sorte aux données radicielles valuées les résultats des §§ 2, 3 et 4 : construction d'un immeuble $\mathscr{I}$, qui dans le cas discret est celui du système de Tits associé et qui dans le cas général possède la plupart des structures et propriétés de ce dernier, à l'exception de la structure de complexe polysimplicial (bien que $\mathscr{I}$ possède des « chambres » et des « facettes ») et de la propriété d'être complet;

étude de la bornologie de G et détermination des sous-groupes bornés maximaux. L'ordre des démonstrations est *grosso modo* l'inverse de celui des §§ 2 à 4 : nous devons commencer par étudier certains sous-groupes généralisant les sous-groupes parahoriques et par établir les décompositions d'Iwasawa et de Bruhat avant de construire l'immeuble.

Le § 9, essentiellement technique, expose le théorème qui nous permettra de « descendre » la valuation des données radicielles et le système de Tits de type affine des groupes déployés d'abord aux groupes quasi-déployés puis aux groupes semi-simples quelconques sur un corps local.

Tout ce qui est fait ici est évidemment orienté vers l'application subséquente aux groupes algébriques; c'est donc dans le ou les chapitres suivants qu'on en trouvera l'illustration principale. Cependant, pour tempérer la sécheresse de ce premier chapitre, nous y avons inclus un § 10 où sont traités par des calculs naïfs — indépendamment de toute descente — les groupes classiques. Nous y déterminons notamment toutes les valuations des données radicielles naturelles de ces groupes. Notons que, comme nous ne nous y bornons pas aux valuations discrètes et que les corps gauches de rang infini sur leur centre y sont admis, les résultats de ce paragraphe ne seront pas entièrement retrouvés dans les chapitres ultérieurs.

* * *

L'origine de ce travail se trouve dans des discussions que nous avons eues au cours de l'Institut d'été « Groupes algébriques et sous-groupes discrets » organisé à Boulder, Colorado, en juillet-août 1965, sous l'égide de l'American Mathematical Society. A l'époque, de nombreuses conversations avec M. Kneser, T. A. Springer et R. Steinberg nous ont fort aidés à nous engager dans la bonne voie; nous leur en exprimons ici notre amicale reconnaissance. Nous remercions aussi les diverses institutions, et principalement l'Université de Yale, l'Institute for Advanced Study, l'Institut des Hautes Études Scientifiques et le Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik de l'Université de Bonn qui nous ont procuré l'occasion des fréquents contacts sans lesquels ce premier chapitre n'aurait certes pas vu le jour en un temps aussi bref.

1. RAPPELS ET NOTATIONS

1.1. Complexes polysimpliciaux.

(1.1.1) Soit F un ensemble. Nous appellerons *structure affine* sur F une application de $[0, 1] \times F \times F$ dans F, notée $(t, x, y) \mapsto tx + (1-t)y$, telle qu'il existe une *bijection* j de F sur une partie convexe ayant un point intérieur d'un espace affine réel E de dimension finie, satisfaisant à la condition :

$$(1) \qquad j(tx + (1-t)y) = tj(x) + (1-t)j(y)$$

quels que soient $t \in [0, 1]$ et $x, y \in F$. Toute partie convexe d'un espace affine de dimension finie est canoniquement munie d'une structure affine. Un ensemble muni d'une structure affine sera appelé un *ensemble affine.*

Si F est un ensemble affine, il est clair que l'espace affine E et la bijection j satisfaisant à (1) sont déterminés à un isomorphisme affine près. On peut donc transporter à F la topologie de $j(F)$ ainsi que les notions de dimension, de segment ouvert ou fermé, de parallélisme de deux segments, de partie ou d'enveloppe convexe, de point interne, de point extrémal, etc. Pour tout point x de F, soit F_x l'ensemble formé de x et des points $y \in F$ distincts de x tels qu'il existe un segment ouvert de F contenant x et y. On vérifie aussitôt que F_x est une partie convexe de F et que l'ensemble des F_x pour $x \in F$ est une partition de F. Une partie de F de la forme F_x est appelée une *facette* de F.

Soient F et F′ deux ensembles affines. Un *morphisme* de F dans F′ (encore appelé application affine) est une application j de F dans F′ satisfaisant à la condition (1). Ceci définit la catégorie des ensembles affines. Tout morphisme bijectif est un isomorphisme. L'application $(t, (x, x'), (y, y')) \mapsto (tx + (1-t)y,\ tx' + (1-t)y')$ munit $F \times F'$ d'une structure affine, dite *produit* de celles de F et de F′.

(1.1.2) Un *simplexe fermé* (resp. *ouvert*) de dimension r est un ensemble affine isomorphe à un simplexe fermé (resp. ouvert) d'un espace vectoriel réel E de dimension r, c'est-à-dire à l'enveloppe convexe (resp. l'intérieur de l'enveloppe convexe) de $r+1$ points affinement indépendants de E. Un simplexe fermé F de dimension r possède $r+1$ points extrémaux; une facette de F est un simplexe ouvert de dimension $\leqslant r$ et est l'ensemble des points internes de l'enveloppe convexe d'une partie non vide de l'ensemble des points extrémaux de F.

(1.1.3) Un *polysimplexe* fermé est un ensemble affine F isomorphe au produit d'un nombre fini de simplexes fermés $F_1, \ldots, F_k$ $(k \geqslant 0)$ de dimension > 0. On vérifie aisément que les simplexes F_j et les projections $F \to F_j$ sont déterminés à isomorphisme près. Les facettes de F sont (après identification de F avec $F_1 \times \ldots \times F_k$) les parties de la forme $G_1 \times \ldots \times G_k$, où G_j est une facette de F_j ; ce sont donc des *polysimplexes ouverts*, c'est-à-dire des ensembles affines isomorphes à des produits de simplexes ouverts.

(1.1.4) Soient A un ensemble et $\mathscr{F}$ une partie de l'ensemble des parties de A, dont les éléments seront appelés les *facettes* de A. On suppose que

(1) *Les éléments de* $\mathscr{F}$ *forment une partition de* A.

On se donne de plus une *relation d'ordre* sur $\mathscr{F}$, notée $F \prec F'$, et pour $F \in \mathscr{F}$, on désigne par $\overline{F}$ la réunion des éléments de $\mathscr{F}$ majorés par F (éléments qui seront appelés les facettes de F). Enfin, pour chaque $F \in \mathscr{F}$, on se donne une *structure affine* sur $\overline{F}$ telle que les deux conditions suivantes soient réalisées :

(2) $\overline{F}$ *est un polysimplexe fermé*;

(3) *l'ensemble des* $F' \in \mathscr{F}$ *majorés par* F *est l'ensemble des facettes de* $\overline{F}$; *l'adhérence d'un tel* F' *dans* $\overline{F}$ *coïncide avec* $\overline{F}'$ *et la structure affine de* $\overline{F}'$ *est induite par celle de* $\overline{F}$.

Il en résulte aussitôt que chaque facette F de A est un polysimplexe ouvert, ensemble des points internes de $\overline{F}$.

(1.1.5) On suppose désormais que les dimensions des facettes de A sont majorées et on note dim A leur borne supérieure. Pour $F \in \mathscr{F}$, on pose $\operatorname{codim} F = \dim A - \dim F$. Les facettes de codimension 0 (resp. 1) sont appelées les *chambres* (resp. *cloisons*) de A. Deux chambres sont dites *mitoyennes* si elles sont distinctes et ont une cloison commune. Une *galerie* de longueur n est une suite $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$ de $n+1$ chambres, telle que C_{i-1} et C_i soient mitoyennes ou confondues $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On dit que C_0 est l'*origine* et C_n l'*extrémité* de Γ (ou encore que C_0 et C_n sont les extrémités de Γ). On dit que Γ est *sans bégaiement* si $C_{i-1} \neq C_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soient F et F' deux facettes de A. On dit qu'une galerie $\Gamma = (C_0, \ldots, C_n)$ *relie* F à F' si $F \subset \overline{C}_0$ et $F' \subset \overline{C}_n$. On dit que Γ est *tendue* entre F et F' si elle les relie et s'il n'existe pas de galerie reliant F à F' de longueur strictement inférieure à n. Si $x, x' \in A$, on dit qu'une galerie est tendue entre x et x' si elle est tendue entre les facettes F et F' contenant respectivement x et x'. On dit qu'une galerie est *minimale* si elle est tendue entre ses extrémités.

Définition **(1.1.6)**. — *On dit que* A *(muni de l'ensemble* $\mathscr{F}$, *de la relation d'ordre* $F \prec F'$ *et des structures affines sur chacun des ensembles* $\overline{F}$, *satisfaisant aux conditions précédentes) est un* complexe polysimplicial *si, quelles que soient les facettes* F *et* F' *de* A, *il existe une galerie reliant* F *et* F'.

Si A est un complexe polysimplicial, les chambres de A ne sont autres que les facettes maximales. Si les chambres d'un complexe polysimplicial sont des simplexes, on dit que c'est un *complexe simplicial*. Toutes les facettes sont alors des simplexes (ouverts).

(1.1.7) Soient A et A′ deux complexes polysimpliciaux. Un *morphisme* de A dans A′ est une application $f: A \to A'$ possédant les deux propriétés suivantes :

(i) l'image par f d'une facette de A est une facette de A′;

(ii) si F est une facette de A, la restriction de f à $\overline{F}$ est une application affine de $\overline{F}$ sur $\overline{f(F)}$.

On dit que le morphisme f est *chambré* si, pour toute chambre C de A, la restriction de f à C est un isomorphisme de C sur une chambre de A′.

(1.1.8) Soient A_1 et A_2 deux complexes polysimpliciaux. Définissons les facettes de $A_1 \times A_2$ comme les produits $F_1 \times F_2$, où F_i est une facette de A_i $(i=1, 2)$; munissons l'ensemble des facettes de $A_1 \times A_2$ de la relation d'ordre « $F'_1 \times F'_2 \prec F_1 \times F_2$ si et seulement si $F'_1 \prec F_1$ et $F'_2 \prec F_2$ ». On a alors $\overline{F_1 \times F_2} = \overline{F}_1 \times \overline{F}_2$ et on peut munir $\overline{F_1 \times F_2}$ de la structure affine produit. On vérifie aisément que ces données munissent $A_1 \times A_2$ d'une structure de complexe polysimplicial, dite *produit* de celles de A_1 et de A_2. Les projections canoniques sont des morphismes. Ceci s'étend évidemment au produit d'un nombre fini quelconque de complexes polysimpliciaux.

1.2. Systèmes de Coxeter et systèmes de Tits.

Dans ce numéro, nous rappelons quelques définitions et résultats relatifs aux systèmes de Coxeter et aux systèmes de Tits. Pour les démonstrations, nous renverrons à ([5], chap. IV), que nous désignerons par *l.c.* dans tout 1.2.

(1.2.1) Rappelons qu'un *système de Coxeter* est un couple (W, S), où W est un groupe et S une partie de W, satisfaisant aux axiomes suivants (*l.c.*, § 1, n° 3) :

(i) S engendre W et les éléments de S sont d'ordre 2;

(ii) soit $m(s, s')$ l'ordre de l'élément ss' de W (pour $s, s' \in S$) et soit I l'ensemble des couples (s, s') d'éléments de S tels que $m(s, s')$ soit fini; l'ensemble générateur S et les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ pour $(s, s') \in I$ forment une présentation de W.

Lorsque $\operatorname{Card} S = 1$, on a $W = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Lorsque $\operatorname{Card} S = 2$, le groupe W est un groupe diédral d'ordre $2m(s, s')$, avec $S = \{s, s'\}$ (*l.c.*, § 1, n° 2).

(1.2.2) Soit (W, S) un système de Coxeter. On appelle *longueur* d'un élément $w \in W$ et on note $\ell(w)$, le plus petit entier $q \geqslant 0$ tel que w soit produit d'une suite de q éléments de S. On appelle *décomposition réduite* de w toute suite $(s_1, \ldots, s_q)$ d'éléments de S telle que $w = s_1 \ldots s_q$ et que $\ell(w) = q$ (*l.c.*, § 1, n° 1). L'ensemble $\{s_1, \ldots, s_q\}$ ne dépend que de w et non de la décomposition réduite choisie (*l.c.*, § 1, n° 8, prop. 7); on le note S_w et on l'appelle *support* de w. Les éléments

$$t_j = (s_1 \ldots s_{j-1}) s_j (s_1 \ldots s_{j-1})^{-1}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant q$, sont deux à deux distincts et leur ensemble ne dépend que de w (*l.c.*, § 1, n° 4, lemme 2).

(1.2.3) Soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite d'un élément $w \in W$ et soit $s \in S$. Si $\ell(sw) \leqslant \ell(w)$, il existe un entier j avec $1 \leqslant j \leqslant q$, tel que $ss_1 \ldots s_{j-1} = s_1 \ldots s_j$ et $(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite de sw, qui est donc de longueur $q-1$ (*l.c.*, § 1, n° 4, lemme 3). Soient $s_1, \ldots, s_q$ des éléments de S et posons $w = s_1 \ldots s_q$; il existe une suite $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant q$ telle que $(s_{j_1}, \ldots, s_{j_k})$ soit une décomposition réduite de w et on a $k \equiv q$ modulo 2.

(1.2.4) Pour toute partie X de S, on note W_X le sous-groupe de W engendré par X. C'est aussi l'ensemble des éléments $w \in W$ dont le support est contenu dans X (*l.c.*, § 1, n° 8, cor. 1 de la prop. 7). On a en particulier $W_X \cap S = X$ et $W_X \cap W_Y = W_{X \cap Y}$ pour $X, Y \subset S$. Le couple (W_X, X) est un système de Coxeter (*l.c.*, § 1, n° 8, th. 2).

(1.2.5) Le *graphe de Coxeter* Cox(W, S) (ou Cox W) du système de Coxeter (W, S) est le couple (G, f) obtenu comme suit : G est le graphe dont les sommets sont les éléments de S, deux sommets distincts s et s' étant liés par une arête si et seulement si l'ordre $m(s, s')$ de ss' est $\geqslant 3$ (ce qui signifie que s et s' ne commutent pas); f est l'application $\{s, s'\} \mapsto m(s, s')$ de l'ensemble des arêtes dans l'ensemble formé de ∞ et des entiers $\geqslant 3$ (*l.c.*, § 1, n° 9).

(1.2.6) On appelle *système de Tits* un quadruplet (G, B, N, S), où G est un groupe, B et N deux sous-groupes de G et S une partie de $N/(B \cap N)$, vérifiant les axiomes suivants (*l.c.*, § 2, n° 1) :

(T 1) *L'ensemble* $B \cup N$ *engendre* G *et* $B \cap N$ *est un sous-groupe distingué de* N.

(T 2) *L'ensemble* S *engendre le groupe* $W = N/(B \cap N)$ *et se compose d'éléments d'ordre* 2 (1).

(T 3) *Pour tout* $s \in S$ *et tout* $w \in W$, *on a*

$$sBw \subset BwB \cup BswB.$$

(T 4) *Pour tout* $s \in S$, *on a* $sBs \neq B$.

Notons que les éléments de W sont des classes modulo $B \cap N$, ce qui donne un sens aux produits Bw, BwB, etc.

L'ensemble S est l'ensemble des éléments $w \in W$ tels que $B \cup BwB$ soit un sous-groupe de G (*l.c.*, § 2, n° 5, cor. du th. 3). Il en résulte que, si G, B et N sont donnés, il existe au plus une partie S de $N/(B \cap N)$ telle que (G, B, N, S) soit un système de Tits. Ceci nous permettra de dire, par abus de langage, que le triplet (G, B, N) est un système de Tits, ou encore que le couple (B, N) est un système de Tits dans G.

Le groupe W est appelé le *groupe de Weyl* du système de Tits. Le couple (W, S) est un système de Coxeter (*l.c.*, § 2, n° 4, th. 2).

Dans la suite de ce numéro, on désigne par (G, B, N, S) un système de Tits, par W son groupe de Weyl et par $\nu : N \to W$ l'homomorphisme canonique.

---

(1) Cette seconde hypothèse faite sur S est en fait conséquence du restant des axiomes ([37]).

(1.2.7) L'application $w \mapsto BwB$ est une bijection de W sur l'ensemble $B\backslash G/B$ des doubles classes de G suivant B (*l.c.*, § 2, n° 3, th. 1).

(1.2.8) Soient $s \in S$ et $w \in W$; les trois relations « $BsBwB$ contient une seule double classe modulo B », $BswB = BsBwB$ et $\ell(sw) = \ell(w) + 1$ sont équivalentes (*l.c.*, § 2, n° 4, th. 2). Par conséquent, si $(s_1, \ldots, s_q)$ est une décomposition réduite d'un élément $w \in W$, on a $BwB = Bs_1Bs_2B \ldots Bs_qB$.

(1.2.9) Pour toute partie X de S, posons $B_X = BW_XB$ (réunion des doubles classes BwB pour w décrivant le sous-groupe W_X de W engendré par X; cet ensemble est noté G_X dans (*l.c.*, § 2)). L'application $X \mapsto B_X$ est une bijection de l'ensemble des parties de S sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant B et on a $B_X \cap B_Y = B_{X \cap Y}$ pour $X, Y \subset S$ (*l.c.*, § 2, n° 5, th. 3).

(1.2.10) On dit qu'un sous-groupe P de G est un sous-groupe *parabolique* s'il contient un conjugué de B. Il existe alors une partie X de S et une seule telle que P soit conjugué de B_X (*l.c.*, § 2, n° 6, prop. 4). On dit que X est le *type* de P. Pour toute partie Y de S contenant X, il existe un sous-groupe parabolique de type Y et un seul contenant P et l'on obtient ainsi tous les sous-groupes contenant P.

Tout sous-groupe parabolique est son propre normalisateur; deux sous-groupes paraboliques distincts dont l'intersection est encore un sous-groupe parabolique ne sont pas conjugués; deux sous-groupes paraboliques contenus dans un même sous-groupe P et conjugués par un élément de G sont conjugués par un élément de P (*l.c.*, § 2, n° 6, th. 4).

(1.2.11) Soit (G', B', N', S') un autre système de Tits, avec $G' = G$. On dit que les systèmes de Tits (G, B, N, S) et (G, B', N', S') sont *équivalents* si les sous-groupes B et B′ sont conjugués, ou ce qui revient au même, s'ils possèdent les mêmes sous-groupes paraboliques. Les groupes de Weyl W et W′, ou plus précisément les systèmes de Coxeter (W, S) et (W′, S′) sont alors canoniquement isomorphes. En effet, soit $g \in G$ tel que $B' = gBg^{-1}$; puisque B est son propre normalisateur, un tel élément est déterminé à multiplication à droite près par un élément de B. L'application $x \mapsto gxg^{-1}$ définit une bijection, indépendante du choix de g, de l'ensemble $B\backslash G/B$ sur $B'\backslash G/B'$, donc une bijection γ de W sur W′ (cf. (1.2.7)). Comme les éléments s de S (resp. S′) sont caractérisés par le fait que $B \cup BsB$ (resp. $B' \cup B'sB'$) est un sous-groupe (1.2.6), on a $\gamma(S) = S'$. D'autre part, soit $(s_1, \ldots, s_q)$ une décomposition réduite d'un élément $w \in W$. On déduit immédiatement de (1.2.8) que $(\gamma(s_1), \ldots, \gamma(s_q))$ est une décomposition réduite de $\gamma(w)$. Il en résulte aussitôt que, pour $s, t \in S$, l'ordre de $\gamma(s)\gamma(t)$ dans W′ est égal à celui de st dans W et que, par suite, il existe un homomorphisme γ' et un seul de W dans W′ tel que $\gamma'(s) = \gamma(s)$ pour tout $s \in S$. Comme on a

$$\gamma(w) = \gamma(s_1) \ldots \gamma(s_q) = \gamma'(s_1) \ldots \gamma'(s_q) = \gamma'(w),$$

on voit que γ est bien un isomorphisme de (W, S) sur (W′, S′).

(1.2.12) Posons $H = \bigcap_{n \in N} nBn^{-1}$. C'est un sous-groupe de G, normalisé par N. Posons $\tilde{N} = NH$. Alors H est un sous-groupe distingué de $\tilde{N}$, on a $H = B \cap \tilde{N}$ et l'injection de N dans $\tilde{N}$ définit un isomorphisme de W sur $\tilde{N}/(B \cap \tilde{N})$, isomorphisme au moyen duquel nous identifierons ces deux groupes. On dit que le système de Tits (G, B, N, S) est *saturé* si $\tilde{N} = N$. Dans tous les cas, le quadruplet $(G, B, \tilde{N}, S)$ est un système de Tits saturé, équivalent à (G, B, N, S), et appelé système de Tits saturé associé à (G, B, N, S) (*l.c.*, § 2, exerc. 5).

Deux systèmes de Tits seront dits *fortement équivalents* si les systèmes de Tits saturés associés sont les mêmes, à automorphisme intérieur près. On notera que deux systèmes de Tits, même saturés, peuvent être équivalents sans être fortement équivalents (sauf cependant si leur groupe de Weyl est fini (cf. *l.c.*, § 2, exerc. 15)); en particulier les groupes N et N′ peuvent ne pas être conjugués (cf. (2.8.13)).

(1.2.13) Un homomorphisme φ du groupe G dans un groupe $\hat{G}$ est dit B-*adapté* (resp. B-N-*adapté*) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) le noyau de φ est contenu dans B;

(ii) pour tout $g \in \hat{G}$, il existe un élément $h \in G$ tel que $\varphi(hBh^{-1}) = g\varphi(B)g^{-1}$ (resp. $\varphi(hBh^{-1}) = g\varphi(B)g^{-1}$ et $\varphi(hNh^{-1}) = g\varphi(N)g^{-1}$).

Dans la suite de ce numéro, on désigne par $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-adapté.

(1.2.14) Comme G est engendré par la réunion des conjugués de B (*l.c.*, § 2, n° 4, cor. 2 du th. 2), l'image $\varphi(G)$ est un sous-groupe *distingué* de $\hat{G}$. D'autre part, (i) entraîne que le noyau de φ est contenu dans tout sous-groupe parabolique de G, donc dans H.

(1.2.15) Pour tout sous-groupe parabolique P de G et pour tout $g \in \hat{G}$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(g\varphi(P)g^{-1})$ est un sous-groupe parabolique de G, que nous noterons ${}^gP$. On définit ainsi une loi d'opération de $\hat{G}$ dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G. Pour tout sous-groupe parabolique P de G, nous noterons $\mathrm{Stab}_{\hat{G}} P$ ou simplement Stab P l'ensemble des $g \in \hat{G}$ tels que ${}^gP = P$. On a $\varphi^{-1}(\mathrm{Stab}\, P) = P$.

(1.2.16) Pour $g \in \hat{G}$, la classe à droite modulo B de l'élément $h \in G$ satisfaisant à la condition (ii) de (1.2.13) est bien déterminée puisque B est son propre normalisateur et que le noyau de φ est contenu dans B. On en déduit qu'il existe une permutation $\xi(g)$ et une seule de W telle que

$$\varphi(B.\xi(g)(w).B) = \varphi(h)^{-1}.g.\varphi(BwB).g^{-1}.\varphi(h)$$

pour tout $w \in W$ et tout $h \in G$ satisfaisant à (1.2.13) (ii). Un raisonnement analogue à celui de (1.2.11) montre que $\xi(g)$ est un automorphisme du système de Coxeter (W, S) et ξ *est un homomorphisme de* $\hat{G}$ *dans le groupe des automorphismes de* (W, S), ou encore *dans le groupe des automorphismes du graphe de Coxeter de* (W, S). On pose $\Xi = \xi(\hat{G})$.

(1.2.17) Le noyau $\hat{G}_0$ de ξ contient $\varphi(G)$. Il en résulte que la restriction de ξ à Stab B est une application surjective de Stab B sur Ξ. On pose $\hat{B} = \hat{G}_0 \cap \mathrm{Stab}\, B$. Le couple $(\hat{B}, \varphi(N))$ est un système de Tits dans $\hat{G}_0$, de groupe de Weyl canoniquement isomorphe à W (*l.c.*, § 2, exerc. 8).

Plus généralement, si P est un sous-groupe parabolique de G, on pose $\hat{P} = \hat{G}_0 \cap \mathrm{Stab}\, P$. Si $P \supset B$, on a $\hat{P} = \varphi(P).\hat{B}$. L'application $P \mapsto \hat{P}$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G sur celui de $\hat{G}_0$.

(1.2.18) Si P est un sous-groupe parabolique de type $X \subset S$, le sous-groupe parabolique ${}^gP$ est de type $\xi(g)(X)$ (pour $g \in \hat{G}$).

Pour toute partie X de S, nous noterons Ξ_X l'ensemble des $\xi \in \Xi$ tels que $\xi(X) = X$. Si $g \in \mathrm{Stab}\, B_X$, les sous-groupes paraboliques minimaux B et ${}^gB$ sont contenus dans B_X, donc sont conjugués par un élément de B_X (1.2.10). Par suite, on a

$$\mathrm{Stab}\, B_X = \varphi(B_X).(\mathrm{Stab}\, B_X \cap \mathrm{Stab}\, B) = \varphi(B_X).(\mathrm{Stab}\, B \cap \xi^{-1}(\Xi_X))$$

puisque ${}^gB_X = B_{\xi(g)(X)}$ pour $g \in \mathrm{Stab}\, B$.

(1.2.19) Soit $X \subset S$ et soit H un sous-groupe de Ξ_X. Posons

$$Q(X, \mathsf{H}) = \varphi(B_X).(\mathrm{Stab}\, B \cap \xi^{-1}(\mathsf{H})).$$

L'application $(X, \mathsf{H}) \mapsto Q(X, \mathsf{H})$ est une bijection de l'ensemble des couples $(X, \mathsf{H}) \in \mathfrak{P}(S) \times \mathfrak{P}(\Xi)$ tels que H soit un sous-groupe de Ξ_X, sur l'ensemble des sous-groupes de $\hat{G}$ contenant $\hat{B}$. On a $Q(X, \Xi_X) = \mathrm{Stab}\, B_X$; de plus $Q(X, \mathsf{H}) \subset Q(X', \mathsf{H}')$ si et seulement si $X \subset X'$ et $\mathsf{H} \subset \mathsf{H}'$ (*l.c.*, § 2, exerc. 8). Les sous-groupes $Q(X, \mathsf{H})$ et $Q(X', \mathsf{H}')$ sont conjugués dans $\hat{G}$ si et seulement si il existe $t \in \Xi$ tel que $X' = t.X$ et $\mathsf{H}' = t.\mathsf{H}.t^{-1}$.

Soit P (resp. P′) un sous-groupe parabolique de G, de type X (resp. X′). Pour que $\mathrm{Stab}\, P \supset \mathrm{Stab}\, P'$, il faut et il suffit que $P \supset P'$ (d'où $X \supset X'$) et que $\Xi_X \supset \Xi_{X'}$: cela résulte de ce qui précède, en se ramenant par conjugaison au cas où $P' = B_{X'}$.

(1.2.20) Supposons que φ soit B-N-adapté et soit E l'intersection des normalisateurs de $\varphi(B)$ et de $\varphi(N)$ dans $\hat{G}$. On a $\hat{G} = E.\varphi(G)$, d'où $\hat{G} = E.\hat{G}_0$. Soient $e \in E$ et $n \in N$, et soit ${}^en \in N$ tel que $e\varphi(n)e^{-1} = \varphi({}^en)$. On a ${}^e(nBn^{-1}) = {}^en.B.({}^en)^{-1}$ et $\nu({}^en) = \xi(e)(\nu(n))$.

1.3. Groupes de Weyl affines.

Dans ce numéro, nous rappelons quelques définitions et résultats relatifs aux « groupes de Weyl de type affine ». Pour plus de détails et pour les démonstrations, nous renvoyons à [5], désigné par *l.c.* dans tout 1.3.

(1.3.1) Soit **A** un espace affine réel de dimension finie. On suppose que l'espace des translations ${}^v\mathbf{A}$ de **A** est muni d'un produit scalaire (non dégénéré), donc d'une norme, et on munit $\mathbf{A}$ de la distance (euclidienne) correspondante : on dit alors que $\mathbf{A}$ est un *espace affine euclidien.*

Deux parties de $\mathbf{A}$ se déduisant l'une de l'autre par une translation sont dites *équipollentes.*

On désigne de plus par $\mathbf{W}$ un sous-groupe du groupe des déplacements de $\mathbf{A}$, engendré par des réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans (affines) de $\mathbf{A}$ et opérant proprement dans $\mathbf{A}$ lorsqu'on le munit de la topologie discrète; cette dernière condition revient à dire que $\mathbf{W}$ est un sous-groupe discret du groupe des déplacements de $\mathbf{A}$ (*l.c.*, chap. V, § 4, nº 9). Pour $w \in \mathbf{W}$, on note ${}^v w$ l'automorphisme correspondant de ${}^v\mathbf{A}$.

(1.3.2) On sait (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 8) que $\mathbf{A}$ se décompose canoniquement en produit d'espaces affines euclidiens $\mathbf{A}_0 \times \ldots \times \mathbf{A}_m$, chacun d'eux étant un quotient de $\mathbf{A}$, de telle sorte que les conditions suivantes soient réalisées : l'action de $\mathbf{W}$ passe au quotient et définit un groupe discret $\mathbf{W}_i$ de déplacements de $\mathbf{A}_i$, engendré par des réflexions orthogonales par rapport à des hyperplans de $\mathbf{A}_i$; le groupe $\mathbf{W}$ s'identifie au produit direct des $\mathbf{W}_i$, on a $\mathbf{W}_0 = \{1\}$ et chaque $\mathbf{W}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ est *irréductible* en ce sens que $\mathbf{W}_i \neq \{1\}$ et que la représentation linéaire canonique de $\mathbf{W}_i$ dans l'espace ${}^v\mathbf{A}_i$ des translations de $\mathbf{A}_i$ est irréductible.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $\mathbf{A}_0$ *est réduit à un point,* ce qui permet de ne pas le considérer, et que *chaque* $\mathbf{W}_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant m$ *est infini,* ou, ce qui revient au même (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 9), *n'a pas de point fixe dans* $\mathbf{A}_i$. Nous dirons dans ces conditions que $\mathbf{W}$ est un *groupe de Weyl affine*; lorsque de plus $m = 1$, nous dirons que $\mathbf{W}$ est *irréductible.*

(1.3.3) Si L est un hyperplan affine de $\mathbf{A}$, nous noterons s_{L} la réflexion orthogonale admettant L comme ensemble de points fixes. Réciproquement, si s est une réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan, nous noterons L_s cet hyperplan, ensemble des points fixes de s.

On appelle *mur* de $\mathbf{A}$ (relativement à $\mathbf{W}$) tout hyperplan L de $\mathbf{A}$ tel que la réflexion s_{L} appartienne à $\mathbf{W}$. On sait que l'ensemble $\mathscr{H}$ des murs de $\mathbf{A}$ est localement fini (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 1).

On appelle *racine affine* de $\mathbf{A}$ tout demi-espace fermé de $\mathbf{A}$ limité par un mur, lequel est appelé mur de la racine. L'ensemble des racines affines de $\mathbf{A}$ sera noté $\boldsymbol{\Sigma}$. Si $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$, on pose $r_\alpha = s_{\partial\alpha}$ où $\partial\alpha$ est le mur de α; on pose $\alpha^* = \overline{\mathbf{A} - \alpha}$ et on désigne par α_+ l'intersection des racines affines contenant un voisinage de α : c'est une racine affine équipollente à α.

Il est clair que la donnée de $\boldsymbol{\Sigma}$ détermine $\mathbf{W}$. Un ensemble de demi-espaces fermés d'un espace affine euclidien $\mathbf{A}$ qui est l'ensemble des racines affines de $\mathbf{A}$ pour un groupe de Weyl affine opérant dans $\mathbf{A}$, sera appelé un *système de racines affines.*

On appelle *facette* de $\mathbf{A}$ (relativement à $\mathbf{W}$ ou à $\boldsymbol{\Sigma}$) une classe d'équivalence dans $\mathbf{A}$

pour la relation d'équivalence « x et y sont contenus dans les mêmes racines affines ».

Une facette F est un ensemble convexe ouvert dans le sous-espace affine (appelé *support* de F) qu'elle engendre. Munissons l'ensemble $\mathscr{F}$ des facettes de la relation d'ordre « F′ est contenue dans l'adhérence de F »; l'ensemble noté $\overline{\mathrm{F}}$ au n° 1.1 coïncide avec l'adhérence de F, et **A**, muni de $\mathscr{F}$, de cette relation d'ordre et des structures affines canoniques sur chacun des ensembles $\overline{\mathrm{F}}$, est un complexe polysimplicial, dont la structure est produit des structures de complexe polysimplicial sur chacun des $\mathbf{A}_i$ (*l.c.*, chap. V, § 3, n° 8, prop. 6 et n° 9, prop. 8), qui sont d'ailleurs des complexes simpliciaux.

Les *chambres* de **A** (relativement à **W**) sont les composantes connexes du complémentaire dans **A** de la réunion des murs et les *cloisons* de **A** sont les facettes dont le support est un hyperplan (qui est alors un mur). On sait que **W** est simplement transitif sur l'ensemble des chambres (*l.c.*, chap. V, § 3, n° 2, th. 1).

(1.3.4) On désigne par **C** une chambre de **A** fixée une fois pour toutes. On sait (*l.c.*, chap. V, § 3, n° 3, th. 2) que *l'adhérence* $\overline{\mathbf{C}}$ *de* **C** *est un domaine fondamental pour* **W** *opérant dans* **A**. De plus, **W** est engendré par l'ensemble **S** des réflexions par rapport aux murs supports des cloisons de **C** (qu'on appelle murs de la chambre **C**) et *le couple* (**W**, **S**) *est un système de Coxeter* (*l.c.*, chap. V, § 3, n° 2, th. 1).

Plus précisément, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, la projection $\mathbf{C}_i$ de **C** dans $\mathbf{A}_i$ est une chambre de $\mathbf{A}_i$ (relativement à $\mathbf{W}_i$). Si $\mathbf{S}_i$ est l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de $\mathbf{C}_i$, le système de Coxeter $(\mathbf{W}_i, \mathbf{S}_i)$ est irréductible et (**W**, **S**) s'identifie au produit des $(\mathbf{W}_i, \mathbf{S}_i)$; autrement dit, après identification des $\mathbf{W}_i$ à des sous-groupes de **W**, on a $\mathbf{S} = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \mathbf{S}_i$.

Le rang de (**W**, **S**), c'est-à-dire le cardinal de **S**, est égal à $\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (\dim \mathbf{A}_i + 1)$. Par contre, on appelle *rang* de **W** (ou de $\boldsymbol{\Sigma}$) la *dimension* de **A**.

Le système de Coxeter (**W**, **S**) (et aussi son graphe de Coxeter) détermine essentiellement le groupe de Weyl affine **W**. Plus précisément, soit **A′** un espace affine euclidien, **W′** un groupe de Weyl affine dans **A′**, **S′** l'ensemble des réflexions par rapport aux murs d'une chambre de **A′** relativement à **W′**; alors, tout isomorphisme du système de Coxeter (**W**, **S**) sur (**W′**, **S′**) est induit par un unique isomorphisme $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ d'espaces affines; si de plus **W** est irréductible, α est une similitude, i.e. transforme la distance de **A** en un multiple de celle de **A′**.

(1.3.5) Pour toute facette F, il existe une facette et une seule de **C** transformée de F par un élément de **W**. D'autre part, pour toute partie X de **S** telle que $\mathrm{X} \cap \mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, l'ensemble $\mathbf{C}_\mathrm{X}$ des points $a \in \overline{\mathbf{C}}$ tels que X soit exactement l'ensemble des $s \in \mathbf{S}$ avec $a \in \mathrm{L}_s$, est une facette de **C**. De plus, l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathbf{C}_\mathrm{X}$ est une bijection de l'ensemble $\mathbf{T} = \{\mathrm{X} \subset \mathbf{S} \mid \mathrm{X} \cap \mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant m\} = \{\mathrm{X} \subset \mathbf{S} \mid \mathbf{W}_\mathrm{X} \text{ est fini}\}$ sur l'ensemble des facettes de **C**. On a $\mathbf{C} = \mathbf{C}_\varnothing$. Nous dirons que **T** est l'ensemble des *types* de facettes et qu'une facette F est de type $\mathrm{X} \in \mathbf{T}$ si F est transformée de $\mathbf{C}_\mathrm{X}$ par un élément de **W**.

Le stabilisateur de $\mathbf{C}_X$, qui est aussi le stabilisateur d'un point quelconque de $\mathbf{C}_X$, est le sous-groupe $\mathbf{W}_X$ de $\mathbf{W}$ engendré par X (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 3, prop. 1).

(1.3.6) Pour qu'une facette F soit une cloison, il faut et il suffit que son type soit réduit à un seul élément s; on dit encore que F est de type s. Si deux chambres C et C′ sont mitoyennes (1.1.5), elles ont en commun une cloison et une seule. Réciproquement, toute cloison de $\mathbf{A}$ est facette d'exactement deux chambres.

Si $\Gamma=(C_0, \ldots, C_n)$ est une galerie sans bégaiement, on appelle *type* de Γ la suite $\mathbf{s}(\Gamma)=(s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de $\mathbf{S}$ telle que la cloison commune à C_{i-1} et à C_i soit de type s_i (pour $1\leqslant i\leqslant n$). Deux galeries de $\mathbf{A}$ de même origine et de même type sont identiques.

(1.3.7) On dit qu'un point x de $\mathbf{A}$ est un *point spécial* si, pour tout mur L de $\mathbf{A}$, il existe un mur équipollent à L contenant x. On sait que tout point spécial est point extrémal de l'adhérence d'une chambre et que pour toute chambre C, il existe au moins un point spécial adhérent à C (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 10, cor. de la prop. 11). Si x est un point spécial, le groupe $\mathbf{W}$ est produit semi-direct du stabilisateur $\mathbf{W}_x$ de x par le sous-groupe distingué $\mathbf{V}$ des translations de $\mathbf{A}$ appartenant à $\mathbf{W}$ et l'application canonique de $\mathbf{W}_x$ dans le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel ${}^v\mathbf{A}$ est un isomorphisme de $\mathbf{W}_x$ sur l'image ${}^v\mathbf{W}$ de $\mathbf{W}$ tout entier dans Aut ${}^v\mathbf{A}$ (*l.c.*, chap. V, § 3, nº 10, prop. 9). De plus, le groupe $\mathbf{V}$ est un réseau dans ${}^v\mathbf{A}$, c'est-à-dire un sous-groupe discret de rang maximal de ${}^v\mathbf{A}$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, nº 5, remarque). Pour que $x\in\mathbf{A}$ soit un point spécial, il faut et il suffit que la projection de x dans $\mathbf{A}_i$ soit, pour tout $i\in\{1, \ldots, m\}$, un point spécial de $\mathbf{A}_i$ pour $\mathbf{W}_i$.

Supposons $\mathbf{W}$ irréductible. Un sommet s du graphe de Coxeter de $(\mathbf{W}, \mathbf{S})$ est dit *spécial* si le point extrémal correspondant de $\overline{\mathbf{C}}$ (c'est-à-dire le point d'intersection des hyperplans L_t pour $t\in\mathbf{S}$, $t\neq s$) est un point spécial.

(1.3.8) Il existe dans le dual $({}^v\mathbf{A})^*$ de ${}^v\mathbf{A}$ un système de racines réduit ${}^v\mathbf{\Sigma}$ et un seul possédant la propriété suivante : faisons de $\mathbf{A}$ un espace vectoriel et identifions-le à ${}^v\mathbf{A}$ en choisissant pour origine un point spécial de $\mathbf{A}$; pour $a\in{}^v\mathbf{\Sigma}$, et $k\in\mathbf{Z}$, désignons par $L_{a,k}$ l'hyperplan affine ensemble des points $x\in\mathbf{A}$ tels que $a(x)=-k$; alors l'ensemble $\mathscr{H}$ des murs de $\mathbf{A}$ n'est autre que l'ensemble des hyperplans $L_{a,k}$ pour $a\in{}^v\mathbf{\Sigma}$ et $k\in\mathbf{Z}$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, nº 5, prop. 8). Les racines affines de $\mathbf{A}$ sont donc les demi-espaces fermés $\alpha_{a,k}=\{x\in\mathbf{A}\mid a(x)+k\geqslant 0\}$ pour $a\in{}^v\mathbf{\Sigma}$ et $k\in\mathbf{Z}$. Si $\alpha\in\mathbf{\Sigma}$ est de la forme $\alpha_{a,k}$, on pose ${}^v\alpha=a$ et $r_{a,k}=r_\alpha$.

Autrement dit, une fois un point spécial choisi comme origine, le groupe $\mathbf{W}$ s'identifie au groupe de Weyl affine du système de racines ${}^v\mathbf{\Sigma}$ au sens de (*l.c.*, chap. VI, § 2). En particulier, pour $a\in{}^v\mathbf{\Sigma}$, notons $a^\vee$ l'unique élément de ${}^v\mathbf{A}$ tel que la réflexion r_a associée à a soit donnée par $r_a(v)=v-a(v)a^\vee$ $(v\in{}^v\mathbf{A})$. L'ensemble des $a^\vee$ pour $a\in{}^v\mathbf{\Sigma}$ forme le *système de racines inverse* de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, nº 1, prop. 1). Les points spéciaux sont les *poids* du système de racines $({}^v\mathbf{\Sigma})^\vee$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, nº 2, prop. 3), le groupe $\mathbf{V}$

des translations de $\mathbf{W}$ est le groupe des *poids radiciels* de $({}^v\mathbf{\Sigma})^\vee$ et est engendré par $({}^v\mathbf{\Sigma})^\vee$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, n° 1, prop. 1) et les chambres de $\mathbf{A}$ sont les *alcôves* de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ au sens de (*l.c.*, chap. VI, § 2, n° 1). Le groupe ${}^v\mathbf{W}$ (opérant dans ${}^v\mathbf{A}$ et dans son dual) s'identifie au groupe de Weyl (ordinaire) de ${}^v\mathbf{\Sigma}$. Il est engendré par les réflexions r_a pour $a \in {}^v\mathbf{\Sigma}$.

Les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ seront appelés les *racines vectorielles* de $\mathbf{A}$ (relativement à $\mathbf{W}$).

(1.3.9) A la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_m$ de (1.3.2) correspond une décomposition du dual de ${}^v\mathbf{A}$ en somme directe des $({}^v\mathbf{A}_i)^*$ et les intersections ${}^v\mathbf{\Sigma} \cap ({}^v\mathbf{A}_i)^*$ ne sont autres que les composantes irréductibles de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ (*l.c.*, chap. VI, § 1, n° 2).

(1.3.10) On appelle *chambre vectorielle* une composante connexe du complémentaire dans ${}^v\mathbf{A}$ de la réunion des hyperplans (vectoriels) noyaux des racines vectorielles, c'est-à-dire une chambre du système de racines inverse $({}^v\mathbf{\Sigma})^\vee$ au sens de (*l.c.*, chap. VI, § 1, n° 5). Plus généralement, on appelle *facette vectorielle* une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence suivante dans ${}^v\mathbf{A}$: « pour toute racine vectorielle a, $a(x)$ et $a(y)$ sont simultanément soit nuls, soit strictement positifs, soit strictement négatifs ». Une facette vectorielle est un cône simplicia', une chambre vectorielle est un cône simplicial ouvert. Le groupe ${}^v\mathbf{W}$ est simplement transitif sur l'ensemble des chambres vectorielles et l'adhérence d'une chambre vectorielle est un domaine fondamental pour ${}^v\mathbf{W}$ opérant sur ${}^v\mathbf{A}$ (*l.c.*, chap. VI, § 1, n° 5). L'opposée d'une chambre vectorielle est une chambre vectorielle (*l.c.*, chap. VI, § 1, cor. 3 de la prop. 17).

(1.3.11) On appelle *quartier* de $\mathbf{A}$ l'ensemble $x+\mathrm{D}$ des transformés d'un point donné $x \in \mathbf{A}$ (appelé *sommet* du quartier) par les translations appartenant à une chambre vectorielle D donnée (appelée *direction* du quartier). Deux quartiers de direction opposée sont dits *opposés*. Soit x un point spécial de $\mathbf{A}$; tout quartier de sommet x contient une chambre C et une seule à laquelle x soit adhérent; le quartier Q est alors réunion des transformés de C par les homothéties de centre x et de rapport >0 et on obtient ainsi une bijection de l'ensemble des quartiers de sommet x (ou encore l'ensemble des chambres vectorielles) sur l'ensemble des chambres de $\mathbf{A}$ dont l'adhérence contient x.

(1.3.12) A toute chambre vectorielle D est associée une *base* B(D) de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ (ou système de racines simples), c'est-à-dire une partie linéairement indépendante de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ telle que tout élément de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ soit combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe d'éléments de B(D) : la chambre vectorielle D est l'ensemble des $x \in {}^v\mathbf{A}$ tels que $a(x) > 0$ pour tout $a \in \mathrm{B(D)}$. L'application $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{B(D)}$ est une bijection de l'ensemble des chambres vectorielles sur l'ensemble des bases de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ (*l.c.*, chap. VI, § 1, n^{os} 5 et 7). Pour tout $a \in \mathrm{B(D)}$, l'hyperplan Ker a contient une face du cône simplicial D et on obtient ainsi une bijection de B(D) sur l'ensemble des faces de D.

(1.3.13) Les racines vectorielles qui sont combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments de B(D) sont dites *positives* pour la chambre vectorielle D; ce sont d'ailleurs les racines positives pour la relation d'ordre sur le dual de ${}^v\mathbf{A}$ définie par le cône convexe D. Leur ensemble est noté ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+_{\mathrm{D}}$ ou ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$. On a ${}^v\boldsymbol{\Sigma} = {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+_{\mathrm{D}} \cup (-{}^v\boldsymbol{\Sigma}^+_{\mathrm{D}})$. Si $\mathbf{W}$ est irréductible, ou, ce qui revient au même, si le système de racines ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ est irréductible, il existe une plus grande racine $\tilde{a}$ pour cette relation d'ordre; si l'on identifie comme plus haut $\mathbf{A}$ et ${}^v\mathbf{A}$ en prenant pour origine un point spécial, la chambre de $\mathbf{A}$ contenue dans le quartier D et contenant l'origine dans son adhérence est l'ensemble des points $x \in \mathbf{A}$ tels que $a(x) > 0$ pour tout $a \in \mathrm{B}(\mathrm{D})$ et $\tilde{a}(x) < 1$ (*l.c.*, chap. VI, § 2, nº 2, prop. 5).

(1.3.14). Soit D une chambre vectorielle. On sait que l'ensemble $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathrm{D})$ des réflexions r_a pour $a \in \mathrm{B}(\mathrm{D})$ engendre ${}^v\mathbf{W}$ et que $({}^v\mathbf{W}, \mathrm{R})$ est un système de Coxeter (*l.c.*, chap. VI, § 1, nº 5, th. 2); on a

$${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(r_a(\mathrm{D})) = \{ b \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D}) \mid b \neq a \} \cup \{-a\} \quad \text{et} \quad -a \in \mathrm{B}(r_a(\mathrm{D})) \qquad (\textit{ibid.}).$$

(1.3.15) Soit M une partie de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$. Nous dirons qu'un élément $m \in \mathrm{M}$ est *extrémal dans* M si la demi-droite $\mathbf{R}_+ m$ est une génératrice extrémale du cône convexe d'origine o engendré par M. Un ordre sur M sera dit *grignotant* s'il est total et si tout élément $m \in \mathrm{M}$ est extrémal dans l'ensemble des éléments de M plus grands que m. Pour qu'il existe un ordre grignotant sur une partie M de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$, il faut et il suffit que le cône convexe d'origine o engendré par M soit strictement convexe, ou encore que son polaire soit d'intérieur non vide, ou encore rencontre une chambre vectorielle D, ce qui signifie que $\mathrm{M} \subset {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$. Dans ce cas, il existe un ordre grignotant sur M pour lequel le premier élément est un élément extrémal dans M donné à l'avance. En particulier, il existe un ordre grignotant sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$ pour lequel le premier élément est une racine simple $a \in \mathrm{B}(\mathrm{D})$ arbitraire.

Si $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$, la restriction à M′ d'un ordre grignotant sur M est un ordre grignotant sur M′.

(1.3.16) Pour toute chambre vectorielle D, on définit une relation d'ordre dite *associée à* D et notée $\leqslant_{\mathrm{D}}$ sur $\mathbf{A}$ (resp. ${}^v\mathbf{A}$) de la manière suivante. Soit D^* la chambre du système de racines ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ associée à la base B(D) (*l.c.*, chap. VI, § 1, nº 5) : c'est l'ensemble des $t \in ({}^v\mathbf{A})^*$ dont le produit scalaire avec tout élément de B(D) est strictement positif. Par définition, la relation $x \leqslant_{\mathrm{D}} x'$, pour $x, x' \in \mathbf{A}$ (resp. ${}^v\mathbf{A}$) équivaut à $t(x'-x) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathrm{D}^*$ (ou ce qui revient au même, pour tout poids dominant t de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ relativement à B(D)). Ces relations d'ordre sont compatibles avec la structure d'espace vectoriel de ${}^v\mathbf{A}$ et avec l'action de ${}^v\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}$. Pour $y \in \overline{\mathrm{D}}$ et $w \in {}^v\mathbf{W}$, on a $w(y) \leqslant_{\mathrm{D}} y$ (*l.c.*, chap. VI, § 1, nº 6, prop. 18).

(1.3.17) Le tableau p. 29-30 permet de retrouver la liste des graphes de Coxeter des groupes de Weyl affines irréductibles : ce sont les graphes de Coxeter sous-jacents aux graphes de Dynkin des échelonnages irréductibles (1.4). Dans ce tableau, on a signalé par un s les sommets spéciaux (1.3.7). On remarquera que le groupe des automorphismes d'un tel graphe de Coxeter opère transitivement sur l'ensemble des sommets spéciaux.

(1.3.18) Soit $\widetilde{\mathbf{W}}$ le normalisateur de $\mathbf{W}$ dans le groupe des automorphismes de $\mathbf{A}$; c'est aussi le groupe des automorphismes du complexe polysimplicial $\mathbf{A}$. Soient $\widetilde{\mathbf{V}}$ le sous-groupe des translations appartenant à $\widetilde{\mathbf{W}}$, x un point spécial de $\mathbf{A}$ adhérent à $\mathbf{C}$ et D la chambre vectorielle satisfaisant à $\mathbf{C}\subset x+\mathrm{D}$. Pour toute partie Ω de $\mathbf{A}$, on pose

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{\Omega}=\{w\in\widetilde{\mathbf{W}}\mid w(\Omega)=\Omega\}.$$

Alors (*l.c.*, chap. VI, § 2) :

(1) $\widetilde{\mathbf{W}}$ est produit semi-direct de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{\mathbf{C}}$ par le sous-groupe distingué $\mathbf{W}$.

(2) $\widetilde{\mathbf{W}}$ est produit semi-direct de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{x}$ par $\widetilde{\mathbf{V}}$ et l'application $w\mapsto {}^{v}w$ est un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{x}$ sur ${}^{v}\widetilde{\mathbf{W}}$.

(3) $\widetilde{\mathbf{V}}$ est le groupe des poids du système de racines inverse de ${}^{v}\mathbf{\Sigma}$ et opère de façon simplement transitive sur l'ensemble des points spéciaux de $\mathbf{A}$.

(4) $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{x}$ est produit semi-direct de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ par $\mathbf{W}_{x}$; si l'on fait opérer $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ sur le dual de ${}^{v}\mathbf{A}$ par la contragrédiente de l'opération naturelle dans ${}^{v}\mathbf{A}$, alors $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ laisse fixes ${}^{v}\mathbf{\Sigma}$ et B(D), d'où un homomorphisme de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ dans le groupe des automorphismes du graphe de Dynkin de ${}^{v}\mathbf{\Sigma}$, homomorphisme qui est bijectif.

(5) Les éléments de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{\mathbf{C}}$ permutent les murs de $\mathbf{C}$; on en déduit un homomorphisme de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{\mathbf{C}}$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathbf{W}, \mathbf{S})$, ou du graphe de Coxeter de $\mathbf{W}$, homomorphisme qui est bijectif. Si $\mathbf{W}$ est irréductible, l'image de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ par cet isomorphisme est le sous-groupe fixateur du sommet spécial de Cox $\mathbf{W}$ associé à x.

(6) Posons $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathrm{int}}=\mathbf{W}_{x}.\widetilde{\mathbf{V}}$. C'est un sous-groupe distingué de $\widetilde{\mathbf{W}}$ et $\widetilde{\mathbf{W}}$ est produit semi-direct de $\widetilde{\mathbf{W}}^{\dagger}_{(x+\mathrm{D})}$ par $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathrm{int}}$.

1.4. Echelonnages [1].

On conserve les notations du n° 1.3.

(1.4.1) Soit Φ un système de racines non nécessairement réduit dans le dual de ${}^{v}\mathbf{A}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *Φ et le système de racines réduit ${}^{v}\mathbf{\Sigma}$ ont même groupe de Weyl ${}^{v}\mathbf{W}$;*

(ii) *pour tout $a\in\Phi$, il existe un nombre réel $\lambda(a)>0$ tel que $\lambda(a)a\in{}^{v}\mathbf{\Sigma}$ et l'application $a\mapsto\lambda(a)a$ de Φ dans ${}^{v}\mathbf{\Sigma}$ est surjective.*

---

[1] (Note ajoutée sur épreuves.) Il y a équivalence entre notre notion d'échelonnage et ce que I. G. Macdonald appelle « système de racines affines ».

Dans ce qui suit, nous supposerons que Φ satisfait à ces conditions. On voit facilement que si ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ est irréductible et n'est pas de type B_n, C_n, G_2 ou F_4, il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\Phi = \lambda {}^v\boldsymbol{\Sigma}$. Par contre, si ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ est de type B_n, C_n, F_4 (resp. G_2), Φ peut être de type C_n, B_n, F_4 (resp. G_2) et on peut avoir $\lambda(a) = 2\lambda(b)$ (resp. $\lambda(a) = 3\lambda(b)$) pour a décrivant l'ensemble des racines courtes et b celui des racines longues de Φ; de plus, si ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ est de type B_n ou C_n, Φ peut être de type BC_n.

On appelle *échelonnage* de Φ par $\boldsymbol{\Sigma}$ une partie $\mathscr{E} \subset \Phi \times \boldsymbol{\Sigma}$ possédant les propriétés suivantes :

(E 1) *si* $(a, \alpha) \in \mathscr{E}$, *alors* $a \in \mathbf{R}_+^* . {}^v\alpha$;

(E 2) *si* $(a, \alpha) \in \mathscr{E}$ *et si* $w \in \mathbf{W}$, *alors* $({}^v w(a), w(\alpha)) \in \mathscr{E}$;

(E 3) *les restrictions à* $\mathscr{E}$ *des deux projections* $\mathrm{pr}_1 : \Phi \times \boldsymbol{\Sigma} \to \Phi$ *et* $\mathrm{pr}_2 : \Phi \times \boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{\Sigma}$ *sont surjectives.*

Deux racines $a \in \Phi$ et $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$ telles que $(a, \alpha) \in \mathscr{E}$ sont dites *associées* par l'échelonnage $\mathscr{E}$.

(1.4.2) Si $x \in \mathbf{A}$ et si F est la facette de $\mathbf{A}$ contenant x, l'ensemble $\Phi_x = \Phi_F$ des racines $a \in \Phi$ associées aux racines affines dont le mur contient x, est un système de racines dont le groupe de Weyl est l'image canonique dans ${}^v\mathbf{W}$ du stabilisateur de x; on l'appelle le *système de racines attaché à* x (ou à F) par $\mathscr{E}$.

(1.4.3) Soit $\Phi' \subset ({}^v\mathbf{A})^*$ un autre système de racines. Deux échelonnages $\mathscr{E} \subset \Phi \times \boldsymbol{\Sigma}$ et $\mathscr{E}' \subset \Phi' \times \boldsymbol{\Sigma}$ sont dits *homothétiques* s'il existe une transformation linéaire $\lambda : ({}^v\mathbf{A})^* \to ({}^v\mathbf{A})^*$ telle que $(a, \alpha) \in \mathscr{E}$ si et seulement si $(\lambda(a), \alpha) \in \mathscr{E}'$. Dans ce cas, λ induit sur chaque $({}^v\mathbf{A}_i)^*$ une homothétie de rapport positif. Un échelonnage est dit *semblable* à $\mathscr{E}$ s'il est isomorphe (dans un sens évident) à un échelonnage homothétique à $\mathscr{E}$.

(1.4.4) Dans la suite de ce numéro, nous aurons à considérer des quadruplets (G, f, M, F) formés d'un graphe G, d'une fonction f de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble $\{3, 4, 6, \infty\}$, d'un ensemble M de sommets de G et d'un ensemble F de couples (r, s) de sommets tels que $\{r, s\}$ soit une arête. Les sommets appartenant à M sont dits *multipliables*. Le couple (G, f) est le *graphe de Coxeter sous-jacent* à (G, f, M, F). Un tel quadruplet (G, f, M, F) sera représenté par un dessin dans lequel une arête $\{r, s\}$ est figurée par un trait simple, double, triple ou épais selon que $f(\{r, s\}) = 3, 4, 6$ ou ∞, et affecté d'un signe d'inégalité $>$ allant de r vers s si $(r, s) \in F$, les sommets multipliables étant marqués d'une croix.

Soit Π une partie finie de $({}^v\mathbf{A})^* - \{0\}$ telle que, pour tout couple (a, b) d'éléments de Π, on ait

$$\frac{-2(a \mid b)}{(a \mid a)} \in \mathbf{N}, \quad \text{ou} \quad a = 2b, \quad \text{ou encore} \quad b = 2a,$$

où $(\,|\,)$ désigne un produit scalaire dans $({}^v\mathbf{A})^*$ invariant par ${}^v\mathbf{W}$. On appelle *graphe de Dynkin* de Π, le quadruplet (G, f, M, F) défini comme suit : les sommets de G sont les éléments a de Π tels que $a/2 \notin \Pi$; une paire $\{a, b\}$ de sommets est une arête si $(a\,|\,b) \neq 0$; la fonction f est définie par

$$\cos^2 \frac{\pi}{f(\{a, b\})} = \frac{(a\,|\,b)^2}{(a\,|\,a)(b\,|\,b)} ;$$

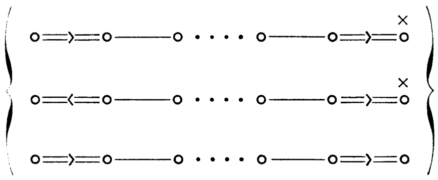
un sommet a appartient à M si $2a \in \Pi$; enfin, un couple (a, b) de sommets appartient à F si $(a\,|\,a) > (b\,|\,b)$.

Soit Φ un système de racines dans un sous-espace de $({}^v\mathbf{A})^*$, dont le groupe de Weyl laisse invariante la restriction du produit scalaire $(\,|\,)$ à ce sous-espace. Le *graphe de Dynkin* de Φ, noté Dyn Φ, est par définition le graphe de Dynkin de l'ensemble des éléments de Φ qui sont multiples positifs des éléments d'une base. Ce graphe ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, de la base choisie.

(1.4.5) On appelle *graphe de Dynkin d'un échelonnage* $\mathscr{E} \subset \Phi \times \Sigma$, et on note Dyn $\mathscr{E}$, le graphe de Dynkin de l'ensemble des éléments de Φ associés aux racines affines contenant $\mathbf{C}$ et dont le mur contient une cloison de $\mathbf{C}$. A isomorphisme canonique près, ce graphe dépend seulement de $\mathscr{E}$ et non du choix de la chambre fondamentale $\mathbf{C}$; l'ensemble de ses sommets est en correspondance bijective canonique avec l'ensemble des cloisons de $\mathbf{C}$, donc aussi avec l'ensemble $\mathbf{S}$. Connaissant le graphe de Dynkin d'un échelonnage $\mathscr{E}$, on en déduit le graphe de Coxeter de $\mathbf{W}$, et les graphes Dyn Φ et Dyn Φ_x pour tout $x \in \mathbf{A}$ (donc aussi les systèmes Φ, Σ et Φ_x à isomorphisme près) par les règles suivantes, dont les démonstrations sont immédiates :

(1) *Le graphe de Coxeter de* $\mathbf{W}$ *est le graphe de Coxeter sous-jacent à* Dyn $\mathscr{E}$.

Supposons Dyn $\mathscr{E}$ connexe. Si son rang (c'est-à-dire le nombre de ses sommets moins un) est égal à 1, alors Dyn Φ a un seul sommet, toujours multipliable sauf si Dyn $\mathscr{E}$ est le graphe ∘——∘. Si Dyn $\mathscr{E}$ est de rang $\geqslant 2$ et n'est pas l'un des graphes suivants :

(2)  ($n+1$ sommets)

alors, Dyn Φ se déduit de Dyn $\mathscr{E}$ en lui retirant un sommet spécial (et le résultat ne dépend pas du sommet spécial choisi). Enfin, si Dyn $\mathscr{E}$ est l'un des graphes (2), Dyn Φ est le graphe

 (n sommets).

Lorsque Dyn $\mathscr{E}$ n'est pas connexe, Dyn Φ s'obtient en appliquant les règles précédentes aux composantes connexes de Dyn $\mathscr{E}$.

(3) Si $x \in \mathbf{A}$ est contenu dans une facette de type $X \subset \mathbf{S}$, le graphe Dyn Φ_x est le sous-graphe de Dyn $\mathscr{E}$ dont les sommets correspondent aux éléments de X.

(1.4.6) Un échelonnage est déterminé à une similitude près par son graphe de Dynkin. Le tableau de la p. 29-30 est la liste complète des graphes de Dynkin des échelonnages irréductibles.

Pour démontrer ces assertions, on classifie pour chaque groupe de Weyl affine irréductible les échelonnages correspondants. Supposons par exemple que $\mathbf{W}$ soit de type C_n. En examinant la classification des systèmes de racines, on voit que, à une homothétie près, ou bien Φ est le système $\Phi_0 = {}^v\mathbf{\Sigma}$ de type C_n, ou bien Φ est le système Φ_1 de type B_n obtenu en conservant les racines longues de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ et en remplaçant les racines courtes par leur double, ou bien Φ est le système $\Phi_2 = \Phi_0 \cup \Phi_1$ de type BC_n : ces systèmes sont en effet les seuls qui admettent ${}^v\mathbf{W}$ comme groupe de Weyl. Si $\Phi = \Phi_0$ (resp. $\Phi = \Phi_1$), il existe un et un seul échelonnage de Φ par $\mathbf{\Sigma}$, puisque, pour tout $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$, il existe une et une seule racine $a \in \Phi$ avec ${}^v\alpha \in \mathbf{R}_+ . a$. Le graphe de Dynkin correspondant est

```
o==>==o——o · · · · o——o==<==o
```

```
(resp. o==<==o——o · · · · o——o==>==o).
```

Si $\Phi = \Phi_2$, il y a quatre échelonnages non semblables de Φ par $\mathbf{\Sigma}$. On les obtient de la manière suivante : soit α une racine affine contenant $\mathbf{C}$ et dont le mur $\partial\alpha$ contient une cloison de $\mathbf{C}$; si la réflexion par rapport à $\partial\alpha$ est l'une des extrémités de Cox $\mathbf{W}$, on associe à α soit l'un, soit les deux éléments de Φ appartenant à $\mathbf{R}_+ . {}^v\alpha$; sinon, on lui associe l'unique élément de $\Phi \cap \mathbf{R}_+ . {}^v\alpha$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des transformés par $\mathbf{W}$ des couples ainsi définis. Il est immédiat que $\mathscr{E}$ possède les propriétés (E 1) et (E 2); pour que $\mathscr{E}$ soit un échelonnage, il faut et il suffit que l'ensemble des racines de Φ associées au départ aux réflexions correspondant à l'une ou l'autre des extrémités de Cox $\mathbf{W}$, contienne au moins une racine de plus grande longueur possible et au moins une racine de plus petite longueur possible. Enfin, comme les deux réflexions correspondant aux deux extrémités de Cox $\mathbf{W}$ ne sont pas conjuguées dans $\mathbf{W}$ ([5], chap. IV, § 1, n° 3, prop. 3), on voit que les éléments de Φ associés par l'échelonnage $\mathscr{E}$ à une racine affine contenant $\mathbf{C}$ et dont le mur contient une cloison de $\mathbf{C}$, sont exactement ceux que l'on avait choisis au départ. D'où les quatre échelonnages de Φ_2 par $\mathbf{\Sigma}$:

```
o==>==o——o · · · · o——o==>==o

×
o==<==o——o · · · · o——o==>==o

×
o==<==o——o · · · · o——o==<==o

×                           ×
o==<==o——o · · · · o——o==>==o
```

La détermination des échelonnages pour lesquels Cox $\mathbf{W}$ est d'un autre type se fait de manière analogue, mais est encore plus facile.

Tableau des échelonnages irréductibles

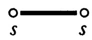
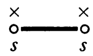
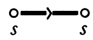
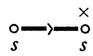
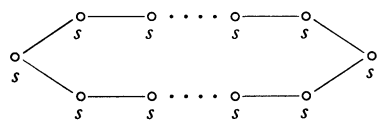
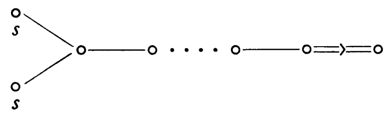
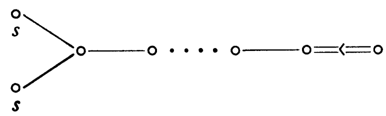
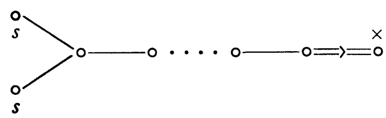
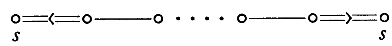
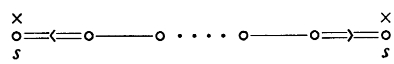
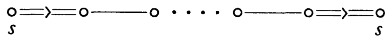
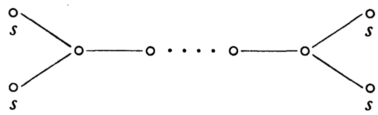
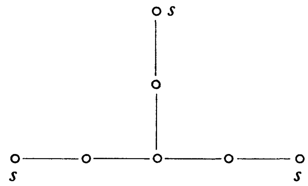
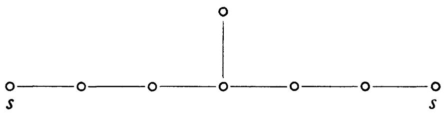
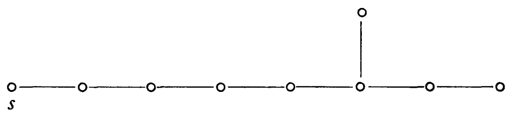
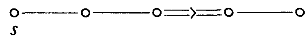
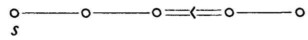
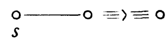
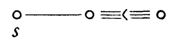
Nom	Rang	Type de ${}^v\Sigma$	Type de Φ	Graphe de Dynkin et sommets spéciaux
A_1	1	A_1	A_1	
$C\text{-}BC_1^{I}$	1	A_1	BC_1	
$C\text{-}BC_1^{II}$	1	A_1	BC_1	
$C\text{-}BC_1^{III}$	1	A_1	BC_1	
$C\text{-}BC_1^{IV}$	1	A_1	BC_1	
A_n	$n \geqslant 2$	A_n	A_n	
B_n	$n \geqslant 3$	B_n	B_n	
$B\text{-}C_n$	$n \geqslant 3$	B_n	C_n	
$B\text{-}BC_n$	$n \geqslant 3$	B_n	BC_n	
C_n	$n \geqslant 2$	C_n	C_n	
$C\text{-}B_n$	$n \geqslant 2$	C_n	B_n	
$C\text{-}BC_n^{I}$	$n \geqslant 2$	C_n	BC_n	
$C\text{-}BC_n^{II}$	$n \geqslant 2$	C_n	BC_n	

Tableau des échelonnages irréductibles *(suite)*

Nom	Rang	Type de ${}^v\Sigma$	Type de Φ	Graphe de Dynkin et sommets spéciaux
C-BC_n^{III}	$n \geqslant 2$	C_n	BC_n	
C-BC_n^{IV}	$n \geqslant 2$	C_n	BC_n	
D_n	$n \geqslant 4$	D_n	D_n	
E_6	6	E_6	E_6	
E_7	7	E_7	E_7	
E_8	8	E_8	E_8	
F_4	4	F_4	F_4	
F_4^I	4	F_4	F_4	
G_2	2	G_2	G_2	
G_2^I	2	G_2	G_2	

1.5. Conventions et notations.

(1.5.1) On dit qu'un système de Tits (G, B, N, S), de groupe de Weyl W, est *de type affine* s'il existe un groupe de Weyl affine **W**, opérant dans un espace euclidien affine **A**, une chambre **C** de **A** et un isomorphisme du système de Coxeter (W, S) sur le système de Coxeter (**W**, **S**), où **S** est l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de **C** (1.3.4). On appelle *rang* de ce système de Tits le rang de **W**, c'est-à-dire la dimension de **A** (1.3.4).

Nous appellerons alors *sous-groupe parahorique* de G un sous-groupe parabolique de G dont le type X est, après identification de W avec **W**, un élément de l'ensemble **T** de (1.3.5), c'est-à-dire est tel que $\mathbf{W}_X$ soit *fini*. Un sous-groupe P contenant B est donc un sous-groupe parahorique si et seulement si l'ensemble des doubles classes B\P/B est fini. Lorsque **W** est irréductible, les sous-groupes parahoriques ne sont autres que les sous-groupes paraboliques propres, *i.e.* différents de G. Tout sous-groupe parabolique contenu dans un sous-groupe parahorique est un sous-groupe parahorique; les sous-groupes paraboliques minimaux, *i.e.* les conjugués de B, sont des sous-groupes parahoriques.

(1.5.2) *Dans toute la suite du chapitre, nous conserverons les hypothèses et notations de* 1.3. En particulier, la lettre **W** désigne un groupe de Weyl affine opérant dans un espace affine euclidien **A** et les symboles $^v\mathbf{A}$, **C**, **Σ**, etc. ont la même signification qu'en 1.3.

Dans les §§ 2 à 4, on désigne par (G, B, N, S) *un système de Tits saturé de type affine.* On identifie le groupe de Weyl W de G avec **W** comme en (1.5.1) et les symboles B_X, H, etc. auront la même signification qu'en 1.2.

2. L'IMMEUBLE D'UN SYSTÈME DE TITS DE TYPE AFFINE

Nous allons associer au système de Tits (G, B, N, S) (1.5.2) un ensemble $\mathscr{I}$, qui sera muni d'une structure de complexe polysimplicial (2.1), d'un ensemble de morphismes chambrés de complexes polysimpliciaux de **A** dans $\mathscr{I}$, appelés applications structurales de $\mathscr{I}$ (2.2), d'une distance en faisant un espace métrique complet et pour laquelle les applications structurales sont des isométries (2.5) et d'une loi d'opération de G respectant ces diverses structures (2.1.4). L'objet $\mathscr{I}$ ainsi défini sera appelé *l'immeuble* du système de Tits (G, B, N, S), ou, par abus de langage, de G. Nous verrons qu'il ne dépend que de la classe de conjugaison du couple (B, N) (2.7).

2.1. Le complexe polysimplicial $\mathscr{I}$.

(2.1.1) Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des sous-groupes parahoriques de G. Pour $P \in \mathscr{P}$, on désigne par $\tau(P) \in \mathbf{T}$ le *type* de P (1.2.10). Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des couples (P, x), avec $P \in \mathscr{P}$ et $x \in \mathbf{C}_{\tau(P)}$ (1.3.5). Pour $P \in \mathscr{P}$, l'ensemble $F = F(P) = \{(P, x) \mid x \in \mathbf{C}_{\tau(P)}\}$ est appelé une *facette* de $\mathscr{I}$, de *type* $\tau(F) = \tau(P)$ et de *codimension* Card $\tau(P)$. Si $P' \in \mathscr{P}$ et $P \subset P'$, on dit que $F(P')$ *est une facette de* $F(P)$; on a alors $\tau(P') \supset \tau(P)$. Réciproquement la facette $F(P)$ possède, pour tout type $Y \supset \tau(P)$, une facette et une seule de type Y (1.2.10). On notera $\overline{F}$ la réunion des facettes d'une facette F donnée.

(2.1.2) L'application $(P, x) \mapsto x$ appelée *l'application canonique* de $\mathscr{I}$ dans $\overline{\mathbf{C}}$. Si F est une facette de $\mathscr{I}$, de type X, la restriction de cette application à F (resp. $\overline{F}$) est une bijection de F (resp. $\overline{F}$) sur $\mathbf{C}_X$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_X$), dont l'inverse est appelée *l'application canonique* de $\mathbf{C}_X$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_X$) sur F (resp. $\overline{F}$). *On munit* F (resp. $\overline{F}$) *de la structure de polysimplexe affine ouvert* (resp. *fermé*) *obtenue par transport de structure à partir de celle de* $\mathbf{C}_X$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_X$) grâce à cette application canonique. Il est immédiat que si l'on désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des facettes de $\mathscr{I}$ et par $F' \prec F$ la « relation d'incidence » $F' \subset \overline{F}$, les conditions de (1.1.4) sont satisfaites. Les chambres de $\mathscr{I}$ sont les facettes de type $\emptyset$, associées aux sous-groupes parahoriques minimaux. Au contraire, si P est un sous-groupe parahorique maximal, la facette F(P) contient un seul point, noté a_P et appelé le *sommet* de $\mathscr{I}$ associé à P.

(2.1.3) Si deux chambres de $\mathscr{I}$ sont mitoyennes, c'est-à-dire si elles sont distinctes et ont en commun une cloison (1.1.5), cette cloison est bien déterminée. En effet, si $F(P_1)$ et $F(P_2)$ sont deux cloisons distinctes d'une même chambre F(P), on a $P = P_1 \cap P_2$.

Ceci permet de poser la définition suivante : si $\Gamma=(C_0, \ldots, C_n)$ est une galerie sans bégaiement de $\mathscr{I}$ (1.1.5), on appelle *type* de Γ la suite $\mathbf{s}(\Gamma)=(s_1, \ldots, s_n)$ d'éléments de $\mathbf{S}$ telle que la cloison commune aux chambres mitoyennes C_{i-1} et C_i soit de type s_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

(2.1.4) On fait opérer le groupe G sur $\mathscr{I}$ en posant

(1) $$g.(P, x)=(gPg^{-1}, x) \qquad (\text{pour } P\in\mathscr{P} \text{ et } x\in \mathbf{C}_{\tau(P)}).$$

Ceci définit bien une loi d'opération de G dans $\mathscr{I}$ puisque gPg^{-1} est un sous-groupe parahorique de même type que P.

Proposition. — (i) *Pour tout type* $X\in\mathbf{T}$, *le groupe* G *permute transitivement les facettes de type* X.

(ii) *Pour tout sous-groupe parahorique* P, *la restriction de l'action de* $g\in G$ *à* F(P) (resp. $\overline{F(P)}$) *est une bijection affine de* F(P) (resp. $\overline{F(P)}$) *sur* $F(gPg^{-1})$ (resp. $\overline{F(gPg^{-1})}$), *dont la composée avec l'application canonique de* $\mathbf{C}_{\tau(P)}$ *sur* F(P) *est l'application canonique de* $\mathbf{C}_{\tau(P)}$ *sur* $F(gPg^{-1})$.

L'assertion (i) résulte de la conjugaison des sous-groupes parahoriques de type donné (1.2.10) et (ii) est évidente.

Proposition **(2.1.5)**. — *Soit* Q *un sous-groupe parahorique de* G.

(i) Q *est le stabilisateur dans* G *de la facette* F(Q) *et de chacun de ses points*;

(ii) $\overline{F(Q)}$ *est l'ensemble des points de* $\mathscr{I}$ *stables par* Q.

Les deux assertions résultent aussitôt de ce qu'un sous-groupe parahorique est son propre normalisateur.

Corollaire **(2.1.6)**. — *Soit* C *une chambre de* $\mathscr{I}$. *Alors* $\overline{C}$ *est un domaine fondamental pour* G *dans* $\mathscr{I}$.

En effet, toute facette de $\mathscr{I}$ est transformée d'une facette F de C et d'une seule et (2.1.5) montre que si $g\in G$ est tel que $g.F\cap F\neq\emptyset$, ce qui entraîne $g.F=F$, alors $g.x=x$ pour tout $x\in F$. Il en résulte que toute orbite de G dans $\mathscr{I}$ rencontre $\overline{C}$ en un point et un seul.

Proposition **(2.1.7)**. — *Soient* C *et* C′ *deux chambres de* $\mathscr{I}$. *Il existe un élément* $w=w(C, C')\in W$ *et un seul tel que* $g^{-1}g'\in BwB$ *quels que soient* $g, g'\in G$ *avec* $C=g.F(B)$ *et* $C'=g'.F(B)$. *On a* $w(h.C, h.C')=w(C, C')$ *quel que soit* $h\in G$ *et* $w(C', C)=w(C, C')^{-1}$. *Posons* $w(C)=w(F(B), C)$: *pour tout* $n\in\nu^{-1}(w(C))$, *il existe* $b\in B$ *tel que* $C=bn.F(B)$.

Soient $g, g', g_1, g_1'\in G$ avec $C=g.F(B)=g_1.F(B)$ et $C'=g'.F(B)=g_1'.F(B)$. Vu (2.1.5) (i), on a $g_1\in gB$ et $g_1'\in g'B$, d'où $g_1^{-1}g_1'\in Bg^{-1}g'B$, ce qui démontre la première assertion. Soit de nouveau $C=g.F(B)$ et soit $n\in\nu^{-1}(C))$. Par définition de $w(C)$, il existe $b, b'\in B$ avec $g=bnb'$, d'où $C=bn.F(B)$. Les autres assertions sont évidentes.

Lemme **(2.1.8)**. — *Pour qu'une chambre* $C=bn.F(B)$ *soit mitoyenne de* F(B), *il faut et il suffit que* $\nu(n)\in S$. *La cloison commune à* C *et* F(B) *est alors de type* $\nu(n)$.

Les cloisons de F(B) sont les facettes $F(B_{\{s\}})$ pour $s \in S$ et $F(B_{\{s\}})$ est une facette de $C = bn.F(B)$ si et seulement si $bn.F(B_{\{s\}}) = F(B_{\{s\}})$, c'est-à-dire $bn \in B_{\{s\}}$ (2.1.5) ou encore $\nu(n) \in \{e, s\}$. Mais sous cette condition, on a $C = F(B)$ si et seulement si $\nu(n) = e$, d'où le lemme.

Proposition **(2.1.9).** — *Soit* $\Gamma = (C_0, \ldots, C_m)$ *une suite de chambres, avec* $C_0 = F(B)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Γ *est une galerie sans bégaiement;*

(ii) *il existe* $b_j \in B$, $s_j \in S$ *et* $\bar{s}_j \in \nu^{-1}(s_j)$ (*pour* $j = 1, \ldots, m$) *tels que :*

$$C_j = b_1 \bar{s}_1 \ldots b_j \bar{s}_j . F(B) \qquad \textit{pour } j = 1, \ldots, m.$$

Sous ces conditions, Γ *est de type* $(s_1, \ldots, s_m)$.

Sous les hypothèses de (ii), les chambres C_j et C_{j+1} sont les images par $b_1 \bar{s}_1 \ldots b_j \bar{s}_j$ des chambres F(B) et $b_{j+1} \bar{s}_{j+1}.F(B)$, lesquelles sont mitoyennes d'après le lemme (2.1.8), d'où (i). Réciproquement, admettons (i) et démontrons (ii) par récurrence sur j. En vertu de l'hypothèse de récurrence, on a $C_{j-1} = b_1 \bar{s}_1 \ldots b_{j-1} \bar{s}_{j-1}.F(B)$ avec $b_k \in B$ et $\bar{s}_k \in \nu^{-1}(S)$. Comme les chambres C_{j-1} et C_j sont mitoyennes, il en est de même de F(B) et de la chambre $C'_j = (b_1 \bar{s}_1 \ldots b_{j-1} \bar{s}_{j-1})^{-1}.C_j$, de sorte que l'on a $C'_j = b_j \bar{s}_j.F(B)$ avec $b_j \in B$ et $\bar{s}_j \in \nu^{-1}(S)$ (lemme (2.1.8)), d'où (ii).

La dernière assertion résulte de (2.1.8).

Corollaire **(2.1.10).** — *Soit* C *une chambre de* $\mathscr{I}$. *Posons* $w = w(F(B), C)$. *Pour toute décomposition réduite* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ *de* w, *il existe une galerie minimale d'origine* F(B), *d'extrémité* C *et de type* $\mathbf{s}$.

Soit $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ une décomposition réduite de w, soient $n \in \nu^{-1}(w)$ et $b \in B$ tels que $C = bn.F(B)$ (2.1.7) et soient $\bar{s}_j \in \nu^{-1}(s_j)$ tels que $n = \bar{s}_1 \ldots \bar{s}_m$; les chambres $b\bar{s}_1 \ldots \bar{s}_j.F(B)$ forment d'après (2.1.9) une galerie Γ, d'origine F(B), d'extrémité C, de type $\mathbf{s}$ et de longueur $\ell(w)$. D'autre part, soit $(C_0 = F(B), C_1, \ldots, C_q = C)$ une galerie sans bégaiement. D'après (2.1.9), il existe $\bar{s}'_j \in \nu^{-1}(\mathbf{s})$ et $b_j \in B$ (pour $1 \leqslant j \leqslant q$) tels que $C = b_1 \bar{s}'_1 b_2 \ldots b_q s'_q.F(B)$, d'où $n \in B\bar{s}'_1 B \ldots B\bar{s}'_q B$. Il en résulte que $q \geqslant \ell(w)$ ([5], chap. IV, § 2, n° 1), ce qui montre que Γ est minimale.

Ce résultat sera précisé plus loin (2.3.9).

Corollaire **(2.1.11).** — *Une galerie sans bégaiement est minimale si et seulement si son type* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ *est une décomposition réduite de* $s_1 \ldots s_m$.

Proposition **(2.1.12).** — *L'ensemble* $\mathscr{I}$, *muni de la famille des facettes, de la relation d'incidence entre facettes et des structures affines sur chacun des ensembles* $\overline{F(P)}$ *pour* $P \in \mathscr{P}$, *est un complexe polysimplicial et* G *opère sur* $\mathscr{I}$ *par automorphismes de complexe polysimplicial.*

En effet, pour toute facette F de $\mathscr{I}$, il existe par définition même une chambre C avec $F \subset \bar{C}$. La proposition (2.1.7) et le corollaire (2.1.10) montrent que pour toute chambre C, il existe une galerie tendue entre F(B) et C. La transitivité de G sur les chambres entraîne alors l'existence d'une galerie reliant deux facettes quelconques.

Exemple **(2.1.13)**. — Supposons $\mathbf{A}$ de dimension 1. On a alors $\operatorname{Card}\mathbf{S}=2$ et le groupe $\mathbf{W}$ est un groupe diédral infini. Toute suite finie (s_j) d'éléments de $\mathbf{S}$ avec $s_j \neq s_{j+1}$ pour tout j est une décomposition réduite, et toute galerie $(C_0, \ldots, C_m)$ sans bégaiement et où les cloisons $\overline{C}_{j-1} \cap \overline{C}_j$ et $\overline{C}_j \cap \overline{C}_{j+1}$ sont distinctes pour $1 \leqslant j \leqslant m-1$ est une galerie minimale. L'immeuble $\mathscr{I}$ est un complexe simplicial de dimension 1, c'est-à-dire un graphe connexe, et ce qui précède montre que ce graphe ne contient pas de circuit (qui fournirait une galerie minimale de longueur >0, d'origine et d'extrémité confondues), donc *$\mathscr{I}$ est un arbre.*

2.2. Les applications structurales et les appartements de $\mathscr{I}$.

Proposition **(2.2.1)**. — *Il existe une application $j : \mathbf{A} \to \mathscr{I}$ et une seule possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) *la restriction de j à $\overline{\mathbf{C}}$ est la bijection canonique* (2.1.2) *de $\overline{\mathbf{C}}$ sur $\overline{F(B)}$;*

(ii) *on a $j(\nu(n).x)=n.j(x)$ quels que soient $n \in N$ et $x \in \mathbf{A}$.*

L'application j est injective. Si F est une facette de $\mathbf{A}$, alors $j(F)$ est une facette de $\mathscr{I}$ de même type, on a $j(\overline{F})=\overline{j(F)}$ et la restriction de j à $\overline{F}$ est une bijection affine de $\overline{F}$ sur $\overline{j(F)}$.

L'unicité de j est évidente, puisque $\overline{\mathbf{C}}$ est un domaine fondamental pour $\mathbf{W}$. Soit j_0 la bijection canonique de $\overline{\mathbf{C}}$ sur $\overline{F(B)}$. Pour démontrer l'existence et l'injectivité de j, il suffit de prouver que, pour $X, X' \in \mathbf{T}$, $x \in \mathbf{C}_X$, $x' \in \mathbf{C}_{X'}$ et $n, n' \in N$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$n.j_0(x)=n'.j_0(x') \tag{1}$$

$$\nu(n).x=\nu(n').x'. \tag{2}$$

Or (2) est équivalente à $x=x'$ et $\nu(n^{-1}n') \in \mathbf{W}_X$ ([5], chap. V, § 3, n° 3), (1) est équivalente d'après (2.1.5) à $x=x'$ et $n^{-1}n' \in B_X$, et on a $\nu^{-1}(\mathbf{W}_X)=B_X \cap N$.

Enfin, la dernière assertion est évidente si $F \subset \overline{\mathbf{C}}$ et le cas général en résulte, vu (ii).

Définition **(2.2.2)**. — *L'application j de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{I}$ déterminée en* (2.2.1) *est appelée l'*application canonique *de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{I}$. Une application φ de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{I}$ est appelée une* application structurale *de $\mathscr{I}$ s'il existe un élément $g \in G$ tel que $\varphi(x)=g.j(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}$. On appelle* appartement (resp. demi-appartement, quartier, mur) *de $\mathscr{I}$ un sous-ensemble de $\mathscr{I}$ qui est l'image de $\mathbf{A}$* (resp. *d'une racine affine, d'un quartier, d'un mur de $\mathbf{A}$*) *par une application structurale.*

(2.2.3) Il résulte immédiatement de (2.2.1) qu'une application structurale φ est un morphisme chambré (1.1.7) de complexes polysimpliciaux de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{I}$, et est même un isomorphisme de complexes polysimpliciaux de $\mathbf{A}$ sur l'appartement $\varphi(\mathbf{A})$, qui est un « sous-complexe polysimplicial » de $\mathscr{I}$ en ce sens que si un appartement contient une facette F, il contient $\overline{\mathrm{F}}$ et que tout appartement est réunion des facettes des chambres qu'il contient.

(2.2.4) Soit M un demi-appartement image d'une racine affine α de $\mathbf{A}$ par une application structurale φ. Il est immédiat que le mur $\varphi(\partial\alpha)$ est la réunion des ensembles $\overline{\mathrm{F}}$ pour F décrivant l'ensemble des cloisons de $\mathscr{I}$ appartenant à une seule chambre contenue dans M. Ce mur ne dépend donc que de M et non du choix de φ : on l'appelle *le mur* de M et on le note ∂M.

Proposition **(2.2.5)**. — *Conservons les notations précédentes. On a :*

(i) $\mathrm{H}=\bigcap_{n\in\mathrm{N}} n\mathrm{B}n^{-1}=\{g\in\mathrm{G}\mid g.j(x)=j(x)$ *pour tout* $x\in\mathbf{A}\}$;

(ii) $\mathrm{N}=\{g\in\mathrm{G}\mid g.j(\mathbf{A})=j(\mathbf{A})\}$.

La première égalité de (i) n'est que le rappel de la définition de H (1.2.12). Vu (2.1.5), l'intersection des stabilisateurs des points de $j(\mathbf{A})$ est égale à

$$\bigcap_{n\in\mathrm{N},\,\mathrm{X}\in\mathbf{T}} n\mathrm{B}_{\mathrm{X}}n^{-1}=\bigcap_{n\in\mathrm{N}} n\mathrm{B}n^{-1}=\mathrm{H},$$

d'où (i).

D'autre part, les images par j des chambres de $\mathbf{A}$ sont les chambres $\mathrm{F}(n\mathrm{B}n^{-1})$ pour $n\in\mathrm{N}$. Si $g.j(\mathbf{A})=j(\mathbf{A})$ (avec $g\in\mathrm{G}$), alors g permute ces chambres, donc aussi leurs stabilisateurs, c'est-à-dire les sous-groupes $n\mathrm{B}n^{-1}$ pour $n\in\mathrm{N}$. Pour tout $n\in\mathrm{N}$, il existe donc un élément $n'\in\mathrm{N}$ tel que $gn\mathrm{B}n^{-1}g^{-1}=n'\mathrm{B}n'^{-1}$, ou encore $gn\in n'\mathrm{B}$. En particulier, il existe $n''\in\mathrm{N}$ et $b\in\mathrm{B}$ tels que $g=n''b$, d'où $bn\in n''^{-1}n'\mathrm{B}$ et $n\in n''^{-1}n'\mathrm{H}$ (1.2.7). Par suite, on a $b\in n\mathrm{B}n^{-1}$ pour tout $n\in\mathrm{N}$, c'est-à-dire $b\in\mathrm{H}$, d'où finalement $g=n''b\in\mathrm{N}$, puisque le système de Tits (G, B, N) est saturé. Inversement, on a bien $n.j(\mathbf{A})=j(\mathbf{A})$ pour tout $n\in\mathrm{N}$ d'après la définition même de j ((2.2.1) (ii)). Ceci achève la démonstration de (ii).

Corollaire **(2.2.6)**. — *Le groupe* G *permute transitivement les couples* (F, A) *formés d'une facette* F *de type* X *donné et d'un appartement* A *contenant* F.

En effet, G permute transitivement les appartements par définition même et le stabilisateur d'un appartement A permute transitivement les facettes $\mathrm{F}\subset\mathrm{A}$ de type X donné ((2.2.5) (ii) et (1.3.5)).

Corollaire **(2.2.7)**. — *Soit* φ *une application structurale et soit* ψ *une application de* $\mathbf{A}$ *dans l'appartement* $\varphi(\mathbf{A})$. *Pour que* ψ *soit une application structurale, il faut et il suffit qu'il existe un élément* $w\in\mathbf{W}$ *tel que* $\psi=\varphi\circ w$.

On se ramène aussitôt au cas $\varphi=j$ et le corollaire résulte alors de la proposition (2.2.5) et de la définition de j ((2.2.1) (ii)).

(2.2.8) En vertu de (2.2.7), il existe sur tout appartement A une structure d'espace affine euclidien et une seule telle que toute application structurale d'image A soit un isomorphisme d'espaces affines euclidiens de $\mathbf{A}$. *Nous considérons désormais* A *comme muni* *de cette structure d'espace euclidien, et en particulier de la distance correspondante, que nous noterons* d_A. Il est clair que, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ est alors un isomorphisme de A sur l'appartement $g.A$.

2.3. Les rétractions de $\mathscr{I}$ sur un appartement.

Proposition (**2.3.1**). — *Deux facettes de* $\mathscr{I}$ *sont contenues dans un même appartement.*

D'après (2.2.3), il suffit de montrer que deux chambres sont contenues dans un même appartement. Pour cela, il suffit d'utiliser la transitivité de G sur les chambres, le fait que toute chambre est de la forme $bn.F(B)$ avec $b \in B$ et $n \in N$ (2.1.7) et de remarquer que F(B) et $bn.F(B)$ sont contenues dans l'appartement $b.j(\mathbf{A})$.

Proposition (**2.3.2**). — *Soient* A *et* A′ *deux appartements contenant une même chambre* C. *Il existe une application* $\rho = \rho_{A', A; C}$ *et une seule de* A′ *sur* A *qui soit la restriction à* A′ *d'une opération de* G *et telle que* $\rho(C) = C$. *La restriction de* ρ *à* $A \cap A'$ *est l'identité et* ρ *est une isométrie de* A′ *sur* A.

On peut supposer que $A = j(\mathbf{A})$ et $C = F(B)$. L'existence de ρ résulte de (2.2.6). D'autre part, (2.2.5) montre que le stabilisateur du couple (A, C) est $B \cap N = H$ et laisse invariant chaque point de A. L'unicité de ρ en résulte.

Enfin, soit $a \in A \cap A'$. On a $a \in F(nB_X n^{-1})$ (avec $n \in N$ et $X \in \mathbf{T}$). Soit $b \in B$ tel que $\rho(x) = b.x$ pour tout $x \in A'$. On a $b^{-1}.a \in A$, ce qui entraîne l'existence de $n' \in N$ tel que

$$b^{-1}nB_X n^{-1}b = n'B_X n'^{-1}.$$

Compte tenu de ce que B_X est son propre normalisateur, on en déduit $b^{-1}n \in n'B_X \subset Bn'\mathbf{W}_X B$ ([5], chap. IV, § 2, n° 5, prop. 2). On a donc $\nu(n) \in \nu(n')\mathbf{W}_X$ et $nB_X n^{-1} = n'B_X n'^{-1}$. On en déduit

$$b^{-1}.F(nB_X n^{-1}) = F(n'B_X n'^{-1}) = F(nB_X n^{-1})$$

d'où $b.a = a$ d'après (2.1.5) (i). Que ρ soit une isométrie résulte de la définition de d_A.

Corollaire (**2.3.3**). — *Soient* F_1 *et* F_2 *deux facettes,* A_1 *et* A_2 *deux appartements contenant tous deux* F_1 *et* F_2. *Il existe un élément* $g \in G$ *tel que* $g.A_1 = A_2$ *et* $g.F_i = F_i$ *pour* $i = 1, 2$.

Pour $i = 1, 2$, soit C_i une chambre contenue dans A_i et admettant F_i comme facette. Soit A un appartement contenant C_1 et C_2 et soit $g_i \in G$ tel que $g_i.A_i = A$ et $g_i.C_i = C_i$ $(i = 1, 2)$; alors, $g = g_2^{-1}g_1$ possède les propriétés requises.

Théorème (**2.3.4**). — *Soient* A *un appartement et* C *une chambre contenue dans* A. *Il existe une application* ρ *et une seule de* $\mathscr{I}$ *dans* A *possédant les propriétés suivantes :*

(i) $\rho(C) = C$;

(ii) *pour tout appartement* A′ *contenant* C, *il existe* $g \in G$ *tel que* $\rho(x) = g.x$ *pour tout* $x \in A'$.

La restriction de ρ *à* A *est l'identité. Si* $x \in \overline{C}$, *on a* $\rho^{-1}(x) = \{x\}$. *Si* F *est une facette de type* X, *il en est de même de* $\rho(F)$, *on a* $\rho(\overline{F}) = \overline{\rho(F)}$ *et la restriction de* ρ *à* $\overline{F}$ *est une bijection affine de* $\overline{F}$ *sur* $\overline{\rho(F)}$.

Si ρ existe, sa restriction à un appartement A′ contenant C coïncide nécessairement avec $\rho_{A',A;C}$, d'où l'unicité de ρ (vu (2.3.1)).

Soit $x \in \mathscr{I}$ et soit A′ un appartement contenant $C \cup \{x\}$. Montrons que $\rho_{A',A;C}(x)$ ne dépend que de x. En effet, si A″ est un autre appartement contenant $C \cup \{x\}$, on a, vu l'assertion d'unicité de (2.3.2),

$$\rho_{A'',A;C} = \rho_{A',A;C} \circ \rho_{A'',A';C}$$

et $\rho_{A'',A';C}(x) = x$ puisque $x \in A' \cap A''$.

Posons alors $\rho(x) = \rho_{A',A;C}(x)$: il est clair que l'application ρ ainsi définie possède les propriétés (i) et (ii).

On a $\rho | A = \rho_{A,A;C} = \mathrm{Id}_A$. Si $x \notin \overline{C}$, on a $\rho(x) \notin \overline{C}$ puisque $\rho | A' = \rho_{A',A;C}$ est injective et est l'identité sur $\overline{C}$. Si F est une facette de $\mathscr{I}$ contenant x, on a $\overline{F} \subset A'$ et la restriction de ρ à $\overline{F}$ coïncide avec celle d'une opération de G, d'où les dernières assertions du théorème.

Définition **(2.3.5)**. — *L'application* ρ *définie en* (2.3.4) *s'appelle la* rétraction de $\mathscr{I}$ sur A de centre C *et se note* $\rho_{A;C}$.

Proposition **(2.3.6)**. — *Soient* C *une chambre*, F *une facette et* Γ *une galerie tendue entre* C *et* F. *Tout appartement contenant* C *et* F *contient chaque terme de* Γ.

Posons $\Gamma = (C_0 = C, C_1, \ldots, C_m)$ et soit A un appartement contenant C et F. Supposons $C_{j-1} \subset A$ et $C_j \not\subset A$, avec $1 \leqslant j \leqslant m$. Soit C′ la chambre de A distincte de C_{j-1} et telle que C_{j-1}, C_j et C′ aient une cloison commune F′. Posons $\rho = \rho_{A;C'}$. Alors $\rho(C_j)$ est une chambre de A, distincte de C′ et ayant F′ comme cloison. On a donc $\rho(C_j) = C_{j-1}$. Comme $\rho(\overline{C}_m) \supset \rho(F) = F$, la suite $(C, \ldots, C_{j-1}, \rho(C_{j+1}), \ldots, \rho(C_m))$ est une galerie possédant les propriétés requises de Γ et de longueur moindre, ce qui est impossible. On a donc $C_j \subset A$ pour tout j.

Corollaire **(2.3.7)**. — (i) *Soient* Γ *et* Γ' *deux galeries minimales de même type. Il existe* $g \in G$ *tel que* $\Gamma = g.\Gamma'$.

(ii) *Soient* C, C′ *et* C″ *trois chambres deux à deux distinctes, possédant une même cloison. Il existe* $g \in G$ *tel que* $g.C = C$ *et* $g.C' = C''$.

Il est clair que (i) entraîne (ii), en considérant les galeries (C, C′) et (C, C″). Démontrons (i). Posons $\Gamma = (C_0, \ldots, C_m)$ et $\Gamma' = (C'_0, \ldots, C'_m)$ et soit A (resp. A′) un appartement contenant C_0 et C_m (resp. C'_0 et C'_m). Il existe $g \in G$ tel que $C = g.C'$ et $A = g.A'$ (2.2.6) et on a $\Gamma = g.\Gamma'$ vu (2.3.6) et la deuxième partie du lemme suivant :

Lemme **(2.3.8)**. — *Soient* A *un appartement et* C *une chambre de* A.

(i) *Pour tout* $w \in \mathbf{W}$, *il existe une chambre* C′ *et une seule contenue dans* A *et telle que* $w(C, C') = w$ (*où* $w(C, C')$ *est défini comme en* (2.1.7)).

(ii) *Deux galeries sans bégaiement, de même type et de même origine contenues dans* A *coïncident.*

L'assertion (ii) est immédiate, car pour toute chambre de A et tout $s \in S$, il existe une chambre et une seule de A qui lui soit mitoyenne, de cloison commune de type s. Pour démontrer (i), on peut supposer $A = j(\mathbf{A})$ et $C = j(\mathbf{C})$ et (i) résulte aussitôt de la simple transitivité de $\mathbf{W}$ sur les chambres de $\mathbf{A}$.

Corollaire **(2.3.9)**. — *Soient* C *et* C′ *deux chambres de* $\mathscr{I}$ *et posons* $w = w(C', C)$ (2.1.7). *Soit* E *l'ensemble des galeries minimales d'origine* C′ *et d'extrémité* C. *L'application* $\mathbf{s}$ *qui, à* $\Gamma \in E$, *fait correspondre son type* $\mathbf{s}(\Gamma)$ (2.1.3), *est une bijection de* E *sur l'ensemble des décompositions réduites de* w.

On peut supposer que $C' = F(B)$ et $C = n.F(B)$ avec $n \in N$ ((2.2.6) et (2.3.1)). On a alors $w = \nu(n)$. Soit $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ une décomposition réduite de w et soit $\bar{s}_k \in \nu^{-1}(s_k)$ (pour $1 \leqslant k \leqslant m$). La suite des chambres $C_k = \bar{s}_1 \ldots \bar{s}_k . F(B)$ est une galerie appartenant à E, de type $\mathbf{s}$ ((2.1.9) et (2.1.11)). Réciproquement, soit $\Gamma \in E$. On sait (2.1.11) que le type de Γ est une décomposition réduite de w. Supposons-le égal à $\mathbf{s}$. Vu (2.3.6), on a $\Gamma \subset j(\mathbf{A})$ et les deux galeries Γ et $(C_0, \ldots, C_m)$ sont deux galeries minimales de même type, de même origine et contenues dans un même appartement, donc elles coïncident ((2.3.8) (ii)).

(2.3.10) Soit $w \in \mathbf{W}$. En appliquant (2.3.9) à $j(\mathbf{C})$ et $j(w.\mathbf{C})$, on voit (ce qui pourrait d'ailleurs s'établir directement en démontrant l'analogue de (2.1.9) dans $\mathbf{A}$) que l'ensemble des galeries minimales d'origine $\mathbf{C}$ et d'extrémité $w(\mathbf{C})$ est en correspondance bijective avec les décompositions réduites de w. Si $\Gamma = (C_0 = \mathbf{C}, \ldots, C_m = w(\mathbf{C}))$ est une telle galerie, de type $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, la réflexion par rapport au mur L_i support de la cloison commune à C_{i-1} et C_i est

$$t_i = (s_1 \ldots s_{i-1}) s_i (s_1 \ldots s_{i-1})^{-1}$$

et on a $w = s_1 \ldots s_m = t_m \ldots t_1$. On a rappelé en (1.2.2) que les t_i sont deux à deux distincts et que leur ensemble, qui sera noté T_w par la suite, est indépendant de la décomposition réduite considérée de w. Les t_i sont appelés les *réflexions associées à* w. *Pour que la réflexion* r *par rapport au mur* L *de* $\mathbf{A}$ *appartienne à* T_w, *il faut et il suffit que* $\mathbf{C}$ *et* $w(\mathbf{C})$ *soient de part et d'autre de* L. En effet, si L sépare $\mathbf{C}$ et $w(\mathbf{C})$, il doit séparer C_{i-1} et C_i pour un i au moins et L doit coïncider avec l'un des L_i. Inversement, C_{j-1} et C_j sont du même côté de L_i pour tout $i \neq j$ (puisque $L_j \neq L_i$), ce qui entraîne que $\mathbf{C}$ et $w(\mathbf{C})$ sont de part et d'autre de L_i pour $i = 1, \ldots, m$. En particulier, on voit que *la longueur* $\ell(w)$ *de* w *est égale au nombre de murs de* $\mathbf{A}$ *séparant* $\mathbf{C}$ *et* $w.\mathbf{C}$. De plus, *une galerie minimale de* $\mathbf{A}$ *est toute entière contenue dans toute racine affine qui contient ses extrémités*. Plus généralement :

Proposition **(2.3.11)**. — *Toute galerie minimale de* $\mathscr{I}$ *est contenue dans tout demi-appartement de* $\mathscr{I}$ *qui contient ses extrémités.*

Proposition **(2.3.12)**. — *Soient* A *un appartement de* $\mathscr{I}$, C *une chambre de* A *et* $\rho = \rho_{A;C}$. *Soit* F *une cloison de* $\mathscr{I}$; *soit* C_1 *la chambre de* A *admettant* $\rho(F)$ *comme cloison et située du même* *côté que* C *du mur de* A *contenant* $\rho(F)$, *et soit* C_2 *l'autre chambre de* A *admettant* $\rho(F)$ *comme cloison. Alors, il existe une chambre* C′ *et une seule de* $\mathscr{I}$ *admettant* F *comme cloison et telle que* $\rho(C')=C_1$ *et pour toute chambre* C″ *de* $\mathscr{I}$, *admettant* F *comme cloison et distincte de* C′, *on a* $\rho(C'')=C_2$.

Soit $\Gamma=(C, \ldots, C')$ une galerie tendue entre C et F. Alors, $\rho(\Gamma)$ est une galerie tendue entre C et $\rho(F)$ et on a $\rho(C')=C_1$. Si C″ est une chambre de $\mathscr{I}$, admettant F comme cloison et distincte de C′, alors la galerie $(C, \ldots, C', C'')$ est minimale; en effet, elle est sans bégaiement et de même type que la galerie $(\rho(\Gamma), C_2)$, qui est minimale (2.3.10). Par suite, on a bien $\rho(C'')=C_2$.

2.4. Parties closes de $\mathscr{I}$ et de A.

Définition (**2.4.1**). — *Soit* M *une partie de* $\mathscr{I}$ (resp. **A**), *rencontrant au moins une chambre. On dit que* M *est* close *si, quelle que soit la galerie* $(C_0, \ldots, C_m)$ *tendue entre une chambre* C_0 *rencontrant* M *et un point de* M, *on a* $\overline{C}_k \subset M$ *pour* $0 \leqslant k \leqslant m$.

Il est clair que toute partie close rencontrant une chambre est la réunion des ensembles $\overline{C}$ pour les chambres C rencontrant M. Un appartement, un demi-appartement, une racine affine sont clos ((2.3.6) et (2.3.11)). L'intersection d'une famille de parties closes contenant une même chambre est encore close. D'où :

(**2.4.2**) *Si* M *est une partie de* $\mathscr{I}$ (resp. **A**) *rencontrant au moins une chambre, il existe une plus petite partie close de* $\mathscr{I}$ (resp. **A**) *contenant* M. *On l'appelle* l'enclos *de* M *et on la note* cl(M).

(**2.4.3**) Il est clair que la notion de partie close et d'enclos ne dépend que de la structure polysimpliciale de $\mathscr{I}$ (resp. **A**). Si M rencontre au moins une chambre, on a

$$j(\mathrm{cl}(M))=\mathrm{cl}(j(M)) \quad \text{pour } M\subset \mathbf{A}$$
$$g.\mathrm{cl}(M)=\mathrm{cl}(g.M) \quad \text{pour } M\subset \mathscr{I} \text{ et } g\in G.$$

Lemme (**2.4.4**). — *Soient* C *et* C′ *deux chambres de* **A**. *L'enclos de* $C\cup C'$ *coïncide avec l'intersection des racines affines de* **A** *contenant* $C\cup C'$ *et avec la réunion des adhérences des chambres qui font partie d'au moins une galerie minimale d'extrémités* C *et* C′.

Soit E l'intersection des racines affines contenant $C\cup C'$. On a $\mathrm{cl}(C\cup C')\subset E$ d'après (2.3.10). Réciproquement, soit C″ une chambre contenue dans E et soient $w, w', w''\in \mathbf{W}$ tels que $w.C=C'$, $w'.C=C''$ et $w''.C''=C'$. On a $w=w''w'$, d'où $\ell(w)\leqslant \ell(w')+\ell(w'')$. D'autre part, désignons par $\mathscr{S}(X, Y)$ l'ensemble des murs de **A** qui séparent deux chambres X et Y. D'après (2.3.10), on a

$$\ell(w)=\mathrm{Card}\, \mathscr{S}(C, C'), \qquad \ell(w')=\mathrm{Card}\, \mathscr{S}(C, C''), \qquad \ell(w'')=\mathrm{Card}\, \mathscr{S}(C'', C').$$

Soit $L\in \mathscr{S}(C, C'')\cup \mathscr{S}(C', C'')$. On a $L\in \mathscr{S}(C, C')$: sinon, C et C′ seraient contenues dans une même racine affine α de mur L, on aurait $C''\subset \alpha$ (puisque

$C''\subset E$) et L ne séparerait C'' ni de C ni de C'. Le même raisonnement montre que $\mathscr{S}(C, C'')\cap\mathscr{S}(C', C'')=\emptyset$. Par suite, on a

$$\ell(w)=\text{Card } \mathscr{S}(C, C')\geqslant \text{Card } \mathscr{S}(C, C'')+\text{Card } \mathscr{S}(C', C'')=\ell(w')+\ell(w'')$$

d'où finalement $\ell(w)=\ell(w')+\ell(w'')$ (et $\mathscr{S}(C, C')=\mathscr{S}(C, C'')\cup\mathscr{S}(C', C'')$). Il s'ensuit qu'en mettant bout à bout une galerie minimale joignant C à C'' et une galerie minimale joignant C'' à C', on obtient une galerie minimale joignant C à C' et $C''\subset \mathrm{cl}(C\cup C')$. Le lemme en résulte, puisque E comme $\mathrm{cl}(C\cup C')$ sont des réunions d'adhérences de chambres.

Proposition **(2.4.5)**. — *Soit* M *une partie de* **A** *rencontrant au moins une chambre. L'enclos de* M *coïncide avec l'intersection des racines affines contenant* M, *et est l'enveloppe convexe de la réunion d'un nombre fini de points et de demi-droites.*

Soit E l'intersection des racines affines contenant M. Comme une racine affine est close (2.3.10), on a $\mathrm{cl}(M)\subset E$. D'autre part, cl(M) est convexe : en effet, (2.4.4) montre que l'enclos de deux chambres est convexe, et tout point de cl(M) est adhérent à une chambre contenue dans cl(M). De plus, cl(M) est un polyèdre dont les faces sont contenues dans des murs de **A**. Par suite, cl(M) est une intersection de racines affines contenant M, d'où $\mathrm{cl}(M)\supset E$ et finalement $\mathrm{cl}(M)=E$. De plus, comme les directions des murs de **A** sont en nombre fini, le polyèdre convexe cl(M) est intersection d'un nombre fini de racines affines et possède un nombre fini de sommets et d'arêtes, d'où la dernière assertion de la proposition.

(2.4.6) La proposition (2.4.5) permet de généraliser à des parties quelconques de **A** les définitions (2.4.1) et (2.4.2) :

Définition. — *Pour toute partie* M *de* **A**, *on appelle* enclos de M *et on note* cl(M) *l'intersection des racines affines de* **A** *contenant* M. *On dit que* M *est* close *si* $\mathrm{cl}(M)=M$, *ou encore si* M *est intersection de racines affines.*

Une partie M de **A** est close si et seulement si elle est convexe et réunion d'adhérences de facettes.

Proposition **(2.4.7)**. — *Soit* M *une partie de* $\mathscr{I}$, *contenue dans la réunion d'un nombre fini de facettes. Pour que* M *soit contenue dans un appartement, il faut et il suffit qu'il existe deux chambres* C *et* C' *telles que* M *soit contenue dans l'enclos de* $C\cup C'$.

La condition est évidemment suffisante, puisque $\mathrm{cl}(C\cup C')$ est contenu dans tout appartement contenant C et C' (2.3.6). Qu'elle soit nécessaire résulte de la proposition suivante :

Proposition **(2.4.8)**. — *Soit* D *une chambre vectorielle.*

(i) *Pour toute partie bornée* M *de* **A**, *il existe* $x, x'\in\mathbf{A}$ *tels que* $M\subset(x+D)\cap(x'-D)$.

(ii) *Quels que soient* $x, x', y, y'\in\mathbf{A}$ *tels que* $y\in x-\overline{D}$ *et* $y'\in x'+\overline{D}$, *on a*

$$(x+\overline{D})\cap(x'-\overline{D})\subset\mathrm{cl}(\{y, y'\}).$$

Soit $\mathfrak{C}$ un quartier de direction D. Le transformé de $\mathfrak{C}$ par une homothétie de centre un point de l'ouvert $\mathfrak{C}$ et de rapport assez grand est un quartier $\mathfrak{C}'$ de direction D contenant M. Si x est le sommet de $\mathfrak{C}'$, on a bien $M \subset x+D$, d'où (i).

Démontrons (ii). Il suffit de montrer que toute racine affine α contenant y et y' contient $(x+\overline{D}) \cap (x'-\overline{D})$. Quitte à remplacer D par $-D$ et à échanger (x, y) et (x', y'), on peut supposer que ${}^v\alpha \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}_D^+$ (1.3.13). On a alors $\alpha = \alpha + \overline{D}$ et

$$x+\overline{D} \subset y+\overline{D}+\overline{D} = y+\overline{D} \subset \alpha+\overline{D} = \alpha$$

d'où (ii).

Corollaire **(2.4.9)**. — *Soient* D *une chambre vectorielle et x un point de* **A**. *Quels que soient les points $y \in x+D$ et $y' \in x-D$, l'enclos de $\{y, y'\}$ est un voisinage de x.*

En effet, $\mathrm{cl}(\{y, y'\})$ contient $(y-D) \cap (y'+D)$, qui est un voisinage de x.

Proposition **(2.4.10)**. — *Soient* F *une facette de* **A**, L *le sous-espace affine engendré par* F *et* Δ *une composante connexe du complémentaire dans* **A** *de la réunion des murs contenant* F. *Pour toute partie bornée* M *de* $\overline{\Delta}$, *il existe un point $y \in L$ et un quartier $\mathfrak{C} \subset \Delta$ tels que $M \subset \mathrm{cl}(\{y, z\})$ pour tout point $z \in \mathfrak{C}$.*

Soient $x \in F$ et M une partie bornée non vide de $\overline{\Delta}$. Il existe une chambre vectorielle D telle que $x+D \subset \Delta$ et que l'intérieur relativement à L de $(x+\overline{D}) \cap L$ ne soit pas vide. Faisons de **A** un espace vectoriel en prenant comme origine o un point de $(x+\overline{D}) \cap L$. Comme $x+\overline{D}$ est un voisinage de o dans $\overline{\Delta}$, il existe $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $M \subset r(x+\overline{D}) = rx+\overline{D}$. Posons $y = rx$ et soit $y' \in \mathbf{A}$ tel que $M \subset y'-D$ ((2.4.8) (i)). On a $y'+D \subset \Delta$ et $M \subset (y+\overline{D}) \cap (y'-D) \subset \mathrm{cl}(\{y, z\})$ pour tout point z du quartier $y'+D$.

Proposition **(2.4.11)**. — *Conservons les notations de* (2.4.10). *Pour toute partie bornée* M *de* $\overline{\Delta}$ *et toute chambre* C *de* $\mathscr{I}$ *admettant* $j(F)$ *comme facette, il existe un appartement de* $\mathscr{I}$ *contenant* C *et* $j(M)$.

Soient F' une facette ouverte dans L et $C' \subset \Delta$ une chambre telles que $F \cup M \subset \mathrm{cl}(F' \cup C')$ (2.4.10). Soit C_+ (resp. C'_+) la chambre de Δ admettant F (resp. F') comme facette. Nous supposerons, ce qui est loisible, que $C_+ = \mathbf{C}$; il existe alors $X \in \mathbf{T}$ tel que $F = \mathbf{C}_X$. Soit Γ une galerie tendue entre $\mathbf{C}$ et C'_+. Comme $\mathbf{C}$ est la seule chambre de **A** admettant F comme facette et contenue dans la partie close $\overline{\Delta}$, cette galerie est tendue entre F et C'_+. Soit A un appartement contenant C et $j(C'_+)$; il contient $j(\mathbf{C})$ et il existe $b \in B$ tel que $b.j(\mathbf{A}) = A$ et $b.j(C'_+) = j(C'_+)$ (2.3.3). Posons $w = w(j(\mathbf{C}), C)$ et soit $n \in \nu^{-1}(w)$. On a $C = bn.j(\mathbf{C})$ et $w \in \mathbf{W}_X$, de sorte que n est l'identité sur $j(F')$. La galerie $bn.j(\Gamma)$ est donc tendue entre $j(F)$ et une chambre $C'' = bn.j(C'_+)$ admettant $j(F')$ comme facette, et son origine est la chambre C. Par suite, on a $C \cup j(F') \subset \mathrm{cl}(j(F) \cup C'')$. L'enclos de $j(C') \cup C''$ contient l'enclos de $j(C' \cup F')$, donc contient $j(F \cup M)$, et contient aussi l'enclos de $C'' \cup j(F)$, donc contient C, ce qui démontre la proposition.

Corollaire **(2.4.12)**. — *Soient α un demi-appartement,* M *une partie bornée de α et* C *une chambre de* $\mathscr{I}$ *possédant une cloison contenue dans le mur $\partial\alpha$ de α. Alors, il existe un appartement contenant* C *et* M.

Proposition **(2.4.13).** — *Soit* M *une partie de* $\mathscr{I}$, *rencontrant au moins une chambre, et soit* $g\in G$ *tel que* $g.x=x$ *pour tout* $x\in M$. *On a alors* $g.x=x$ *pour tout* $x\in \mathrm{cl}(M)$. *Autrement dit, les fixateurs de* M *et de* cl(M) *sont égaux.*

Il suffit de montrer que l'ensemble $X=\{x\in\mathscr{I}\,|\,g.x=x\}$ est clos. Soient $x\in X$, C une chambre rencontrant X, donc contenue dans X (2.1.5), A un appartement contenant x et C et Γ une galerie tendue entre x et C. D'après (2.3.6), les deux galeries Γ et $g.\Gamma$ sont contenues dans A, donc coïncident puisque ce sont deux galeries de même type et de même extrémité. On a donc bien $\Gamma\subset X$ et X est close.

2.5. La métrique de l'immeuble $\mathscr{I}$.

Nous avons vu (2.2.8) que chaque appartement A de $\mathscr{I}$ est muni d'une structure d'espace affine euclidien et en particulier d'une distance d_A. Nous allons montrer qu'il existe sur $\mathscr{I}$ une distance et une seule dont la restriction à chaque appartement A est la distance d_A. Cette distance est invariante par G et fait de $\mathscr{I}$ un espace métrique complet, contractile et où deux points quelconques sont joints par une géodésique unique.

Lemme **(2.5.1).** — *Il existe une fonction* $d:\mathscr{I}\times\mathscr{I}\to\mathbf{R}_+$ *et une seule telle que, pour tout appartement* A *de* $\mathscr{I}$, *la restriction de* d *à* $A\times A$ *soit la fonction* d_A.

L'unicité de d est claire, puisque deux points quelconques de $\mathscr{I}$ appartiennent à un même appartement (2.3.1). Considérons deux appartements A et A′ et soient $x,y\in A\cap A'$. Vu (2.3.3), il existe $g\in G$ tel que $g.x=x$, $g.y=y$ et $g.A=A'$ et on sait que l'application $z\mapsto g.z$ de A sur A′ est une isométrie (2.2.8), d'où $d_{A'}(x,y)=d_A(x,y)$. L'existence de la fonction d en résulte.

(2.5.2) Il est clair que *la fonction d est invariante par* G.

Proposition **(2.5.3).** — *Soient* C *une chambre de* $\mathscr{I}$ *et* A *un appartement contenant* C. *Soit* $\rho=\rho_{A;C}$ *la rétraction sur* A *de centre* C (2.3.5). *Soient* $x,y\in\mathscr{I}$. *Alors :*

(i) *on a* $d(\rho(x),\rho(y))\leqslant d(x,y)$;

(ii) *si* $x\in\overline{C}$, *on a* $d(\rho(x),\rho(y))=d(x,y)$;

(iii) *s'il existe une facette* F *de* $\mathscr{I}$ *telle que* $x,y\in\overline{F}$, *on a* $d(\rho(x),\rho(y))=d(x,y)$.

S'il existe un appartement A′ contenant à la fois C, x et y, alors $d(\rho(x),\rho(y))=d(x,y)$ car $\rho\,|\,A'=\rho_{A',A;C}$ est une isométrie de A′ sur A (2.3.2). Ceci démontre (ii) et (iii).

Soit A″ un appartement contenant x et y et soit $(x_0=x, x_1, \ldots, x_m=y)$ une suite monotone de points du segment $[xy]$ de l'espace affine A″, telle que, pour $1\leqslant j\leqslant m$, il existe une facette F_j telle que x_{j-1} et x_j appartiennent à $\overline{F}_j$. On a alors, d'après (iii)

$$d(\rho(x),\rho(y))\leqslant\sum_{j=1}^{m}d(\rho(x_{j-1}),\rho(x_j))=\sum_{j=1}^{m}d(x_{j-1},x_j)=d(x,y)$$

d'où (i).

Proposition **(2.5.4)**. — (i) *La fonction d est une distance sur $\mathscr{I}$.*

(ii) *Soient $x, y \in \mathscr{I}$ et soit $D = \{z \in \mathscr{I} \mid d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)\}$. Alors* D *est contenu dans tout appartement* A *contenant x et y, et coïncide avec le segment $[xy]$ de l'espace affine* A.

(iii) *Si une isométrie de $\mathscr{I}$, en particulier une opération de* G, *laisse fixes les deux points x et y, elle laisse fixe tout point de* D.

Soient $x, y, z \in \mathscr{I}$. Il est clair que $d(x,y) = d(y,x)$ et que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Soit A un appartement contenant x et y et soit C une chambre de A. Posons $\rho = \rho_{A;C}$. On a :

$$d(x,y) = d(\rho(x), \rho(y)) \leqslant d(\rho(x), \rho(z)) + d(\rho(z), \rho(y)) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \tag{1}$$

d'où (i).

Supposons de plus que $z \in D$ et soit t le point du segment $[xy]$ de A tel que $d(x,z) = d(x,t)$. Choisissons la chambre C de telle sorte que $t \in \overline{C}$. Comme $z \in D$, les inégalités (1) sont des égalités, ce qui implique $d(x, \rho(z)) = d(x,z) = d(x,t)$ et de même $d(y, \rho(z)) = d(y,t)$ d'où $\rho(z) = t$ et $z = t$ d'après (2.3.4). Ceci démontre (ii) et (iii).

Définition **(2.5.5)**. — *On appelle* immeuble *du système de Tits* (G, B, N, S) *l'ensemble $\mathscr{I}$ muni de sa structure de complexe polysimplicial définie en* 2.1, *de la famille des applications structurales définie en* 2.2 *et de la distance d.*

Définition **(2.5.6)**. — *Avec les notations de* (2.5.4), *on dit que* D *est le* segment *fermé d'extrémités x et y et on le note $[xy]$. Une partie* M *de $\mathscr{I}$ est dite* convexe *si $x, y \in M$ entraîne* $[xy] \subset M$.

Il est clair que l'intersection d'une famille de parties convexes de $\mathscr{I}$ est convexe; on peut donc parler de l'*enveloppe convexe* d'une partie de $\mathscr{I}$.

(2.5.7) Pour qu'une partie de $\mathscr{I}$ contenue dans un appartement A soit convexe dans $\mathscr{I}$ au sens de la définition (2.5.6), il faut et il suffit qu'elle le soit au sens de la structure affine de A. En particulier, tout appartement est convexe dans $\mathscr{I}$. L'intersection de deux appartements $A \cap A'$ est convexe dans chacun d'eux et les structures affines induites sur $A \cap A'$ par celle de A ou celle de A' sont identiques. Comme $A \cap A'$ est réunion d'adhérences de facettes, on voit que $A \cap A'$ est *close* dans A au sens de (2.4.6).

Si M est une partie de $\mathscr{I}$ rencontrant au moins une chambre, alors M *est close si et seulement si elle est convexe et réunion d'adhérences de chambres.* Cette condition est évidemment nécessaire. Supposons-la satisfaite et soit C (resp. F) une chambre (resp. facette) rencontrant M, donc contenue dans M. Si A est un appartement contenant $C \cup F$, l'intersection $A \cap M$ est convexe et réunion d'adhérences de facettes, donc est close (dans A, donc dans $\mathscr{I}$) (2.4.6) et on a $\mathrm{cl}(C \cup F) \subset A \cap M \subset M$. Donc M est close.

Plus généralement, nous dirons qu'une partie M de $\mathscr{I}$ est *close* si elle est convexe et réunion d'adhérences de facettes (cf. (2.4.6)). Pour $M \subset \mathscr{I}$, nous appellerons *enclos* de M et noterons cl(M) l'intersection des parties closes de $\mathscr{I}$ contenant M; c'est la plus petite partie close contenant M.

Proposition **(2.5.8)**. — *Soient* A *et* A′ *deux appartements. Il existe* $g \in G$ *tel que* $g.A = A'$ *et* $g.x = x$ *pour tout* $x \in A \cap A'$.

Soit F une facette ouverte dans $A \cap A'$ et soit $g \in G$ tel que $g.A = A'$ et $g.F = F$ (2.2.6). Soit $y \in F$ et soit $x \in A \cap A'$; soit D le segment $[xy]$, qui est contenu dans $A \cap A'$. L'image de D par g est un segment de A′, d'extrémité y et de longueur $d(x, y)$. Comme F est ouverte dans $A \cap A'$, $D \cap F$ est un sous-segment non réduit à $\{y\}$ et laissé fixe point par point par g. On en déduit que $g.D = D$ et que g laisse fixes tous les points de D, et en particulier x.

Corollaire **(2.5.9)**. — *Soit* $g \in G$; *posons* $A = j(\mathbf{A})$. *Il existe* $n \in N$ *tel que* $g.x = n.x$ *pour tout* $x \in A \cap g^{-1}.A$. *Si de plus on a* $g.x = x$ *pour* x *appartenant à un ouvert non vide de* A, *on a* $g.x = x$ *pour tout* $x \in A \cap g^{-1}.A$.

En effet, il existe $h \in G$ tel que $hg.A = A$ et $h.y = y$ pour $y \in A \cap g.A$. On a alors $hg = n \in N$ et $g.x = n.x$ pour $x \in A \cap g^{-1}.A$. La deuxième assertion en résulte, puisque un élément de N laissant fixes les points d'un ouvert non vide de A, appartient à H.

Proposition **(2.5.10)**. — *Si* F *est une facette de* $\mathscr{I}$, *l'adhérence de* F *dans l'espace métrique* $\mathscr{I}$ *n'est autre que la réunion* $\overline{F}$ *des facettes de* F.

Cela résulte aussitôt de la compacité de $\overline{F}$ dans tout appartement contenant F.

Lemme **(2.5.11)**. — *Soient* F *une facette de* $\mathscr{I}$ *et* $x \in F$. *Il existe une boule ouverte* D *de centre* x *telle que, si* F′ *est une facette de* $\mathscr{I}$ *rencontrant* D, *on ait* $F \subset \overline{F}'$. *Si* D *est une telle boule et si* $g \in G$ *est tel que* $g.x \in D$, *on a* $g.x = x$.

Soient x_0 et F_0 les images de x et F par l'application canonique de F dans $\overline{\mathbf{C}}$ (2.1.2). Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout mur de $\mathbf{W}$ rencontrant la boule ouverte D_0 de centre x_0 et de rayon ε, contienne x_0. Soit F_1 une facette de $\mathbf{A}$ rencontrant D_0 et soit $y \in F_1 \cap D_0$. Tout mur rencontrant le segment ouvert $]yx_0[$ contient x_0, donc aussi $[yx_0]$. Ceci entraîne que $]yx_0[\subset F_1$ et $x_0 \in \overline{F}_1$. On a donc $F_0 \subset \overline{F}_1$.

Soit maintenant D la boule ouverte de $\mathscr{I}$, de centre x et de rayon ε, et soit F′ une facette de $\mathscr{I}$ rencontrant D. Soit α une application structurale telle que $\alpha(\overline{\mathbf{C}}) \supset F$ et $\alpha(\mathbf{A}) \supset F'$. Comme α est une isométrie, et que $\alpha^{-1}|F$ est l'application canonique de F dans $\overline{\mathbf{C}}$, on a $\alpha^{-1}(x) = x_0$, $\alpha^{-1}(F) = F_0$ et $\alpha^{-1}(D) = D_0$. Posons $F'_0 = \alpha^{-1}(F')$. Comme $F'_0 \cap D_0 \neq \emptyset$, on a $F_0 \subset \overline{F}'_0$ d'après la première partie de la démonstration, d'où $F \subset \overline{F}'$.

Enfin, soit $g \in G$ tel que $g.x \in D$ et soit F′ la facette contenant $g.x$. On a alors $x, g.x \in \overline{F}'$, d'où $g.x = x$ d'après (2.1.6).

Théorème **(2.5.12)**. — (i) *L'espace métrique* $\mathscr{I}$ *est complet.*

(ii) *Soit* $\mathscr{F}$ *un ensemble de facettes. Alors* $\bigcup_{F \in \mathscr{F}} \overline{F}$ *est fermé dans* $\mathscr{I}$.

Il suffit de montrer que, avec les notations de (ii), $M = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} \overline{F}$ est *complet*, c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy (y_q) de M possède un point d'accumulation dans M. Soit C une chambre de $\mathscr{I}$ et soit $g_q \in G$ tel que $x_q = g_q^{-1}.y_q \in \overline{C}$ (pour $q \in \mathbf{N}$). Quitte à remplacer la suite (y_q) par une suite partielle, on peut supposer que la suite (x_q) converge vers $x \in \overline{C}$. Soit D une boule de centre x possédant la propriété du lemme (2.5.11). Comme

$$\begin{aligned} d(g_p.x, g_q.x) &\leqslant d(g_p.x, g_p.x_p) + d(g_p.x_p, g_q.x_q) + d(g_q.x_q, g_q.x) \\ &\leqslant d(x, x_p) + d(y_p, y_q) + d(x_q, x) \end{aligned}$$

il existe un entier m tel que $g_q^{-1}g_p.x \in D$ pour $p, q \geqslant m$ et on a $g_p.x = g_q.x$ pour $p, q \geqslant m$. Pour $p \geqslant m$, on a $d(y_p, g_m.x) = d(x_p, x)$ et y_p tend vers $y = g_m.x$. De plus, le lemme (2.5.11) montre que y est adhérent à la facette contenant y_p pour p assez grand, donc appartient à M.

(2.5.13) *Quels que soient les points $x, y \in \mathscr{I}$, le segment $[xy]$ est l'unique géodésique joignant x à y.*

Cela résulte aussitôt de (2.5.4) (ii).

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0, 1]$, nous désignerons par $tx + (1-t)y$ l'unique point $z \in [xy]$ satisfaisant à $d(x, z) = (1-t)d(x, y)$.

Lemme **(2.5.14)**. — *Soient x, y, z, z' quatre points de $\mathscr{I}$ tels que $z \in [xy]$, et soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ tel que $d(x, z') \leqslant d(x, z) + \varepsilon d(x, y)$ et $d(y, z') \leqslant d(y, z) + \varepsilon d(x, y)$. On a alors $d(z, z')^2 \leqslant 4\varepsilon d(x, z) d(y, z) + \varepsilon^2 d(x, y)^2$.*

Soient A un appartement contenant $[xy]$ et C une chambre de A telle que $z \in \overline{C}$. Posons $z'' = \rho_{A;C}(z)$. On a $d(z, z') = d(z, z'')$ et les quatre points x, y, z, z'' satisfont aux mêmes hypothèses que x, y, z, z'. On voit qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque les quatre points considérés appartiennent à un même appartement, et il résulte alors d'un calcul élémentaire de géométrie euclidienne plane.

Lemme **(2.5.15)**. — *L'application $(t, x, y) \mapsto tx + (1-t)y$ de $[0, 1] \times \mathscr{I} \times \mathscr{I}$ dans $\mathscr{I}$ est continue.*

Cela résulte aisément du lemme (2.5.14).

Proposition **(2.5.16)**. — *L'espace métrique $\mathscr{I}$ est contractile.*

Cela résulte du lemme (2.5.15).

(2.5.17) Soient $x, y \in \mathscr{I}$ et soit $\mathscr{L}(x, y)$ l'ensemble des suites finies $s = (x_0, \ldots, x_m)$ de points de $\mathscr{I}$ telles que $x_0 = x$, $x_m = y$ et que x_{j-1} et x_j appartiennent à l'adhérence d'une même chambre pour $1 \leqslant j \leqslant m$. On a

$$d(x, y) = \inf_{s \in \mathscr{L}(x, y)} \sum_{j=1}^{m} d(x_{j-1}, x_j).$$

Il en résulte aussitôt que la métrique de $\mathscr{I}$ est complètement déterminée par la donnée de la structure de complexe polysimplicial de $\mathscr{I}$ et des structures d'espace métrique sur les parties de $\mathscr{I}$ de la forme $\overline{C}$, où C est une chambre de $\mathscr{I}$.

2.6. Décomposition de l'immeuble en composantes irréductibles.

Lemme (**2.6.1**). — *Soit* $(\mathbf{S}', \mathbf{S}'')$ *une partition de* $\mathbf{S}$ *telle que tout élément de* $\mathbf{S}'$ *commute avec tout élément de* $\mathbf{S}''$. *Alors* $\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}$ *est un sous-groupe distingué de* $\mathbf{W}$ *et* $(G, B_{\mathbf{S}'}, N)$ *est un système de Tits dont le groupe de Weyl est canoniquement isomorphe à* $\mathbf{W}/\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}$ *et à* $\mathbf{W}_{\mathbf{S}''}$.

Comme $\mathbf{W}_{\mathbf{S}'} \cap \mathbf{W}_{\mathbf{S}''} = \mathbf{W}_{\mathbf{S}' \cap \mathbf{S}''} = \{e\}$, le groupe $\mathbf{W}$ est produit direct de $\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}$ et $\mathbf{W}_{\mathbf{S}''}$. Posons $H' = B_{\mathbf{S}'} \cap N$: l'image de H' dans $\mathbf{W}$ est $\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}$ et N/H' s'identifie à $\mathbf{W}/\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}$ ou encore à $\mathbf{W}_{\mathbf{S}''}$. Soit $s \in \mathbf{S}''$ et $w \in \mathbf{W}_{\mathbf{S}''}$. On a :

$$\begin{aligned} sB_{\mathbf{S}'}w = sB\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}Bw \subset sB\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}wB = sBw\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}B \subset (Bsw\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}B) \cup (Bw\mathbf{W}_{\mathbf{S}'}B) \\ \subset (B_{\mathbf{S}'}wB_{\mathbf{S}'}) \cup (B_{\mathbf{S}'}swB_{\mathbf{S}'}). \end{aligned}$$

Enfin, $sB_{\mathbf{S}'}s \neq B_{\mathbf{S}'}$ puisque $B_{\mathbf{S}'}$ est son propre normalisateur. Nous avons bien vérifié les axiomes d'un système de Tits.

Remarquons que ce lemme est valable pour un système de Tits quelconque, non nécessairement de type affine.

(**2.6.2**) Soit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_m$ la décomposition canonique de $\mathbf{A}$ en produit de ses composantes irréductibles sous $\mathbf{W}$ et soient $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \times \ldots \times \mathbf{W}_m$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \times \ldots \times \mathbf{C}_m$ et $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{S}_m$ les décompositions correspondantes de $\mathbf{W}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{S}$ ((1.3.2) et (1.3.4)).

Pour toute partie J de $\{1, \ldots, m\}$, soit p_J la projection canonique de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}_J = \prod_{i \in J} \mathbf{A}_i$, soit $\mathbf{C}_J = \prod_{i \in J} \mathbf{C}_i$ et soit $\mathbf{W}_J = \prod_{i \in J} \mathbf{W}_i$, considéré comme groupe de transformations affines de $\mathbf{A}_J$. Posons $\mathbf{S}_J = \bigcup_{i \in J} \mathbf{S}_i$, $B_J = B_{\mathbf{S}_J} = B\mathbf{W}_J B$ et $B^J = B_{\{1, \ldots, m\} - J}$. Il résulte du lemme (2.6.1) que (G, B^J, N) *est un système de Tits de groupe de Weyl* $\mathbf{W}_J$, donc de type affine. Soient $\mathscr{I}_J$ l'immeuble de (G, B^J, N) (construit à partir de $\mathbf{A}_J$ et $\mathbf{C}_J$), d_J sa distance, $j_{0,J}$ l'application canonique de $\overline{\mathbf{C}}_J$ sur $\overline{F(B^J)}$, etc. La classe de conjugaison de (B^J, N), donc aussi l'immeuble $\mathscr{I}_J$, ne dépend que de la classe de conjugaison de (B, N).

Proposition (**2.6.3**). — (i) *Soit* $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{P}_J$) *l'ensemble des sous-groupes parahoriques de* (G, B, N) (resp. (G, B^J, N)). *Pour tout* $P \in \mathscr{P}$, *il existe un plus petit élément noté* $\pi_J(P)$ *dans l'ensemble des éléments de* $\mathscr{P}_J$ *qui contiennent* P.

(ii) *Il existe une application* ϖ_J *et une seule de* $\mathscr{I}$ *dans* $\mathscr{I}_J$ *telle que l'on ait*

$$\varpi_J(F(P)) = F(\pi_J(P)) \quad \textit{pour tout } P \in \mathscr{P};$$
$$p_J \circ \lambda = \lambda_J \circ \varpi_J$$

où λ (resp. λ_J) *désigne l'application canonique de* $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}_J$) *dans* $\overline{\mathbf{C}}$ (resp. $\overline{\mathbf{C}}_J$).

(iii) *Pour tout* $g \in G$ *et* $a \in \mathscr{I}$, *on a* $g.\varpi_J(a) = \varpi_J(g.a)$ *et* ϖ_J *est surjective.*

(iv) *Pour toute application structurale* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathscr{I}$, *il existe une application structurale* $\varphi_J : \mathbf{A}_J \to \mathscr{I}_J$ *et une seule telle que* $\varpi_J \circ \varphi = \varphi_J \circ p_J$.

Pour démontrer (i), on peut supposer $P = B_X$ avec $X \in \mathbf{T}$. Les sous-groupes de G contenant P sont alors les B_Y avec $X \subset Y \subset \mathbf{S}$, et si un tel sous-groupe appartient à $\mathscr{P}_J$, il doit contenir un conjugué de B^J et Y doit contenir $\mathbf{S}-\mathbf{S}_J$. On voit donc que $\pi_J(P)=B_{X\cup(\mathbf{S}-\mathbf{S}_J)}$ possède la propriété voulue.

Démontrons (ii). Si ϖ_J existe, elle envoie le point $(P, a)\in\mathscr{I}$ (avec $a\in\lambda(F(P))$) sur le point $(\pi_J(P), p_J(a))\in\mathscr{I}_J$. Il suffit donc de montrer que

(1) $$p_J(\lambda(F(P)))\subset\lambda_J(F(\pi_J(P))).$$

Par une opération de G, on se ramène au cas $P=B_X$. On a alors $\lambda(F(P))=\mathbf{C}_X$ et $\lambda_J(F(\pi_J(P)))=\lambda_J((B^J)_{X\cap\mathbf{S}_J})=(\mathbf{C}_J)_{X\cap\mathbf{S}_J}$ (facette de type $X\cap\mathbf{S}_J$ de $\mathbf{C}_J$), d'où (1).

La première assertion de (iii) résulte de l'unicité de ϖ_J. Elle entraîne $\varpi_J(\mathscr{I})=G.\varpi_J(\overline{F(B)})=G.\overline{F(B^J)}=\mathscr{I}_J$.

Démontrons (iv). Compte tenu de (iii), (iv) résultera de la relation

(2) $$\varpi_J(j(x))=j_J(p_J(x)) \quad \text{pour } x\in\mathbf{A}$$

(où $j:\mathbf{A}\to\mathscr{I}$ et $j_J:\mathbf{A}_J\to\mathscr{I}_J$ sont définis comme en (2.2.1)). Il suffit, toujours en vertu de (iii) et de (2.2.1) d'établir (2) pour $x\in\mathbf{C}_X$. Or on a dans ce cas :

$$\varpi_J(j(x))=\varpi_J(B_X, x)=((B^J)_{X\cap\mathbf{S}_J}, p_J(x))=j_J(p_J(x)).$$

Proposition (**2.6.4**). — *Soit* $\{J\,|\,J\in\mathscr{J}\}$ *une partition de l'ensemble* $\{1, \ldots, m\}$. *Soient* $\mathscr{I}'$ *le produit des immeubles* $\mathscr{I}_J$ *pour* $J\in\mathscr{J}$, *muni de la structure de complexe polysimplicial produit et de la distance* $(\sum_J d_J^2)^{1/2}$, $\mathscr{P}'$ *le produit des ensembles* $\mathscr{P}_J$ *muni de la structure d'ordre produit,* $\varpi=(\varpi_J):\mathscr{I}\to\mathscr{I}'$ *l'application produit des* ϖ_J *et* $\pi=(\pi_J):\mathscr{P}\to\mathscr{P}'$ *l'application produit des* π_J.

(i) *ϖ est une isométrie et un isomorphisme de complexes polysimpliciaux de $\mathscr{I}$ sur $\mathscr{I}'$.*

(ii) *Pour tout appartement* A *de* $\mathscr{I}$, *la restriction de* ϖ *à* A *est un isomorphisme d'espaces affines euclidiens et de complexes polysimpliciaux de* A *sur le produit des appartements* $\varpi_J(A)$.

(iii) *π est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}'$. Pour tout* $P\in\mathscr{P}$, *on a* $P=\bigcap_{J\in\mathscr{J}}\pi_J(P)$.

L'assertion (ii) résulte de (2.6.2) et de (2.6.3) (iii). Elle entraîne que ϖ est isométrique et est un morphisme de complexes polysimpliciaux. Pour établir (i), il ne reste donc qu'à montrer que ϖ est surjective. Par induction sur Card $\mathscr{J}$, on se ramène au cas où $\mathscr{J}=(J_1, J_2)$. Soit alors $x_k\in\mathscr{I}_{J_k}$ et $y_k\in\mathscr{I}$ d'image x_k (pour $k=1, 2$) ((2.6.3) (iii)). Soit A un appartement de $\mathscr{I}$ contenant y_1 et y_2. On a alors $x_k\in\varpi_{J_k}(A)$ pour $k=1, 2$, d'où $(x_1, x_2)\in\varpi(A)$ d'après (ii).

Enfin, si $P\in\mathscr{P}$, on a $\varpi(F(P))=\prod_J F(\pi_J(P))$. Comme ϖ commute avec l'action de G, on en déduit que $P=\bigcap_{J\in\mathscr{J}}\pi_J(P)$ (2.1.5). Il en résulte que π est injective. Montrons que π est surjective : en effet, si $P_J\in\mathscr{P}_J$ pour $J\in\mathscr{J}$, alors $\prod_J F(P_J)$ est une facette F' de $\mathscr{I}'$ et il existe un $P\in\mathscr{P}$ tel que $F'=\varpi(F(P))$, ou encore $P_J=\pi_J(P)$ pour tout J. Enfin, il est clair que $P\subset Q$ est équivalent à $\pi_J(P)\subset\pi_J(Q)$ pour tout $J\in\mathscr{J}$ $(P, Q\in\mathscr{P})$.

(**2.6.5**) Lorsque J est une partie à un seul élément i, on convient d'écrire i au lieu de $\{i\}$ dans les notations précédentes. Les systèmes de Tits (G, B^i, N) sont irréductibles : on les appelle les *composants irréductibles* de (G, B, N). La proposition (2.6.4) fournit donc une *décomposition canonique de l'immeuble $\mathscr{I}$ en produit de complexes simpliciaux.*

(2.6.6) Soit $J \subset \{1, \ldots, m\}$. Il est clair que $(B_J, B, N \cap B_J)$ est aussi un système de Tits de groupe de Weyl $\mathbf{W}_J$. Son immeuble est canoniquement isomorphe à $\mathscr{I}_J$, la correspondance $P \mapsto P'$ entre sous-groupes parahoriques de (G, B^J, N) et de $(B_J, B, N \cap B_J)$ pouvant être décrite comme suit : $P' = P \cap B_J$ et P est l'unique sous-groupe parahorique de (G, B, N) de type $\tau(P) \cup (\mathbf{S} - \mathbf{S}_J)$ contenant P'.

2.7. Homomorphismes B-adaptés.

Soit $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-adapté ((1.2.13) sqq., dont nous reprenons les notations). Nous avons vu en 1.2 que $\hat{G}$ opère sur l'ensemble $\mathscr{P}$ des sous-groupes parahoriques de G et nous avons défini un homomorphisme ξ de $\hat{G}$ dans le groupe des automorphismes du système de Coxeter (**W**, **S**), groupe qui s'identifie à $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{C}}^{\dagger}$, avec les notations de (1.3.18), c'est-à-dire au groupe des automorphismes de l'espace euclidien **A** qui conservent la chambre **C**.

(2.7.1) Soit alors $y = (P, x) \in \mathscr{I}$ (avec $P \in \mathscr{P}$ et $x \in \mathbf{C}_{\tau(P)}$). Comme ${}^gP$ est un sous-groupe parahorique de G de type $\xi(g)(\tau(P))$ (1.2.18), le couple $g.y = ({}^gP, \xi(g).x)$ est encore un point de $\mathscr{I}$ et on définit ainsi une *loi d'opération* de $\hat{G}$ dans l'ensemble $\mathscr{I}$. Pour cette loi, le stabilisateur d'une facette F(P) n'est autre que le sous-groupe Stab P (1.2.15) et $\hat{B} = \operatorname{Stab} B \cap \xi^{-1}(1)$ est le fixateur de la chambre F(B).

Proposition **(2.7.2)**. — (i) *Si $g \in G$ et $y \in \mathscr{I}$, on a $\varphi(g).y = g.y$. Autrement dit, les lois d'opération de* G *et de* $\hat{G}$ *sur* $\mathscr{I}$ *sont compatibles avec l'homomorphisme* φ. *On a*

$$\operatorname{Ker} \varphi \subset \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}.$$

(ii) *Pour tout $g \in \hat{G}$, l'application $y \mapsto g.y$ est un automorphisme isométrique de complexe polysimplicial de $\mathscr{I}$.*

(iii) *Si, de plus, l'homomorphisme φ est* B-N-*adapté* (1.2.13), *cette application permute entre eux les appartements (*resp. *les demi-appartements, les quartiers, les murs) de $\mathscr{I}$.*

La première assertion de (i) est immédiate, compte tenu de ce que, pour $g \in G$ et $P \in \mathscr{P}$ on a ${}^{\varphi(g)}P = gPg^{-1}$ et $\xi(\varphi(g)) = 1$. La deuxième en résulte, puisque si $g \in \operatorname{Ker} \varphi$, $\varphi(g)$, donc aussi g, opère trivialement sur $\mathscr{I}$.

Démontrons (ii). Soit $g \in \hat{G}$ et soit γ l'application $y \mapsto g.y$ de $\mathscr{I}$ dans lui-même. Comme l'action de $\hat{G}$ sur $\mathscr{P}$ respecte les relations d'inclusion dans $\mathscr{P}$, on voit que, pour $P \in \mathscr{P}$, l'image par γ de la facette F(P) est la facette $F({}^gP)$ et que $\gamma(\overline{F(P)}) = \overline{F({}^gP)}$. Par ailleurs, la restriction de γ à $\overline{F(P)}$ s'obtient par composition de l'application canonique de $\overline{F(P)}$ sur $\overline{\mathbf{C}}_{\tau(P)}$, de $\xi(g)$ et de l'application canonique de $\overline{\mathbf{C}}_{\xi(g)(\tau(P))}$ sur $\overline{F({}^gP)}$. Comme $\xi(g)$ est un automorphisme de l'espace euclidien **A**, on en déduit que γ est un automorphisme de complexe polysimplicial et que la restriction de γ à $\overline{F(P)}$ est isométrique. Par suite, γ elle-même est isométrique d'après (2.5.17).

Démontrons (iii). Quitte à multiplier g à gauche par un élément de $\varphi(G)$, on peut supposer que g normalise $\varphi(B)$ et $\varphi(N)$. On a alors, pour tout $w \in \mathbf{W}$ (1.2.20)

$$^g(wBw^{-1}) = w'Bw'^{-1} \quad \text{avec } w' = \xi(g)(w) = \xi(g)w\xi(g)^{-1}$$

et plus généralement

$$^g(wB_Xw^{-1}) = w'B_{\xi(g)(X)}w'^{-1} \quad \text{pour } X \in \mathbf{T}.$$

Soit alors $a \in \mathbf{A}$ et soient $X \in \mathbf{T}$ et $w \in \mathbf{W}$ tels que $a \in w.\mathbf{C}_X$. On a $j(a) = (wB_Xw^{-1}, w^{-1}(a))$ et $g.j(a) = (w'B_{\xi(g)(X)}w'^{-1}, \xi(g).w^{-1}.a)$, d'où

$$g.j(a) = (w'B_{\xi(g)(X)}w'^{-1}, w'^{-1}.\xi(g).a) = j(\xi(g).a).$$

Par suite, γ conserve l'appartement $j(\mathbf{A})$ et se réduit sur $j(\mathbf{A})$ à l'application $j \circ \xi(g) \circ j^{-1}$, donc permute entre eux les murs (resp. les quartiers, les demi-appartements) de $j(\mathbf{A})$. On en déduit (iii) en utilisant (i) et la transitivité de G sur les appartements.

(2.7.3) Par contre, $\hat{G}$ *ne permute pas entre elles les applications structurales, sauf si* $\xi(\hat{G}) = \{1\}$.

(2.7.4) Ce qui précède s'applique en particulier si l'on prend pour $\hat{G}$ le groupe $\mathrm{Aut}_B G$ (resp. $\mathrm{Aut}_{(B,N)} G$) des automorphismes de G qui conservent la classe de conjugaison de B (resp. du couple (B, N)) et pour φ l'homomorphisme qui à $g \in G$ associe l'automorphisme intérieur défini par g. On a alors $\gamma.g.x = \gamma(g).\gamma.x$ pour $\gamma \in \hat{G}$, $g \in G$ et $x \in \mathscr{I}$. La proposition (2.7.2) montre alors que *l'immeuble* $\mathscr{I}$ *avec toutes ses structures ne dépend* (à un automorphisme près de $\mathbf{A}$ conservant $\mathbf{C}$ pour ce qui est des applications structurales) *que de la classe de conjugaison du couple* (B, N). Si l'on considère $\mathscr{I}$ comme muni seulement de sa métrique et de sa structure polysimpliciale, il ne dépend que de la classe de conjugaison de B.

2.8. Caractérisations des appartements.

Nous avons vu (2.4.7) que, pour qu'une partie M de $\mathscr{I}$ soit contenue dans un appartement et y soit bornée, il faut et il suffit qu'il existe deux chambres C et C' telles que M soit contenue dans l'enclos de $C \cup C'$. En particulier, la famille des parties de $\mathscr{I}$ qui sont des *parties bornées d'appartement* est complètement déterminée par la donnée de la structure de complexe polysimplicial de $\mathscr{I}$.

Il n'en est pas de même en général de la famille des appartements : il existe des systèmes de Tits de type affine (G, B, N, S) et (G, B, N', S') saturés équivalents pour lesquels N et N' ne sont pas conjugués. Le complexe polysimplicial $\mathscr{I}$ associé est le même pour les deux systèmes, mais les familles d'appartements sont distinctes : sinon, il existerait un élément $g \in G$ tel que $j'(\mathbf{A}) = g.j(\mathbf{A})$ en désignant par j et j' les applications canoniques de **A** dans $\mathscr{I}$ correspondant à ces deux systèmes de Tits de groupe de Weyl **W**, et on aurait $N' = gNg^{-1}$ d'après (2.2.5).

Dans ce numéro, nous allons tout d'abord donner une autre caractérisation des parties bornées d'appartements, puis, dans le cas où le groupe G est *complet* pour une topologie convenable, des appartements eux-mêmes. Enfin, nous montrerons que l'appartement $j(\mathbf{A})$ est entièrement déterminé par la structure polysimpliciale de $\mathscr{I}$ et par le groupe N considéré comme groupe de permutations de $\mathscr{I}$.

Désormais, nous identifierons **A** *et* $j(\mathbf{A})$ *au moyen de* j *et considérerons donc* **A** *comme un appartement de* $\mathscr{I}$.

Proposition (**2.8.1**). — *Soit* M *une partie bornée de* $\mathscr{I}$, *possédant l'une des deux propriétés suivantes* :

a) *l'intérieur de* M *n'est pas vide*;

b) M *est convexe*.

Pour qu'il existe un appartement contenant M, *il faut et il suffit qu'il existe une isométrie de* M *sur une partie de* **A**.

Que la condition soit nécessaire est évident. Supposons-la satisfaite et supposons tout d'abord que l'intérieur de M n'est pas vide. Il existe alors une chambre C_0 telle que $C_0 \cap M$ soit d'intérieur non vide. Par ailleurs, toute isométrie $\varphi : X \to X'$ d'une partie de **A** sur une autre se prolonge en un automorphisme de **A**, qui est unique dès que X contient un ouvert non vide de **A**. On en déduit aisément que, si A est un appartement contenant C_0, il existe une isométrie τ et une seule de M sur une partie de A, dont la restriction à $C_0 \cap M$ est l'identité. De plus, τ est la restriction à M de la rétraction ρ de centre C_0 de $\mathscr{I}$ sur A, puisque l'on a $d(\rho(x), y) = d(x, y) = d(\tau(x), y)$ pour tout $x \in M$ et pour tout y appartenant à $C_0 \cap M$, qui est d'intérieur non vide.

Soit E l'enclos de $\rho(M)$, et soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des chambres $C \subset E$ telles que la restriction de ρ à $M \cup \overline{C}$ soit encore isométrique. La restriction de ρ à l'ensemble M' réunion de M et des adhérences $\overline{C}$ des chambres appartenant à $\mathscr{C}$ est elle aussi isométrique. Nous allons alors raisonner par récurrence sur le nombre k de chambres contenues dans E et n'appartenant pas à $\mathscr{C}$; ce qui précède montre que si $k = 0$, la restriction de ρ à $M \cup E$ est isométrique, ce qui entraîne $M \subset A$.

Supposons donc $k > 0$. En considérant une galerie minimale tendue entre C_0 (qui appartient évidemment à $\mathscr{C}$) et une chambre contenue dans E et n'appartenant pas à $\mathscr{C}$, on voit qu'il existe deux chambres mitoyennes C et C' contenues dans E, telles que $C \in \mathscr{C}$ et $C' \notin \mathscr{C}$. La première partie de la démonstration montre que l'on peut supposer $C = C_0$.

Soit alors F la cloison commune à C et C' et soit $a \in F$. Distinguons deux cas :

1) *Pour tout* $x \in M'$, $x \neq a$, *l'intersection* $[ax] \cap (\overline{C} \cup \overline{C}')$ *est un sous-segment de* $[ax]$ *non réduit à* $\{a\}$. Soient alors $x \in M'$, $x \neq a$, $z \in \overline{C}'$ et soit A' un appartement contenant C' et x. Le triangle T réunion des segments $[az]$, $[zx]$ et $[ax]$ est contenu dans A', donc est « euclidien ». Le triangle $T' = \rho(T)$ lui est alors isométrique, puisque d'une part ρ est

isométrique sur $[ax]$ et que d'autre part les angles au sommet a de T et T' sont égaux puisque ρ est l'identité sur $\bar{C} \cup \bar{C}'$. On a donc $d(z, x) = d(z, \rho(x))$ et la restriction de ρ à $M \cup \bar{C}'$ est isométrique, contrairement à l'hypothèse selon laquelle $C' \notin \mathscr{C}$.

2) *Il existe* $x \in M'$, $x \neq a$ *tel que* $[ax] \cap (\bar{C} \cup \bar{C}') = \{a\}$. Il existe alors une chambre C'' admettant F comme cloison, distincte de C et de C', telle que $[ax] \cap C'' \neq \emptyset$. Soit alors A' un appartement contenant C et x, donc C'', et soit ρ' (resp. ρ'') la rétraction de $\mathscr{I}$ sur A', de centre C (resp. C''). Soit $y \in M'$; comme $\rho = \rho \circ \rho'$, on a

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(\rho(x), \rho(y)) = d(\rho(\rho'(x)), \rho(\rho'(y))) \\ &\leqslant d(\rho'(x), \rho'(y)) \leqslant d(x,y). \end{aligned}$$

Comme $x = \rho'(x) = \rho''(x)$, on en déduit $d(x, \rho'(y)) = d(x,y) \geqslant d(x, \rho''(y))$. Soit R' (resp. R'') le demi-appartement de A' dont le mur contient F et contenant C (resp. C''); on a $x \in R''$. Montrons que $[ay] \cap (\bar{C} \cup \bar{C}'') \neq \{a\}$ dès que $y \neq a$. Sinon, il existerait une chambre C''' admettant F comme cloison, distincte de C et de C'', avec $[ay] \cap C''' \neq \emptyset$. Comme $\rho'(C''') = C''$ (resp. $\rho''(C''') = C$) et que ρ' (resp. ρ'') restreinte à $[ay]$ est une isométrie, on aurait $\rho'(y) \in \mathring{R}''$ et $\rho''(y) \in \mathring{R}'$, avec de plus $\rho''(y) = r.\rho'(y)$, où r est la réflexion dans A' par rapport à l'hyperplan mur commun de R' et R''. Mais ceci entraînerait $d(x, \rho''(y)) > d(x, \rho'(y))$, contrairement à ce que nous avons vu plus haut.

En particulier, si $y \in M' \cap A$, avec $y \neq a$, on a $[ay] \cap C \neq \{a\}$ puisque $C'' \cap A = \emptyset$ et y appartient au demi-appartement R de A contenant C et de mur contenant F. D'après (2.4.12), il existe donc un élément $g \in G$ tel que $g.y = y$ pour tout $y \in M' \cap A$ et $g.C'' = C'$. On a alors $g.C = C$ et ceci entraîne que $\rho(g.z) = \rho(z)$ pour tout $z \in \mathscr{I}$. La restriction de ρ à $M'' = g.M'$ est donc encore une isométrie et l'enclos de $\rho(M'') = \rho(M')$ est toujours égal à E. De plus, pour tout $y \in M''$ avec $y \neq a$, on a $[ay] \cap (\bar{C} \cup \bar{C}') \neq \{a\}$ et l'étude faite plus haut en 1) montre que la restriction de ρ à $M'' \cup \bar{C}'$ est isométrique. Nous nous retrouvons donc dans la même situation, avec M'' au lieu de M, mais la famille $\mathscr{C}$ se trouve augmentée d'au moins une chambre, à savoir C', et le nombre k diminué d'au moins une unité.

L'hypothèse de récurrence entraîne donc qu'il existe un appartement A'' contenant M'' et l'appartement $g^{-1}.A''$ contient M, ce qui achève la démonstration dans le cas *a)*.

Supposons maintenant que M est convexe. Soit F une facette de $\mathscr{I}$, rencontrant M, de plus grande dimension possible, et soit $x \in F \cap M$. Pour tout $y \in M$, $y \neq x$, l'intersection $F \cap [xy]$ n'est pas réduite à $\{x\}$. Soit A un appartement contenant F et soit C une chambre de A dont l'adhérence contient F. Il nous suffit, pour nous ramener au cas précédemment étudié, de montrer que la restriction à $C \cup M$ de la rétraction $\rho = \rho_{A;C}$ est isométrique, ou encore que $d(\rho(y), \rho(z)) = d(y, z)$ pour $y, z \in M$. Or, les deux triangles enveloppes convexes de $\{x, y, z\}$ et de $\{x, \rho(y), \rho(z)\}$ sont tous deux isométriques à des triangles euclidiens; leurs angles au sommet x sont égaux puisque $[xy] \cap [x\rho(y)] \neq \{x\} \neq [xz] \cap [x\rho(z)]$ et les côtés $[xy]$ et $[x\rho(y)]$ (resp. $[xz]$ et $[x\rho(z)]$) sont de longueurs égales. Par suite, on a $d(y, z) = d(\rho(y), \rho(z))$ ([22], livre I, prop. IV), ce qui termine la démonstration.

(2.8.2) Supposons que G soit muni d'une structure de groupe topologique complet, pour laquelle B est un sous-groupe fermé. Supposons de plus qu'il existe une suite décroissante de sous-groupes $(V_n)_{n\geqslant 1}$ formant un système fondamental de voisinages de l'élément neutre, et une suite croissante de parties bornées Ω_n de **A** telles que, en notant P_n le fixateur de $j(\Omega_n)$ dans G, l'on ait

(1) $$P_n = (P_n \cap V_n).H \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Il est immédiat que (1) reste valable si l'on remplace Ω_n par une partie plus grande de **A**. On peut donc supposer de plus que $\mathbf{C} \subset \Omega_1$, que les Ω_n sont de la forme $\mathrm{cl}(C_n \cup C'_n)$, où C_n et C'_n sont des chambres de **A** (2.4.8), et ont pour réunion **A** tout entier. Remarquons que P_n, étant alors une intersection de conjugués de B, est un sous-groupe fermé de G, donc $P_n \cap V_n$ est aussi fermé.

Proposition **(2.8.3)**. — *Sous les hypothèses de* (2.8.2), *toute partie* M *de* $\mathscr{I}$ *qui est réunion d'une suite croissante de parties* M_n $(n \geqslant 0)$ *contenues chacune dans un appartement* A_n, *est elle-même contenue dans un appartement.*

On peut évidemment supposer que les M_n sont bornées et réunions convexes d'adhérences de facettes, et que M_0 est ouvert dans M_n. Choisissons $u_n \in G$ tel que $A_{n+1} = u_n . A_n$ et que $u_n . x = x$ pour tout $x \in M_n \subset A_n \cap A_{n+1}$ (2.5.8). Posons $g_n = u_{n-1} \ldots u_0$ et $M'_n = g_n^{-1} . M_n \subset A_0$. On obtient ainsi une suite croissante de parties bornées de $A = A_0$, dont la réunion M' est une réunion convexe d'adhérences de facettes.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où $M' = A$. Supposons que $M' \neq A$ et soit $\Gamma = (C_0, \ldots)$ une « galerie infinie » ayant pour termes toutes les chambres de A (chacune d'elles pouvant y figurer plusieurs fois) et telle que C_0 contienne une facette de dimension maximale de M'_0. Posons $D_{-1} = \varnothing$ et définissons D_i et la chambre C'_i par récurrence sur $i \geqslant 0$ de la façon suivante : C'_i *est le premier terme de* Γ *non contenu dans* $\mathrm{cl}(M' \cup D_{i-1})$ *et* $D_i = D_{i-1} \cup C'_i$. Quitte à remplacer la suite (M_n) par une suite extraite, on peut supposer que C'_i *est aussi le premier terme de* Γ *non contenu dans* $\mathrm{cl}(M'_i \cup D_{i-1})$. D'autre part, notons C''_i le terme précédant C'_i dans Γ ; lorsque $C'_0 = C_0$, la chambre C'_0 n'a pas de prédécesseur dans Γ et on désigne alors par C''_0 une chambre mitoyenne de C'_0 telle que la cloison commune à C'_0 et C''_0 contienne une facette de dimension maximale de M'. Nous allons montrer par récurrence sur l'entier n qu'il existe, pour $k \geqslant n \geqslant -1$, des éléments $h_{n,k} \in G$ tels que, en posant $h_n = h_{n,n}$:

(1) $h_{n,k}$ *coïncide avec* g_k *sur* M'_k ;
(2) $h_{n,k}$ *coïncide avec* h_n *sur* $\mathrm{cl}(M'_n \cup D_n)$ *pour* $n \geqslant 0$;
(3) h_n *coïncide avec* h_{n-1} *sur* $\mathrm{cl}(M'_{n-1} \cup D_{n-1})$ *pour* $n \geqslant 1$.

On prend $h_{-1} = \mathrm{id}$ et $h_{-1,k} = g_k$ pour $k \geqslant 0$. Soit $n \geqslant 0$ et supposons les $h_{i,k}$ construits pour $i < n$. Soit $k \geqslant n$. Par définition de C'_n et C''_n, l'enclos de $M'_k \cup D_{n-1}$ est contenu dans le demi-appartement de A_0 contenant C_n'' et dont le mur contient la cloison F commune à C_n' et C_n''. Vu l'hypothèse de récurrence, la facette $F'=h_{n-1,k}.F$ ne dépend pas de k et on a $h_{n-1,k}.(M_k'\cup D_{n-1})=M_k\cup h_{n-1}.D_{n-1}$. D'après (2.4.12), il existe un appartement A_k' contenant $h_{n-1,k}.\mathrm{cl}(M_k'\cup D_{n-1})$ et $h_{n-1}.C_n'$. D'après (2.5.8), il existe $h_{n,k}\in G$ tel que $h_{n,k}.A_0=A_k'$ et que $h_{n,k}.x=h_{n-1,k}.x$ pour tout $x\in \mathrm{cl}(M_k'\cup D_{n-1})$. Il est alors immédiat que (1) et (3) sont satisfaites. La condition (2) l'est aussi, car les restrictions de $h_{n,k}$ et de h_n à $\mathrm{cl}(M_n'\cup D_n)$ ont la même image $\mathrm{cl}(M_n\cup h_{n-1}.D_n)$ et coïncident sur la chambre C_0.

En remplaçant M_n par $\mathrm{cl}(M_n\cup h_n.C_n')$ et g_n par h_n, on est bien ramené au cas où $M'=A$.

Supposons donc désormais que $M'=\mathbf{A}$. Comme chaque M_n' est une réunion convexe d'adhérences de facettes, on voit que $\mathbf{A}$ est aussi la réunion des intérieurs des M_n' et, quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer que $\Omega_n\subset M_n'$. Comme $g_{n+1}.x=g_n.x$ pour $x\in M_n'$, on a $g_n^{-1}g_{n+1}\in P_n$ et quitte à remplacer g_{n+1} par un élément de la forme $g_{n+1}'=g_{n+1}h_{n+1}$ avec $h_{n+1}\in H$ (ou encore u_n par $u_n'=g_nh_{n+1}g_{n-1}'^{-1}$), on peut supposer que $g_n^{-1}g_{n+1}\in P_n\cap V_n$.

La suite g_n converge alors vers un élément $g\in G$ et on a $g.x=g_n.x$ pour tout $x\in M_n'$, d'où $M_n\subset g.\mathbf{A}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(2.8.4)**. — *Supposons les hypothèses de* (2.8.2) *satisfaites et soit* M *une partie de* $\mathscr{I}$ *d'intérieur non vide.*

(i) *Pour que* M *soit contenue dans un appartement, il faut et il suffit qu'elle soit isométrique à une partie de* **A**.

(ii) *Pour que* M *soit un appartement, il faut et il suffit qu'elle soit isométrique à* **A**.

Cela résulte de (2.8.1) et (2.8.3).

Proposition **(2.8.5)**. — *Sous les hypothèses de* (2.8.2), *pour qu'une partie* M *de* $\mathscr{I}$ *soit un appartement, il faut et il suffit que* M *soit une partie close contenant au moins une chambre de* $\mathscr{I}$ *et que, pour toute cloison* F *de* $\mathscr{I}$ *contenue dans* M, *il existe exactement deux chambres de* $\mathscr{I}$ *contenues dans* M *et admettant* F *comme cloison.*

Que la condition soit nécessaire est bien clair (et indépendant de (2.8.2) !). Supposons-la réalisée. Pour toute chambre $C\subset M$ et tout $s\in\mathbf{S}$, il existe alors une chambre $C'\subset M$ et une seule, mitoyenne de C et telle que la cloison commune soit de type s. On en conclut immédiatement, en utilisant (2.3.9) et le fait que M est close, que, pour tout $w\in\mathbf{W}$ et toute chambre $C\subset M$, il existe une chambre $C'\subset M$ et une seule telle que $w(C,C')=w$ (2.1.7).

Soient C_n et C_n' comme en (2.8.2). Choisissons une chambre $C^*\subset M$, posons $w_n=w(\mathbf{C},C_n)$ et $w_n'=w(\mathbf{C},C_n')$ et soit C_n^* (resp. $C_n'^*$) la chambre de M telle que $w(C^*,C_n^*)=w_n$ (resp. $w(C^*,C_n'^*)=w_n'$). Comme $\mathbf{C}\subset \mathrm{cl}(C_n\cup C_n')$, on a

$$\ell(w_nw_n'^{-1})=\ell(w_n)+\ell(w_n')\qquad \text{et}\qquad w(C_n',C_n)=w_nw_n'^{-1}.$$

On en déduit aussitôt que $C^* \subset M_n = \mathrm{cl}(C_n^* \cup C_n'^*)$, que $w(C_n'^*, C_n^*) = w_n w_n'^{-1}$, donc qu'il existe $g_n \in G$ tel que $g_n . C_n = C_n^*$, $g_n . C_n' = C_n'^*$. Pour tout $k < n$, on a $g_n . C_k \subset \mathrm{cl}(C_n^* \cup C_n'^*)$ et $w(C^*, g_n . C_k) = w_k$, d'où $C_k^* = g_n . C_k$. De même, $C_k'^* = g_n . C_k'$, ce qui entraîne $M_k \subset M_n$. Vu (2.8.3), il existe donc $g \in G$ tel que $g . \mathbf{C} = C^*$ et que $M_n \subset g . \mathbf{A}$ pour tout n, d'où $g . C_n = C_n^*$ et $g . C_n' = C_n'^*$ et par suite $g . \mathbf{A} = \bigcup_n M_n \subset M$. Si de plus, on avait $M \neq \mathbf{A}$, il y aurait au moins une cloison de M appartenant à trois chambres distinctes contenues dans M, contrairement à l'hypothèse. Par suite, $M = g . \mathbf{A}$ est bien un appartement de $\mathscr{I}$.

Corollaire **(2.8.6)**. — *Soit* φ *une injection de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathscr{I}$. *On suppose que* φ *est un morphisme chambré* (1.1.7) *de complexes polysimpliciaux et envoie chaque cloison de* $\mathbf{C}$ *sur une cloison de même type. Alors* $\varphi(\mathbf{A})$ *est un appartement et* φ *est une application structurale.*

On montre immédiatement par récurrence sur $\ell(w(\mathbf{C}, C))$ que φ envoie une cloison d'une chambre quelconque C de $\mathbf{A}$ sur une cloison de même type. On en déduit que l'image d'une galerie minimale est une galerie minimale de même type, ce qui entraîne que $\varphi(\mathbf{A})$ est close, donc est un appartement d'après (2.8.5). Il existe donc une application structurale ψ telle que $\psi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A})$ et $\psi(\mathbf{C}) = \varphi(\mathbf{C})$. Mais $\psi^{-1} \circ \varphi$ est alors un automorphisme de complexe polysimplicial de $\mathbf{A}$, dont la restriction à $\mathbf{C}$ est un automorphisme affine de $\mathbf{C}$ conservant chaque cloison de $\mathbf{C}$, ce qui entraîne que $\psi^{-1} \circ \varphi$ est l'identité, d'où le corollaire.

(2.8.7) On voit donc que, sous les hypothèses de (2.8.2), la famille des appartements de $\mathscr{I}$ ne dépend que de la structure polysimpliciale de $\mathscr{I}$. On en déduit en particulier que *tout homomorphisme* B-*adapté* $\varphi : G \to \hat{G}$ *est automatiquement* B-N-*adapté.*

Par ailleurs, on montre facilement que *la métrique de* $\mathscr{I}$ *détermine sa structure polysimpliciale* : les points de $\mathscr{I}$ intérieurs à une chambre sont ceux qui possèdent un voisinage isométrique à un ouvert de $\mathbf{A}$. Il résulte alors de (2.8.4) que, sous les hypothèses de (2.8.2), toute isométrie de $\mathscr{I}$ sur lui-même est un automorphisme de l'immeuble $\mathscr{I}$, à un automorphisme de $(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ près.

Lemme **(2.8.8)**. — *Soient* A *un appartement,* C *une chambre de* A, y, y' *deux points de* $\mathscr{I}$. *Si* $C \subset \mathrm{cl}(\{\rho_{A;C}(y), \rho_{A;C}(y')\})$, *alors* $C \subset \mathrm{cl}(\{y, y'\})$.

Posons $\rho = \rho_{A;C}$, $z = \rho(y)$ et $z' = \rho(y')$. Soient (Γ, C) (resp. Γ') une galerie tendue entre y et C (resp. entre C et y'), C′ l'origine de Γ et C″ l'extrémité de Γ'. Vu (2.4.4), la galerie $(\rho(\Gamma), \rho(\Gamma'))$ est minimale. La galerie (Γ, Γ'), qui est de même type, l'est donc aussi (2.1.11) et C est contenue dans $\mathrm{cl}(C' \cup C'')$. Par suite, il existe $g \in G$ tel que $g . C = C$, $g . C' = \rho(C')$ et $g . C'' = \rho(C'')$. On a alors

$$\mathrm{cl}(\{y, y'\}) = g^{-1} . \mathrm{cl}(\{g . y, g . y'\}) = g^{-1} . \mathrm{cl}(\{z, z'\}) \supset g^{-1} . C = C.$$

Proposition **(2.8.9)**. — *Soient* D *une chambre vectorielle,* $x, x' \in \mathbf{A}$ *et* $y, y' \in \mathscr{I}$. *Supposons qu'il existe* $y_1 \in x + D$ *et* $y_1' \in x' - D$ *tels que* $d(y, y_1)$ (resp. $d(y', y_1')$) *soit inférieur à la distance de* y_1 (resp. y_1') *au complémentaire de* $x + D$ (resp. $x' - D$) *dans* $\mathbf{A}$. *Alors*

$$\mathrm{cl}(\{y, y'\}) \supset (x' + D) \cap (x - D).$$

Soit C une chambre rencontrant $(x-\mathrm{D})\cap(x'+\mathrm{D})$ et soit ρ la rétraction de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{A}$ de centre C. On a $\rho(y)\in x+\overline{\mathrm{D}}$ et $\rho(y')\in x'-\overline{\mathrm{D}}$. Vu (2.4.8) et (2.8.8), on a donc $\mathrm{C}\subset\mathrm{cl}(\{y,y'\})$, d'où notre assertion.

Corollaire **(2.8.10)**. — *Soient* D *une chambre vectorielle, v un élément de* D *et λ un nombre réel tel que $0\leqslant\lambda<1$. Il existe un nombre réel $\varepsilon>0$ tel que, pour $x, x'\in\mathbf{A}$ et $y,y'\in\mathscr{I}$, les relations $x'-x\in\mathbf{R}v$, $d(x,y)<\varepsilon.d(x,x')$ et $d(x',y')<\varepsilon.d(x,x')$ entraînent l'existence de $z, z'\in[yy']\cap\mathbf{A}$ avec $d(z,z')\geqslant\lambda.d(x,x')$.*

Soient x_i $(i=1,\ldots,6)$ six points distincts d'une droite L de $\mathbf{A}$, tels que $x_i\in[x_{i-1}x_{i+1}]$ pour $i=2,\ldots,5$, que $x_6-x_1\in\mathbf{R}_+v$ et que $d(x_3,x_4)>\lambda.d(x_1,x_6)$. Soit $r\in\mathbf{R}_+^*$ et soit X_i la boule de $\mathbf{A}$ de centre x_i et de rayon r $(1\leqslant i\leqslant 6)$. Supposons r assez petit pour que $\mathrm{X}_1\subset x_2-\mathrm{D}$, $\mathrm{X}_3\cup\mathrm{X}_4\subset(x_2+\mathrm{D})\cap(x_5-\mathrm{D})$ et $\mathrm{X}_6\subset x_5+\mathrm{D}$ et posons $\varepsilon=r.d(x_1,x_6)^{-1}$.

Soient $x, x'\in\mathbf{A}$ et $y,y'\in\mathscr{I}$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Quitte à transformer le système des x_i par une homothétie ou une translation et à multiplier r, v et D par le rapport d'homothétie, ce qui ne change pas ε, on peut supposer que $x=x_1$ et $x'=x_6$. Soit A un appartement contenant $\{y,y'\}$. On a $d(x,y)<\varepsilon.d(x,x')=r$ et, de même, $d(x',y')<r$. De (2.8.9) on déduit alors que $\mathrm{A}\supset(x_2+\mathrm{D})\cap(x_5-\mathrm{D})$. Soient C une chambre de $\mathbf{A}$ rencontrant cette intersection et ρ la restriction à A de la rétraction $\rho_{\mathrm{A};\,\mathrm{C}}$. On a $\mathrm{C}\subset\mathrm{A}\cap\mathbf{A}$ et ρ est une isométrie de A sur $\mathbf{A}$ laissant fixes tous les points de $\mathrm{A}\cap\mathbf{A}$ (2.3.4). Comme $\rho_{\mathrm{A};\,\mathrm{C}}$ diminue les distances (2.5.3), on a aussi $\rho(y)\in\mathrm{X}_1$ et $\rho(y')\in\mathrm{X}_6$. On en déduit aussitôt qu'il existe $z\in[\rho(y)\rho(y')]\cap\mathrm{X}_3$ et $z'\in[\rho(y)\rho(y')]\cap\mathrm{X}_4$ tels que $d(z,z')\geqslant\lambda.d(x,x')$. Comme $\mathrm{X}_3\cup\mathrm{X}_4\subset(x_2+\mathrm{D})\cap(x_5-\mathrm{D})\subset\mathbf{A}\cap\mathrm{A}$, on a $z=\rho^{-1}(z)$ et $z'=\rho^{-1}(z')$, d'où $z, z'\in[yy']\cap\mathbf{A}$.

Proposition **(2.8.11)**. — *L'appartement* $\mathbf{A}$ *est la plus petite partie convexe non vide de $\mathscr{I}$ invariante par $\nu^{-1}(\mathbf{V})$. Il est aussi la plus petite partie close non vide de $\mathscr{I}$ invariante par $\nu^{-1}(\mathbf{V})$.*

La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première.

Soient M une partie convexe non vide de $\mathscr{I}$ invariante par $\nu^{-1}(\mathbf{V})$, $y\in\mathrm{M}$, $x\in\mathbf{A}$ et $g\in\nu^{-1}(\mathbf{V})$ tel que $\nu(g)$ n'appartienne au noyau d'aucune racine vectorielle. Posons $v=\nu(g)$ et soient λ, ε des nombres réels possédant les propriétés du corollaire (2.8.10). Pour $n\in\mathbf{N}$ suffisamment grand, on a $d(x,y)=d(g^n.x, g^n.y)<\varepsilon.d(x, g^n.x)$, donc il existe $z\in[y(g^n.y)]\cap\mathbf{A}=\mathrm{M}\cap\mathbf{A}$. Comme l'enveloppe convexe de $\nu^{-1}(\mathbf{V})(z)$ est manifestement $\mathbf{A}$, on a $\mathbf{A}\subset\mathrm{M}$.

(2.8.12) Nous allons montrer par un exemple que les assertions (2.8.3) à (2.8.7) ne demeurent pas valables si on supprime les hypothèses de (2.8.2).

Supposons $\mathrm{card}\,\mathbf{S}=2$, posons $\mathrm{S}=\{s_1,s_2\}$ et soient X un sous-groupe de B, $n_i'\in\mathrm{B}s_i\mathrm{B}$ $(i=1,2)$ tels que $n_i'^2\in\mathrm{X}$ et $n_i'\mathrm{X}n_i'^{-1}=\mathrm{X}$, et N′ le groupe engendré par n_1', n_2' et X. Il est clair que X est distingué dans N′ et qu'il existe un homomorphisme surjectif $\eta:\mathbf{W}\rightarrow\mathrm{N}'/\mathrm{X}$ et un seul tel que $\eta(s_i)=n_i'\mathrm{X}$. De (1.2.8), il résulte que si $w\in\mathbf{W}$, on a $\eta(w)\subset\mathrm{B}w\mathrm{B}$. Par conséquent, η est bijectif. On en déduit aussitôt que (G, B, N′) est un système de Tits de groupe de Weyl $\mathbf{W}$, équivalent à (G, B, N) (1.2.11). Par suite, l'immeuble $\mathscr{I}'$ de (G, B, N') s'identifie en tant qu'espace métrique et que complexe polysimplicial à l'immeuble $\mathscr{I}$ de (G, B, N) (2.7.4), et les appartements de $\mathscr{I}'$ sont ceux de $\mathscr{I}$ si et seulement s'il existe $b \in B$ avec $N' \subset bNb^{-1}$ (2.2.6), c'est-à-dire $\eta(w) \subset b.w\mathrm{H}.b^{-1}$ pour tout $w \in \mathbf{W}$.

Exemple **(2.8.13)**. — Soit p un nombre premier, et soit ω_p la valuation p-adique de $\mathbf{Q}$. Prenons $G = SL_2(\mathbf{Q})$,

$$B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \mid \omega_p(a) = \omega_p(d) = 0,\ \omega_p(b) \geqslant 0,\ \omega_p(c) > 0\right\},$$

$$N = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in G\right\}.$$

D'après [28], (G, B, N) est un système de Tits de type affine de rang 1 (voir aussi (6.2.3), *a*)). On a

$$H = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{Q},\ \omega_p(a) = 0\right\},$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.H \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p^{-1} & 0 \end{pmatrix}.H.$$

Posons

$$n'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$n'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2p \\ -p^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On vérifie aisément que les hypothèses de (2.8.12) sont satisfaites et que les valeurs propres de $n'_1 n'_2$ ne sont pas rationnelles. Il en résulte que $n'_1 n'_2$ n'est pas conjugué d'un élément de $s_1 s_2 H$, donc que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$ n'ont pas les mêmes appartements.

2.9. Quartiers.

Proposition **(2.9.1)**. — *Soient* A *un appartement de* $\mathscr{I}$ *et* $\mathfrak{C}$ *un quartier de* A. *Il existe une application* $\rho_{A;\mathfrak{C}}$ *et une seule de* $\mathscr{I}$ *dans* A *possédant la propriété suivante : pour toute partie bornée* M *de* $\mathscr{I}$, *il existe un quartier* $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ *tel que, pour toute chambre* C *rencontrant* $\mathfrak{C}'$, *l'on ait* $\rho_{A;\mathfrak{C}}(x) = \rho_{A;C}(x)$ *pour tout* $x \in M$.

Nous devons montrer qu'étant donnée une partie bornée M de $\mathscr{I}$, il existe un quartier $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ tel que, si C désigne une chambre rencontrant $\mathfrak{C}'$, la restriction de $\rho_{A;C}$ à M ne dépend pas du choix de C. On peut évidemment supposer que M est réunion d'adhérences de chambres. Prenons un point a de A et posons $d = \sup\{d(a, x) \mid x \in M\}$. Soit M' la boule de centre a et de rayon d dans A et soit $\mathfrak{C}_1$ un quartier opposé à $\mathfrak{C}$ et contenant M' ((2.4.8) (i)). Soit b le sommet de $\mathfrak{C}_1$ et soit $\mathfrak{C}''$ le quartier de A opposé à $\mathfrak{C}_1$ (donc équipollent à $\mathfrak{C}$) de sommet b. Nous allons montrer que le quartier $\mathfrak{C}'=\mathfrak{C}\cap\mathfrak{C}''$ répond à la question.

Soit C_0 une chambre de A à laquelle b soit adhérent; posons $\rho=\rho_{A;\,C_0}$. Comme une rétraction diminue les distances, on a $\rho(C')\subset M'\subset\mathfrak{C}_1$ pour toute chambre C' contenue dans M.

Soit C une chambre rencontrant $\mathfrak{C}''$. D'après (2.4.9), l'enclos de $C\cup\rho(C')$ contient C_0. Il existe donc une galerie minimale Γ de la forme

$$(C, C_1, \ldots, C_m, C_0, C_{m+1}, \ldots, C_n, \rho(C'))$$

et il existe une galerie minimale de la forme $(C_0, C'_{m+1}, \ldots, C'_n, C')$ avec $\rho(C'_j)=C_j$ pour $m+1\leqslant j\leqslant n$. La galerie $(C, C_1, \ldots, C_m, C_0, C'_{m+1}, \ldots, C'_n, C')$ est sans bégaiement et a même type que Γ. Elle est donc minimale, et son image par la rétraction $\rho_{A;\,C}$ est Γ, unique galerie minimale de type $\mathbf{s}(\Gamma)$ et d'origine C. Par suite, on a

$$\rho_{A;\,C}(C')=\rho_{A;\,C_0}(C')$$

pour toute chambre C' contenue dans M et toute chambre C rencontrant $\mathfrak{C}''$, d'où la proposition.

Définition (**2.9.2**). — *L'application* $\rho_{A;\,\mathfrak{C}}$ *définie par* (2.9.1) *s'appelle la* rétraction de $\mathscr{I}$ sur l'appartement A relativement au quartier $\mathfrak{C}$.

Il est clair que $\rho=\rho_{A;\,\mathfrak{C}}$ ne change pas si l'on remplace $\mathfrak{C}$ par un quartier de A équipollent à $\mathfrak{C}$, et ne dépend donc que du « germe de quartier » de A défini par $\mathfrak{C}$ (cf. (7.2.3), (7.4.12)). Il est aussi clair que ρ diminue les distances et que sa restriction à l'adhérence d'une chambre est isométrique (2.5.3).

Corollaire (**2.9.3**). — *Soient* A *un appartement de* $\mathscr{I}$, $\mathfrak{C}$ *un quartier de* A *et* C *une chambre de* $\mathscr{I}$. *Il existe un quartier* $\mathfrak{C}'\subset\mathfrak{C}$ *tel que la restriction de* $\rho_{A;\,\mathfrak{C}}$ *à* $\mathfrak{C}'\cup C$ *soit isométrique.*

Vu (2.5.3), (ii), il suffit de prendre un quartier $\mathfrak{C}'\subset\mathfrak{C}$ tel que $\rho_{A;\,\mathfrak{C}}(C)=\rho_{A;\,C'}(C)$ pour toute chambre C' rencontrant $\mathfrak{C}'$.

Corollaire (**2.9.4**). — *Supposons* G *muni d'une structure de groupe topologique complet satisfaisant aux hypothèses de* (2.8.2). *Soient* $\mathfrak{C}$ *un quartier et* C *une chambre de* $\mathscr{I}$. *Il existe un quartier* $\mathfrak{C}'\subset\mathfrak{C}$ *et un appartement contenant* C *et* $\mathfrak{C}'$.

Cela résulte de (2.9.3) et (2.8.4).

Proposition (**2.9.5**). — *Soient* A *et* A' *deux appartements,* $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}'$) *un quartier de* A (resp. A'). *Il existe des quartiers* $\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'_1\subset\mathfrak{C}'$ *tels que la restriction à* $\mathfrak{C}_1\cup\mathfrak{C}'_1$ *de la rétraction de* $\mathscr{I}$ *sur* A *relativement à* $\mathfrak{C}$ *soit isométrique.*

On peut supposer que $A=\mathbf{A}$ (identifié à $j(\mathbf{A})$). Notons ρ la rétraction de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{A}$ relativement au quartier $\mathfrak{C}$. Pour toute chambre C de A', soit $m(C)$ le centre de gravité de C et soit Q(C) l'intersection de C avec le quartier de A' de sommet $m(C)$ équipollent à $\mathfrak{C}'$. On vérifie aisément qu'il existe un élément $w(\mathrm{C})$ et un seul du groupe de Weyl ${}^v\mathbf{W}$ du système de racines ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ tel que $\rho(\mathrm{Q}(\mathrm{C}))\subset\rho(m(\mathrm{C}))+w.\mathrm{D}$, où D est la chambre vectorielle direction de $\mathfrak{C}$. Choisissons alors une chambre C_0 de A′ de telle sorte que la longueur de $w(\mathrm{C}_0)$ dans ${}^v\mathbf{W}$ (relativement à la base B(D) de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ associée à D) soit la plus grande possible. On peut supposer que $\mathfrak{C}'$ a pour sommet $m(\mathrm{C}_0)$, que $\mathfrak{C}$ est contenu dans $\rho(m(\mathrm{C}_0))+\mathrm{D}$ et que l'on a $\rho(\mathrm{C}_0)=\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_0)$ pour toute chambre C rencontrant $\mathfrak{C}$.

Faisons de $\mathbf{A}$ et de A′ des espaces vectoriels en choisissant comme origine les points $m(\mathrm{C}_0)$ et $\rho(m(\mathrm{C}_0))$ respectivement. On a alors $\mathfrak{C}'=\mathbf{R}_+.\mathrm{Q}(\mathrm{C}_0)$.

Nous allons montrer que, pour tout $v\in\mathrm{Q}(\mathrm{C}_0)$, tout $t\in\mathbf{R}_+$ et toute chambre C de $\mathbf{A}$ rencontrant $\mathfrak{C}$, l'on a

$$\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(tv)=t\rho(v)=\rho(tv). \tag{1}$$

Par continuité, il suffit de démontrer (1) lorsque la droite $\mathbf{R}v$ ne rencontre aucune facette de codimension 2, ce que nous supposons désormais. Il existe alors une suite strictement croissante $(t_0,\ldots,t_{n+1})$ de points de l'intervalle $[0,t]$, avec $t_0=0$ et $t_{n+1}=t$, et une galerie minimale $(\mathrm{C}_0,\ldots,\mathrm{C}_n)$ contenue dans A′ telles que $\mathrm{C}_i\cap[0,tv]\supset\,]t_iv,t_{i+1}v[$ pour $0\leqslant i\leqslant n$. Raisonnons par récurrence sur l'entier n, la relation (1) étant vraie lorsque $n=0$. Supposons $n>0$; vu l'hypothèse de récurrence, la relation (1), après substitution de s à t, est vraie pour $0\leqslant s\leqslant t_n$. On en déduit que $\rho(\mathrm{C}_{n-1})=\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_{n-1})$.

Il suffit de montrer que $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_n)$ est la chambre C'_n mitoyenne de $\mathrm{C}'_{n-1}=\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_{n-1})$ le long de la cloison F image par ρ de la cloison commune à C_{n-1} et C_n. En effet, ceci implique que la restriction de $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}$ à $\overline{\mathrm{C}}_{n-1}\cup\overline{\mathrm{C}}_n$ est isométrique, donc que l'application $t\mapsto\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(tv)$ de $[t_{n-1},t_{n+1}]$ dans $\mathbf{A}$ est affine. La première égalité (1) en résulte. La seconde se ramène à la première en choisissant la chambre C « suffisamment éloignée » dans $\mathfrak{C}''$ pour que ρ et $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}$ coïncident sur $\mathrm{C}_0\cup\ldots\cup\mathrm{C}_n$.

Soit alors L le mur de $\mathbf{A}$ contenant F et soit α la racine affine de mur L contenant C'_{n-1}. On a alors $\rho([t_{n-1}v,t_nv])\subset\alpha$, d'où, vu l'hypothèse de récurrence, $\rho([0,t_nv])\subset\alpha$ et $\mathrm{C}'_0=\rho(\mathrm{C}_0)\subset\alpha$. De plus, $\alpha^*+w(\mathrm{C}_0).\mathrm{D}=\alpha^*$. Si $\alpha\supset\mathrm{C}$, la relation cherchée $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_n)=\mathrm{C}'_n$ résulte immédiatement de (2.3.12). Si α contient un quartier équipollent à $\mathfrak{C}$, on a $\alpha\supset\rho(\mathrm{C}_0)+\mathrm{D}$, et α contient $\mathfrak{C}$, donc C. Reste enfin à examiner le cas où α^* contient C et un quartier de direction D. Si $\rho(\mathrm{C}_n)\neq\mathrm{C}'_n$, on a $\rho(\mathrm{C}_n)=\mathrm{C}'_{n-1}$ et le segment $[\rho(t_nv),\rho(t_{n+1}v)]$ est contenu dans le symétrique par rapport à L de la demi-droite $[t_n,\infty[.v$. On en déduit que $w(\mathrm{C}_n)=s.w(\mathrm{C}_0)$, où s est l'image dans ${}^v\mathbf{W}$ de la réflexion par rapport à L. Mais D et $w(\mathrm{C}_0).\mathrm{D}$ sont du même côté de l'hyperplan des points fixes de s, ce qui entraîne que la longueur de $sw(\mathrm{C}_0)$ est strictement plus grande que celle de $w(\mathrm{C}_0)$, d'où une contradiction vu le choix de C_0. Par suite, on a $\rho(\mathrm{C}_n)=\mathrm{C}'_n$. Montrons maintenant que $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_n)=\mathrm{C}'_n$. Supposons au contraire que $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}_n)=\mathrm{C}'_{n-1}$; il existe alors une chambre C'' mitoyenne de C_n et C_{n-1} telle que $\rho_{\mathbf{A};\,\mathrm{C}}(\mathrm{C}'')=\mathrm{C}'_n$ (2.3.12). La longueur h d'une galerie tendue entre C et C″ est alors égale à celle d'une galerie tendue entre C et C'_n et, puisque C et C'_{n-1} sont de part et d'autre de L, la longueur d'une galerie tendue entre C et C'_{n-1} est égale à $h+1$. On en déduit que $\rho(\mathrm{C}'')=\mathrm{C}'_n$; en effet, $\rho(C'')$ admet F comme cloison, donc est égale à C'_n ou à C'_{n-1}, et ne peut pas être égale à C'_{n-1} puisque l'image par ρ d'une galerie tendue entre C et C'' est une galerie de longueur h joignant C à $\rho(C'')$. Mais ceci contredit (2.3.12) : en prenant une chambre C''' contenue dans un quartier suffisamment petit contenu dans $\mathfrak{C}$, on en déduit en effet que les deux chambres mitoyennes C_n et C'' sont envoyées par la rétraction $\rho_{\mathbf{A};\,C'''}$ sur la même chambre C'_n, qui est située du même côté de L que C'''. Par suite, nous avons bien montré que $\rho_{\mathbf{A};\,C}(C_n)=C'_n$, ce qui achève la démonstration de (1).

Montrons alors que la restriction de ρ à $\mathfrak{C}\cup\mathfrak{C}'$ est isométrique. La relation (1) entraîne que, pour $x\in\mathfrak{C}$ et $y\in\mathfrak{C}'$, on a

$$d(\rho(x),\,\rho(y))=d(x,\,\rho_{\mathbf{A};\,C}(y))=d(x,y)$$

en prenant pour C une chambre contenant x dans son adhérence et en appliquant (2.5.3) (ii). Si $x, y\in\mathfrak{C}'$, il existe $t\in\mathbf{R}_+^*$ tel que tx et ty appartiennent à $Q(C_0)$ et on a alors, vu (1) et le fait que la restriction de ρ à $Q(C_0)$ est isométrique,

$$\begin{aligned} d(\rho(x),\,\rho(y)) &= d(t^{-1}\rho(tx),\,t^{-1}\rho(ty))=t^{-1}d(\rho(tx),\,\rho(ty)) \\ &= t^{-1}d(tx,\,ty)=d(x,y). \end{aligned}$$

Comme ρ est l'identité sur $\mathfrak{C}$, ceci achève la démonstration.

Corollaire **(2.9.6)**. — *Reprenons les hypothèses de* (2.8.2), *et soient* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *deux quartiers de* $\mathscr{I}$. *Il existe des quartiers* $\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'_1\subset\mathfrak{C}'$ *contenus dans un même appartement.*

Cela résulte de (2.9.5) et (2.8.4).

3. SOUS-GROUPES BORNÉS

On conserve les notations des paragraphes précédents.

3.1. Bornologie définie par un système de Tits.

Définition **(3.1.1).** — *Une* bornologie *sur un ensemble* X *est un ensemble* $\mathscr{B}$ *de parties de* X, *dites parties* bornées, *stable par réunion finie, contenant les parties finies de* X *et telle que* $M \in \mathscr{B}$ *et* $M' \subset M$ *entraîne* $M' \in \mathscr{B}$. *Si* X *est un groupe, on dit que* $\mathscr{B}$ *est compatible avec la loi de groupe de* X, *ou fait de* X *un* groupe bornologique, *si* $M, M' \in \mathscr{B}$ *entraîne* $M^{-1}M' \in \mathscr{B}$.

Exemple **(3.1.2).** — *a)* L'ensemble des parties relativement compactes d'un groupe topologique séparé X fait de X un groupe bornologique.

b) Soit E un espace métrique. Le groupe Isom E des isométries de E possède une bornologie naturelle formée des ensembles M possédant les propriétés équivalentes suivantes :

(i) il existe un point $x \in E$ tel que l'ensemble des $g(x)$ pour $g \in M$ est borné dans E;

(ii) pour toute partie bornée F de E, l'ensemble des $g(x)$ pour $g \in M$ et $x \in F$ est borné.

c) Soient X′ un groupe bornologique et $\varphi : X \to X'$ un homomorphisme de groupes. L'ensemble des parties de X dont l'image est une partie bornée de X′ forme une bornologie sur X, compatible avec la loi de groupe de X, et appelée image réciproque de la bornologie de X′ par φ.

Proposition **(3.1.3).** — *Soit* $\mathscr{B}$ *l'ensemble des parties de* G *dont l'image canonique dans* $B\backslash G/B$ *est finie. Alors* $\mathscr{B}$ *est une bornologie sur* G *compatible avec la loi de groupe de* G.

Que $\mathscr{B}$ soit une bornologie est évident. D'autre part, il est clair que $M \in \mathscr{B}$ entraîne $M^{-1} \in \mathscr{B}$ et il suffit de montrer que $M, M' \in \mathscr{B}$ entraîne $MM' \in \mathscr{B}$, ce qui est immédiat puisque le produit de deux doubles classes modulo B appartient à $\mathscr{B}$ ([5], chap. IV, § 2, nº 1, lemme 1).

Définition **(3.1.4).** — *La bornologie* $\mathscr{B}$ *introduite en* (3.1.3) *est dite définie par le système de Tits* (G, B, N).

Comme $M \in \mathscr{B}$ équivaut à $gMg^{-1} \in \mathscr{B}$ (quel que soit $g \in G$), il est clair que $\mathscr{B}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de B. *Deux systèmes de Tits équivalents définissent la même bornologie* : nous verrons plus loin la réciproque (3.5.1).

Proposition (3.1.5). — *Soit* $\mathscr{B}$ *une bornologie sur* G, *compatible avec la loi de groupe et telle que* $B \in \mathscr{B}$. *Soit* $\mathscr{B}_W$ *l'ensemble des parties* M *de* **W** *telles que* $BMB \in \mathscr{B}$. *Alors* $\mathscr{B}_W$ *fait de* **W** *un groupe bornologique. Si* X *est une partie de* **W** *telle que la réunion des* $BxBx^{-1}B$, *pour* $x \in X$, *soit bornée pour* $\mathscr{B}$, *l'ensemble des réflexions associées aux divers éléments de* X *est borné dans* **W**.

La première assertion est évidente. La deuxième résulte de ce que, si t appartient à l'ensemble T_w des réflexions associées à $w \in \mathbf{W}$ (2.3.10), on a $BtB \subset BwBw^{-1}B$ ([5], chap. IV, § 2, nº 4, cor. 2 du th. 2).

Corollaire (3.1.6). — *Munissons* G *de la bornologie* $\mathscr{B}$ *définie par le système de Tits* (G, B, N) *et soit* M *une partie de* G. *Pour que* M *soit borné, il faut et il suffit que la réunion des* gBg^{-1} *pour* $g \in M$ *le soit.*

Posons $M' = \bigcup_{g \in M} gBg^{-1}$. Si M est borné, on a $M' \subset MBM^{-1} \in \mathscr{B}$. Réciproquement, supposons M′ borné et soit $X \subset \mathbf{W}$ tel que $BXB = BMB$. Vu (3.1.5), l'ensemble des réflexions associées aux divers éléments de X est borné dans **W**, c'est-à-dire fini. Comme tout $w \in \mathbf{W}$ est produit des réflexions qui lui sont associées, prises une fois et une seule dans un ordre convenable, X lui-même est fini et M est borné.

Remarque (3.1.7). — Les résultats qui précèdent sont valables pour un système de Tits quelconque, non nécessairement de type affine.

Proposition (3.1.8). — *Soit* Isom $\mathscr{I}$ *le groupe des isométries de l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* (G, B, N). *La bornologie de* G *définie par le système de Tits* (G, B, N) *est l'image réciproque de la bornologie naturelle de* Isom $\mathscr{I}$ *par l'homomorphisme canonique de* G *dans* Isom $\mathscr{I}$.

Soit $M \subset G$ et soit X l'image canonique de M dans B\G/B. Dire que l'image de M dans Isom $\mathscr{I}$ est bornée revient à dire que

$$\sup_{g \in M} d(F(B), F(gBg^{-1})) < +\infty.$$

Or, si $g \in BxB$ avec $x \in \mathbf{W}$, on a $d(F(B), F(gBg^{-1})) = d(\mathbf{C}, x(\mathbf{C}))$. Comme **W** opère proprement sur **A**, on a $\sup_{x \in X} d(\mathbf{C}, x(\mathbf{C})) < +\infty$ si et seulement si X est fini, d'où la proposition.

(3.1.9) Soit $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-adapté et soit $B_1 = \text{Stab}\, B$ le normalisateur de $\varphi(B)$ dans $\hat{G}$. Nous avons défini en 2.7 un homomorphisme de $\hat{G}$ dans Isom $\mathscr{I}$ « prolongeant » l'homomorphisme canonique de G dans Isom $\mathscr{I}$. Nous appellerons encore *bornologie définie par le système de Tits* (G, B, N) *dans* $\hat{G}$ l'image réciproque par cet homomorphisme de la bornologie naturelle de Isom $\mathscr{I}$.

Proposition. — *Munissons* G *et* $\hat{G}$ *des bornologies définies par le système de Tits* (G, B, N). *Soit* $M \subset \hat{G}$; *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) M *est borné dans* $\hat{G}$;

(ii) $\varphi^{-1}(MB_1)$ *est borné dans* G;

(iii) *l'image de* M *dans* $B_1 \backslash \hat{G} / B_1$ *est finie.*

Montrons que (i) entraîne (ii). Comme B_1 est borné dans $\hat{G}$, comme stabilisateur de la chambre F(B), MB_1 est borné dès que M l'est et l'image de MB_1 est bornée dans Isom $\mathscr{I}$, d'où (ii).

Si $\varphi^{-1}(MB_1) \subset BXB$ avec $X \subset \mathbf{W}$, on a $M \subset B_1XB_1$; on en déduit que (ii) entraîne (iii).

Enfin, (iii) entraîne (i) puisque B_1 est borné.

3.2. Un lemme de point fixe.

(3.2.1) Soient $x, y \in \mathscr{I}$. D'après (2.5.4), il existe un unique point $m \in \mathscr{I}$ tel que $d(x, m) = d(y, m) = (1/2)d(x, y)$: on l'appelle le *milieu* de $\{x, y\}$.

Lemme. — Soient $x, y, z \in \mathscr{I}$ *et soit* m *le milieu de* $\{x, y\}$. *On a*

$$d(x, z)^2 + d(y, z)^2 \geqslant 2d(m, z)^2 + (1/2)d(x, y)^2. \tag{1}$$

Soit A un appartement de $\mathscr{I}$ contenant x et y, soit C une chambre de A dont l'adhérence contienne m et posons $z' = \rho_{A;C}(z)$ (2.3.5). Vu (2.5.3), on a $d(x, z) \geqslant d(x, z')$, $d(y, z) \geqslant d(y, z')$ et $d(m, z) = d(m, z')$. La relation (1) résulte alors de l'égalité

$$d(x, z')^2 + d(y, z')^2 = 2d(m, z')^2 + (1/2)d(x, y)^2$$

valable pour tout point z' de l'espace euclidien A ([31], livre VII, prop. 122).

Remarque **(3.2.2)**. — Soit E un espace métrique et soient x, y et m trois points de E tels que la relation (1) soit satisfaite pour tout point $z \in E$. Faisant successivement $z = x$ et $z = y$, on voit que $d(m, x) = d(m, y) = (1/2)d(x, y)$. De plus, si $m' \in E$ est tel que $d(m', x) = d(m', y) = (1/2)d(x, y)$, on a $m = m'$ comme on le voit en faisant $z = m'$ dans (1). En particulier, pour $x, y \in \mathscr{I}$, le milieu m de $\{x, y\}$ est l'unique point de $\mathscr{I}$ satisfaisant à (1) pour tout $z \in \mathscr{I}$.

Lemme **(3.2.3)**. — *Soit* E *un espace métrique complet et* E′ *une partie de* E *possédant la propriété suivante* :

(CN) *Quels que soient les points* x *et* y *de* E′, *il existe un point* $m \in E'$ *tel que la relation* (1) *de* (3.2.1) *soit satisfaite, pour tout point* z *de* E′.

Si M *est une partie bornée non vide de* E′, *le stabilisateur de* M *dans* Isom E *possède un point fixe dans l'adhérence de* E′ *dans* E.

Si X et Y sont deux parties de E, nous poserons

$$\operatorname{diam}(X, Y) = \sup_{x \in X, y \in Y} d(x, y)$$

$$\operatorname{diam} X = \operatorname{diam}(X, X).$$

Soit k un nombre réel tel que $0 < k < 1$. Pour toute partie X de E′, notons $f(X)$ l'ensemble des points $m \in E'$ pour lesquels il existe $x, y \in X$ tels que la relation (1) soit satisfaite pour tout $z \in E'$ et que $d(x,y) \geqslant k.\mathrm{diam}\, X$; vu (CN), on a $f(X) \neq \emptyset$ si $X \neq \emptyset$. Pour des points x, y, m satisfaisant à ces conditions, et pour $z \in E'$, on a :

$$d(m, z)^2 \leqslant (1/2)(d(x, z)^2 + d(y, z)^2) - (1/4) d(x,y)^2 \tag{2}$$
$$\leqslant \mathrm{diam}(X, \{z\})^2 - (k^2/4)(\mathrm{diam}\, X)^2.$$

Pour $z \in X$, on en tire :

$$\mathrm{diam}(f(X), X) \leqslant k_1.\mathrm{diam}\, X \quad \text{avec} \quad k_1 = (1 - (k^2/4)^{1/2}) < 1. \tag{3}$$

De plus, en prenant $z \in f(X)$ dans (2), on tire de (2) et (3) :

$$\mathrm{diam}\, f(X) \leqslant k_2.\mathrm{diam}\, X \quad \text{avec } k_2 = (1 - (k^2/2)^{1/2}) < 1. \tag{4}$$

Soit M une partie bornée non vide de E'; d'après (4), on a

$$\mathrm{diam}\, f^q(M) \leqslant k_2^q.\mathrm{diam}\, M \quad \text{pour tout entier } q \geqslant 1. \tag{5}$$

Choisissons alors un point $x_q \in f^q(M)$ pour $q \in \mathbf{N}^*$, ce qui est loisible puisque $f^q(M)$ n'est pas vide. Il résulte de (3) et (5) que $d(x_q, x_{q+1}) \leqslant k_1 k_2^q.\mathrm{diam}\, M$ et la suite de Cauchy (x_q) converge vers un point $x \in \overline{E}'$, indépendant du choix des x_q d'après (5). Enfin, il est clair que le stabilisateur de M dans Isom E laisse invariant chacun des $f^q(M)$, donc aussi x. Ceci achève la démonstration.

On remarquera qu'*a priori* le point x ainsi construit dépend du choix de la constante k.

Proposition (3.2.4). — *Soit* M *une partie bornée non vide de l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* G. *Le stabilisateur de* M *dans* Isom $\mathscr{I}$ *possède un point fixe appartenant à l'adhérence de l'enveloppe convexe de* M.

Cela résulte des lemmes (3.2.1) et (3.2.3), en prenant dans ce dernier pour E l'immeuble $\mathscr{I}$ et pour E' l'enveloppe convexe de M.

Remarque (3.2.5). — Soient E un espace métrique et x, y, m trois points de E. La démonstration du lemme (3.2.1) montre que s'il existe une application ρ de E dans un espace euclidien, diminuant les distances, telle que $d(\rho(m), \rho(z)) = d(m, z)$ pour tout $z \in E$ et que $\rho(m)$ soit le milieu du segment $[\rho(x)\rho(y)]$, alors la relation (1) est satisfaite pour tout $z \in E$. Ceci s'applique en particulier au cas où E est un *espace riemannien simplement connexe à courbure négative* et où m est le milieu du segment géodésique $[xy]$: il suffit de prendre pour ρ l'application de E sur son espace tangent en m, inverse de l'application exponentielle ([24], chap. I, § 13). Le lemme (3.2.3) fournit alors dans ce cas une démonstration simple du résultat classique sur l'existence d'un point fixe pour un groupe compact d'isométries d'une telle variété riemannienne. Il est assez curieux que ce même lemme, qui va nous servir pour déterminer les classes de conjugaisons de sous-groupes bornés maximaux des groupes algébriques semi-simples sur un corps local, puisse ainsi être utilisé pour démontrer la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie réels.

D'ailleurs, l'immeuble $\mathscr{I}$ joue en quelque sorte pour G un rôle analogue à celui que joue pour un groupe de Lie semi-simple réel l'espace riemannien symétrique quotient par un sous-groupe compact maximal : c'est un espace métrique complet contractile, sur lequel opère le groupe, les stabilisateurs de chaque point étant bornés, et le lemme (3.2.1) exprime une sorte de propriété de « courbure négative ». Pour d'autres exemples de cette analogie, voir [35].

3.3. Sous-groupes bornés maximaux.

Soit $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-adapté; munissons $\hat{G}$ de la bornologie définie par le système de Tits (G, B, N, S) comme en (3.1.9).

Théorème **(3.3.1).** — *Pour qu'un sous-groupe de* $\hat{G}$ *soit borné, il faut et il suffit qu'il stabilise un sous-groupe parahorique de* G.

Si un sous-groupe Γ de $\hat{G}$ stabilise un sous-groupe parahorique P de G, il laisse fixe la facette F(P) de $\mathscr{I}$ et est par suite borné, par définition même de la bornologie de $\hat{G}$.

Réciproquement, si Γ est borné, toute orbite de Γ dans $\mathscr{I}$ est bornée et (3.2.4) implique que Γ possède un point fixe x dans $\mathscr{I}$. Soit P le sous-groupe parahorique de G tel que $x \in F(P)$. Alors Γ conserve F(P) et on a ${}^{g}P = P$ pour tout $g \in \Gamma$ (2.7.1), ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(3.3.2).** — *Tout sous-groupe borné de* $\hat{G}$ *est contenu dans un sous-groupe borné maximal. Les sous-groupes bornés maximaux sont les éléments maximaux de l'ensemble des stabilisateurs de sous-groupes parahoriques de* G.

Cela résulte immédiatement du théorème et de (1.2.19), qui montre que le stabilisateur d'un sous-groupe parahorique n'est contenu que dans un nombre fini de stabilisateurs de sous-groupes parahoriques.

Corollaire **(3.3.3).** — *Les sous-groupes bornés maximaux de* G *sont les sous-groupes parahoriques maximaux. En particulier, ils forment* $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (\ell_i + 1)$ *classes de conjugaison (où les entiers* ℓ_i *pour* $1 \leqslant i \leqslant m$ *sont les dimensions des composants irréductibles de* **A**).

Il suffit d'appliquer (3.3.2) au cas $\varphi = \mathrm{Id}_G$.

(3.3.4) Rappelons qu'on a défini en (1.2.16) un homomorphisme ξ de $\hat{G}$ dans le groupe des automorphismes du graphe de Coxeter de **W**, tel que, si P est un sous-groupe parahorique de type X de G, alors ${}^{g}P$ est de type $\xi(g)(X)$ pour tout $g \in \hat{G}$. Posons $\Xi = \xi(\hat{G})$. La proposition suivante est une version « abstraite » d'un résultat d'Iwahori-Matsumoto :

Proposition. — *Soient* P *et* P' *deux sous-groupes parahoriques de* G, X *et* X' *leurs types et* Ξ_X *le stabilisateur de* X *dans* Ξ. *Pour que* Stab P *soit un sous-groupe borné maximal de* $\hat{G}$, *il faut et il suffit que* X *soit maximal parmi les types de sous-groupes parahoriques invariants par* Ξ_X.

Pour que Stab P *et* Stab P′ *soient conjugués dans* $\hat{G}$, *il faut et il suffit qu'il existe* $t \in \Xi$ *tel que* $X' = t(X)$.

On peut supposer $P = B_X$. On a rappelé (1.2.19) que $\operatorname{Stab} P \subset \operatorname{Stab} P'$ équivaut à $P' = B_{X'}$ avec $X \subset X'$ et $\Xi_X \subset \Xi_{X'}$. Cette dernière condition signifie que X′ est invariant par Ξ_X, d'où la première assertion.

S'il existe $g \in \hat{G}$ tel que $\operatorname{Stab} P' = g(\operatorname{Stab} P)g^{-1}$, on a $P' = {}^gP$, d'où $X' = \xi(g)(X)$. Réciproquement, s'il existe $t \in \Xi$ tel que $X' = t(X)$, et si $g \in \xi^{-1}(t)$, les sous-groupes ${}^gP$ et P′ sont de même type, donc conjugués, et il en est de même de Stab P′ et de $\operatorname{Stab} P = g^{-1}(\operatorname{Stab} {}^gP)g$.

(3.3.5) Supposons le système de Tits (G, B, N) irréductible. Alors, Stab P *est maximal si et seulement si le type* X *de* P *est le complémentaire d'une orbite d'un sous-groupe de* Ξ *dans* **S**.

Si de plus Ξ est cyclique d'ordre q (ce qui est fréquemment le cas dans les applications aux groupes algébriques simples), le nombre c des classes de conjugaison de sous-groupes bornés maximaux de G satisfait à l'inégalité $c < \ell + 1$ (où ℓ est la dimension de **A**), sauf lorsque $q = 1$ ou 2, auquel cas on a $c = \ell + 1$. On voit en effet aisément que, si Ξ permute cycliquement une partie Y de **S**, le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes bornés maximaux de $\hat{G}$ de la forme $\operatorname{Stab} B_X$ avec $X \supset \mathbf{S} - Y$, est égal au nombre de diviseurs de Card Y.

(3.3.6) Pour des exemples de détermination explicite des classes de conjugaison de sous-groupes Stab P maximaux, voir [28].

3.4. Caractérisation de la bornologie définie par un système de Tits de type affine.

On reprend les notations de 2.6.

Théorème **(3.4.1)**. — *Soit* $\mathscr{B}$ *une bornologie sur* G, *compatible avec la loi de groupe de* G *et telle que* B *soit borné. Il existe une partie* $J \subset \{1, \ldots, m\}$ *et une seule telle que* $\mathscr{B}$ *soit la bornologie définie par le système de Tits* (G, B^J, N).

Nous allons tout d'abord établir deux lemmes.

Lemme **(3.4.2)**. — *Supposons* **W** *irréductible et soit* $\mathbf{W}^0$ *le stabilisateur dans* **W** *d'un point spécial* $a \in \overline{\mathbf{C}}$. *Si* X *est une partie infinie de* **W**, *toute réflexion de* **W** *est associée à au moins un élément de* $\mathbf{W}^0.X$.

Faisons de **A** un espace vectoriel en prenant a comme origine. Soit r une réflexion de **W** et soient φ une forme linéaire sur **A** et $k \in \mathbf{R}$ tels que l'équation $\varphi(x) = k$ définisse le mur L de **A**, ensemble des points fixes de r, et que **C** soit contenue dans $\{x \in \mathbf{A} \mid \varphi(x) < k\}$. Vu l'irréductibilité de **W**, l'ensemble Φ des transformés de φ par ${}^v\mathbf{W}$ engendre le dual de $\mathbf{A}$ et $\Phi = -\Phi$ puisque la réflexion de mur Ker φ transforme φ en $-\varphi$. Il en résulte que l'ensemble

$$E = \bigcap_{w \in {}^v\mathbf{W}} w.\{x \in \mathbf{A} \mid \varphi(x) < k\}$$

est borné et il existe $x \in X$ tel que $x(\mathbf{C}) \not\subset E$. Il existe alors $w \in \mathbf{W}^0$ tel que $wx(\mathbf{C}) \subset \{x \in \mathbf{A} | \varphi(x) > k\}$ et la réflexion r est associée à wx d'après (2.3.10).

Lemme **(3.4.3)**. — *Il existe un entier* N *tel que tout élément de* $\mathbf{W}$ *soit le produit d'au plus* N *réflexions de* $\mathbf{W}$.

Faisons de $\mathbf{A}$ un espace vectoriel en prenant comme origine un point spécial et reprenons les notations de (1.3.8). Soit $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ une base du système de racines associé à $\mathbf{W}$. Pour toute racine $a \in {}^v\mathbf{\Sigma}$ et tout entier $n \in \mathbf{Z}$, le composé $r_{a,n} \circ r_{a,0}$ est la translation de vecteur $-n.a^\vee$; comme les translations de vecteur $a_i^\vee$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$ forment une base du groupe $\mathbf{V}$ des translations de $\mathbf{W}$ et que $\mathbf{W}$ est produit semi-direct du stabilisateur $\mathbf{W}^0$ de l'origine par $\mathbf{V}$ (1.3.7), on en déduit que l'on peut prendre $N = N' + 2\ell$, où N′ est le plus petit entier tel que tout élément de $\mathbf{W}^0$ (qui est fini et isomorphe à ${}^v\mathbf{W}$) puisse s'écrire comme produit d'au plus N′ réflexions.

Remarque **(3.4.4)**. — Posons $M = \bigcup_{g \in G} gBg^{-1}$ et soit N un entier satisfaisant aux conditions de (3.4.3). *On a alors* $G = M^{2N}$. En effet, pour toute réflexion $r \in \mathbf{W}$ il existe $x \in \mathbf{W}$ tel que $r \in T_x$ (par exemple r lui-même). On a alors $BrB \subset BxBx^{-1}B \subset B.M \subset M^2$. Si $w \in \mathbf{W}$ est le produit de $k \leqslant N$ réflexions r_j, on a donc $BwB \subset \prod_j Br_jB \subset M^{2N}$.

(3.4.5) Démontrons maintenant le théorème (3.4.1). Soit $\mathscr{B}$ une bornologie sur G, compatible avec la loi de groupe et telle que B soit borné. Pour tout $j = 1, \ldots, m$, considérons la bornologie $\mathscr{B}_j$ induite par $\mathscr{B}$ sur $B_j = B\mathbf{W}_jB$ et soit $\mathscr{B}_\mathbf{W}$ (resp. $\mathscr{B}_{\mathbf{W}_j}$) la bornologie sur $\mathbf{W}$ (resp. $\mathbf{W}_j$) déduite de $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}_j$) comme en (3.1.5). S'il existe une partie X de $\mathbf{W}_j$ infinie et bornée pour $\mathscr{B}_{\mathbf{W}_j}$, le lemme (3.4.2) joint à (3.1.5) montre que l'ensemble des réflexions de $\mathbf{W}_j$ est borné, donc, d'après (3.4.3), que $\mathbf{W}_j$ lui-même est borné pour $\mathscr{B}_j$. Autrement dit, ou bien $B_j \in \mathscr{B}$, ou bien $\mathscr{B}_j$ est la bornologie définie par le système de Tits $(B_j, B, B_j \cap N)$.

Soit alors $J = \{j \in \{1, \ldots, m\} | B_j \in \mathscr{B}\}$. Nous allons montrer que $\mathscr{B}$ est la bornologie définie par (G, B^J, N). Quitte à remplacer B par B^J, on peut supposer que $J = \emptyset$. Soit alors $X \in \mathscr{B}_\mathbf{W}$ et soit Y l'ensemble des réflexions associées aux divers points de X. Nous avons vu (3.1.5) que Y est borné pour $\mathscr{B}_\mathbf{W}$; par suite, d'après la première partie de la démonstration, $Y \cap \mathbf{W}_i$ est *fini* pour tout i. Comme toute réflexion de $\mathbf{W}$ est contenue dans l'un des $\mathbf{W}_i$, il en résulte que Y lui-même est fini. Donc X est fini, d'où notre assertion.

Enfin, l'unicité de J est évidente : c'est la plus grande partie de $\{1, \ldots, m\}$ telle que B^J soit borné.

Corollaire **(3.4.6)**. — *La bornologie définie par* (G, B, N) *est contenue dans toute bornologie compatible avec la loi de groupe de* G *et pour laquelle* B *est borné. Les bornologies définies par les* *composants irréductibles de* (G, B, N) *sont les bornologies maximales parmi les bornologies compatibles avec la loi de groupe de* G *et pour lesquelles* B *est borné et* G *ne l'est pas. Si le système* (G, B, N) *est irréductible, la bornologie qu'il définit est l'unique bornologie compatible avec la loi de groupe de* G *pour laquelle* B *est borné et* G *ne l'est pas.*

Corollaire **(3.4.7).** — *Soit* $\varphi : G \to \hat{G}$ *un homomorphisme* B-*adapté. La bornologie définie sur* $\hat{G}$ *par le système de Tits* (G, B, N) *est l'unique bornologie sur* $\hat{G}$ *qui est compatible avec la structure de groupe de* $\hat{G}$ *et pour laquelle* $\hat{B}$ *est borné et* $\varphi(B^J)$ *est non borné pour toute partie non vide* J *de* $\{1, \ldots, m\}$.

Si en particulier le système de Tits (G, B, N) *est irréductible, la bornologie qu'il définit dans* $\hat{G}$ *est l'unique bornologie compatible avec la structure de groupe de* $\hat{G}$, *pour laquelle* $\hat{B}$ *est borné et* $\hat{G}$ *ne l'est pas.*

Si une bornologie sur $\hat{G}$ satisfait aux conditions de la première partie de l'énoncé, elle induit sur le sous-groupe $\hat{G}_0 = \operatorname{Ker} \xi$ (avec les notations de (1.2.17)) la bornologie définie par le système de Tits ($\hat{B}$, $\varphi(N)$), qui est évidemment la même que la bornologie définie dans $\hat{G}_0$ par (G, B, N) et l'homomorphisme $\varphi : G \to \hat{G}_0$. Or $\hat{G}_0$ est d'indice fini dans $\hat{G}$, d'où la première assertion du corollaire. La deuxième en résulte.

3.5. Caractérisation d'un système de Tits de type affine par sa bornologie.

Le théorème (3.3.1) montre que les sous-groupes parahoriques maximaux du système de Tits (G, B, N) sont bien déterminés par la donnée de la bornologie définie par ce système de Tits. Plus précisément :

Théorème **(3.5.1).** — *Deux systèmes de Tits de type affine dans un même groupe sont équivalents si et seulement si ils définissent la même bornologie.*

Commençons par établir deux lemmes.

Lemme **(3.5.2).** — *Supposons* **W** *irréductible et soient* P, P′ *deux sous-groupes parahoriques maximaux distincts. Pour que* $P \cap P'$ *soit un sous-groupe parahorique, il faut et il suffit que ce soit un sous-groupe maximal de* P.

Si $P \cap P'$ est un sous-groupe parahorique, on peut supposer que $B \subset P \cap P'$. Comme **W** est irréductible, il existe deux éléments distincts $s, s' \in \mathbf{S}$ tels que $P = B_{\mathbf{S}-\{s\}}$ et $P' = B_{\mathbf{S}-\{s'\}}$, et $P \cap P' = B_{\mathbf{S}-\{s, s'\}}$ est maximal dans P.

Réciproquement, supposons $P \cap P'$ maximal dans P. Soit D une boule de centre $x = a_P$ (2.1.2) possédant les propriétés du lemme (2.5.11) et soit $a \in D \cap [a_P a_{P'}]$ avec $a \neq a_P$. Soit Q le sous-groupe parahorique tel que $a \in F(Q)$. On a $P \cap P' \subset Q$ d'après (2.5.4) (iii) et $a_P \in \overline{F(Q)}$ d'après (2.5.11), d'où $Q \subset P$. On en tire $P \cap P' = Q$.

Lemme **(3.5.3).** — *Soient* $P_1, \ldots, P_q$ *des sous-groupes parahoriques. L'intersection* $P_1 \cap \ldots \cap P_q$ *est un sous-groupe parahorique si et seulement si* $P_h \cap P_k$ *est un sous-groupe parahorique pour* $1 \leqslant h, k \leqslant q$.

Que la condition soit nécessaire est évident. Montrons qu'elle est suffisante par récurrence sur q. Supposons que $Q = P_1 \cap \ldots \cap P_{q-1}$ soit un sous-groupe parahorique et soit A un appartement contenant $F(Q)$ et $F(P_q)$. Soit Γ l'enveloppe convexe de la réunion des $F(P_h)$ pour $1 \leqslant h \leqslant q$ et soit L un mur de A. Comme $F(P_h)$ et $F(P_k)$ sont deux facettes de A situées du même côté de L (pour $1 \leqslant h, k \leqslant q$), l'ensemble Γ est tout entier du même côté de L. Ceci étant vrai pour tout mur, Γ est donc contenu dans l'adhérence d'une facette $F(Q')$ et on a $P_h \supset Q'$ pour tout h, ce qui entraîne que l'intersection des P_h est bien un sous-groupe parahorique.

(3.5.4) Passons maintenant à la *démonstration du théorème* (3.5.1). Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire (3.1.4). Montrons qu'elle est suffisante. Soient (B, N) et (B′, N′) deux systèmes de Tits de type affine dans le même groupe G, définissant la même bornologie. Vu (3.4.6), il existe une bijection de l'ensemble des composants irréductibles de (G, B, N) sur celui des composants irréductibles de (G, B′, N′) telle que les bornologies définies par deux composants irréductibles se correspondant par cette bijection soient les mêmes. Compte tenu de (2.6.4), on voit donc qu'il suffit de démontrer notre assertion dans le cas où (B, N) et (B′, N′) sont irréductibles, c'est-à-dire, vu (3.4.6), lorsque la bornologie qu'ils définissent est maximale parmi les bornologies compatibles avec la loi de groupe de G pour lesquelles G n'est pas borné. Comme (B, N) et (B′, N′) ont les mêmes sous-groupes parahoriques maximaux, les lemmes (3.5.2) et (3.5.3) montrent qu'ils ont les mêmes sous-groupes parahoriques, c'est-à-dire sont équivalents.

Remarque **(3.5.5)**. — La bornologie définie par un système de Tits de type affine est complètement déterminée par la donnée des sous-groupes parahoriques maximaux, et même par la donnée d'un seul sous-groupe parahorique puisque les parties bornées sont celles qui sont contenues dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes modulo un sous-groupe parahorique donné. On voit donc que deux systèmes de Tits de type affine dans un même groupe ayant mêmes sous-groupes parahoriques maximaux, ou ayant un sous-groupe parahorique commun, sont équivalents.

Signalons que l'on peut démontrer que deux systèmes de Tits (quelconques) dans un même groupe ayant les mêmes sous-groupes *paraboliques* maximaux sont équivalents.

Proposition **(3.5.6)**. — *Soit* $\varphi : G \to \hat{G}$ *un homomorphisme* B-*adapté. Soit* $\hat{G}_0$ *le noyau de l'homomorphisme* $\xi : \hat{G} \to \mathrm{Aut}\,\mathrm{Cox}(\mathbf{W}, \mathbf{S})$ *correspondant* (1.2.16). *Le groupe* $\hat{G}_0$ *est l'intersection des sous-groupes d'indice fini de* $\hat{G}$ *qui contiennent un sous-groupe borné maximal de* $\hat{G}$ (*pour la bornologie définie par* φ).

On peut supposer $G = \hat{G}_0$ et $\varphi = \mathrm{id}$ (1.2.17). Si L est un sous-groupe d'indice fini de $\hat{G}$, contenant un sous-groupe borné maximal, alors $L \cap G$ contient un sous-groupe parahorique de G (3.3.4) et par suite, on a $L \cap G = G$ puisqu'un sous-groupe parabolique du système de Tits (G, B, N) n'est pas d'indice fini dans G, sauf s'il est égal à G.

Soit maintenant $g \in \hat{G} - G$ et soit X une orbite de $\xi(g)$ dans $\mathrm{Cox}(\mathbf{W}, \mathbf{S})$ non réduite à un point. Il existe une partie $Y \subset \mathbf{S}$ qui est un type de sous-groupe parahorique maximal de G et qui est telle que $X \not\subset Y$ et $X \not\subset \mathbf{S} - Y$: si $\mathrm{Card}(X \cap \mathbf{S}_i) \leqslant 1$ pour toute composante irréductible $\mathbf{S}_i$ de $\mathrm{Cox}(\mathbf{W}, \mathbf{S})$, ce qui implique que $(\mathbf{W}, \mathbf{S})$ n'est pas irréductible, il suffit de choisir un point x_i dans chaque $\mathbf{S}_i$ de telle sorte que pour un indice i_1 on ait $x_{i_1} \in X$ et pour un indice i_2 on ait $x_{i_2} \notin X$ (rappelons que $\mathrm{Card}\, \mathbf{S}_i \geqslant 2$ pour tout i) et de prendre pour Y le complémentaire dans $\mathbf{S}$ de l'ensemble des x_i; s'il existe un indice i_0 tel que $\mathrm{Card}(X \cap \mathbf{S}_{i_0}) \geqslant 2$, il suffit de prendre Y tel que $\mathbf{S}_{i_0} - (\mathbf{S}_{i_0} \cap Y)$ soit réduit à un point de X. Soit alors Ξ_Y le stabilisateur de Y dans $\Xi = \xi(\hat{G})$ et soit $L = \xi^{-1}(\Xi_Y)$. Alors, L contient le sous-groupe borné maximal Stab B_Y, ne contient pas g et est d'indice fini dans $\hat{G}$.

(3.5.7) La proposition (3.5.6) montre que la donnée de la bornologie de $\hat{G}$ détermine $\hat{G}_0$ et aussi, d'après (3.5.1), le système de Tits de $\hat{G}_0$ à équivalence près, donc l'immeuble de $\hat{G}$, etc., c'est-à-dire tout ce qu'apporte en substance l'homomorphisme B-adapté φ pour l'étude de $\hat{G}$.

4. DÉCOMPOSITIONS D'IWASAWA ET DE CARTAN

On conserve les notations des paragraphes précédents.

On désigne par $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-N-adapté. Rappelons qu'on a défini en 2.7 une loi d'opération de $\hat{G}$ sur l'immeuble $\mathscr{I}$, pour laquelle les opérations de $\hat{G}$ sont des automorphismes isométriques de complexe polysimplicial et permutent entre eux les appartements (resp. demi-appartements, murs, quartiers) de $\mathscr{I}$.

4.1. Fixateurs et stabilisateurs.

(4.1.1) Soit Ω une partie de $\mathscr{I}$; nous poserons

$$\hat{P}_\Omega = \{g \in \hat{G} \mid g.x = x \text{ pour tout } x \in \Omega\}$$
$$\hat{P}_\Omega^\dagger = \{g \in \hat{G} \mid g.\Omega = \Omega\}$$
$$P_\Omega = \varphi^{-1}(\hat{P}_\Omega) = \{g \in G \mid g.x = x \text{ pour tout } x \in \Omega\}$$
$$P_\Omega^\dagger = \varphi^{-1}(\hat{P}_\Omega^\dagger) = \{g \in G \mid g.\Omega = \Omega\}.$$

Lorsque Ω se réduit à un point x, nous écrirons P_x, etc. au lieu de $P_{\{x\}}$, etc. Lorsque $\Omega = \mathbf{C}$ (identifiée à $j(\mathbf{C})$), on a $P_{\mathbf{C}} = P_{\mathbf{C}}^\dagger = B$, le sous-groupe $\hat{P}_{\mathbf{C}}$ n'est autre que le sous-groupe $\hat{B}$ introduit en (2.7.1) et $\hat{P}_{\mathbf{C}}^\dagger = \text{Stab } B$.

Les sous-groupes P_Ω et $\hat{P}_\Omega$ ne changent pas si l'on remplace Ω par son enveloppe convexe fermée ((2.5.4) (iii)).

Il est clair que $g\hat{P}_\Omega g^{-1} = \hat{P}_{g.\Omega}$, etc. pour $\Omega \subset \mathscr{I}$ et $g \in \hat{G}$.

Comme l'ensemble des points fixes d'un élément $g \in G$ dans $\mathbf{A}$ est une réunion convexe d'adhérences de facettes, on a toujours

$$P_\Omega = P_{\text{cl}(\Omega)}. \tag{1}$$

Si Ω contient une chambre C, on a aussi

$$\hat{P}_\Omega = \hat{P}_{\text{cl}(\Omega)}. \tag{2}$$

En effet, on peut supposer $C = \mathbf{C}$. On a alors

$$\hat{P}_\Omega \subset \hat{B} \subset \hat{G}_0 = \text{Ker } \xi$$

et (2) résulte de (1) appliqué au système de Tits $(\hat{G}_0, \hat{B}, \varphi(N))$ (1.2.17).

(4.1.2) On désigne par $\hat{N}$ le stabilisateur $\hat{P}_{\mathbf{A}}^\dagger$ de l'appartement $\mathbf{A}$ (identifié à $j(\mathbf{A})$) dans $\hat{G}$. On a, d'après (2.2.5), $N = P_{\mathbf{A}}^\dagger = \varphi^{-1}(\hat{N})$ et $\hat{G} = \hat{N}.\varphi(G)$ (2.7.2). On désigne par $\hat{\nu}$ l'homomorphisme évident de $\hat{\mathrm{N}}$ dans le groupe des automorphismes de l'espace affine euclidien $\mathbf{A}$ et on pose $\hat{\mathbf{W}}=\hat{\nu}(\hat{\mathrm{N}})$. On note $\hat{\mathbf{V}}$ le sous-groupe des translations de $\hat{\mathbf{W}}$. Le groupe $\hat{\mathbf{W}}$ est contenu dans le normalisateur $\tilde{\mathbf{W}}$ de $\mathbf{W}$ dans le groupe des automorphismes de $\mathbf{A}$. Par suite, les sous-groupes $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ et $\hat{\mathbf{V}}$ sont distingués dans $\hat{\mathbf{W}}$.

On pose $\hat{\mathrm{H}}=\mathrm{Ker}\,\hat{\nu}$; il est clair que $\hat{\mathrm{H}}=\hat{\mathrm{P}}_{\mathbf{A}}$ et que $\mathrm{H}=\varphi^{-1}(\hat{\mathrm{H}})$. Pour toute chambre C contenue dans $\mathbf{A}$, on a $\hat{\mathrm{N}}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}=\hat{\mathrm{H}}$.

Définition **(4.1.3)**. — *Nous dirons que l'homomorphisme* B-N-*adapté* φ *est* de type connexe *si les images* ${}^v\mathbf{W}$ *et* ${}^v\hat{\mathbf{W}}$ *de* $\mathbf{W}$ *et* $\hat{\mathbf{W}}$ *dans le groupe des automorphismes de* ${}^v\mathbf{A}$ *coïncident, autrement dit, si l'on a* $\hat{\mathbf{W}}\subset\tilde{\mathbf{W}}_{\mathrm{int}}$ ((1.3.18) (6)).

Si φ est de type connexe et si x est un point spécial de $\mathbf{A}$, on a $\hat{\mathbf{W}}_x=\mathbf{W}_x$ et $\hat{\mathbf{W}}=\mathbf{W}_x.\hat{\mathbf{V}}$.

Proposition **(4.1.4)**. — *Pour toute partie* Ω *contenue dans* $\mathbf{A}$, *posons* $\hat{\mathrm{N}}_\Omega^\dagger=\hat{\mathrm{P}}_\Omega^\dagger\cap\hat{\mathrm{N}}$ *et* $\hat{\mathrm{N}}_\Omega=\hat{\mathrm{P}}_\Omega\cap\hat{\mathrm{N}}$. *On a*

$$\hat{\mathrm{P}}_\Omega^\dagger=\hat{\mathrm{N}}_\Omega^\dagger.\varphi(\mathrm{P}_\Omega) \qquad \textit{et} \qquad \hat{\mathrm{P}}_\Omega=\hat{\mathrm{N}}_\Omega.\varphi(\mathrm{P}_\Omega).$$

Si Ω *contient un ouvert non vide, on a* $\hat{\mathrm{P}}_\Omega=\hat{\mathrm{H}}.\varphi(\mathrm{P}_\Omega)$.

Soit $g\in\hat{\mathrm{P}}_\Omega^\dagger$; d'après (2.5.8), il existe $g'\in\mathrm{P}_\Omega$ tel que $g'.\mathbf{A}=g.\mathbf{A}$. On a alors $\varphi(g'^{-1})g\in\hat{\mathrm{N}}_\Omega^\dagger$ et même $\varphi(g'^{-1})g\in\hat{\mathrm{N}}_\Omega$ si $g\in\hat{\mathrm{P}}_\Omega$; d'où la première assertion. Si Ω contient un ouvert non vide, on a $\hat{\nu}(n)=1$ pour tout $n\in\hat{\mathrm{N}}_\Omega$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

(4.1.5) Si D est une chambre vectorielle (1.3.10), nous noterons $\hat{\mathbf{V}}_{\mathrm{D}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathbf{V}}$ appartenant à $\overline{\mathrm{D}}$ et E_{D} l'ensemble des quartiers de $\mathbf{A}$ de direction D (1.3.11). Si $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2\in\mathrm{E}_{\mathrm{D}}$, on a aussi $\mathfrak{C}_1\cap\mathfrak{C}_2\in\mathrm{E}_{\mathrm{D}}$: cela résulte immédiatement de ce que D est un cône simplicial, ensemble des points à coordonnées strictement positives pour une base convenable de ${}^v\mathbf{A}$. Comme $\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}_1}\cup\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}_2}\subset\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}_1\cap\mathfrak{C}_2}$, les sous-groupes $\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}$ pour $\mathfrak{C}\in\mathrm{E}_{\mathrm{D}}$ forment une famille filtrante croissante et leur *réunion* est un sous-groupe de G que nous noterons $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}^0$.

Pour $g\in\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$ et $\mathfrak{C}\in\mathrm{E}_{\mathrm{D}}$, on a $\hat{\nu}(g).\mathfrak{C}\in\mathrm{E}_{\mathrm{D}}$ et $g\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}g^{-1}=\hat{\mathrm{P}}_{\hat{\nu}(g).\mathfrak{C}}$. Par suite, le sous-groupe $\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$ normalise $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}^0$ et $\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}).\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}^0$ est un *sous-groupe* de $\hat{\mathrm{G}}$, que nous noterons $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}$. On pose $\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}^0=\varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}^0)$ et $\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}=\varphi^{-1}(\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}})$. Il est immédiat que $\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}=\nu^{-1}(\mathbf{V}).\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}^0$, que $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}=\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}).\varphi(\mathfrak{B}_{\mathrm{D}})$ et que $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathrm{D}}^0=\hat{\mathrm{H}}.\varphi(\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}^0)$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous donnons une chambre vectorielle $\mathbf{D}$ *et nous omettons en général l'indice* $\mathbf{D}$ *dans les notations* $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathbf{D}}^0$, $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathbf{D}}$, $\mathfrak{B}_{\mathbf{D}}^0$ *et* $\mathfrak{B}_{\mathbf{D}}$.

4.2. Doubles classes.

Soient Q et Q' deux sous-groupes de $\hat{\mathrm{G}}$ contenant $\hat{\mathrm{H}}$. Posons

$$\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}=\hat{\nu}(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q}), \qquad \hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}'}=\hat{\nu}(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q}').$$

Puisque $\hat{\mathrm{H}}=\mathrm{Ker}\,\hat{\nu}\subset \mathrm{Q}\cap\mathrm{Q}'\cap\hat{\mathrm{N}}$, l'image réciproque par $\hat{\nu}$ d'une double classe $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}w\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}'}$ dans $\hat{\mathbf{W}}$ est une double classe $(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q})n(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q}')$ dans $\hat{\mathrm{N}}$ (où n est un élément quelconque de $\hat{\nu}^{-1}(w)$) et est donc contenue dans une seule double classe $\mathrm{Q}n\mathrm{Q}'$ de G, contenue dans $\mathrm{Q}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{Q}'$. On obtient ainsi une application, dite canonique et notée $\lambda_{\mathrm{Q},\mathrm{Q}'}$, de $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\backslash\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}'}$ dans $\mathrm{Q}\backslash\mathrm{Q}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{Q}'/\mathrm{Q}'$, application qui est évidemment surjective.

Proposition **(4.2.1)**. — *Soient Ω et Ω' deux parties de* **A** *et soient* Q *et* Q$'$ *deux sous-groupes de* $\hat{\mathrm{G}}$ *tels que*

$$\hat{\mathrm{H}}.\varphi(\mathrm{P}_\Omega)\subset\mathrm{Q}\subset\hat{\mathrm{P}}_\Omega^\dagger \quad \textit{et} \quad \hat{\mathrm{H}}.\varphi(\mathrm{P}_{\Omega'})\subset\mathrm{Q}'\subset\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}^\dagger.$$

L'application $\lambda_{\mathrm{Q},\mathrm{Q}'}$ *de* $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\backslash\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}'}$ *dans* $\mathrm{Q}\backslash\mathrm{Q}\hat{\mathrm{N}}\mathrm{Q}'/\mathrm{Q}'$ *est bijective.*

Il suffit de montrer que si l'on a $qn=n'q'$, avec $n, n'\in\hat{\mathrm{N}}$, $q\in\mathrm{Q}$ et $q'\in\mathrm{Q}'$, alors $n'\in(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q})n(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q}')$. Or, on a $\Omega\subset\mathbf{A}\cap q(\mathbf{A})$ et $qn(\Omega')=n'(\Omega')\subset\mathbf{A}\cap q(\mathbf{A})$. Par ailleurs, il existe un élément $g_0\in\mathrm{G}$ tel que $q(\mathbf{A})=g_0(\mathbf{A})$ et que $g_0.x=x$ pour tout $x\in\mathbf{A}\cap q(\mathbf{A})$ (2.5.8). On a $g_0\in\mathrm{P}_\Omega\cap\mathrm{P}_{n'(\Omega')}$ et $g=\varphi(g_0)\in\mathrm{Q}\cap n'\mathrm{Q}'n'^{-1}$, d'où

$$m=g^{-1}qn=g^{-1}n'q'\in\mathrm{Q}n\cap n'\mathrm{Q}'\cap\hat{\mathrm{N}}.$$

Par suite, $n\in(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q})m$ et $n'\in m(\hat{\mathrm{N}}\cap\mathrm{Q}')$, c.q.f.d.

(4.2.2) Prenons maintenant pour sous-groupe Q$'$ l'un des sous-groupes $\hat{\mathfrak{B}}^0$ ou $\hat{\mathfrak{B}}$. On vérifie aussitôt que $\hat{\mathbf{W}}_{\hat{\mathfrak{B}}^0}=\{e\}$ et que $\hat{\mathbf{W}}_{\hat{\mathfrak{B}}}=\hat{\mathbf{V}}$.

Corollaire. — Soient Ω une partie de **A** *et* Q *un sous-groupe de* $\hat{\mathrm{G}}$ *tel que* $\hat{\mathrm{H}}.\varphi(\mathrm{P}_\Omega)\subset\mathrm{Q}\subset\hat{\mathrm{P}}_\Omega^\dagger$. *Les applications canoniques suivantes sont bijectives* :

(i) $$\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\backslash\hat{\mathbf{W}}\to\mathrm{Q}\backslash\mathrm{Q}\hat{\mathrm{N}}\hat{\mathfrak{B}}^0/\hat{\mathfrak{B}}^0;$$

(ii) $$\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\backslash\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{V}}\to\mathrm{Q}\backslash\mathrm{Q}\hat{\mathrm{N}}\hat{\mathfrak{B}}/\hat{\mathfrak{B}};$$

(iii) $$\hat{\mathbf{W}}\to\hat{\mathfrak{B}}^0\backslash\hat{\mathfrak{B}}^0\hat{\mathrm{N}}\hat{\mathfrak{B}}^0/\hat{\mathfrak{B}}^0;$$

(iv) $$\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{V}}\to\hat{\mathfrak{B}}\backslash\hat{\mathfrak{B}}\hat{\mathrm{N}}\hat{\mathfrak{B}}/\hat{\mathfrak{B}}.$$

Ici encore, seule l'injectivité de ces applications est à démontrer. Démontrons celle de (i); si $q_1n_1b_1=q_2n_2b_2$ (avec $q_i\in\mathrm{Q}$, $n_i\in\hat{\mathrm{N}}$ et $b_i\in\hat{\mathfrak{B}}^0$), il existe un quartier $\mathfrak{C}\in\mathrm{E}_{\mathbf{D}}$ tel que $b_i\in\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}$. On a alors $\mathrm{Q}n_1\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}=\mathrm{Q}n_2\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}$. Comme $\hat{\mathbf{W}}_{\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}}=\{e\}$, on déduit de la proposition (4.2.1) que $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\hat{\nu}(n_1)=\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}\hat{\nu}(n_2)$, d'où l'injectivité de l'application (i).

Comme $\hat{\mathfrak{B}}=\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}).\hat{\mathfrak{B}}^0$, l'injectivité de (ii) résulte de celle de (i). On démontre de la même manière l'injectivité de (iii) et (iv) (compte tenu pour la définition de l'application (iv) de ce que $\hat{\mathbf{V}}$ est distingué dans $\hat{\mathbf{W}}$, d'où $\hat{\mathbf{V}}\backslash\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{V}}=\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{V}}$).

Corollaire **(4.2.3)**. — *Gardons les hypothèses du corollaire* (4.2.2) *et supposons de plus que* Q *contienne le sous-groupe* $\hat{\mathrm{B}}$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{N}}\hat{\mathfrak{B}}\subset\mathrm{Q}\hat{\mathfrak{B}}$;

(ii) $\hat{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{Q}}.\hat{\mathbf{V}}$.

En effet, la condition (i) équivaut à $Q\hat{N}\hat{\mathfrak{B}} = Q\hat{\mathfrak{B}}$ et est donc équivalente à (ii) d'après le corollaire (4.2.2) (ii).

(4.2.4) La proposition (4.2.1) nous intéressera surtout lorsque $\hat{G} = Q\hat{N}Q'$. Remarquons d'ailleurs que l'on a

$$Q\hat{N}Q' = \varphi(P_\Omega)\hat{N}\varphi(P_{\Omega'}) = \hat{P}_\Omega\hat{N}\hat{P}_{\Omega'} = \hat{P}^\dagger_\Omega\hat{N}\hat{P}^\dagger_{\Omega'}. \tag{1}$$

En effet, soit $q \in Q$; on a $\Omega \subset \mathbf{A} \cap q(\mathbf{A})$ et il existe un élément $g \in P_\Omega$ tel que $\varphi(g)q.\mathbf{A} = \mathbf{A}$ (2.5.8), d'où $\varphi(g)q \in \hat{N} \cap Q$. Par suite, on a $Q = \varphi(P_\Omega)(\hat{N} \cap Q)$, d'où la première des égalités (1). Les deux autres s'en déduisent, en faisant par exemple $Q = \hat{P}_\Omega$ ou $Q = \hat{P}^\dagger_\Omega$.

La relation $\hat{G} = Q\hat{N}Q'$ s'interprète géométriquement de façon simple : elle signifie que *quels que soient* $g, g' \in \hat{G}$, *il existe un appartement contenant* $g(\Omega)$ *et* $g'(\Omega')$. En effet, supposons $\hat{G} = Q\hat{N}Q'$ et posons $g^{-1}g' = qnq'$ (avec $g, g' \in \hat{G}$, $q \in Q$, $q' \in Q'$ et $n \in \hat{N}$). On a alors $g'(\Omega') = gqn(\Omega') \subset gq(\mathbf{A})$ et $g(\Omega) = gq(\Omega) \subset gq(\mathbf{A})$. Réciproquement, si $g(\Omega) \cup \Omega' \subset h(\mathbf{A})$ (avec $g, h \in \hat{G}$), il existe, d'après (2.5.8), un élément $q' \in Q'$ tel que $q'h(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, d'où $q'g(\Omega) \subset \mathbf{A}$ et $\Omega \subset \mathbf{A} \cap g^{-1}q'^{-1}(\mathbf{A})$. Toujours d'après (2.5.8), il existe un élément $q \in Q$ tel que $qg^{-1}q'^{-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, c'est-à-dire tel que $qg^{-1}q'^{-1} \in \hat{N}$, d'où finalement $g^{-1} \in Q\hat{N}Q'$.

(4.2.5) De manière analogue, *la relation* $\hat{G} = \hat{\mathfrak{B}}\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}$ (qui est équivalente à $\hat{G} = \hat{\mathfrak{B}}^0\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}^0$) *signifie que quels que soient les quartiers* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *de l'immeuble* $\mathscr{I}$, *il existe des quartiers* $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'_1 \subset \mathfrak{C}'$ *contenus dans un même appartement*. En effet, supposons tout d'abord que $\hat{G} = \hat{\mathfrak{B}}^0\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}^0$ et soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux quartiers de $\mathscr{I}$. Vu la transitivité de ${}^v\mathbf{W}$ sur les chambres vectorielles et vu la définition même des quartiers de $\mathscr{I}$ (2.2.2), il existe des éléments $g, g' \in \hat{G}$ tels que $\mathfrak{C} = g.\mathfrak{C}_0$ et $\mathfrak{C}' = g'.\mathfrak{C}'_0$, où $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}'_0$ sont des quartiers de $\mathbf{A}$, de direction D. Posons alors $g^{-1}g' = bnb'$ avec $n \in \hat{N}$, $b, b' \in \hat{\mathfrak{B}}^0$. Quitte à remplacer $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ par des quartiers plus petits, on peut supposer $\mathfrak{C}'_0 = \mathfrak{C}_0$ et $b, b' \in \hat{P}_{\mathfrak{C}_0}$. On a alors $\mathfrak{C}' = gbnb'.\mathfrak{C}_0 \subset gb(\mathbf{A})$ et $\mathfrak{C} = gb.\mathfrak{C}_0 \subset gb(\mathbf{A})$.

Réciproquement, soit $g \in \hat{G}$; soit $\mathfrak{C} \in E_{\mathbf{D}}$ et supposons qu'il existe des quartiers $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'_1 \subset g(\mathfrak{C})$ contenus dans un même appartement. Quitte à remplacer $\mathfrak{C}$ par un quartier plus petit, on peut supposer $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'_1 = g(\mathfrak{C})$. Soit alors $h \in \hat{G}$ tel que $\mathfrak{C} \cup g(\mathfrak{C}) \subset h(\mathbf{A})$. D'après (2.5.8), il existe $b \in \hat{P}_{\mathfrak{C}} \subset \hat{\mathfrak{B}}^0$ tel que $bh(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ et on a alors $\mathfrak{C} \subset \mathbf{A} \cap g^{-1}b^{-1}(\mathbf{A})$, d'où l'existence de $b' \in \hat{\mathfrak{B}}^0$ tel que $b'g^{-1}b^{-1}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$, ce qui entraîne $g \in \hat{\mathfrak{B}}^0\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}^0$.

Des raisonnements tout à fait analogues montrent que la relation $\hat{G} = Q\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}$ (ou $\hat{G} = Q\hat{N}\hat{\mathfrak{B}}^0$) signifie que *quel que soit le quartier* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathscr{I}$, *il existe un quartier* $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ *et un appartement contenant* Ω *et* $\mathfrak{C}'$. En particulier, *la relation* $G = BN\mathfrak{B}$ *signifie que pour toute chambre* C *et tout quartier* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathscr{I}$, *il existe un quartier* $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ *et un appartement contenant* C *et* $\mathfrak{C}'$.

4.3. Relations entre doubles classes.

Proposition (**4.3.1**). — *Soient* Ω, Ω' *et* Ω'' *trois parties de* $\mathbf{A}$. *Supposons que l'une d'elles soit d'intérieur non vide et que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

a) Ω, Ω' *et* Ω'' *sont bornées*;

b) G *est complet pour une topologie satisfaisant aux conditions de* (2.8.2).

Alors, on

$$\hat{P}_{\Omega'}.\hat{P}_{\Omega} \cap \hat{P}_{\Omega''}.\hat{P}_{\Omega} = (\hat{P}_{\Omega'} \cap \hat{P}_{\Omega''}).\hat{P}_{\Omega}.$$

Soit $g = p'p = p''q$ avec $p' \in \hat{P}_{\Omega'}$, $p'' \in \hat{P}_{\Omega''}$, $p, q \in \hat{P}_{\Omega}$. Posons $M = \Omega' \cup \Omega'' \cup g.\Omega$ et soit f l'application de $\Omega' \cup \Omega'' \cup \Omega$ sur M qui est l'identité sur $\Omega' \cup \Omega''$ et coïncide avec l'action de g sur Ω (remarquons que $g.x = x$ pour $x \in \Omega \cap (\Omega' \cup \Omega'')$). Alors f est une isométrie : si $x \in \Omega$ et $y \in \Omega'$ par exemple, on a $d(g.x, y) = d(p'.x, p'.y) = d(x, y)$. Puisque M est d'intérieur non vide, il existe un appartement A contenant M ((2.8.1) et (2.8.4)) et il existe $h \in \hat{P}_{\Omega'} \cap \hat{P}_{\Omega''}$ avec $h.A = \mathbf{A}$ (2.5.8), d'où $hg.\Omega \subset \mathbf{A}$, et, vu (2.5.9) combiné avec la relation $\hat{G} = \varphi(G).\hat{N}$, il existe $n \in \hat{N}$ tel que $hg.x = n.x$ pour tout $x \in \Omega$. Pour $x \in \Omega$ et $y \in \Omega' \cup \Omega''$, on a alors

$$d(n^{-1}y, x) = d(y, n.x) = d(y, hg.x) = d(y, g.x) = d(y, x).$$

Si Ω (resp. $\Omega' \cup \Omega''$) contient une chambre, on en déduit $n^{-1}.y = y$ et $n \in \hat{P}_{\Omega'} \cap \hat{P}_{\Omega''}$ (resp. $n.x = x$ et $n \in \hat{P}_{\Omega}$). Dans les deux cas, on a $g \in h^{-1}n\hat{P}_{\Omega} \subset (\hat{P}_{\Omega'} \cap \hat{P}_{\Omega''}).\hat{P}_{\Omega}$.

Corollaire (**4.3.2**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.1), *on a*

$$\hat{P}_{\Omega} \cap (\hat{P}_{\Omega'}.\hat{P}_{\Omega''}) = (\hat{P}_{\Omega} \cap \hat{P}_{\Omega'}).(\hat{P}_{\Omega} \cap \hat{P}_{\Omega''}).$$

En effet, si $g = p'p'' \in \hat{P}_{\Omega}$ avec $p' \in \hat{P}_{\Omega'}$ et $p'' \in \hat{P}_{\Omega''}$, la proposition (4.3.1) montre que $p'' = p'^{-1}g \in (\hat{P}_{\Omega'} \cap \hat{P}_{\Omega''}).(\hat{P}_{\Omega} \cap \hat{P}_{\Omega''})$. On peut donc supposer $p'' \in \hat{P}_{\Omega}$ et on a alors $p' \in \hat{P}_{\Omega}$.

(**4.3.3**) On sait que la proposition (4.3.1) et le corollaire (4.3.2) sont également vrais lorsque Ω, Ω' et Ω'' sont trois facettes d'une même chambre ([5], chap. IV, § 2, exercice 9).

Corollaire (**4.3.4**). — *Soient* $g \in \hat{G}$ *et* $x \in \mathbf{A}$. *On suppose que l'ensemble* Y *des points* y *de* $\mathbf{A}$ *tels que* $g \in \hat{P}_y\hat{P}_x$ *contient une chambre. Alors* Y *est clos.*

Il suffit de montrer que, si C est une chambre contenue dans Y et $y \in Y$, on a $\mathrm{cl}(C \cup \{y\}) \subset Y$. Or, on a alors

$$g \in \hat{P}_C\hat{P}_x \cap \hat{P}_y\hat{P}_x = (\hat{P}_C \cap \hat{P}_y).\hat{P}_x = \hat{P}_{\mathrm{cl}(C \cup \{y\})}.\hat{P}_x.$$

Corollaire (**4.3.5**). — *Soient* Ω, Ω' *et* Ω'' *trois parties non vides de* $\mathbf{A}$. *On suppose que* $\Omega \cup \Omega' \cup \Omega''$ (resp. $\Omega' \cup \Omega''$) *contient une chambre et que* Ω *est contenu dans l'enclos de* $\Omega' \cup \Omega''$. *Alors, on a*

$$P_{\Omega'}P_{\Omega} \cap P_{\Omega''}P_{\Omega} = P_{\Omega} \quad (\text{resp. } \hat{P}_{\Omega'}\hat{P}_{\Omega} \cap \hat{P}_{\Omega''}\hat{P}_{\Omega} = \hat{P}_{\Omega}).$$

On peut en effet écrire Ω, Ω' et Ω'' comme réunions de parties bornées Ω_n, Ω'_n et Ω''_n de telle sorte que $\Omega_n \cup \Omega'_n \cup \Omega''_n$ (resp. $\Omega'_n \cup \Omega''_n$) contienne une chambre et que $\Omega_n \subset \mathrm{cl}(\Omega'_n \cup \Omega''_n)$. On a alors, vu (4.1.1) (1)

$$\mathrm{P}_{\Omega'}\mathrm{P}_{\Omega} \cap \mathrm{P}_{\Omega''}\mathrm{P}_{\Omega} \subset \mathrm{P}_{\Omega'_n}\mathrm{P}_{\Omega_n} \cap \mathrm{P}_{\Omega''_n}\mathrm{P}_{\Omega_n} = \mathrm{P}_{\mathrm{cl}(\Omega'_n \cup \Omega''_n)}\mathrm{P}_{\Omega_n} = \mathrm{P}_{\Omega_n}$$

pour tout n, d'où la première égalité. La deuxième se démontre de la même manière, en utilisant (4.1.1) (2) au lieu de (4.1.1) (1).

Corollaire **(4.3.6)**. — *Soient Ω et Ω' deux parties convexes non vides de* $\mathbf{A}$ *et soit* $n \in \hat{\mathrm{N}}$. *On a alors*

$$\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'} n \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} \cap \hat{\mathfrak{B}}^0 n \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} = n\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}$$

toutes les fois que $n.\Omega \subset \mathrm{cl}(\Omega' + \mathbf{D})$, *et en particulier lorsque* $\Omega' = \Omega$ *et que* $\hat{\nu}(n) \in \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$.

Quitte à remplacer Ω par $n.\Omega$, donc $\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}$ par $n\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}n^{-1}$, on peut supposer que $n=1$. On a alors

$$\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega} \cap \hat{\mathfrak{B}}^0 \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} = \bigcup_{\mathfrak{C} \in \mathrm{E}_{\mathbf{D}}} (\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega} \cap \hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}).$$

Mais, pour tout quartier $\mathfrak{C} \in \mathrm{E}_{\mathbf{D}}$, l'enveloppe convexe de $\mathfrak{C} \cup \Omega'$ contient $\Omega' + \mathbf{D}$ et la relation $\Omega \subset \mathrm{cl}(\Omega' + \mathbf{D})$ entraîne $\Omega \subset \mathrm{cl}(\Omega' \cup \mathfrak{C})$.

Corollaire **(4.3.7)**. — *Supposons* G *complet pour une topologie satisfaisant aux conditions de* (2.8.2). *Soient* $\Omega \subset \mathbf{A}$ *et* $n \in \hat{\mathrm{N}}_{\Omega}$. *Alors, on a*

$$\hat{\mathfrak{B}}^0 n \hat{\mathfrak{B}}^0 \cap \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} = \hat{\mathrm{P}}_{\Omega+\mathbf{D}} n \hat{\mathrm{P}}_{\Omega+\mathbf{D}}.$$

Il suffit de montrer que, pour $\mathfrak{C} \in \mathrm{E}_{\mathbf{D}}$, on a

$$\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}} n \hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}} \cap \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} \subset \hat{\mathrm{P}}_{\Omega+\mathbf{D}} n \hat{\mathrm{P}}_{\Omega+\mathbf{D}}$$

ou encore que

$$(\hat{\mathrm{P}}_{\mathfrak{C}}.\hat{\mathrm{P}}_{n.\mathfrak{C}}) \cap \hat{\mathrm{P}}_{\Omega} \subset \hat{\mathrm{P}}_{\Omega+\mathbf{D}}.\hat{\mathrm{P}}_{\Omega+n\mathbf{D}}$$

ce qui résulte de (4.3.2).

Proposition **(4.3.8)**. — *Soient x, y, z, u quatre points de* $\mathbf{A}$ *tels que y et z appartiennent au segment* $[xu]$ *et que* $d(x,y) \leqslant d(x,z)$. *On a*

$$\hat{\mathrm{P}}_x\hat{\mathrm{P}}_u \cap \hat{\mathrm{P}}_y\hat{\mathrm{P}}_z = (\hat{\mathrm{P}}_x \cap \hat{\mathrm{P}}_y).(\hat{\mathrm{P}}_z \cap \hat{\mathrm{P}}_u).$$

Plus précisément, si $p \in \hat{\mathrm{P}}_x$ *et* $p' \in \hat{\mathrm{P}}_u$ *sont tels que* $pp' \in \hat{\mathrm{P}}_y\hat{\mathrm{P}}_z$, *alors* $p \in \hat{\mathrm{P}}_y$ *et* $p' \in \hat{\mathrm{P}}_z$.

Posons $g = pp' = qq'$ avec $q \in \hat{\mathrm{P}}_y$ et $q' \in \hat{\mathrm{P}}_z$. On a $z' = g.z = q.z$ et $u' = g.u = p.u$, d'où $d(y,z') = d(y,z)$ et $d(x,u') = d(x,u)$. On en déduit :

(1) $$d(y,u') \leqslant d(y,g.z) + d(g.z,g.u) = d(y,z) + d(z,u) = d(y,u)$$

(2) $$d(x,u') \leqslant d(x,y) + d(y,u') \leqslant d(x,y) + d(y,u) = d(x,u) = d(x,u')$$

(3) $$d(x,z') \leqslant d(x,y) + d(y,z') = d(x,y) + d(y,z) = d(x,z) = d(x,p.z)$$

(4) $$d(x,u') \leqslant d(x,z') + d(z',u') \leqslant d(x,z) + d(z,u) = d(x,u) = d(x,u')$$

et on voit que toutes les inégalités figurant dans (1) à (4) sont en réalité des égalités. De (2) on déduit alors que $y \in [xu'] = [x(p.u)]$ donc, vu (1), que $y = p.y$, c'est-à-dire $p \in \hat{P}_y$. De même, (4) montre que $z' \in [xu'] = [x(p.u)]$ et, vu (3), on a $z' = p.z$, d'où $p' = p^{-1}g \in \hat{P}_z$.

Corollaire **(4.3.9)**. — *Soient* $y, z \in \mathbf{A}$ *et* $t \in \hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$ *tels que* $t.z \in y + \mathbf{D}$. *On a*

$$\hat{\mathfrak{B}}^0_{-\mathbf{D}} t \hat{\mathfrak{B}}^0_{\mathbf{D}} \cap \hat{P}_y t \hat{P}_z = \hat{P}_{y-\mathbf{D}} t \hat{P}_{z+\mathbf{D}}.$$

En multipliant à droite par t^{-1}, on se ramène au cas $t=1$. Si $pp' \in \hat{P}_y \hat{P}_z$, avec $p \in \hat{\mathfrak{B}}^0_{-\mathbf{D}}$ et $p' \in \hat{\mathfrak{B}}^0_{\mathbf{D}}$, il existe un quartier $\mathfrak{C}'$ (resp. $\mathfrak{C}$) de direction $\mathbf{D}$ (resp. $-\mathbf{D}$) tel que $p' \in \hat{P}_{\mathfrak{C}'}$ (resp. $p \in \hat{P}_{\mathfrak{C}}$) et il existe $x \in \mathfrak{C}$ et $u \in \mathfrak{C}'$ tels que les hypothèses de (4.3.8) soient satisfaites. On a alors $p \in \hat{P}_y \cap \hat{P}_{\mathfrak{C}} = \hat{P}_{y-\mathbf{D}}$ et $p' \in \hat{P}_z \cap \hat{P}_{\mathfrak{C}'} = \hat{P}_{z+\mathbf{D}}$.

Remarque **(4.3.10)**. — On peut montrer que le corollaire précédent reste exact si l'on suppose seulement que $t.z \in y + \overline{\mathbf{D}}$.

Lemme **(4.3.11)**. — *Supposons* $\varphi : G \to \hat{G}$ *de type connexe. Soient* $x, y \in \mathbf{A}$ *tels que* $y \in x + \overline{\mathbf{D}}$. *Soit* ρ *la rétraction de* $\mathscr{I}$ *sur* $\mathbf{A}$, *ayant pour centre une chambre de* $\mathbf{A}$. *Pour tout* $g \in \hat{G}$, *on a* $\rho(g.y) - \rho(g.x) \leqslant_{\mathbf{D}} y - x$ (cf. (1.3.16)).

Soit $(x_0 = x, \ldots, x_k = y)$ une suite monotone de points du segment $[xy]$, telle que $[x_i x_{i+1}]$ soit contenu dans l'adhérence d'une chambre C_i $(0 \leqslant i < k)$. Il existe $h_i \in \hat{G}$ tel que la restriction de ρ à $g.\overline{C}_i$ coïncide avec l'action de h_i, et par suite, il existe $n_i \in \hat{N}$ tel que la restriction à $\overline{C}_i$ de l'application $z \mapsto \rho(g.z)$ coïncide avec l'action de n_i. Posons $w_i = {}^v\nu(n_i)$. D'après (1.3.16), on a

$$\rho(g.x_{i+1}) - \rho(g.x_i) = w_i(x_{i+1} - x_i) \leqslant_{\mathbf{D}} x_{i+1} - x_i$$

puisque $x_{i+1} - x_i \in \overline{\mathbf{D}}$ et que $w_i \in {}^v\mathbf{W}$. Additionnant ces inégalités, on obtient le lemme.

Proposition **(4.3.12)**. — *Soient* $x, y, z, u \in \mathbf{A}$ *tels que* $y - x$, $z - y$ *et* $u - z$ *appartiennent à* $\overline{\mathbf{D}}$. *Si* φ *est de type connexe, on a*

$$\hat{P}_x \hat{P}_y \cap \hat{P}_u \hat{P}_z = \hat{P}_y \cap \hat{P}_z.$$

Soit $g \in p\hat{P}_y \cap q\hat{P}_z$, avec $p \in \hat{P}_x$ et $q \in \hat{P}_u$. D'après (4.3.11), on a, pour toute rétraction ρ de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{A}$ de centre une chambre C quelconque de $\mathbf{A}$:

$$(1) \qquad \rho(g.y) - x = \rho(p.y) - \rho(p.x) \leqslant_{\mathbf{D}} y - x$$

$$(2) \qquad \rho(g.z) - \rho(g.y) \leqslant_{\mathbf{D}} z - y$$

$$(3) \qquad u - \rho(g.z) = \rho(q.u) - \rho(q.z) \leqslant_{\mathbf{D}} u - z.$$

En additionnant, on voit que ces inégalités sont en réalité des égalités. On a donc $\rho(g.y) = y$ et $\rho(g.z) = z$. Choisissant C de telle sorte que $y \in \overline{C}$ (resp. $z \in \overline{C}$), on en tire $g.y = y$ (resp. $g.z = z$).

Corollaire **(4.3.13).** — *Soient* Ω, Ω' *et* Ω'' *trois parties convexes non vides de* $\mathbf{A}$, *telles que* Ω *soit contenue dans la réunion des intersections* $(\Omega'+\overline{\mathrm{D}})\cap(\Omega''-\overline{\mathrm{D}})$, *pour* D *parcourant l'ensemble des chambres vectorielles de* ${}^v\mathbf{A}$. *On a*

(i) $$\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\Omega''}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}=\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}$$

(ii) $$\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega''}=(\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}).(\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\Omega''}).$$

Soit $g\in\hat{\mathrm{P}}_{\Omega'}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}\cap\hat{\mathrm{P}}_{\Omega''}\hat{\mathrm{P}}_{\Omega}$ et soit $a\in\Omega$; il existe une chambre vectorielle D et des éléments $b\in\Omega'$ et $c\in\Omega''$ tels que $a-b$ et $c-a$ appartiennent à $\overline{\mathrm{D}}$. Appliquant alors (4.3.12) en remplaçant $\mathbf{D}$ par D, x par b, y et z par a et u par c, on obtient $g\in\hat{\mathrm{P}}_a$, d'où (i). La relation (ii) s'en déduit comme en (4.3.2).

Remarque **(4.3.14).** — L'hypothèse de (4.3.13) est satisfaite lorsque Ω *est contenue dans l'enveloppe convexe de* $\Omega'\cup\Omega''$.

Proposition **(4.3.15).** — *Soient* $x, y, z, u\in\mathbf{A}$, $n\in\hat{\mathrm{N}}$ *et* $w=\hat{\nu}(n)$. *Si* $\hat{\mathrm{P}}_x\hat{\mathrm{P}}_u\cap\hat{\mathrm{P}}_z n\hat{\mathrm{P}}_y\neq\emptyset$, *il existe* $w'\in\hat{\mathbf{W}}_z$ *tel que* $d(x, w'w.y)\leqslant d(x,u)+d(u,y)$. *Si de plus* φ *est de type connexe et si* $y\in u+\overline{\mathbf{D}}\subset x+\overline{\mathbf{D}}$, *on peut choisir* w' *tel que* $w'w.y\leqslant_{\mathbf{D}}y$. *Si en outre* $x\in z+\overline{\mathbf{D}}$, *alors* $w.y\leqslant_{\mathbf{D}}y$.

Soit $g=g'g''\in hn\hat{\mathrm{P}}_y$, avec $g'\in\hat{\mathrm{P}}_x$, $g''\in\hat{\mathrm{P}}_u$ et $h\in\hat{\mathrm{P}}_z$. Soit C une chambre de $\mathbf{A}$ telle que $z\in\overline{\mathrm{C}}$ et soit ρ la rétraction de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{A}$ de centre C. Il existe $h'\in\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}$ tel que $\rho(g.y)=h'g.y=h'hn.y$. D'autre part, comme z et $n.y$ appartiennent à $\mathbf{A}\cap(h'h)^{-1}.\mathbf{A}$, il existe $h''\in\hat{\mathrm{G}}$ avec $\mathbf{A}=h''(h'h)^{-1}.\mathbf{A}$, $h''.z=z$ et $h''n.y=y$ (2.5.8). Posons $n'=h'hh''^{-1}$: on a $n'\in\hat{\mathrm{N}}$ et $w'=\hat{\nu}(n')\in\hat{\mathbf{W}}_z$. De plus, $\rho(g.y)=h'hn.y=h'hh''^{-1}n.y=n'n.y=w'w.y$. Par suite,

$$\begin{aligned}d(w'w.y, x)&=d(\rho(g.y), x)\leqslant d(x, g.y)=d(x, g''.y)\\&\leqslant d(x,u)+d(u,g''.y)=d(x,u)+d(u,y).\end{aligned}$$

Suposons maintenant ${}^v\hat{\mathbf{W}}={}^v\mathbf{W}$ et $y\in u+\overline{\mathbf{D}}\subset x+\overline{\mathbf{D}}$. Vu (4.3.11), on a

$$\begin{aligned}w'w.y-x&=\rho(g.y)-\rho(g.u)+\rho(g.u)-\rho(x)=\rho(g.y)-\rho(g.u)+\rho(g'.u)-\rho(g'.x)\\&\leqslant_{\mathbf{D}}y-u+u-x=y-x.\end{aligned}$$

Enfin, si $x\in z+\overline{\mathbf{D}}$, on a, toujours d'après (4.3.11),

$$\begin{aligned}wy-z&=\rho(n'^{-1}g.y)-\rho(n'^{-1}g.u)+\rho(n'^{-1}g'.u)-\rho(n'^{-1}g'.x)+\rho(n'^{-1}.x)-\rho(n'^{-1}.z)\\&\leqslant_{\mathbf{D}}y-u+u-x+x-z=y-z.\end{aligned}$$

Corollaire **(4.3.16).** — *Soient* $x, y\in\mathbf{A}$, C *une chambre de* $\mathbf{A}$ *et* $n\in\hat{\mathrm{N}}$. *Si* $\hat{\mathrm{P}}_x\hat{\mathrm{P}}_y\cap\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}n\hat{\mathrm{P}}_y\neq\emptyset$, *alors* $d(x, n.y)\leqslant d(x,y)$. *Si de plus* φ *est de type connexe et si* $y\in x+\overline{\mathbf{D}}$, *on a* $n.y\leqslant_{\mathbf{D}}y$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent, en prenant un point $z\in\mathrm{C}$ tel que $\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}=\hat{\mathrm{P}}_z$ et en remarquant que $\hat{\mathbf{W}}_z$ est alors réduit à $\{1\}$.

Corollaire **(4.3.17).** — *Supposons* φ *de type connexe. Soient* $x\in\mathbf{A}$ *et* $n, n'\in\hat{\mathrm{N}}$ *tels que* $n.x\in x+\overline{\mathbf{D}}$. *Soit* D *une chambre vectorielle. Si* $\hat{\mathrm{P}}_x n\hat{\mathrm{P}}_x\cap\hat{\mathfrak{B}}^0_{\mathrm{D}}n'\hat{\mathrm{P}}_x\neq\emptyset$, *alors on a* $n'n^{-1}.x\leqslant_{\mathbf{D}}x$.

En effet, il existe alors une chambre C telle que

$$\hat{\mathrm{P}}_x n \hat{\mathrm{P}}_x n^{-1} \cap \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}} n' n^{-1} . n \hat{\mathrm{P}}_x n^{-1} \neq \emptyset$$

et il suffit d'appliquer (4.3.16) en prenant $y = n.x$.

4.4. Les bons sous-groupes bornés maximaux.

Dans ce paragraphe, nous allons expliciter quelques cas particuliers de (4.2.3), (4.3.6) et (4.3.17). Nous conservons les hypothèses et notations des numéros précédents et nous supposons de plus que

(1) $$\mathrm{G} = \mathfrak{B}.\mathrm{N}.\mathrm{B}.$$

Nous verrons aux §§ 5 et 7 des conditions suffisantes pour que cette relation soit vraie. Rappelons (2.9.4) qu'elle l'est dès que G est muni d'une topologie satisfaisant aux conditions de (2.8.2); elle le sera également dans toutes les applications au cas des groupes algébriques. Enfin, notons que la relation (1) est équivalente à

(1 *bis*) $$\hat{\mathrm{G}} = \hat{\mathfrak{B}}.\hat{\mathrm{N}}.\hat{\mathrm{B}}$$

ainsi qu'il résulte de la traduction géométrique de (1) ou de (1 *bis*) donnée en (4.2.5).

(4.4.1) Nous avons vu (3.3.2) que tout sous-groupe borné maximal K de $\hat{\mathrm{G}}$ est le stabilisateur d'une facette F bien déterminée de l'immeuble $\mathscr{I}$. Nous dirons que K est un sous-groupe borné maximal *spécial* si cette facette F se réduit à un sommet spécial de $\mathscr{I}$.

Définition. — On dit qu'un sous-groupe borné maximal K *de* $\hat{\mathrm{G}}$ *est* bon *si l'on a* $\hat{\mathrm{G}} = \hat{\mathfrak{B}}.\mathrm{K}$.

Soit K un bon sous-groupe borné maximal et soit $g \in \hat{\mathrm{G}}$. Posons $g^{-1} = bk$ avec $b \in \hat{\mathfrak{B}}$ et $k \in \mathrm{K}$. On a alors

$$g\hat{\mathfrak{B}}g^{-1}\mathrm{K} = g\hat{\mathfrak{B}}bk\mathrm{K} = g\hat{\mathfrak{B}}\mathrm{K} = \hat{\mathrm{G}}.$$

On voit donc que la notion de bon sous-groupe borné maximal est indépendante du choix de $\hat{\mathfrak{B}}$ dans sa classe de conjugaison (i.e. du choix de l'appartement **A** et de la chambre vectorielle **D**) et que *tout conjugué d'un bon sous-groupe borné maximal est un bon sous-groupe borné maximal.*

Proposition **(4.4.2)**. — *Soit* K *un sous-groupe borné de* $\hat{\mathrm{G}}$ *contenant* $\hat{\mathrm{B}}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) K *est un bon sous-groupe borné maximal*;

(ii) *on a* $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}.\hat{\mathbf{V}}$;

(iii) *l'application canonique de* $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}$ *dans* ${}^v\hat{\mathbf{W}}$ *est surjective*;

(iv) $\mathrm{Card}\,\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}} \geqslant \mathrm{Card}\,{}^v\hat{\mathbf{W}}$.

Il est immédiat que (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes. L'équivalence de (i) et (ii) résulte de (4.2.3) et du fait que, si (ii) est satisfaite, alors K est un sous-groupe borné maximal de $\hat{\mathrm{G}}$. Pour établir cette assertion, considérons un sous-groupe borné K' contenant K. On a $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}'} \supset \hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}$; comme la restriction de l'application $w \mapsto {}^v w$ à $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}'}$ est injective, on déduit de (iii) (équivalente à (ii)) que $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}'} = \hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}$, d'où $\mathrm{K}' = \mathrm{B}.\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}'}.\mathrm{B} = \mathrm{K}$.

Proposition **(4.4.3)**. — *Soit* K *un bon sous-groupe borné maximal de* $\hat{\mathrm{G}}$, *contenant* $\hat{\mathrm{B}}$. *On a*

(1) $$\hat{\mathrm{G}} = \hat{\mathfrak{B}}^0.\hat{\mathbf{V}}.\mathrm{K} \quad \text{(« décomposition d'Iwasawa de } \hat{\mathrm{G}} \text{ »)}$$

et l'application canonique de $\hat{\mathbf{V}}$ *dans* $\hat{\mathrm{B}}^0 \backslash \hat{\mathrm{G}}/\mathrm{K}$ *est bijective.*

De plus, on a

(2) $$\hat{\mathrm{G}} = \mathrm{K}.\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}.\mathrm{K} \quad \text{(« décomposition de Cartan de } \hat{\mathrm{G}} \text{ »)}$$

et l'application canonique de $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$ *dans* $\mathrm{K}\backslash\hat{\mathrm{G}}/\mathrm{K}$ *est bijective lorsque l'homomorphisme* $\varphi : \mathrm{G} \to \hat{\mathrm{G}}$ *est de type connexe.*

La première assertion n'est qu'un cas particulier de (4.2.2) (i). La relation (2) résulte de (4.2.1), compte tenu de ce que $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$ est un domaine fondamental pour ${}^v\mathbf{W}$ opérant sur $\hat{\mathbf{V}}$: ceci entraîne en effet que l'application canonique de $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$ dans $\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}\backslash\hat{\mathbf{W}}/\hat{\mathbf{W}}_{\mathrm{K}}$ est surjective et est bijective lorsque ${}^v\hat{\mathbf{W}} = {}^v\mathbf{W}$, c'est-à-dire lorsque φ est de type connexe.

(4.4.4) Explicitons maintenant certaines des relations de 4.3 dans le cas qui nous intéresse, ce qui va nous donner des relations entre les décompositions d'Iwasawa et de Cartan de $\hat{\mathrm{G}}$:

Proposition. — Supposons φ *de type connexe. Soit* K *un bon sous-groupe borné maximal de* $\hat{\mathrm{G}}$ *contenant* $\hat{\mathrm{B}}$ *et soient* $t \in \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$, $t' \in \hat{\mathbf{V}}$, $t'' \in \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$.

(i) *Si* $\mathrm{K}.t.\mathrm{K} \cap \hat{\mathfrak{B}}^0.t'.\mathrm{K} \neq \emptyset$, *on a* $t' \leqslant_{\mathbf{D}} t$ (*autrement dit* $p(t-t') \geqslant 0$ *pour tout poids dominant* p (*relativement à* **D**) *de* ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$).

(ii) *On a* $\mathrm{K}.t.\mathrm{K} \cap \hat{\mathfrak{B}}^0.t.\mathrm{K} = t.\mathrm{K}$.

(iii) *Si* $t' \in \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$ *et si* $\mathrm{K}t\mathrm{K}t'\mathrm{K} \cap \mathrm{K}t''\mathrm{K} \neq \emptyset$, *alors on a* $t'' \leqslant_{\mathbf{D}} t+t'$ (*en notant ici additivement la loi de composition de* $\hat{\mathbf{V}}$ *identifié à un sous-groupe de* ${}^v\mathbf{A}$).

(iv) *Si* $t' \in \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{D}}$, *on a*

$$t^{-1}t''^{-1}\mathrm{K}t''\mathrm{K}t \cap t'\mathrm{K}t'^{-1}\mathrm{K} = t^{-1}\mathrm{K}t \cap \mathrm{K}.$$

En particulier, on a

$$t^{-1}t''^{-1}\mathrm{K}t''\mathrm{K}t \cap \mathrm{K} = t^{-1}\mathrm{K}t \cap \mathrm{K}.$$

L'assertion (i) résulte de (4.3.17) et (ii) de (4.3.7). L'hypothèse de (iii) entraîne $\mathrm{K} \cap t^{-1}\mathrm{K}t.t^{-1}t''t'^{-1}.t'\mathrm{K}t'^{-1} \neq \emptyset$; en posant $\mathrm{K} = \hat{\mathrm{P}}_x$, $y = u = t.x$ et $z = t^{-1}.x$ et en appliquant (4.3.15), on en déduit (iii). Enfin, (iv) résulte de (4.3.12), en prenant $\mathrm{K} = \hat{\mathrm{P}}_z$, $x = (t''t)^{-1}.z$, $y = t^{-1}.z$ et $u = t'.z$.

Remarque **(4.4.5).** — Supposons φ de type connexe et soit G_1 un sous-groupe distingué de $\hat{G}$ contenant $\varphi(G)$. Alors $\varphi: G \to G_1$ est B-N-adapté de type connexe. Soit F une facette de **C** dont le stabilisateur K_1 dans G_1 soit un bon sous-groupe borné maximal de G_1. Il est alors immédiat que le stabilisateur K de F dans $\hat{G}$ est un bon sous-groupe borné maximal de $\hat{G}$. Si $g \in K$, il existe $h \in K_1$ tel que $g.\mathbf{A} = h.\mathbf{A}$ et, comme ${}^v\hat{\nu}(K_1 \cap \hat{N}) = {}^v\hat{\mathbf{W}} = {}^v\mathbf{W}$, on voit que

$$K = K_1.(\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}) \cap K).$$

On déduit alors de (4.4.3) que

$$\hat{G} = \hat{\mathfrak{B}}^0.\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}).K_1 \tag{1}$$

$$\hat{G} = K_1.\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}).K_1. \tag{2}$$

Mettons maintenant sur $\hat{G}$ la bornologie $\mathscr{B}$ pour laquelle les ensembles bornés sont les réunions finies de translatés de parties bornées de G_1. Comme la bornologie de G_1 est invariante par $\hat{G}$ opérant sur G_1 par automorphismes intérieurs, cette bornologie est compatible avec la loi de groupe de $\hat{G}$. Si l'on suppose de plus que $\hat{G}/G_1$ n'a pas d'éléments d'ordre fini, un sous-groupe de $\hat{G}$ est borné pour $\mathscr{B}$ si et seulement s'il est contenu et borné dans G_1. Par suite, K_1 est un sous-groupe borné maximal de $\hat{G}$ (pour $\mathscr{B}$), donnant lieu à une « décomposition d'Iwasawa » (1) et à une « décomposition de Cartan » (2). Nous verrons plus tard un exemple de cette situation : $\hat{G}$ sera le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe $\mathscr{G}$ défini sur un corps local k (pour une valuation ω), G le groupe des points rationnels sur k du groupe dérivé de $\mathscr{G}$, φ l'homomorphisme naturel et G_1 l'ensemble des $g \in \hat{G}$ tels que $\omega(\chi(g)) = 0$ pour tout caractère χ de $\mathscr{G}$ rationnel sur k, la bornologie $\mathscr{B}$ de $\hat{G}$ n'étant autre que la bornologie naturelle de $\hat{G}$.

(4.4.6) Étudions maintenant l'existence de bons sous-groupes bornés maximaux :

Proposition. — (i) *Si φ est de type connexe, tout sous-groupe borné maximal spécial est un bon sous-groupe borné maximal.*

(ii) *Si φ est l'identité, les seuls bons sous-groupes bornés maximaux sont les sous-groupes bornés maximaux spéciaux.*

Compte tenu de (4.4.2), la première assertion est évidente, puisque, si x est un point spécial de **A**, on a ${}^v\hat{\mathbf{W}}_x \supset {}^v\mathbf{W}_x = {}^v\mathbf{W} = {}^v\hat{\mathbf{W}}$; la deuxième l'est aussi, vu la définition même des points spéciaux.

Rappelons que les points spéciaux sont donnés par le tableau du n° (1.3.12).

(4.4.7) Supposons toujours φ *de type connexe*. Si l'homomorphisme ξ de $\hat{G}$ dans Aut Cox **W** n'est pas trivial, il peut y avoir de bons sous-groupes bornés maximaux qui ne soient pas spéciaux. Pour les déterminer, on se ramène aussitôt au cas irréductible, car, φ étant de type connexe, $\xi(\hat{G})$ laisse fixe chaque composante connexe de Cox **W**. Dans le cas irréductible, on montre facilement en comptant les ordres des deux groupes $\hat{\mathbf{W}}_K$

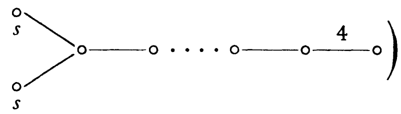
et ${}^v\hat{\mathbf{W}}$ et en utilisant (4.4.2) (iv), que les seuls cas de bons sous-groupes bornés maximaux non spéciaux sont les trois suivants :

$$\text{G de type } A_1, \quad \xi(\hat{G}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad K = \text{Stab } B\,;$$

$$\text{G de type } C_2, \quad \xi(\hat{G}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad K = \text{Stab } B_X,$$

où X est l'ensemble des deux points spéciaux de Cox $\mathbf{W}$ $\left(\text{qui est } \underset{s}{\circ}\overset{4}{\text{——}}\circ\overset{4}{\text{——}}\underset{s}{\circ}\right)$;

$$\text{G est de type } B_n \ (n \geqslant 3), \quad \xi(\hat{G}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \quad K = \text{Stab } B_X,$$

où X est l'ensemble des points de $\mathbf{S}$ distincts du sommet extrémal non spécial de Cox $\mathbf{W}$ (qui est ).

(4.4.8) Par contre, lorsque φ n'est pas de type connexe, il peut ne pas y avoir de bons sous-groupes bornés maximaux. C'est le cas par exemple lorsque $\mathbf{W}$ est de type A_{2n+1}, avec $\xi(\hat{G}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ opérant par symétrie sans points fixes sur Cox $\mathbf{W}$, ou lorsque $\mathbf{W}$ est de type D_{2n+1}, avec $\xi(\hat{G}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ opérant sans points fixes sur Cox $\mathbf{W}$.

D'autre part, on montre aisément que, si φ n'est pas de type connexe, et si $\mathbf{W}$ est irréductible, un bon sous-groupe borné maximal est toujours spécial.

(4.4.9) Les relations précédentes ont des conséquences intéressantes lorsque $\hat{G}$ est un groupe topologique localement compact, le sous-groupe $\hat{B}$ étant un sous-groupe ouvert et fermé de $\hat{G}$, ce qui se passe par exemple lorsque $\hat{G}$ est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local localement compact. Les parties bornées de $\hat{G}$ sont alors les parties relativement compactes et les sous-groupes bornés maximaux sont les sous-groupes compacts maximaux. Les propositions (4.4.3) et (4.4.4) entraînent alors par exemple que, si K est un bon sous-groupe compact maximal de $\hat{G}$, l'algèbre de convolution des fonctions complexes continues à support compact sur $\hat{G}$, invariantes à gauche et à droite par K, est *commutative* : la démonstration donnée dans [7] s'adapte immédiatement; on pourra aussi consulter [29], [30] et [32].

5. DOUBLES SYSTÈMES DE TITS

Dans ce paragraphe, nous commençons par donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que, avec les notations du § 4, on ait $G=\mathfrak{B}N\mathfrak{B}$. Nous verrons que cette relation équivaut à dire que $(G, \mathfrak{B}, N)$ est un système de Tits de groupe de Weyl fini isomorphe à ${}^v\mathbf{W}$. Nous dirons alors que (G, B, N, S) est un *double système de Tits*. Ce sont des systèmes de ce type que nous construirons plus tard dans le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur un corps local.

Dans 5.2, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de sous-groupes P_α (pour $\alpha\in\mathbf{\Sigma}$) soit la famille des sous-groupes P_α associés à un double système de Tits de groupe de Weyl $\mathbf{W}$. Chemin faisant, nous établirons des résultats sur la structure des sous-groupes P_Ω d'un double système de Tits.

Rappelons que les résultats de ce paragraphe ne sont pas utilisés dans la suite du chapitre.

5.1. Doubles systèmes de Tits.

Dans tout 5.1, *nous conservons les notations du* § 4. En particulier, nous supposons choisie une chambre vectorielle $\mathbf{D}$ et les lettres $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}^0$ désignent les sous-groupes introduits en (4.1.5).

(5.1.1) Comme $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}^0.\nu^{-1}(\mathbf{V})$ et que $\mathfrak{B}^0\cap N=H\subset\nu^{-1}(\mathbf{V})$, on a $\mathfrak{B}\cap N=\nu^{-1}(\mathbf{V})$. Par suite, $\mathfrak{B}\cap N$ est un sous-groupe distingué de N et le groupe quotient $N/\mathfrak{B}\cap N$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{W}/\mathbf{V}$, ou encore à ${}^v\mathbf{W}$. Ce dernier groupe est engendré par l'ensemble R des réflexions par rapport aux murs de la chambre vectorielle $\mathbf{D}$ (c'est-à-dire aux hyperplans Ker a pour a décrivant la base de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ associée à $\mathbf{D}$). Par suite, *le quadruplet* $(G, \mathfrak{B}, N, R)$ *satisfait à l'axiome* (T 2) *des systèmes de Tits* (1.2.6).

Définition. — On dit que le système de Tits de type affine (G, B, N, S) *est un* double système de Tits *si le quadruplet* $(G, \mathfrak{B}, N, R)$ *est un système de Tits.*

Définition **(5.1.2)**. — *On dit que deux parties closes* Ω' *et* Ω'' *de* $\mathbf{A}$ *sont* transverses *si, pour toute racine affine* α *de* $\mathbf{A}$ *contenant l'intersection* $\Omega'\cap\Omega''$, *on a, ou bien* $\alpha\supset\Omega'$, *ou bien* $\alpha\supset\Omega''$.

Théorème **(5.1.3)**. — *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) (G, B, N, S) *est un double système de Tits*;

(ii) *on a* $G=\mathfrak{B}.N.\mathfrak{B}$;

(ii *bis*) *quels que soient les quartiers* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *de* $\mathscr{I}$, *il existe des quartiers* $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}_1' \subset \mathfrak{C}'$ *contenus dans un même appartement*;

(iii) *quelles que soient les parties closes transverses* Ω' *et* Ω'' *de* $\mathbf{A}$, *telles que l'intersection* $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ *contienne une chambre, on a*

$$P_\Omega = P_{\Omega'} . P_{\Omega''} ;$$

(iv) *quelles que soient la chambre* C *de* $\mathbf{A}$ *et la chambre vectorielle* D, *on a*

$$P_C = P_{C+D} . P_{C-D} ;$$

(v) *il existe une chambre* C *de* $\mathbf{A}$ *et une chambre vectorielle* D *telles que* $P_C = P_{C+D} . P_{C-D}$.

De plus, ces conditions entraînent :

(vi) $G = BN\mathfrak{B}$;

(vi *bis*) *quels que soient la chambre* C *et le quartier* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathscr{I}$, *il existe un quartier* $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ *et un appartement* A *contenant* C *et* $\mathfrak{C}'$;

(vii) *quelles que soient les racines affines* α *et* β *de* $\mathbf{A}$ *telles que* $\beta^* \subsetneqq \alpha$, *on a*

$$P_{\alpha \cap \beta} = P_\alpha . P_\beta ;$$

(viii) *pour toute racine affine* α *de* $\mathbf{A}$, *on a*

$$P_{\partial\alpha} = (P_\alpha r_\alpha P_\alpha) \cup (P_\alpha P_{(\alpha^*)_+}).$$

(5.1.4) La démonstration du théorème (5.1.3) va occuper les numéros suivants jusqu'à (5.1.21). Nous savons déjà que (i) *implique* (ii) (1.2.7) et que (ii) *est équivalent à* (ii *bis*) (4.2.5).

(5.1.5) *Démonstration de l'implication* (ii *bis*) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons la condition (ii *bis*) réalisée. Soient Ω' et Ω'' deux parties closes transverses de $\mathbf{A}$, telles que $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ contienne une chambre. Nous voulons démontrer que

(1) $$P_\Omega = P_{\Omega'} . P_{\Omega''} .$$

Il est clair que nous pouvons supposer que Ω contient la chambre **C**. Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme **(5.1.6)**. — *Soit* M *une partie de* Ω'. *Alors :*

a) Ω' *et* $\mathrm{cl}(\Omega'' \cup M)$ *sont transverses et* $\mathrm{cl}(\Omega \cup M) = \Omega' \cap \mathrm{cl}(\Omega'' \cup M)$;

b) Ω'' *et* $\mathrm{cl}(\Omega \cup M)$ *sont transverses et* $\Omega = \Omega'' \cap \mathrm{cl}(\Omega \cup M)$.

Comme l'intersection de deux parties closes est close, on a $\mathrm{cl}(M \cup \Omega) \subset \Omega' \cap \mathrm{cl}(M \cup \Omega'')$. D'autre part, si une racine affine α contient $\Omega \cup M$, alors, puisque Ω' et Ω'' sont transverses, ou bien $\alpha \supset \Omega'$, ou bien $\alpha \supset \Omega''$ et $\alpha \supset \mathrm{cl}(M \cup \Omega'')$. Comme $\mathrm{cl}(M \cup \Omega)$ est l'intersection des racines affines contenant $M \cup \Omega$ (2.4.5), on a $\mathrm{cl}(M \cup \Omega) \supset \Omega' \cap \mathrm{cl}(M \cup \Omega'')$, d'où *a)*. De même, on a $\Omega \subset \Omega'' \cap \mathrm{cl}(M \cup \Omega)$ et si une racine affine α contient Ω, ou bien $\alpha \supset \Omega''$, ou bien $\alpha \supset \Omega' \supset M$ et $\alpha \supset \mathrm{cl}(M \cup \Omega)$. On en déduit aussitôt *b)*.

Lemme **(5.1.7)**. — *Supposons de plus que* Ω' *contienne un quartier de direction* D'. *On a alors* $P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega + D')} . P_{\Omega''}$.

Soit $g \in P_\Omega$. Soient $\mathfrak{C}'$ un quartier de direction D' contenu dans Ω' et $\mathfrak{C}''$ un quartier de $\mathbf{A}$ opposé à $\mathfrak{C}'$. D'après (ii *bis*), on peut supposer, quitte à diminuer $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$, que les deux quartiers $\mathfrak{C}'$ et $g.\mathfrak{C}''$ sont contenus dans un même appartement A. Montrons que $\Omega \subset A$. Il suffit de faire voir que toute chambre $C_0 \subset \Omega$ est contenue dans A. Soient $x \in \mathfrak{C}'$ et $y \in \mathfrak{C}''$ tels que $C_0 \subset \mathrm{cl}(\{x, y\})$ (2.4.9). Il résulte de (2.8.8) que $C_0 \subset \mathrm{cl}(\{x, g.y\}) \subset A$, d'où notre assertion.

Soit de plus $h \in G$ tel que $\mathbf{A} = h.A$ et que $h.z = z$ pour tout $z \in A \cap \mathbf{A}$. Les restrictions de h et de $\rho_{\mathbf{A};\mathbf{C}}$ (resp. de g^{-1} et de $\rho_{\mathbf{A};\mathbf{C}}$) à A (resp. $g.\mathbf{A}$) coïncident puisque ce sont des isométries et qu'elles coïncident sur $\mathbf{C}$. Par conséquent, les restrictions de h et de g^{-1} à $g.\mathfrak{C}''$ sont égales et on a $hg \in P_{\mathfrak{C}''}$.

D'autre part, on a $\Omega'' \subset \mathrm{cl}(\Omega \cup \mathfrak{C}'')$. En effet, si une racine affine α contient Ω et $\mathfrak{C}''$, elle ne peut pas contenir $\mathfrak{C}'$, donc *a fortiori* elle ne contient pas Ω'; puisque Ω' et Ω'' sont transverses, elle contient Ω'', d'où notre assertion (2.4.5). Comme h et g appartiennent à P_Ω, on en conclut que $hg \in P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup \mathfrak{C}'')} \subset P_{\Omega''}$.

Nous avons donc montré que $g = h^{-1}hg$ appartient à $P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup \mathfrak{C}')}.P_{\Omega''}$. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que $\Omega + D' \subset \mathrm{cl}(\Omega \cup \mathfrak{C}')$.

Lemme **(5.1.8)**. — *Soient* $D_1, \ldots, D_k$ *des chambres vectorielles telles que* $\Omega' + D_i \subset \Omega'$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant k$. *On a alors*

$$P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega + D_1 + \ldots + D_k)}.P_{\Omega''}.$$

Le lemme (5.1.6) (appliqué à $M = \Omega + D_1 + \ldots + D_i$) montre que, pour $0 \leqslant i < k$, les ensembles clos Ω' et $\Omega''_i = \mathrm{cl}(\Omega'' + D_1 + \ldots + D_i)$ sont transverses et que leur intersection est $\mathrm{cl}(\Omega + D_1 + \ldots + D_i)$. Le lemme (5.1.7) montre alors, puisque Ω' contient un quartier de direction D_{i+1}, que

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{cl}(\Omega + D_1 + \ldots + D_i)} &\subset P_{\mathrm{cl}(\Omega + D_1 \ldots + D_{i+1})}.P_{\mathrm{cl}(\Omega'' + D_1 + \ldots + D_i)} \\ &\subset P_{\mathrm{cl}(\Omega + D_1 + \ldots + D_{i+1})}.P_{\Omega''} \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Proposition **(5.1.9)**. — *Supposons toujours la condition* (ii *bis*) *réalisée. Soient* α *un demi-appartement et* C *une chambre possédant une cloison* F *contenue dans le mur* $\partial\alpha$ *de* α. *Alors, il existe un appartement contenant* α *et* C.

On peut supposer $\alpha \subset \mathbf{A}$ et $C \not\subset \mathbf{A}$. Soit C' (resp. C'') la chambre de $\mathbf{A}$ admettant F comme cloison et contenue dans α (resp. non contenue dans α). Prenons $\Omega' = \alpha$, $\Omega'' = \overline{C' \cup C''}$, d'où $\Omega = \overline{C}'$. On voit aussitôt que Ω' et Ω'' sont closes et transverses, car α est l'unique racine affine contenant C' et non C''. Soient $D_1, \ldots, D_k$ les chambres vectorielles sur lesquelles la racine ${}^v\alpha$ (1.3.8) prend des valeurs négatives. On vérifie aisément que $\alpha = C' + D_1 + \ldots + D_k$ et le lemme (5.1.8) montre que

$$(1) \qquad P_{C'} = P_\alpha . P_{C' \cup C''}.$$

Or, la proposition n'est autre que la traduction géométrique de (1). En effet, il existe un élément $g \in P_{C'}$ tel que $C = g.C''$ (2.3.7). Écrivons $g = h_1 h_2$, avec $h_1 \in P_\alpha$

et $h_2 \in P_{C' \cup C''}$. On a $C = g.C'' = h_1.C''$ et C, comme α, est contenue dans l'appartement $h_1.\mathbf{A}$. Nous laissons au lecteur le soin de déduire (1) de (5.1.9).

(5.1.10) On peut encore formuler (5.1.9) comme suit : soit α un demi-appartement et soit F une cloison contenue dans le mur de α; alors *le groupe* P_α *est transitif sur l'ensemble des chambres non contenues dans* α *et admettant* F *comme cloison.*

Si, avec les notations de (5.1.9), on suppose de plus que $C' = \mathbf{C}$, (1) s'écrit $B = P_\alpha.(B \cap r_\alpha B r_\alpha)$, d'où l'on tire $Br_\alpha B \subset P_\alpha r_\alpha B r_\alpha r_\alpha B$ et finalement

(1 *bis*) $$Br_\alpha B = P_\alpha r_\alpha B.$$

Réciproquement, (1 *bis*) entraîne $Br_\alpha \subset P_\alpha r_\alpha B$, d'où $B \subset P_\alpha r_\alpha B r_\alpha$ et $B = P_\alpha.(B \cap r_\alpha B r_\alpha)$, c'est-à-dire (5.1.9) (1).

Corollaire **(5.1.11).** — *Supposons* (ii *bis*) *réalisée. Pour toute partie close* Ω_1 *de* $\mathbf{A}$, *l'ensemble des points de* $\mathbf{A}$ *laissés fixes par tous les éléments de* P_{Ω_1} *est réduit à* Ω_1. *Si* Ω_1 *et* Ω'_1 *sont deux parties closes de* $\mathbf{A}$, *on a* $P_{\Omega_1} \subset P_{\Omega'_1}$ *si et seulement si* $\Omega'_1 \subset \Omega_1$.

Soit $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et $x \in \mathbf{A} - \alpha$. Soit F une cloison contenue dans $\partial\alpha$ et soit $\Gamma = (C, \ldots, C')$ une galerie tendue entre F et x. On a $C \subset \alpha^*$. Si x était laissé fixe par tous les éléments de P_α, il en serait de même de C (2.4.13), ce qui contredirait (5.1.10).

Soit alors Ω_1 une partie close de $\mathbf{A}$ et soit $x \in \mathbf{A} - \Omega_1$. Par définition (2.4.6), il existe $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ avec $\alpha \supset \Omega_1$ et $x \notin \alpha$. Alors, x n'est pas laissé fixe par tous les éléments de P_α, donc *a fortiori* par tous ceux de P_{Ω_1}, ce qui établit la première assertion du corollaire. La deuxième en résulte aussitôt.

Il ne faudrait pas croire qu'en général Ω soit l'ensemble des points de l'immeuble $\mathscr{I}$ laissés fixes par tous les éléments de P_Ω : ceci peut déjà être inexact lorsque Ω est une racine affine $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$, ou lorsque Ω est égal à $\mathbf{A}$ tout entier. Nous en verrons un exemple plus tard (cas de $SL_2(\mathbf{Q}_2)$).

Lemme **(5.1.12).** — *Soit* C *une chambre de* Ω'. *On a*

$$P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup C)}.P_{\Omega''}.$$

Nous allons raisonner par récurrence sur la longueur m d'une galerie minimale $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_m = C)$ de plus petite longueur possible parmi les galeries d'extrémité C et d'origine contenue dans Ω. Le lemme est évident si $m = 0$. Comme $C_i \subset \Omega'$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$, puisque Ω' est close, l'hypothèse de récurrence entraîne que $P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup C_{m-1})}.P_{\Omega''}$, et le lemme (5.1.6) montre qu'on peut supposer $m = 1$. Soit alors α la racine affine contenant C_0 et ne contenant pas C_1. On a $\Omega'' \subset \alpha$, sinon Ω'' contiendrait une chambre $C' \subset \mathbf{A} - \alpha$ et on aurait $C_1 \subset \mathrm{cl}(C_0 \cup C') \subset \Omega''$, d'où $C_1 \subset \Omega$ et $m = 0$. Soit alors $g \in P_\Omega$; la chambre $g^{-1}.C_1$ admet comme cloison la cloison commune à C_0 et C_1 et nous pouvons appliquer la proposition (5.1.9). Il existe donc un appartement A' contenant α et $g^{-1}.C_1$ et il existe un élément $h \in P_\alpha \subset P_{\Omega''}$ tel que $h.A' = \mathbf{A}$. On a alors $hg^{-1} \in P_\Omega \cap P_{C_1}$ et $g = gh^{-1}.h \in P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup C_1)}.P_{\Omega''}$, c.q.f.d.

(5.1.13) *Démontrons maintenant* (5.1.5) (i) *dans le cas où Ω' contient un quartier.*

On sait (2.4.5) que Ω' est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points x_i et de demi-droites X_j. Or, on voit facilement que, si X est une demi-droite et D' une chambre vectorielle, l'enclos de $X+D'$ est l'adhérence d'une réunion finie de quartiers. On en déduit qu'il existe des chambres $C_1, \ldots, C_k$ et des chambres vectorielles $D_1, \ldots, D_k$ telles que

$$\Omega' = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} (C_i + D_i)\Big).$$

Nous savons déjà que $P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega + D_1 + \ldots + D_k)} . P_{\Omega''}$ (lemme (5.1.8)). Il suffit alors d'appliquer un certain nombre de fois le lemme (5.1.12) pour obtenir la relation cherchée :

$$P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}((\Omega + D_1 + \ldots + D_k) \cup C_1 \cup \ldots \cup C_k)} . P_{\Omega''} \subset P_{\Omega'} . P_{\Omega''}.$$

(5.1.14) Achevons maintenant la démonstration de (5.1.5) (i) dans le cas général. Soit M un segment ou une demi-droite fermée d'origine $x \in \Omega$, contenue dans Ω'. Soit X l'ensemble des racines affines contenant Ω et ne contenant pas M, et posons $\Omega''' = \bigcap_{\alpha \in X} \alpha$. Toute racine affine $\alpha \in X$ contient en son intérieur la demi-droite ouverte d'origine x opposée à M. On en déduit aussitôt que Ω''' *contient un quartier*. De plus, une racine affine $\alpha \in X$ contient Ω et ne contient pas Ω', donc contient Ω''. Par suite, on a $\Omega''' \supset \Omega''$.

Montrons que $\Omega = \Omega''' \cap \mathrm{cl}(\Omega \cup M)$ et que Ω''' et $\mathrm{cl}(\Omega \cup M)$ sont transverses. En effet, si une racine affine contient Ω, ou bien elle contient M et par suite $\mathrm{cl}(\Omega \cup M)$, ou bien elle appartient à X et contient Ω'''. Comme Ω''' contient un quartier, on déduit de (5.1.13) que

$$P_\Omega \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup M)} . P_{\Omega'''} \subset P_{\mathrm{cl}(\Omega \cup M)} . P_{\Omega''}.$$

Compte tenu du lemme (5.1.6) nous sommes ramenés à démontrer (5.1.5) (i) en remplaçant Ω'' par $\mathrm{cl}(\Omega'' \cup M)$. Or, Ω' est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points x_i (pour $1 \leqslant i \leqslant a$) et de demi-droites fermées X_j d'origine y_j (pour $1 \leqslant j \leqslant b$). Soit x un point de Ω; posons $M_i = [x x_i]$ pour $1 \leqslant i \leqslant a$, $M_i = [x y_{i-a}]$ pour $a < i \leqslant a+b$, et $M_i = X_{i-(a+b)}$ pour $a+b < i \leqslant a+2b$. En appliquant successivement le raisonnement précédent aux couples Ω', $\Omega''_i = \mathrm{cl}(\Omega \cup M_1 \cup \ldots \cup M_i)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant a+2b$), tout revient finalement à démontrer (5.1.5) (i) dans le cas où $\Omega' \subset \Omega''$, ce qui est trivial.

La démonstration de l'implication (ii *bis*) $\Rightarrow$ (iii) est achevée.

(5.1.15) *Démonstration des implications* (iii) $\Rightarrow$ (iv) *et* (iv) $\Rightarrow$ (v).

Il suffit de remarquer que, pour toute chambre C de $\mathbf{A}$, on a $C = \mathrm{cl}(C+D) \cap \mathrm{cl}(C-D)$ et que toute racine affine contenant C contient soit $C+D$, soit $C-D$, c'est-à-dire que $\mathrm{cl}(C+D)$ et $\mathrm{cl}(C-D)$ sont transverses.

(5.1.16) *Dans toute la suite de* 5.1, *sauf en* (5.1.18), *nous supposons que la condition* (v) *est satisfaite et nous désignons par* C (resp. D) *une chambre* (resp. *une chambre vectorielle*) *telle que* $P_C = P_{C+D} . P_{C-D}$.

Lemme. — *Pour tout quartier* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathbf{A}$, *de direction* D′, *il existe une chambre* $C' \subset \mathfrak{C}$ *telle que* $P_{C'} = P_{C'+D'} . P_{C'-D'}$.

En effet, il existe $w \in \mathbf{W}$ tel que $D' = {}^v w(D)$. D'autre part, comme $\mathbf{V}$ est un réseau dans ${}^v\mathbf{A}$ et que $\mathfrak{C}$ est un cône ouvert de $\mathbf{A}$, il existe une translation $t \in \mathbf{V}$ telle que $tw(C) \in \mathfrak{C}$. Prenons alors $C' = tw(C)$: on a bien $P_{C'} = P_{tw(C+D)} . P_{tw(C-D)} = P_{C'+D'} . P_{C'-D'}$.

(5.1.17) *Démonstration de* (vi) *et* (vi *bis*).

Nous avons déjà vu (4.2.5) que (vi) et (vi *bis*) sont équivalentes. Soient $\mathfrak{C}$ un quartier de $\mathbf{A}$, de direction D′, et C_1 une chambre de $\mathscr{I}$. Soit a un point de $\mathbf{A}$, posons $d = \sup_{x \in C_1} d(a, x)$ et soit S la boule de rayon d et de centre a dans $\mathbf{A}$. Soit b un point de $\mathbf{A}$ tel que $S \subset b - D'$ et soit C′ une chambre contenue dans le quartier $(b + D') \cap \mathfrak{C}$ telle que $P_{C'} = P_{C'+D'} . P_{C'-D'}$. Soit ρ la rétraction de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{A}$ de centre C′ (2.3.5). Comme ρ est l'identité sur $\mathbf{A}$ et diminue les distances (2.5.3), on a $\rho(C_1) \subset S \subset b - D' \subset C' - D'$. D'autre part, il existe un élément $g \in P_{C'}$ tel que $\rho(C_1) = g(C_1)$. Écrivons alors $g = xy$, avec $x \in P_{C'-D'}$ et $y \in P_{C'+D'}$. On a $x^{-1}g(C_1) = g(C_1)$ puisque $g(C_1) \subset C' - D'$ et par suite $C_1 \subset g^{-1}(\mathbf{A}) = y^{-1}(\mathbf{A})$. Comme $y \in P_{C'+D'}$, ceci entraîne que la chambre C_1 et le quartier $c + D' \subset \mathfrak{C}$ (où c est un point quelconque de C′) sont tous deux contenus dans l'appartement $y^{-1}(\mathbf{A})$. On passe de là au cas général de (vi *bis*) en transformant $\mathfrak{C}$ par un élément de G.

Remarque **(5.1.18)**. — En examinant la démonstration précédente, on voit aisément que la condition (vi) $G = BN\mathfrak{B}$ est entraînée par la condition suivante, plus faible que (v) :

(v *bis*) *il existe une chambre* C *et une chambre vectorielle* D *telles que* $P_C = P_{C+D} . P_\Omega$ *pour toute partie bornée* Ω *de* $C - D$.

Par ailleurs, on peut démontrer qu'inversement (vi) entraîne (v *bis*) et même entraîne

(iii *bis*) *Soient* Ω' *et* Ω'' *deux parties closes transverses telles que* $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ *contienne une chambre. Si* Ω' *est bornée et si* Ω'' *est contenue dans un quartier, on a* $P_\Omega = P_{\Omega'} . P_{\Omega''}$.

Enfin, on peut démontrer que, sans faire aucune hypothèse supplémentaire sur le système de Tits (G, B, N, S), la condition (iii *ter*), obtenue en ajoutant à (iii) ou à (iii *bis*) l'hypothèse que Ω' et Ω'' sont tous deux *bornés*, est toujours satisfaite. Pour cela, il suffit de démontrer l'analogue de (5.1.12) lorsque Ω' et Ω'' sont bornés. Ceci se fait comme en (5.1.12), mais en remplaçant l'usage de la proposition (5.1.9) par celui du corollaire (2.4.12).

(5.1.19) *Démonstration de* (vii).

Soient α et β deux racines affines de $\mathbf{A}$ telles que $\beta^* \subsetneq \alpha$. Il existe $w \in \mathbf{W}$ tel que $w(C) \subset \alpha \cap \beta$. Soit a un point spécial de $\overline{w(C)}$. Il existe un élément w' du stabilisateur $\mathbf{W}_a$ de a dans $\mathbf{W}$ tel que l'une des faces de la chambre vectorielle $D' = {}^v(w'w)(D)$ soit parallèle à $\partial\alpha$ et à $\partial\beta$ et on peut supposer que $C' = w'w(C)$ est contenue dans $\alpha \cap \beta$:

en effet, si $w'w(C)\not\subset\alpha$ par exemple, on a nécessairement $a\in\partial\alpha$, $w'w(C)\subset\alpha^*$ d'où $r_\alpha w'w(C)\subset\alpha$. De plus, on a $P_{C'}=P_{C'+D'}.P_{C'-D'}$. D'autre part, ou bien la racine affine α contient $C'+D'$ et $\beta\supset C'-D'$ ou bien $\alpha\supset C'-D'$ et $\beta\supset C'+D'$. Quitte éventuellement à échanger α et β, on peut supposer que α contient $C'+D'$ et que β contient $C'-D'$.

Soit $g\in P_{\alpha\cap\beta}\subset P_{C'}$ et écrivons $g=hk$, avec $h\in P_{C'+D'}$ et $k\in P_{C'-D'}$. On a $h=gk^{-1}\in P_{\partial\alpha\cap(C'-D')}$. Or l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\partial\alpha\cap(C'-D')$ et de $C'+D'$ est la racine affine α tout entière. Par suite, on a $h\in P_\alpha$ et de même $k\in P_\beta$, ce qui démontre (vii).

(5.1.20) *Démonstration de* (viii).

Reprenons les notations de (5.1.19), avec $\beta=(\alpha^*)_+$. Soit x un point de C' et soit δ_0 une demi-droite d'origine x, contenue dans le cône ouvert $x-D'$. Comme $\partial\alpha$ est parallèle à une face de D' et que $\alpha\supset x+D'$, donc $\alpha\not\supset x-D'$, cette demi-droite coupe $\partial\alpha$ en un point y, qu'on peut supposer intérieur à une cloison $F\subset\partial\alpha$. Soit δ la demi-droite portée par δ_0 d'origine y et soit C_1 (resp. C_2) la chambre contenue dans α (resp. α^*) admettant F comme cloison. Pour $z\in\delta$, soit $(X_0, \ldots, X_k=C_2)$ une galerie tendue entre z et C_2. Comme C_1 rencontre $[yx]$, on a $C_1\subset cl(C_2\cup C')$ et il existe une galerie minimale $(X_k=C_2, X_{k+1}=C_1, \ldots, X_n=C')$ (2.4.4). Comme $C_2\subset cl(\{z\}\cup C')$, la galerie $\Gamma=(X_0, \ldots, X_n)$ est minimale, toujours en vertu de (2.4.4).

Soit $g\in P_{\partial\alpha}$. Supposons tout d'abord que $g(C_1)=C_1$. Comme l'enclos de $C_1\cup\partial\alpha$ est la bande $\alpha\cap(\alpha^*)_+$, il résulte de (vii) que $g\in P_\alpha P_{(\alpha^*)_+}$.

Supposons maintenant que $C_2'=g(C_1)\neq C_1$. Posons $\delta'=gr_\alpha(\delta)$ et $\mathfrak{C}=gr_\alpha(y-D')$. D'après (vi), il existe un quartier $\mathfrak{C}'\subset\mathfrak{C}$ et un appartement A contenant $\mathfrak{C}'$ et C'. Comme δ' est contenue dans $\mathfrak{C}$, on a $\delta'\cap\mathfrak{C}'\neq\emptyset$. Prenons alors un point $z\in\delta$ contenu dans une chambre et tel que $gr_\alpha(z)\in\mathfrak{C}'$ et reprenons la galerie minimale Γ considérée plus haut. La suite

$$\Gamma'=(gr_\alpha(X_0), \ldots, gr_\alpha(X_k)=gr_\alpha(C_2), X_{k+1}=C_1, \ldots, X_n=C')$$

est une galerie sans bégaiement, car $gr_\alpha(C_2)=C_2'\neq C_1$, et est de même type que Γ. C'est donc aussi une galerie minimale. Comme $gr_\alpha(X_0)$ contient $gr_\alpha(z)$, donc est contenue dans A ainsi que C', on en déduit que Γ' tout entière est contenue dans A et en particulier $C_1\cup C_2'\subset A$. Par suite, A contient l'enveloppe convexe de $\{y\}\cup\mathfrak{C}'$, enveloppe convexe qui n'est autre que $\mathfrak{C}$. En particulier, A contient le cône $Y=(y-\overline{D})\cap\partial\alpha$.

Soit alors h un élément de G tel que $h(\mathbf{A})=A$ et que h laisse fixes tous les points de $\mathbf{A}\cap A$. On a $h\in P_{C'}\cap P_Y\cap P_{C_1}$ et $h(C_2)=C_2'$. Écrivons $h=pq$, avec $p\in P_{C'+D'}$ et $q\in P_{C'-D'}$. Comme $C'-\overline{D}'$ rencontre C_1 et C_2 et contient Y, on a $C_2'=p(C_2)$ et $p\in P_{C'+D'}\cap P_Y$. Mais l'adhérence de l'enveloppe convexe de $Y\cup(C'+D')$ est égale à α, donc $p\in P_\alpha$. Enfin, on a $r_\alpha p^{-1}g(C_1)=C_1$ et $r_\alpha p^{-1}g\in P_{\partial\alpha}$. D'après ce que l'on a vu plus haut, ceci entraîne $r_\alpha p^{-1}g\in P_{(\alpha^*)_+}.P_\alpha$. On en déduit

$$g\in pr_\alpha P_{(\alpha^*)_+}P_\alpha\subset P_\alpha r_\alpha P_{(\alpha^*)_+}r_\alpha^{-1}r_\alpha P_\alpha=P_\alpha r_\alpha P_\alpha$$

(car $r_\alpha P_{(\alpha^*)_+}r_\alpha^{-1}\subset P_\alpha$).

Nous avons bien montré que $P_{\partial\alpha} \subset P_\alpha P_{(\alpha^*)_+} \cup P_\alpha r_\alpha P_\alpha$, d'où (viii), l'inclusion opposée étant évidente.

(5.1.21) *Démonstration de* (i).

Vu (5.1.16), on peut supposer $D = \mathbf{D}$. D'autre part, nous avons déjà vu (5.1.1) que l'axiome (T 2) des systèmes de Tits était satisfait.

Démontrons (T 1). On sait qu'il existe un élément $n \in N$ tel que ${}^v\nu(n)(\mathbf{D}) = -\mathbf{D}$. On a alors $P_{C+\mathbf{D}} \subset \mathfrak{B}$ et $P_{C-\mathbf{D}} \subset n\mathfrak{B}n^{-1}$. Ceci, joint à (v), montre que le groupe engendré par $\mathfrak{B}$ et N contient P_C, donc contient B, ce qui démontre (T 1).

Démontrons (T 3). Faisons de $\mathbf{A}$ un espace vectoriel en choisissant comme origine un point spécial o et soit $\mathfrak{C}$ le quartier $o + \mathbf{D}$. C'est un cône simplicial dans $\mathbf{A}$. Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des hyperplans de $\mathbf{A}$ qui contiennent une face de $\mathfrak{C}$; les images des réflexions s_L pour $L \in \mathscr{L}$ forment exactement le sous-ensemble R de ${}^v\mathbf{W}$. Soit $L \in \mathscr{L}$ et soit $r \in N$ tel que $\nu(r) = s_L$. Nous avons à montrer que

(1) $$\mathfrak{B}r\mathfrak{B}w\mathfrak{B} \subset (\mathfrak{B}rw\mathfrak{B}) \cup (\mathfrak{B}w\mathfrak{B})$$

pour tout $w \in N$. Nous allons tout d'abord montrer que

(2) $$\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}r\mathfrak{B} \textit{ est un groupe.}$$

Soit $b \in \mathfrak{B}^0$. Comme b laisse fixes tous les points d'un quartier contenu dans $\mathfrak{C}$ suffisamment petit, il existe un point $x \in r.\mathfrak{C}$ tel que $rbr^{-1} \in P_{x+r.\overline{\mathfrak{C}}}$. Quitte à remplacer x par un point de $x + r.\mathfrak{C}$, on peut supposer que x est transformé d'un point de C par un élément t de $\nu^{-1}(\mathbf{V})$. On a alors

$$P_{x+r.\overline{\mathfrak{C}}} \subset P_{t.C} = tP_C t^{-1} = tP_{C+\overline{\mathfrak{C}}}t^{-1}.tP_{C-\overline{\mathfrak{C}}}t^{-1} = P_{x+\overline{\mathfrak{C}}}.P_{x-\overline{\mathfrak{C}}}.$$

Il existe donc $b_1 \in P_{x+\overline{\mathfrak{C}}} \subset \mathfrak{B}^0$ et $c \in P_{x-\overline{\mathfrak{C}}}$ tels que

(3) $$rbr^{-1} = b_1 c.$$

Comme rbr^{-1} et b_1 appartiennent à $P_{x+(\overline{\mathfrak{C}} \cap r.\overline{\mathfrak{C}})}$, on a aussi

(4) $$c \in P_{x-\overline{\mathfrak{C}}} \cap P_{x+(\overline{\mathfrak{C}} \cap r.\overline{\mathfrak{C}})}.$$

Or, $\overline{\mathfrak{C}} \cap r.\overline{\mathfrak{C}}$ est un cône d'intérieur non vide dans l'hyperplan L et L est par suite enveloppe convexe de la réunion de $\overline{\mathfrak{C}} \cap r.\overline{\mathfrak{C}}$ et de $-(\overline{\mathfrak{C}} \cap r.\overline{\mathfrak{C}}) = (-\overline{\mathfrak{C}}) \cap L$. On tire donc de (4) que $c \in P_{x+L} \cap P_{x-\mathfrak{C}}$. Mais, le demi-espace fermé E de $\mathbf{A}$ de mur $x + L$ et ne contenant pas $x + \mathfrak{C}$ est enveloppe convexe de la réunion de $x + L$ et de $x - \mathfrak{C}$ et on a $c \in P_E$. Soit α la racine affine de bord L contenant C. Ce qui précède montre qu'il existe des racines affines γ équipollentes à α telles que

(5) $$rbr^{-1} \in \mathfrak{B}^0.P_{\gamma^*}.$$

Il suffit en effet de choisir γ telle que $E \supset \gamma^*$.

Nous distinguerons à présent deux cas :

1er cas : (5) *est satisfait pour toute racine affine* γ *équipollente à* α.

Posons alors, pour toute racine affine γ contenue dans α,

$$rbr^{-1} = b_\gamma c_\gamma \quad \text{avec } b_\gamma \in \mathfrak{B}^0 \text{ et } c_\gamma \in P_{\gamma^*}.$$

On a $c_\gamma c_\alpha^{-1} \in P_{\alpha^*} \cap \mathfrak{B}^0$. Mais l'enveloppe convexe d'un quartier de direction $\mathbf{D}$ et de α^* est $\mathbf{A}$ tout entier; par suite, on a $P_{\alpha^*} \cap \mathfrak{B}^0 = H$ et $c_\alpha \in HP_{\gamma^*} = P_{\gamma^*}$. Comme l'intersection des sous-groupes P_{γ^*} pour $\gamma \subset \alpha$ se réduit à H, on en tire $c_\alpha \in H$ et finalement $rbr^{-1} \in \mathfrak{B}^0$.

2e cas : il existe une plus petite racine affine γ équipollente à α telle que (5) *soit satisfaite.*

Utilisons alors (viii). On a

(6) $$P_{\gamma^*} = r_\gamma P_\gamma r_\gamma \subset (P_\gamma r_\gamma P_\gamma) \cup (P_\gamma P_{(\gamma^*)_+}).$$

Puisque $P_\gamma \subset \mathfrak{B}^0$ et que $rbr^{-1} \notin \mathfrak{B}^0 P_{(\gamma^*)_+}$, on voit que $c_\gamma \in P_\gamma r_\gamma P_\gamma$ d'où

(7) $$rbr^{-1} \in \mathfrak{B}^0 P_\gamma r_\gamma P_\gamma \subset \mathfrak{B}^0 r_\gamma \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}^0 rr^{-1} r_\gamma \mathfrak{B}^0 \subset \mathfrak{B}^0 r \mathfrak{B}$$

puisque $r^{-1} r_\gamma \in \nu^{-1}(\mathbf{V}) \subset \mathfrak{B}$.

Dans les deux cas, nous avons donc montré que $rbr^{-1} \in \mathfrak{B}^0 \cup \mathfrak{B}^0 r \mathfrak{B}$. On a donc $r\mathfrak{B}^0 r^{-1} \subset \mathfrak{B}^0 \cup \mathfrak{B}^0 r \mathfrak{B}$ et

$$r\mathfrak{B}r = r\mathfrak{B}^0 \nu^{-1}(\mathbf{V}) r = r\mathfrak{B}^0 r^{-1} r \nu^{-1}(\mathbf{V}) r \subset (\mathfrak{B}^0 \cup \mathfrak{B}^0 r \mathfrak{B}) \nu^{-1}(\mathbf{V}) = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B} r \mathfrak{B}$$

ce qui entraîne aussitôt que $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B} r \mathfrak{B}$ est un groupe.

Soit maintenant $w \in N$ et supposons tout d'abord que *la longueur de* ${}^v\nu(rw)$ (*par rapport au système générateur* R *de* ${}^v\mathbf{W}$) *est plus grande que celle de* ${}^v\nu(w)$. D'après ([5], chap. V, § 3, n° 2, th. 1), ceci signifie que les chambres vectorielles $\mathbf{D}$ et ${}^v\nu(rw).\mathbf{D}$ sont de part et d'autre de l'hyperplan de ${}^v\mathbf{A}$ parallèle à L; par suite, pour toute racine affine γ équipollente à α, il existe un quartier $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ tel que $rw.\mathfrak{C}' \subset \gamma^*$, d'où $P_{\gamma^*} \subset P_{rw.\mathfrak{C}'}$ et

$$(rw)^{-1} P_{\gamma^*} rw \subset P_{\mathfrak{C}'} \subset \mathfrak{B}^0.$$

Soit alors $b \in \mathfrak{B}^0$. D'après (5), il existe une racine affine γ équipollente à α, un élément $b_1 \in \mathfrak{B}$ et un élément $c \in P_{\gamma^*}$ tels que $rbw = rbr^{-1} rw = b_1 crw$. On en déduit

$$rbw = b_1 rw(rw)^{-1} crw \in \mathfrak{B} rw.(rw)^{-1} P_{\gamma^*} rw \subset \mathfrak{B} rw \mathfrak{B}.$$

Comme $\nu^{-1}(\mathbf{V})$ est distingué dans N, il en résulte que

(8) $$\mathfrak{B} r \mathfrak{B} w \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \quad \textit{lorsque } \ell({}^v\nu(rw)) > \ell({}^v w).$$

Supposons maintenant que *la longueur de* ${}^v\nu(rw)$ *est plus petite que celle de* ${}^v\nu(w)$. Substituant rw à w dans (8), on en tire $\mathfrak{B} r \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} w \mathfrak{B}$, d'où en utilisant (2)

(9) $$\mathfrak{B} r \mathfrak{B} w \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} r \mathfrak{B} r^{-1} \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \subset (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B} r \mathfrak{B}) \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} = \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B} r \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} rw \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B} w \mathfrak{B}.$$

Nous avons donc bien démontré (1), c'est-à-dire (T 3).

Le quadruplet $(G, \mathfrak{B}, N, R)$ satisfaisant aux axiomes (T 1), (T 2) et (T 3) des systèmes de Tits, on sait ([5], chap. IV, § 2, n° 3, remarque) que $G = \mathfrak{B} N \mathfrak{B}$, c'est-à-dire que (ii) est satisfaite. Il en résulte que *la condition* (iv) *est satisfaite.*

Démontrons enfin l'axiome (T 4) :

$$r\mathfrak{B}r^{-1} \neq \mathfrak{B} \quad (\text{pour } r = s_L \text{ avec } L \in \mathscr{L}).$$

Supposons qu'il existe un hyperplan $L \in \mathscr{L}$ tel que $r\mathfrak{B}r^{-1} = \mathfrak{B}$ (avec $r = s_L$). Si $\mathfrak{C} = x + \mathbf{D}$ est un quartier de direction $\mathbf{D}$, on a

$$P_{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{B}^0 \subset r\mathfrak{B}r^{-1} = \nu^{-1}(\mathbf{V}) r \mathfrak{B}^0 r^{-1}.$$

Pour tout élément $g \in P_{\mathfrak{C}}$, il existe donc un quartier $\mathfrak{C}'$ de direction $D' = {}^v\nu(r).\mathbf{D}$, un élément $h \in P_{\mathfrak{C}'}$ et un élément $t \in \nu^{-1}(\mathbf{V})$ tels que $g = th$. Soit E (resp. E′) l'enclos de $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}'$ (resp. $\mathfrak{C} \cup t.\mathfrak{C}'$) ; c'est une partie convexe de $\mathbf{A}$ et on a $g.E = E'$. De plus, l'application $y \mapsto g.y$ de E sur E′ est affine, se réduit à l'identité sur $\mathfrak{C}$ et à la translation $y \mapsto t.y$ sur $\mathfrak{C}'$. On en conclut que $\nu(t) = 1$ et que $g \in P_{\mathfrak{C}'}$. Autrement dit, *tout élément qui laisse fixes les points d'un quartier de direction* $\mathbf{D}$ *laisse aussi fixes les points d'un quartier de direction* D′.

Soit alors C′ la chambre contenue dans $\mathfrak{C}$ à laquelle o est adhérent. Ce qui précède entraîne que $P_{C'+\mathbf{D}} \subset P_{C'+D'}$. En utilisant (iv), on en tire

$$P_{C'} = P_{C'+\mathbf{D}} . P_{C'-\mathbf{D}} \subset P_{C'+D'} . P_{C'-\mathbf{D}} \subset P_{(C'+D') \cap (C'-\mathbf{D})}. \tag{10}$$

Or, la seule racine affine qui contient C′ et ne contient pas $r(C')$ est la racine affine α de bord L contenant C′. Il en résulte que la chambre $r(C')$ est contenue dans l'intersection $(C'+D') \cap (C'-\mathbf{D})$ et on déduit de (10) que $P_{C'} \subset P_{r(C')}$, ce qui est impossible puisque les stabilisateurs de deux chambres distinctes sont deux sous-groupes parahoriques distincts. Nous avons donc abouti à une contradiction et l'axiome (T 4) est satisfait.

Ceci achève la démonstration de (i) et par suite du théorème (5.1.3).

Remarque **(5.1.22).** — La condition (viii) entraîne la condition suivante :

(viii *bis*) *La réunion de deux demi-appartements de même mur n'ayant aucune chambre en commun est un appartement.*

En effet, supposons (viii) satisfaite et soient M et M′ deux demi-appartements de même mur, n'ayant aucune chambre en commun. On peut évidemment se restreindre au cas où M′ est une racine affine α de $\mathbf{A}$. Il existe alors un élément $g \in P_{\partial\alpha}$ tel que $g(\mathbf{A})$ soit un appartement contenant M (2.5.8). Quitte à remplacer g par gr_α, on peut supposer que $g(\alpha) = M$. Comme $M \cap \alpha$ ne contient pas de chambre, on a $g \notin P_\alpha . P_{(\alpha^*)_+}$ d'où, d'après (viii), $g = hr_\alpha h'$, avec $h, h' \in P_\alpha$. Alors $M = hr_\alpha(\alpha) = h(\alpha^*)$ et $M \cup \alpha = h(\mathbf{A})$, ce qui démontre (viii *bis*).

Inversement, on peut montrer que la condition (viii *bis*) entraîne (viii).

(5.1.23) *Jusqu'à la fin de* 5.1, *nous supposons que* (G, B, N, S) *est un double système de Tits.* Pour toute racine affine α, *le sous-groupe* $P_{\partial\alpha}$ *est alors engendré par* P_α *et* P_{α^*}. En effet, il existe d'après (5.1.10) un élément $u \in P_{\alpha^*}$ qui ne laisse pas fixe une chambre C contenue dans α et bordée par $\partial\alpha$. On a alors $u \notin P_\alpha . P_{(\alpha^*)_+}$, d'où $P_\alpha u P_\alpha = P_\alpha r_\alpha P_\alpha$ d'après (viii).

D'autre part, *l'ensemble des points de* $\mathscr{I}$ *laissés fixes par tout élément de* $P_{\partial\alpha}$ *est réduit à* $\partial\alpha$. En effet, soit $x \in \mathscr{I}$ n'appartenant pas à $\partial\alpha$ et soit y un point d'une cloison F contenue dans $\partial\alpha$. Si x est invariant par $P_{\partial\alpha}$, le segment $[xy]$ est lui aussi laissé fixe point par point par $P_{\partial\alpha}$. Or il y a une chambre C admettant F comme cloison et contenant un point de $[xy]$. Cette chambre serait alors invariante par $P_{\partial\alpha}$, ce qui contredit (5.1.10).

Lemme **(5.1.24).** — *Soient* α *et* β *deux racines affines de* $\mathbf{A}$. *Pour que* $\alpha^* = \beta$, *il faut et il suffit que le groupe engendré par* P_α *et* P_β *ne laisse fixe aucune chambre, mais laisse fixe une cloison de* $\mathscr{I}$.

Que la condition soit nécessaire résulte de (5.1.23). Réciproquement, si la racine affine β n'est pas équipollente à α^*, le groupe engendré par P_α et P_β laisse fixe une chambre, car $\alpha \cap \beta$ est d'intérieur non vide. Il en est de même lorsque $\beta \supsetneqq \alpha^*$. Si $\beta \subset \alpha^*$, les points fixes du groupe engendré par P_α et P_β sont contenus dans l'ensemble des points fixes du groupe engendré par P_α et P_{α^*} (resp. P_β et P_{β^*}), c'est-à-dire d'après (5.1.23) dans $\partial\alpha$ (resp. $\partial\beta$). Si de plus $\beta \neq \alpha^*$, on a $\partial\alpha \cap \partial\beta = \emptyset$, ce qui démontre que la condition est suffisante.

(5.1.25) Il résulte de (5.1.24) que la donnée de l'ensemble des sous-groupes P_α, pour $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$, permet de déterminer les couples (P_α, P_{α^*}), donc aussi les murs $\partial\alpha$ (5.1.23), et par suite l'appartement $\mathbf{A}$ qui est l'enveloppe convexe de la réunion des $\partial\alpha$. Par suite :

Proposition. — (i) Pour qu'un élément g de G *appartienne à* N, *il faut et il suffit que l'automorphisme intérieur défini par g permute entre eux les sous-groupes* P_α *pour* $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$.

(ii) *On a* $H = \bigcap_{\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}} P_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}} \operatorname{Norm} P_\alpha$.

(5.1.26) Pour toute racine affine α de $\mathbf{A}$, donnons-nous un sous-ensemble U_α de P_α tel que $P_\alpha = H.U_\alpha$. On voit alors aisément, en utilisant (5.1.10), que pour toute chambre C bordée par $\partial\alpha$ et non contenue dans α, il existe un élément $u \in U_\alpha$ tel que $u(C) \neq C$. On en déduit comme en (5.1.23) et (5.1.24) que l'ensemble des points de $\mathscr{I}$ laissés fixes par $U_\alpha \cup U_{\alpha^*}$ se réduit à $\partial\alpha$, et que, si α et β sont deux racines affines, on a $\beta = \alpha^*$ si et seulement si $U_\alpha \cup U_\beta$ laisse fixe une cloison et ne laisse fixe aucune chambre de $\mathscr{I}$. On peut alors généraliser comme suit la proposition (5.1.25) : *pour qu'un élément* $g \in G$ *appartienne au stabilisateur* N *de l'appartement* $\mathbf{A}$, *il faut et il suffit que pour toute racine affine* α *de* $\mathbf{A}$ *il existe une racine affine* β *de* $\mathbf{A}$ *telle que* $P_\beta = HgU_\alpha g^{-1}$.

(5.1.27) Soit Ω une partie close non vide de $\mathbf{A}$ et soit L le sous-espace affine de $\mathbf{A}$ engendré par Ω. Comme Ω est une réunion convexe de facettes, on peut choisir une facette $F \subset \Omega$ qui soit *ouverte* dans L. Soit Δ une composante connexe du complémentaire X dans $\mathbf{A}$ de la réunion des murs de $\mathbf{A}$ contenant L. La symétrie orthogonale par rapport à L transforme Δ en une autre composante connexe de X, notée Δ'. On désigne par C_0 (resp. C'_0) l'unique chambre contenue dans Δ (resp. Δ') et contenant F dans son adhérence.

Lemme. — Soit C *une chambre de* $\mathscr{I}$ *contenant* F *dans son adhérence. Il existe un appartement contenant* C *et* Δ.

Soit $\Gamma = (C_0, C_1, \ldots, C_m = C)$ une galerie tendue entre C_0 et C. Montrons tout d'abord par récurrence sur i, que $F \subset \overline{C}_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$. C'est vrai par hypothèse pour $i = 0$. Soit A un appartement contenant C_0 et C, donc Γ. Supposons $i > 0$ et soit M le mur de A séparant C_{i-1} et C_i. Comme M sépare C_0 et C (2.3.10) et que $F \subset \overline{C}_0 \cap \overline{C}$, on a $F \subset M$. Par l'hypothèse de récurrence, $F \subset \overline{C}_{i-1}$, donc $F \subset M \cap \overline{C}_{i-1} = \overline{C}_{i-1} \cap \overline{C}_i$ et $F \subset \overline{C}_i$.

Démontrons maintenant le lemme par récurrence sur m. Si $m = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $m \geqslant 1$, il existe par l'hypothèse de récurrence un appartement A contenant Δ et C_{m-1}. D'après (2.5.8), il existe $g \in P_\Delta$ avec $g.A = \mathbf{A}$. Quitte à remplacer C par $g.C$, on voit qu'on peut supposer $C_{m-1} \subset \mathbf{A}$. Soit alors α la racine affine contenant C_{m-1} et dont le bord $\partial\alpha$ contient $\overline{C}_{m-1} \cap \overline{C}$. Alors $\partial\alpha$ sépare C_0 et C (2.3.10) et on a $C_0 \subset \alpha$. Comme $\partial\alpha \supset F$, on a $\Delta \subset \alpha$. Mais (5.1.10) entraîne qu'il existe un appartement contenant C et α, d'où le lemme.

Proposition **(5.1.28)**. — *Gardons les notations de* (5.1.27). *Posons* $N_\Omega = P_\Omega \cap N$ *et soit* $\widetilde{\Omega}$ *l'intersection des racines affines* α *telles que* $\alpha \supset \Omega$ *et* $\Omega \not\subset \alpha^*$. *Alors* $\widetilde{\Omega}$ *est une partie close d'intérieur non vide et on a*

$$P_\Omega = P_\Delta N_\Omega P_\Delta P_{\widetilde{\Omega}} = P_L . P_{\widetilde{\Omega}}.$$

Les racines affines α satisfaisant à $\Omega \subset \alpha$ et $\Omega \not\subset \alpha^*$ sont celles qui satisfont à $\Omega \subset \alpha$ et $\Omega \not\subset \partial\alpha$, ou encore à $\Omega \subset \alpha$ et $F \not\subset \partial\alpha$. Montrons que

$$\widetilde{\Omega} = \mathrm{cl}(\Omega \cup C_0 \cup C_0'). \tag{1}$$

En effet, si $\alpha \supset \Omega$ et $\partial\alpha \not\supset F$, la facette F est intérieure à α; comme $F \subset \overline{C}_0 \cap \overline{C}_0'$, on en conclut que $C_0 \cup C_0' \subset \alpha$. Réciproquement, si $\alpha \supset \Omega \cup C_0 \cup C_0'$, alors $\partial\alpha \not\supset F$ car tout mur contenant F sépare C_0 et C_0'. D'où (1). Il est alors clair que $\widetilde{\Omega}$ est une partie close d'intérieur non vide.

Soit maintenant $g \in P_\Omega$. Posons $C = g.C_0$. D'après le lemme (5.1.27), il existe un appartement A contenant C et Δ, et par suite un élément $u \in P_\Delta$ tel que $v.A = \mathbf{A}$ (2.5.8), d'où $ug.C_0 \subset \mathbf{A}$. Il existe alors $n \in N$ avec $nug.C_0 = C_0$ et n est l'identité sur $\overline{C}_0 \cap ug.\overline{C}_0 \supset F$. Donc, n est l'identité sur L et $n \in N_\Omega$.

Posons $C' = nug.C_0'$. Toujours d'après le lemme (5.1.27), il existe un appartement A′ contenant Δ et C′, d'où un élément $u' \in P_\Delta$ tel que $g'.C_0' \subset \mathbf{A}$, en posant $g' = u'nug$. Comme $g'.C_0 = C_0$, on a $w(C_0, C_0') = w(C_0, g'.C_0')$ (avec les notations de (2.1.7)), d'où $g'.C_0' = C_0'$ d'après (2.3.8). Donc $g' \in P_{\Omega \cup C_0 \cup C_0'}$ et $g' \in P_{\widetilde{\Omega}}$ d'après (1). Finalement, on a bien $g = u^{-1}n^{-1}u'^{-1}g' \in P_\Delta N_\Omega P_\Delta P_{\widetilde{\Omega}}$, d'où la proposition.

Corollaire **(5.1.29)**. — *Soit* $\varphi : G \to \hat{G}$ *un homomorphisme* B-N-*adapté. Reprenons les notations de* (4.1.1) *et posons* $\hat{N}_\Omega = \hat{N} \cap \hat{P}_\Omega$ *et* $\hat{N}_\Omega^\dagger = \hat{N} \cap \hat{P}_\Omega^\dagger$. *On a*

a) $$\hat{P}_\Omega = (\hat{N}_\Delta^\dagger \cap \hat{N}_\Omega)\varphi(P_\Omega) = \varphi(P_\Delta)\hat{N}_\Omega\varphi(P_\Delta P_{\widetilde{\Omega}}) = \hat{P}_\Delta \hat{N}_\Omega \hat{P}_\Delta \hat{P}_{\widetilde{\Omega}};$$

b) $$\hat{P}_\Omega^\dagger = (\hat{N}_\Delta^\dagger \cap \hat{N}_\Omega^\dagger)\varphi(P_\Omega) = \varphi(P_\Delta)\hat{N}_\Omega^\dagger\varphi(P_\Delta P_{\widetilde{\Omega}}) = \hat{P}_\Delta \hat{N}_\Omega^\dagger \hat{P}_\Delta \hat{P}_{\widetilde{\Omega}}.$$

Soit $g \in \hat{P}_\Omega^\dagger$. D'après (2.5.8), il existe $h \in P_\Omega$ avec $h.g^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{A}$, d'où $\varphi(h)g^{-1} \in \hat{N} \cap \hat{P}_\Omega^\dagger = \hat{N}_\Omega^\dagger$. Donc $\hat{P}_\Omega^\dagger = \hat{N}_\Omega^\dagger \varphi(P_\Omega)$. Mais, si $n \in \hat{N}_\Omega^\dagger$, $n.\Delta$ est une composante connexe de X et il existe $n' \in N_\Omega$ tel que $n'.n.\Delta = \Delta$, d'où $\hat{N}_\Omega^\dagger = (\hat{N}_\Delta^\dagger \cap \hat{N}_\Omega^\dagger)\varphi(N_\Omega)$. Ceci démontre la première des égalités *b)*. D'autre part, si $n \in \hat{N}_\Delta^\dagger$, on a $n\hat{P}_\Delta n^{-1} = \hat{P}_\Delta$, d'où $n\varphi(P_\Delta)n^{-1} = \varphi(P_\Delta)$ puisque $\varphi(G)$ est distingué dans $\hat{G}$ et que $\varphi(P_\Delta) = \varphi(G) \cap \hat{P}_\Delta$. On en déduit les autres égalités *b)*, et *a)* résulte aussitôt de *b)*.

Remarque **(5.1.30).** — Il est clair que $\hat{N}_\Omega = \hat{N}_L$. Par contre, on peut avoir $\hat{N}^\dagger_\Omega \neq \hat{N}^\dagger_L$. D'autre part, on a

$$\hat{N}^\dagger_\Delta \cap \hat{N}_\Omega = \hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{W}}^\dagger_{C_0} \cap \hat{\mathbf{W}}_F) \tag{1}$$

car C_0 est la seule chambre contenue dans Δ et admettant F comme facette. On en conclut que $\hat{H}\varphi(P_\Omega)$ *est un sous-groupe distingué d'indice fini de* $\hat{P}_\Omega$, le quotient $\hat{P}_\Omega/\hat{H}\varphi(P_\Omega)$ étant isomorphe à $\hat{\mathbf{W}}^\dagger_{C_0} \cap \hat{\mathbf{W}}_F$.

Proposition **(5.1.31).** — *Tout homomorphisme* B-N-*adapté est aussi* $\mathfrak{B}$-N-*adapté.*

Soit $\varphi : G \to \hat{G}$ un homomorphisme B-N-adapté. On sait que $\hat{G} = \varphi(G).\hat{N}$. Comme $\hat{N}$ normalise $\varphi(N)$ et $\varphi(\nu^{-1}(\mathbf{V}))$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \hat{N}$, il existe $n' \in N$ tel que $\varphi(n')n$ normalise $\varphi(\mathfrak{B}^0)$. On peut écrire $w = \hat{\nu}(n) = w'w''t$, avec $w' \in \mathbf{W}_x$, $w'' \in \tilde{\mathbf{W}}^\dagger_{x+D}$ et $t \in \tilde{\mathbf{V}}$ (où x est un point spécial de $\mathbf{A}$). Soit $n' \in \nu^{-1}(w')$. Pour tout quartier $\mathfrak{C}$ de direction $\mathbf{D}$ de $\mathbf{A}$, on a alors

$$n\varphi(P_\mathfrak{C})n^{-1} = \varphi(P_{w'w''t(\mathfrak{C})}) = \varphi(n'P_{\mathfrak{C}'}n'^{-1})$$

où $\mathfrak{C}' = w''t(\mathfrak{C})$ est un quartier de $\mathbf{A}$, de direction $\mathbf{D}$. On a donc $n\varphi(\mathfrak{B}^0)n^{-1} = \varphi(n'\mathfrak{B}^0 n'^{-1})$, d'où la proposition.

Soit de plus ${}^v\omega$ l'homomorphisme de $\hat{G}$ dans $\mathrm{Aut}({}^v\mathbf{W}, R)$ associé à φ (considéré comme homomorphisme $\mathfrak{B}$-N-adapté). On sait que ${}^v\omega$ est trivial sur $\varphi(G)$ et nous venons de montrer que $\hat{G} = \varphi(G).E$, avec $E = \{g \in \hat{N} \mid {}^v\hat{\nu}(g).\mathbf{D} = \mathbf{D}\}$. Si $g \in E$ et $n \in N$, on a (1.2.20)

$${}^v\omega(g)({}^v\nu(n)) = {}^v\nu(g\varphi(n)g^{-1}) = {}^v\hat{\nu}(g){}^v\nu(n){}^v\hat{\nu}(g)^{-1}$$

ce qui montre que ${}^v\omega$ restreint à E s'identifie au composé de ${}^v\hat{\nu}$ et de l'isomorphisme canonique de ${}^v\hat{\mathbf{W}}^\dagger_D$ sur $\mathrm{Aut}({}^v\mathbf{W}, R)$ ((1.3.18) (4)). Il en résulte que *le noyau* ${}^v\hat{G}_0$ *de* ${}^v\omega$ *est égal à* $\varphi(G)\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$. De plus, comme $\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$ normalise $\varphi(\mathfrak{B})$ et que $\varphi(\mathfrak{B})$ est son propre normalisateur dans $\varphi(G)$, on en déduit que $\mathrm{Stab}\,\mathfrak{B} \cap {}^v\hat{G}_0 = \varphi(\mathfrak{B}).\hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}}) = \hat{\mathfrak{B}}$, ce qui montre que la notation $\hat{\mathfrak{B}}$ est cohérente avec (1.2.17).

Corollaire **(5.1.32).** — *Si* $\varphi : G \to \hat{G}$ *est un homomorphisme* B-N-*adapté de type connexe* (4.1.3), *alors* $\hat{G} = {}^v\hat{G}_0$, *on a* $\hat{N} \cap \hat{\mathfrak{B}} = \hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$, *le groupe quotient* $\hat{N}/\hat{\mathfrak{B}} \cap \hat{N}$ *s'identifie à* ${}^v\mathbf{W}$ *et le quadruplet* $(\hat{G}, \hat{\mathfrak{B}}, \hat{N}, R)$ *est un système de Tits de groupe de Weyl* ${}^v\mathbf{W}$.

Puisque ${}^v\hat{\mathbf{W}} = {}^v\mathbf{W}$, on a $E = \hat{\nu}^{-1}(\hat{\mathbf{V}})$, d'où $\hat{G} = {}^v\hat{G}_0$ et le corollaire résulte de (1.2.17).

(5.1.33) On sait ([5], [39]) qu'on peut associer à tout système de Tits un complexe simplicial abstrait que nous appellerons ici l'*immeuble combinatoire* du système, dont les simplexes représentent les sous-groupes paraboliques, la relation de face correspondant à l'inverse de la relation d'inclusion. Nous allons dans ce qui suit indiquer brièvement les rapports entre l'immeuble $\mathscr{I}$ et l'immeuble combinatoire du système de Tits $(G, \mathfrak{B}, N, R)$ de groupe de Weyl ${}^v\mathbf{W}$, que nous noterons ${}^v\mathscr{I}$. Par définition, les chambres de ${}^v\mathscr{I}$ sont en correspondance bijective avec les sous-groupes paraboliques minimaux, c'est-à-dire avec les conjugués de $\mathfrak{B}$, cette correspondance étant compatible avec l'action de G sur ${}^v\mathscr{I}$ d'une part et sur l'ensemble des conjugués de $\mathfrak{B}$ (par automorphismes intérieurs) de l'autre.

Par ailleurs, le groupe $\mathfrak{B}$ est le stabilisateur du germe de quartier $\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}}$ (2.9.2) contenant les quartiers $x+\mathbf{D}$ pour $x \in \mathbf{A}$ et il est facile de voir que G opère transitivement sur l'ensemble des germes de quartier de $\mathscr{I}$, le stabilisateur de $g.\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}}$ étant $g\mathfrak{B}g^{-1}$. Comme $\mathfrak{B}$ est son propre normalisateur, on en déduit une bijection compatible avec l'action de G entre l'ensemble des germes de quartier de $\mathscr{I}$ et l'ensemble des sous-groupes paraboliques minimaux, ou encore l'ensemble des chambres de ${}^v\mathscr{I}$: la chambre $f(\widetilde{\mathfrak{C}})$ associée au germe de quartier $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est celle dont le stabilisateur coïncide avec celui de $\widetilde{\mathfrak{C}}$.

De plus, *des germes de quartier* $\widetilde{\mathfrak{C}}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *sont contenus dans un même appartement de* $\mathscr{I}$ *si et seulement si les chambres* $f(\widetilde{\mathfrak{C}}_i)$ *sont contenues dans un même appartement de* ${}^v\mathscr{I}$ (rappelons qu'un appartement de ${}^v\mathscr{I}$ est le transformé par un élément de G du sous-complexe ${}^v\mathbf{A}$ de ${}^v\mathscr{I}$ dont les simplexes sont ceux associés aux sous-groupes paraboliques $n\mathfrak{P}n^{-1}$ pour $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{B}$ et $n \in N$). Pour le montrer, il suffit de faire voir que $\widetilde{\mathfrak{C}} \subset \mathbf{A}$ équivaut à $f(\widetilde{\mathfrak{C}}) \subset {}^v\mathbf{A}$, ce qui est évident, car $\widetilde{\mathfrak{C}} \subset \mathbf{A}$ équivaut à l'existence d'un $n \in N$ avec $\widetilde{\mathfrak{C}} = n.\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{B}}$. On en déduit aussitôt qu'il existe une *bijection et une seule*, notée encore f, *de l'ensemble des appartements de* $\mathscr{I}$ *sur l'ensemble des appartements de* ${}^v\mathscr{I}$, telle qu'un germe de quartier $\widetilde{\mathfrak{C}}$ est contenu dans un appartement A si et seulement si la chambre $f(\widetilde{\mathfrak{C}})$ est contenue dans l'appartement $f(A)$. Il est clair que cette bijection est compatible avec l'action de G sur $\mathscr{I}$ et sur ${}^v\mathscr{I}$.

Il résulte en particulier de ce qui précède qu'à tout automorphisme θ de l'immeuble $\mathscr{I}$ correspond un automorphisme $v(\theta)$ et un seul de ${}^v\mathscr{I}$ tel que $v(\theta).f(\widetilde{\mathfrak{C}}) = f(\theta.\widetilde{\mathfrak{C}})$ pour tout germe de quartier $\widetilde{\mathfrak{C}}$ de $\mathscr{I}$. On obtient ainsi un homomorphisme v de Aut $\mathscr{I}$ dans Aut${}^v\mathscr{I}$, homomorphisme qui est *injectif*. En effet, si $v(\theta)=1$, alors θ conserve tous les appartements de $\mathscr{I}$. Or, on voit aisément que chaque facette F de $\mathscr{I}$ a pour adhérence l'intersection des appartements de $\mathscr{I}$ qui la contiennent; on en déduit que $\theta.F = F$ pour toute facette F de $\mathscr{I}$, d'où $\theta = 1$. Ceci permet d'utiliser pour l'étude de Aut $\mathscr{I}$ les résultats établis dans [39] sur le groupe des automorphismes d'un immeuble combinatoire associé à un système de Tits de groupe de Weyl fini.

5.2. Caractérisation axiomatique de la famille des $\mathbf{P}_\alpha$.

Dans les n^{os} (5.2.1) à (5.2.27), nous abandonnons les hypothèses et notations adoptées dans les §§ 2 à 4, ne conservant que celles de (1.5.2). On désigne par G un groupe, par N un sous-groupe de G, par ν un homomorphisme surjectif de N sur $\mathbf{W}$ et par H le noyau de ν. On pose $W = N/H$ et on désigne par S l'image réciproque de $\mathbf{S}$ dans W par l'isomorphisme de W sur $\mathbf{W}$ déduit de ν (isomorphisme par lequel on identifiera parfois W et **W**). On donne, pour toute racine affine $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$, un sous-groupe P_α de G. Pour toute partie Ω de **A**, on désigne par P_Ω le sous-groupe de G engendré par H et les P_α pour $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$ et $\alpha\supset\Omega$. Il est clair que

$$P_\Omega = P_{\mathrm{cl}(\Omega)}.$$

Nous allons imposer à ces données des conditions ((5.2.1) (1) à (6)) qui entraîneront que (G, P_C, N, S) est un double système de Tits. Plus tard (5.2.27), nous montrerons que réciproquement, les sous-groupes P_α associés comme au § 4 à un double système de Tits satisfont à ces conditions, les notations P_Ω étant concordantes. Ceci permettra d'appliquer au cas des doubles systèmes de Tits les résultats sur la structure des groupes P_Ω que nous allons démontrer en (5.2.6) sqq.

(5.2.1) On suppose jusqu'en (5.2.27) que les données précédentes satisfont aux six conditions suivantes :

(A 1) *Pour tout* $n\in N$ *et tout* $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$, *on a* $nP_\alpha n^{-1}=P_{\nu(n).\alpha}$.

(A 2) *Soit* $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$. *Pour tout* $\beta\in\boldsymbol{\Sigma}$ *avec* $\beta\supsetneq\alpha$, *on a* $P_\beta\subsetneq P_\alpha$ *et l'intersection des* P_β *pour* $\beta\supset\alpha$ *est égale à* H.

(A 3) *Soient* $\alpha,\beta\in\boldsymbol{\Sigma}$, *telles que* $\alpha\cap\beta$ *soit d'intérieur non vide et soit* Ω *l'intersection des racines affines contenant* $\alpha\cap\beta$ *et ne contenant pas* α. *Alors* $P_\alpha P_\Omega$ *est un groupe.*

(A 4) *Pour tout* $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$, *le sous-ensemble* $P_\alpha P_{(\alpha^*)_+}\cup P_\alpha\nu^{-1}(r_\alpha)P_\alpha$ *est un sous-groupe de* G.

(A 5) *Pour tout* $x\in\mathbf{A}$ *et toute chambre vectorielle* D, *on a* $P_{x+D}\cap P_{x-D}=H$.

(A 6) *Le groupe* G *est engendré par la réunion des* P_α *pour* $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$.

(5.2.2) Il est clair que (A 1) entraîne

(A 1 *bis*) $\quad nP_\Omega n^{-1}=P_{\nu(n).\Omega}\quad$ pour $n\in N$ et $\Omega\subset\mathbf{A}$.

En utilisant alors la transitivité de ${}^v\mathbf{W}$ sur les chambres vectorielles, on voit aussitôt que, moyennant (A 1), il suffit de supposer (A 5) pour *une* chambre vectorielle D. Par ailleurs, (A 2) montre que pour $\Omega=\alpha$, la notation P_Ω est sans ambiguïté.

D'autre part, plaçons-nous dans les hypothèses de (A 3). Comme toute racine affine contenant $\alpha\cap\beta$ contient soit α soit Ω, on déduit aussitôt de (A 2) et (A 3) que l'on a

(1) $$P_{\alpha\cap\beta}=P_\alpha P_\Omega.$$

Supposons de plus que $\beta\supsetneq\alpha^*$. Alors, on a $\Omega=\beta$ et

(2) $$P_{\alpha\cap\beta}=P_\alpha P_\beta.$$

En particulier, on a

(3) $$P_{\alpha\cap(\alpha^*)_+}=P_\alpha P_{(\alpha^*)_+}.$$

(5.2.3) D'après (A 2), on a $H\subset P_\alpha$ pour tout $\alpha\in\boldsymbol{\Sigma}$. Dans ce qui suit, on désigne par U_α un système de représentants de P_α modulo H, i.e. une partie de P_α telle que l'application $(u, h) \mapsto uh$ de $U_\alpha \times H$ dans P_α soit bijective. On suppose les U_α choisis de telle sorte que $U_\alpha \supset U_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbf{\Sigma}$ avec $\alpha \subset \beta$. Dans les applications que nous avons en vue, les U_α seront des sous-groupes de P_α. On pose aussi $U_{\mathbf{A}} = \{1\}$ et $\mathfrak{U}_a = \bigcup_{{}^v\alpha = a} U_\alpha$ pour $a \in {}^v\mathbf{\Sigma}$.

(5.2.4) Soit Ω une partie non vide de $\mathbf{A}$. On désigne par $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(\Omega)$ l'ensemble des racines affines contenant Ω et par $\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ l'ensemble des éléments minimaux de $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(\Omega)$, ordonné par inclusion. Comme $\Omega \neq \emptyset$, tout élément de $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}(\Omega)$ contient un élément et un seul de $\mathbf{\Sigma}(\Omega)$. L'application $\alpha \mapsto {}^v\alpha$ restreinte à $\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ est évidemment injective. Soit ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ son image; pour $a \in {}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$, on notera $a(\Omega)$ l'unique élément de $\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ satisfaisant à ${}^v a(\Omega) = a$. Si $a \in {}^v\mathbf{\Sigma} - {}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$, on pose $a(\Omega) = \mathbf{A}$. On a

$$\mathrm{cl}(\Omega) = \bigcap_{\alpha \in \widetilde{\mathbf{\Sigma}}(\Omega)} \alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{\Sigma}(\Omega)} \alpha = \bigcap_{a \in {}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)} a(\Omega) = \bigcap_{a \in {}^v\mathbf{\Sigma}} a(\Omega).$$

(5.2.5) Soit Ω une partie de $\mathbf{A}$, contenant un quartier de direction D. On a alors ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega) \subset {}^v\mathbf{\Sigma}^+(D)$. En effet, pour toute $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$, il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $\alpha = \{x + t \mid t \in {}^v\mathbf{A}, {}^v\alpha(t) \geqslant 0\}$ (1.3.8). Si ${}^v\alpha \notin {}^v\mathbf{\Sigma}^+(D)$ et $z \in D$, on a ${}^v\alpha(z) < 0$. Soient alors $y \in \Omega$ et $\mu \in \mathbf{R}_+$ tels que $\mu\,{}^v\alpha(z) < {}^v\alpha(x - y)$. On a $y + \mu z \in \Omega + D \subset \mathrm{cl}(\Omega)$ et ${}^v\alpha(y + \mu z - x) < 0$, d'où $y + \mu z \notin \alpha$ et $\alpha \notin \widetilde{\mathbf{\Sigma}}(\Omega)$.

Il en résulte (1.3.15) qu'*on peut ordonner* ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ *suivant un ordre grignotant.*

Proposition **(5.2.6).** — *Soit Ω une partie de $\mathbf{A}$ contenant un quartier et soient $(a_1, \ldots, a_n)$ les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ rangés suivant un ordre grignotant. L'application produit $\pi : (u_1, \ldots, u_n, h) \mapsto u_1 \ldots u_n h$ est une bijection de $\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} U_{a_j(\Omega)} \times H$ sur P_Ω.*

Nous allons démontrer cette proposition par récurrence sur n, l'assertion étant évidente pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons $n > 1$ et posons $\Omega' = \bigcap_{2 \leqslant j \leqslant n} a_j(\Omega)$, d'où $\mathrm{cl}(\Omega) = a_1(\Omega) \cap \Omega'$. Comme a_1 est extrémale dans $\{a_1, \ldots, a_n\}$, le demi-espace $\{t \in {}^v\mathbf{A} \mid a_1(t) < 0\}$ ne contient pas l'intersection des demi-espaces $\{t \in {}^v\mathbf{A} \mid a_j(t) < 0\}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et on en conclut immédiatement qu'aucune racine affine équipollente à $a_1(\Omega)$ ne contient Ω', ce qui entraîne que ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega') = \{a_2, \ldots, a_n\}$. Comme $(a_2, \ldots, a_n)$ est un ordre grignotant, on a par l'hypothèse de récurrence

$$P_{\Omega'} = U_{a_2(\Omega)} \ldots U_{a_n(\Omega)} H.$$

Montrons maintenant que $Q = U_{a_1(\Omega)} P_{\Omega'}$ est égal à P_Ω. Pour cela, il suffit de montrer que Q est stable par multiplication à gauche par un système générateur de P_Ω. Or, il est évident que $HQ \subset Q$ et que $U_{a_1(\Omega)} Q \subset Q$, puisque $HU_{a_1(\Omega)} \cup U^2_{a_1(\Omega)} \subset P_{a_1(\Omega)} = U_{a_1(\Omega)} H$ et que $H \subset P_{\Omega'}$. Si $j \geqslant 2$, on a d'après (5.2.2) (1)

$$P_{a_1(\Omega) \cap a_j(\Omega)} = P_{a_1(\Omega)} P_{\Omega_j} = U_{a_1(\Omega)} P_{\Omega_j}$$

où Ω_j désigne l'intersection des racines affines contenant $a_1(\Omega) \cap a_j(\Omega)$ et ne contenant pas $a_1(\Omega)$. Mais, ces racines affines contiennent Ω et ne contiennent pas $a_1(\Omega)$, donc elles contiennent Ω'. On a donc $\Omega_j \supset \Omega'$ et $P_{\Omega_j} \subset P_{\Omega'}$. D'où

$$\mathrm{U}_{a_j(\Omega)}\mathrm{Q} = \mathrm{U}_{a_j(\Omega)}\mathrm{U}_{a_1(\Omega)}\mathrm{P}_{\Omega'} \subset \mathrm{P}_{a_1(\Omega)\cap a_j(\Omega)}\mathrm{P}_{\Omega'} = \mathrm{U}_{a_1(\Omega)}\mathrm{P}_{\Omega_j}\mathrm{P}_{\Omega'}$$
$$\subset \mathrm{U}_{a_1(\Omega)}\mathrm{P}_{\Omega'} = \mathrm{Q}.$$

Nous avons donc montré que π est *surjective.*

Montrons maintenant que π est injective. Soient $h, h' \in \mathrm{H}$ et $u_j, u'_j \in \mathrm{U}_{a_j(\Omega)}$ tels que $u_1 \ldots u_n h = u'_1 \ldots u'_n h'$. Comme a_1 est extrémale dans $\{a_1, \ldots, a_n\}$, il existe une chambre vectorielle D telle que $a_1 \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$ et $a_j \in -{}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$. Si x est un point de Ω, on a alors $a_1(\Omega) \supset x - \mathrm{D}$ et $\Omega' \supset x + \mathrm{D}$, d'où

$$u_1'^{-1} u_1 \in \mathrm{P}_{a_1(\Omega)} \cap \mathrm{P}_{\Omega'} \subset \mathrm{P}_{x-\mathrm{D}} \cap \mathrm{P}_{x+\mathrm{D}} = \mathrm{H}$$

et $u_1 = u'_1$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors $u_j = u'_j$ pour tout j, d'où l'injectivité de π.

(5.2.7) On peut exprimer la proposition (5.2.6) sous une forme légèrement différente. Soit Ω une partie de $\mathbf{A}$ contenant un quartier de direction D. Rangeons les éléments de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$ en un ordre grignotant $(a_1, \ldots, a_m)$. *Alors, l'application produit* $(u_1, \ldots, u_m, h) \mapsto u_1 \ldots u_m h$ *est une bijection de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathrm{U}_{a_j(\Omega)} \times \mathrm{H}$ *sur* P_Ω : cela résulte immédiatement de ce que l'ordre induit sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega)$ est grignotant (1.3.15) et des définitions de $a_j(\Omega)$ (5.2.4) et de $\mathrm{U}_{\mathbf{A}}$ (5.2.3).

(5.2.8) Pour tout $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$, l'application produit $(h, u) \mapsto hu$ est une bijection de $\mathrm{H} \times \mathrm{U}_\alpha^{-1}$ sur P_α. Par conséquent, on déduit de (5.2.6) l'assertion suivante, qui généralise (5.2.6) : avec les notations de (5.2.6) (ou de (5.2.7)), l'application produit $(u_1, \ldots, u_k, h, u_{k+1}, \ldots, u_n) \mapsto u_1 \ldots u_k h u_{k+1} \ldots u_n$ est une bijection de $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{U}_{a_j(\Omega)} \times \mathrm{H} \times \prod_{k+1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{U}_{a_j(\Omega)}^{-1}$ sur P_Ω, quel que soit k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Proposition **(5.2.9)**. — *Soit Ω une partie non vide de* $\mathbf{A}$ *et soit* D *une chambre vectorielle. Rangeons les éléments de* ${}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega) \cap {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(\mathrm{D})$ (resp. ${}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega) \cap {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(-\mathrm{D})$) *en un ordre grignotant* $(a_1, \ldots, a_n)$ (resp. $(b_1, \ldots, b_m)$). *L'application produit* $(u_1, \ldots, u_n, h, v_1, \ldots, v_m) \mapsto u_1 \ldots u_n h v_1 \ldots v_m$ *de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathrm{U}_{a_j(\Omega)} \times \mathrm{H} \times \prod_{1 \leqslant k \leqslant m} \mathrm{U}_{b_k(\Omega)}^{-1}$ *dans* P_Ω *est injective.*

On a $\mathrm{cl}(\Omega + \mathrm{D}) = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j(\Omega)$ et $\mathrm{cl}(\Omega - \mathrm{D}) = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant m} b_k(\Omega)$, d'où

$$\mathrm{U}_{a_1(\Omega)} \ldots \mathrm{U}_{a_n(\Omega)}\mathrm{H} \subset \mathrm{P}_{\Omega+\mathrm{D}} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_{b_1(\Omega)}^{-1} \ldots \mathrm{U}_{b_m(\Omega)}^{-1} \subset \mathrm{P}_{\Omega-\mathrm{D}}.$$

Si, avec des notations évidentes,

$$u_1 \ldots u_n h v_1 \ldots v_m = u'_1 \ldots u'_n h' v'_1 \ldots v'_m,$$

alors $$g = (u'_1 \ldots u'_n)^{-1} u_1 \ldots u_n h = h' v'_1 \ldots v'_m (v_1 \ldots v_m)^{-1} \in \mathrm{P}_{\Omega+\mathrm{D}} \cap \mathrm{P}_{\Omega-\mathrm{D}}.$$

Mais, si $x \in \Omega$, on a $\mathrm{P}_{\Omega+\mathrm{D}} \cap \mathrm{P}_{\Omega-\mathrm{D}} \subset \mathrm{P}_{x+\mathrm{D}} \cap \mathrm{P}_{x-\mathrm{D}} = \mathrm{H}$, d'où $g \in \mathrm{H}$. Il suffit alors d'appliquer (5.2.6) et (5.2.8) à $\mathrm{cl}(\Omega + \mathrm{D})$ et à $\mathrm{cl}(\Omega - \mathrm{D})$ pour en tirer $u_j = u'_j$ et $v_k = v'_k$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant m$.

Lemme **(5.2.10)**. — *Soit Ω une partie de* $\mathbf{A}$ *d'intérieur non vide. Pour toute chambre vectorielle* D, *posons* $\mathrm{Q}_\mathrm{D} = \mathrm{P}_{\Omega+\mathrm{D}} \cdot \mathrm{P}_{\Omega-\mathrm{D}}$. *Le sous-ensemble* Q_D *est indépendant du choix de* D.

Il suffit de démontrer que si r est la réflexion par rapport à un mur d'une chambre vectorielle D, on a $Q_D \subset Q_{r(D)}$. Or, on peut ranger les éléments de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(D)$ en un ordre grignotant $(a_1, \ldots, a_m)$ de telle sorte que r soit la réflexion par rapport à l'hyperplan $a_1 = 0$ (1.3.15). Alors, $(-a_1, \ldots, -a_m)$ est un ordre grignotant sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(-D)$, et on a (5.2.8)

$$P_{\Omega+D} = HU^{-1}_{a_1(\Omega)} \ldots U^{-1}_{a_m(\Omega)} = U_{a_m(\Omega)} \ldots U_{a_1(\Omega)} H$$

d'où

$$Q_D = U_{a_m(\Omega)} \ldots U_{a_1(\Omega)} HU^{-1}_{-a_1(\Omega)} \ldots U^{-1}_{-a_m(\Omega)}. \tag{1}$$

Comme $a_1(\Omega) \cap (-a_1(\Omega))$ contient l'intérieur non vide de Ω, on a ((5.2.2) (2))

$$U_{a_1(\Omega)} HU^{-1}_{-a_1(\Omega)} \subset P_{a_1(\Omega) \cap -a_1(\Omega)} = P_{-a_1(\Omega)} P_{a_1(\Omega)} = U_{-a_1(\Omega)} HU^{-1}_{a_1(\Omega)}. \tag{2}$$

Mais $\mathrm{cl}(\Omega - r(D)) = (-a_1(\Omega)) \cap \bigcap_{2 \leqslant j \leqslant m} a_j(\Omega)$ et $\mathrm{cl}(\Omega + r(D)) \in a_1(\Omega) \cap \bigcap_{2 \leqslant j \leqslant m} (-a_j(\Omega))$. Donc (1) et (2) entraînent

$$Q_D \subset P_{\Omega + r(D)} P_{\Omega - r(D)} = Q_{r(D)}.$$

Proposition **(5.2.11)**. — *Soit* Ω *une partie de* $\mathbf{A}$ *d'intérieur non vide, et soit* D *une chambre vectorielle. On a* $P_\Omega = P_{\Omega+D} P_{\Omega-D}$. *Si l'on range les éléments de* ${}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega) \cap {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(D)$ (resp. ${}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega) \cap {}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(D)$) *en un ordre grignotant* $(a_1, \ldots, a_n)$ (resp. $(b_1, \ldots, b_m)$), *l'application produit*

$$(u_1, \ldots, u_n, h, v_1, \ldots, v_m) \mapsto u_1 \ldots u_n h v_1 \ldots v_m$$

est une bijection de $\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} U_{a_j(\Omega)} \times H \times \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} U^{-1}_{b_k(\Omega)}$ *sur* P_Ω.

Pour toute racine $a \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega)$, il existe une chambre vectorielle D′ contenue dans le demi-espace $a > 0$. On a alors $U_{a(\Omega)} P_{\Omega+D'} \subset P_{\Omega+D'}$. Comme $P_{\Omega+D} P_{\Omega-D} = P_{\Omega+D'} P_{\Omega-D'}$ (lemme (5.2.10)), on en déduit que $P_{\Omega+D} P_{\Omega-D}$ est stable par multiplication à gauche par H et par les $U_{a(\Omega)}$ pour $a \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega)$, donc par P_Ω, d'où la première assertion. La deuxième résulte alors de (5.2.6) et (5.2.9).

Remarque **(5.2.12)**. — Comme en (5.2.8), on peut déplacer le facteur H du produit considéré, à condition de multiplier par -1 l'exposant des U_α que l'on fait passer d'un côté à l'autre de H.

Remarque **(5.2.13)**. — *Soit* $a \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}$. *On peut ranger les éléments de* ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ *en un ordre* $(a_1, \ldots, a_m)$ *tel que* $a = a_1$ *et que, avec les notations de* (5.2.4), *l'application produit de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} U_{a_j(\Omega)} \times H \times \prod_{k < j \leqslant m} U^{-1}_{a_j(\Omega)}$ *dans* P_Ω *soit injective* (resp. *bijective*) *pour toute partie* Ω *de* $\mathbf{A}$ (resp. *pour tout partie* Ω *d'intérieur non vide de* $\mathbf{A}$), *et tout* k *avec* $0 \leqslant k \leqslant m$. Il suffit en effet de choisir la chambre vectorielle D et l'ordre grignotant sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(D)$ de telle sorte que a en soit le premier élément, puis de choisir un ordre grignotant sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}^+(-D)$ et d'appliquer (5.2.9) (resp. (5.2.11)).

Un tel ordre sur ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ sera dit *admissible*.

Corollaire **(5.2.14)**. — *Soit* $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$ *et soit* Ω' *une partie close de* $\mathbf{A}$ *telles que* $\Omega = \alpha \cap \Omega'$ *soit d'intérieur non vide et que* α *et* Ω' *soient transverses* (5.1.2). *On a* $P_\Omega = P_\alpha . P_{\Omega'}$.

Rangeons les éléments de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ en un ordre admissible $(a_1, \ldots, a_m)$ de telle sorte que $a_1 = {}^v\alpha$. On a alors d'après (5.2.13) :

(1) $$\mathrm{P}_\Omega = \mathrm{U}_{a_1(\Omega)}\mathrm{U}_{a_2(\Omega)} \ldots \mathrm{U}_{a_m(\Omega)}\mathrm{H}.$$

Mais les racines affines $a_j(\Omega)$ pour $a_j \in {}^v\boldsymbol{\Sigma}(\Omega)$ et $j \geqslant 2$ ne contiennent pas $a_1(\Omega)$, donc contiennent Ω'. D'autre part, ou bien $a_1(\Omega) \supset \Omega'$, ou bien $a_1(\Omega) \supset \alpha$, d'où $a_1(\Omega) = \alpha$. Dans les deux cas, (1) entraîne bien $\mathrm{P}_\Omega = \mathrm{P}_\alpha . \mathrm{P}_{\Omega'}$.

Corollaire **(5.2.15)**. — *Soient* $\alpha \in \boldsymbol{\Sigma}$ *et* C *une chambre contenue dans* α *et ayant une cloison contenue dans* $\partial\alpha$. *On a* $\mathrm{P}_\mathrm{C} = \mathrm{P}_\alpha . \mathrm{P}_{\mathrm{C} \cup r_\alpha(\mathrm{C})}$.

Il suffit d'appliquer (5.2.14) à $\Omega' = \mathrm{C} \cup r_\alpha(\mathrm{C})$.

Proposition **(5.2.16)**. — *Soient* Ω *et* Ω' *deux parties closes de* **A**, *d'intérieur non vide et telles que* $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$. *On a alors*

$$\mathrm{P}_\Omega \cap \mathrm{P}_{\Omega'} = \mathrm{P}_{\mathrm{cl}(\Omega \cup \Omega')}.$$

Si de plus $\mathrm{P}_\Omega \subset \mathrm{P}_{\Omega'}$, *on a* $\Omega \supset \Omega'$.

Il est clair que $\mathrm{P}_{\mathrm{cl}(\Omega \cup \Omega')} \subset \mathrm{P}_\Omega \cap \mathrm{P}_{\Omega'}$. D'autre part, soit $x \in \Omega \cap \Omega'$ et soit $g \in \mathrm{P}_\Omega \cap \mathrm{P}_{\Omega'} \subset \mathrm{P}_{\{x\}}$. Rangeons les éléments de ${}^v\boldsymbol{\Sigma}$ en un ordre admissible $(a_1, \ldots, a_m)$. D'après (5.2.13), on a

$$g = u_1 \ldots u_m h = v_1 \ldots v_m k$$

avec $h, k \in \mathrm{H}$, $u_j \in \mathrm{U}_{a_j(\Omega)}$ et $v_j \in \mathrm{U}_{a_j(\Omega')}$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$, d'où $u_j, v_j \in \mathrm{U}_{a_j(\{x\})}$. En appliquant (5.2.9) à $\mathrm{P}_{\{x\}}$, on en conclut que $u_j = v_j$ pour tout j, d'où

$$u_j = v_j \in \mathrm{U}_{a_j(\Omega)} \cap \mathrm{U}_{a_j(\Omega')} = \mathrm{U}_{a_j(\Omega) \cup a_j(\Omega')} \subset \mathrm{U}_{a_j(\Omega \cup \Omega')}$$

et finalement $g \in \mathrm{P}_{\Omega \cup \Omega'}$, ce qui démontre la première assertion de la proposition.

Si de plus $\mathrm{P}_\Omega \subset \mathrm{P}_{\Omega'}$, ce qui précède montre que $\mathrm{U}_{a_j(\Omega)} \subset \mathrm{U}_{a_j(\Omega')}$, d'où (d'après (A 2)) $a_j(\Omega) \supset a_j(\Omega')$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$, et $\Omega \supset \Omega'$.

Corollaire **(5.2.17)**. — *Soit* $a \in \boldsymbol{\Sigma}$ *et soit* C *une chambre contenue dans* α *et ayant une cloison contenue dans* $\partial\alpha$. *On a* $\mathrm{P}_{\alpha^*} \cap \mathrm{P}_\mathrm{C} = \mathrm{P}_{(\alpha^*)_+}$.

Il suffit d'appliquer (5.2.16) avec $\Omega = \alpha^*$ et $\Omega' = \mathrm{C}$.

Lemme **(5.2.18)**. — *Soient* C *et* C′ *deux chambres. Si* $\mathrm{P}_\mathrm{C} \supset \mathrm{P}_{\mathrm{C}'}$, *on a* $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$.

Supposons $\mathrm{P}_\mathrm{C} \supset \mathrm{P}_{\mathrm{C}'}$ avec $\mathrm{C} \neq \mathrm{C}'$. On peut trouver $x \in \mathrm{C}$ et $y \in \mathrm{C}'$ tels que $y - x$ appartienne à une chambre vectorielle D et que le segment $[xy]$ ne rencontre aucune facette de codimension $\geqslant 2$. Soit C_1 la chambre mitoyenne de C rencontrant $[xy]$. On a

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C}_1} = \mathrm{P}_{\mathrm{C}_1 + \mathrm{D}} . \mathrm{P}_{\mathrm{C}_1 - \mathrm{D}} \subset \mathrm{P}_{x + \mathrm{D}} . \mathrm{P}_{y - \mathrm{D}} \subset \mathrm{P}_\mathrm{C} . \mathrm{P}_{\mathrm{C}'} = \mathrm{P}_\mathrm{C}.$$

Comme $\overline{\mathrm{C}}_1 \cap \overline{\mathrm{C}} \neq \emptyset$, la proposition (5.2.16) entraîne alors $\mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{C}}_1$, ce qui est absurde. On a donc bien $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$.

Théorème **(5.2.19)**. — *Posons* $\mathrm{B} = \mathrm{P}_\mathbf{C}$. *On a* $\mathrm{B} \cap \mathrm{N} = \mathrm{H}$ *et le quadruplet* (G, B, N, S) *est un système de Tits saturé de type affine, l'homomorphisme* ν *définissant par passage au quotient* *un isomorphisme du système de Coxeter* (W, S) *sur* (**W**, **S**). *De plus,* (G, B, N, S) *est un double système de Tits* (5.1.1) *et les notations* P_Ω *sont cohérentes avec celles du* § 4 : *si l'on identifie* **A** *avec son image canonique dans l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* (G, B, N, S), *le sous-groupe* P_Ω *est, pour toute partie* Ω *de* **A**, *le fixateur de* Ω *dans* G.

La démonstration de ce théorème va occuper les n^os^ (5.2.20) à (5.2.26).

(5.2.20) Pour toute racine affine $\alpha\in\mathbf{\Sigma}$, il existe $w\in\mathbf{W}$ tel que $w.\mathbf{C}\subset\alpha$, d'où $P_\alpha\subset P_{w.\mathbf{C}}=nBn^{-1}$ pour $n\in\nu^{-1}(w)$. La condition (A 6) entraîne donc que G *est engendré par* $B\cup N$.

D'autre part, soit $n\in B\cap N$. On a alors $nBn^{-1}=B$, d'où $P_{\nu(n).\mathbf{C}}=P_{\mathbf{C}}$ et $\nu(n).\mathbf{C}=\mathbf{C}$ d'après le lemme (5.2.18). On a donc $\nu(n)=1$ et $n\in H$. Ceci montre que $B\cap N=H$ et que $B\cap N$ est distingué dans N, le groupe quotient étant W. Par suite, les axiomes (T 1) et (T 2) des systèmes de Tits sont satisfaits.

(5.2.21) Montrons que $H=\bigcap_{n\in N} nBn^{-1}$ (ce qui entraînera que le système de Tits est *saturé* (1.2.12)). En effet, soit $g\in\bigcap_{n\in N} nBn^{-1}$. Pour toute partie close bornée Ω de **A**, contenant **C**, on peut trouver une suite de chambres $(C_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ avec $C_0=\mathbf{C}$, telle que, si l'on pose $\Omega_j=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant j}\overline{C}_i$, on ait $\Omega_j\cap\overline{C}_{j+1}\neq\emptyset$ pour tout j et $\Omega_n=\Omega$. Comme $g\in P_C$ pour toute chambre C, on voit par récurrence sur j que $g\in P_{\Omega_j}$ pour tout j : il suffit d'utiliser (5.2.16). Donc $g\in P_\Omega$. Rangeons alors les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ en un ordre admissible $(a_1, \ldots, a_m)$ et écrivons $g=u_1\ldots u_m h$, avec $h\in H$ et $u_i\in U_{a_i(\mathbf{C})}$. Puisque $g\in P_\Omega$, on a $u_i\in U_{a_i(\Omega)}$ pour toute partie close bornée Ω de **A** contenant **C**, d'où $u_i\in H$ d'après (A 2) et finalement $g\in H$, ce qu'il fallait démontrer.

(5.2.22) Démontrons maintenant l'axiome (T 3). Soit $r\in S$ et soit α la racine affine contenant **C** telle que $r=r_\alpha$. D'après (5.2.15), on a $B=P_\alpha.P_{\mathbf{C}\cup r(\mathbf{C})}$. Soit $n\in N$; on a donc

$$rBnB=rP_{\mathbf{C}\cup r(\mathbf{C})}P_\alpha nB=P_{\mathbf{C}\cup r(\mathbf{C})}rP_\alpha nB.$$

Si $\nu(n)^{-1}(\alpha)\supset\mathbf{C}$, on a $n^{-1}P_\alpha n\subset B$, d'où

$$rBnB\subset P_{\mathbf{C}\cup r(\mathbf{C})}rn(n^{-1}P_\alpha n)B\subset BrnB. \tag{1}$$

Si $\nu(n)^{-1}(\alpha)\not\supset\mathbf{C}$, on a $\nu(rn)^{-1}(\alpha)\supset\mathbf{C}$ et $(rn)^{-1}P_\alpha rn\subset B$. D'autre part, on a, d'après (A 4)

$$rP_\alpha r\subset(P_{(\alpha^*)_+}P_\alpha\cup P_\alpha rP_\alpha)\subset(B\cup BrP_\alpha)$$

d'où

$$rBnB=P_{\mathbf{C}\cup r(\mathbf{C})}rP_\alpha rrnB\subset(BrnB\cup BrP_\alpha rnB)=BrnB\cup Bn(rn)^{-1}P_\alpha rnB=BrnB\cup BnB \tag{2}$$

et les formules (1) et (2) démontrent (T 3).

(5.2.23) Enfin, le lemme (5.2.18) entraîne $rBr^{-1}\neq B$ pour tout $r\in S$, c'est-à-dire l'axiome (T 4). Nous avons donc bien démontré que (G, B, N, S) *est un système de Tits de type affine* et *saturé* d'après (5.2.21).

Nous pouvons donc construire l'immeuble $\mathscr{I}$ associé, l'application canonique $j : \mathbf{A} \to \mathscr{I}$ et considérer le fixateur dans G de l'image $j(\Omega)$ d'une partie Ω de $\mathbf{A}$, fixateur que nous allons désigner provisoirement par $\widetilde{P}_\Omega$. On sait que $\widetilde{P}_C = P_C$ pour toute chambre C (2.1.5). Si $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et $g \in P_\alpha$, on a $g \in P_C$ pour toute chambre $C \subset \alpha$, d'où $g \in \widetilde{P}_\alpha$. Comme P_Ω est par définition engendré par H et les P_α pour $\alpha \supset \Omega$, cela entraîne $P_\Omega \subset \widetilde{P}_\Omega$ pour tout $\Omega \subset \mathbf{A}$.

(5.2.24) Par suite, d'après (5.2.11), on a

$$\widetilde{P}_C = P_C = P_{C+D}.P_{C-D} \subset \widetilde{P}_{C+D}.\widetilde{P}_{C-D} \subset \widetilde{P}_C$$

pour toute chambre C et toute chambre vectorielle D, ce qui montre que la condition (iv) du théorème (5.1.3) est satisfaite. Autrement dit, (G, B, N, S) *est bien un double système de Tits.*

(5.2.25) Pour achever la démonstration du théorème (5.2.19), il ne nous reste plus qu'à démontrer que $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$ *pour toute partie* Ω *de* $\mathbf{A}$.

Supposons tout d'abord Ω close et d'intérieur non vide. On peut supposer de plus que $\Omega \supset \mathbf{C}$. Rangeons les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}$ en un ordre admissible $(a_1, \ldots, a_m)$. Si $g \in \widetilde{P}_\Omega \subset \widetilde{P}_{\mathbf{C}} = P_{\mathbf{C}}$, on peut écrire $g = u_1 \ldots u_m h$, avec $u_j \in U_{a_j(\mathbf{C})}$ et $h \in H$. Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$. Il existe une chambre $C \subset \Omega$ avec $a_j(C) = a_j(\Omega)$. Soit $\Gamma = (\mathbf{C}, C_1, \ldots, C_q = C)$ une galerie tendue entre $\mathbf{C}$ et C. On a $\Gamma \subset \Omega$ et $g \in \widetilde{P}_{C_i} = P_{C_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. On peut donc écrire $g = u_1^i \ldots u_m^i h^i$ avec $u_k^i \in U_{a_k(C_i)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$ et $h^i \in H$. Mais $\overline{C}_i \cap \overline{C}_{i+1} \neq \emptyset$ et on voit en se plaçant dans $P_{\overline{C}_i \cap \overline{C}_{i+1}}$ et en utilisant (5.2.13) que $u_k^{i+1} = u_k^i$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$ et $0 \leqslant i < q$. Il en résulte que u_k^i est indépendant de i et que $u_k \in U_{a_k(C)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$. En particulier, on a $u_j \in U_{a_j(\mathbf{C})} = U_{a_j(\Omega)}$. Appliquant ceci pour $j = 1, \ldots, m$, on en conclut $g \in P_\Omega$, d'où $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$.

Soit maintenant Ω une partie close non vide quelconque de $\mathbf{A}$ (on a $\widetilde{P}_\emptyset = G = P_\emptyset$) et reprenons les notations L, F et Δ de (5.1.27) et (5.1.28); d'après (5.1.28), on a $\widetilde{P}_\Omega = \widetilde{P}_\Delta \widetilde{N}_\Omega \widetilde{P}_\Delta \widetilde{P}_{\widetilde{\Omega}}$ avec $\widetilde{N}_\Omega = \widetilde{P}_\Omega \cap N$. Comme Δ et $\widetilde{\Omega}$ ont un intérieur non vide, on a $\widetilde{P}_\Delta = P_\Delta \subset P_\Omega$ et $\widetilde{P}_{\widetilde{\Omega}} = P_{\widetilde{\Omega}} \subset P_\Omega$ et il suffit de démontrer que $\widetilde{N}_\Omega \subset P_\Omega$. Or $\widetilde{N}_\Omega / H = \mathbf{W}_F$ est engendré par les réflexions r_α associées aux racines affines α telles que $F \subset \partial\alpha$, ou encore $\Omega \subset \alpha \cap \alpha^*$. Notre assertion résulte donc du lemme suivant :

Lemme **(5.2.26)**. — *Soit* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$. *Le sous-ensemble* $\nu^{-1}(r_\alpha)$ *de* N *est contenu dans le sous-groupe engendré par* $P_\alpha \cup P_{\alpha^*}$.

Si cette assertion était inexacte, on aurait $P_{\alpha^*} \cap P_\alpha r_\alpha P_\alpha = \emptyset$ et par suite $P_{\alpha^*} \subset P_\alpha . P_{(\alpha^*)_+}$ d'après (A 4) (ou d'après la condition (viii) du théorème (5.1.3)). Utilisant (5.2.2) (3), ceci impliquerait que P_{α^*} laisse fixe toute chambre contenue dans $\alpha \cap (\alpha^*)_+$, ce qui contredit (5.1.11).

La démonstration du théorème (5.2.19) est achevée.

(5.2.27) Nous allons maintenant démontrer une « réciproque » du théorème (5.2.19). Pour cela, reprenons les hypothèses et notations de 5.1, à ceci près que nous désignons provisoirement par $\widetilde{P}_\Omega$ le fixateur de Ω dans G et que nous réservons la notation P_Ω au sous-groupe engendré par les $\widetilde{P}_\alpha = P_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et $\alpha \supset \Omega$.

Proposition. — Avec les hypothèses et notations précisées ci-dessus, les conditions (A 1) *à* (A 6) *de* (5.2.1) *sont satisfaites dès que* (G, B, N, S) *est un double système de Tits saturé.*

La vérification de (A 1) est immédiate, (A 2) résulte de (5.1.10) et de (2.2.5) (i), (A 4) résulte de la condition (viii) de (5.1.3) et (A 5) se vérifie immédiatement : si $g \in P_{x+D} \cap P_{x-D}$, alors g laisse fixes tous les points du quartier $x+D$ et du quartier opposé $x-D$, donc de leur enveloppe convexe, qui n'est autre que $\mathbf{A}$, et $g \in \widetilde{P}_{\mathbf{A}} = H$.

Pour établir (A 3) et (A 6), nous allons tout d'abord démontrer que si Ω est une partie close de $\mathbf{A}$ contenant un quartier, on a $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$. Pour cela, nous allons raisonner comme en (5.2.6). Soient $(a_1, \ldots, a_m)$ les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ rangés en un ordre grignotant. Raisonnons par récurrence sur m, les cas $m=0$ et $m=1$ étant triviaux. Posons $\Omega' = \bigcap_{2 \leqslant j \leqslant m} a_j(\Omega)$; on a vu en (5.2.6) que ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega') = \{a_2, \ldots, a_m\}$. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc $\widetilde{P}_{\Omega'} = P_{\Omega'}$. De plus, $a_1(\Omega)$ et Ω' sont transverses et d'après (5.1.3) (iii), on a

$$\widetilde{P}_\Omega = \widetilde{P}_{a_1(\Omega)} . \widetilde{P}_{\Omega'} = P_{a_1(\Omega)} . P_{\Omega'} \subset P_\Omega$$

d'où $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$.

Plaçons-nous alors dans les hypothèses de (A 3). Les parties closes α et Ω sont alors transverses et on a, d'après (5.1.3) (iii), $P_{\alpha\cap\beta} \subset \widetilde{P}_{\alpha\cap\beta} = \widetilde{P}_{\alpha\cap\Omega} = \widetilde{P}_\alpha . \widetilde{P}_\Omega = P_\alpha . \widetilde{P}_\Omega$. Mais Ω contient un quartier, donc $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$, d'où $P_{\alpha\cap\beta} \subset P_\alpha . P_\Omega \subset P_{\alpha\cap\beta}$, ce qui démontre (A 3).

Enfin, (5.1.3) (iv) montre que

$$B = \widetilde{P}_{C+D} . \widetilde{P}_{C-D} = P_{C+D} . P_{C-D} \subset P_C$$

pour toute chambre vectorielle D. Par suite le sous-groupe engendré par les P_α contient B. On démontre exactement comme en (5.2.26) qu'il contient les sous-ensembles $\nu^{-1}(r)$ pour $r \in S$, donc N. Ceci établit (A 6) et achève la démonstration de la proposition.

(5.2.28) Il résulte alors du théorème (5.2.19) que $\widetilde{P}_\Omega = P_\Omega$ *pour toute partie* Ω *de* $\mathbf{A}$. Autrement dit, en revenant complètement aux notations de 5.1, *le fixateur* P_Ω *d'une partie quelconque* Ω *de* $\mathbf{A}$ *est, lorsque* (G, B, N, S) *est un double système de Tits, engendré par les sous-groupes* P_α *pour* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ *et* $\alpha \supset \Omega$ *et les résultats que nous avons établis plus haut sur la structure des sous-groupes* P_Ω, *et en particulier ceux de* (5.2.6), (5.2.9), (5.2.11), (5.2.13) *et* (5.2.16), *sont valables* (U_α étant une partie de P_α satisfaisant aux conditions de (5.2.3)).

(5.2.29) Ceci entraîne que *le sous-groupe* $\mathfrak{B}^0_D$ (*réunion des sous-groupes* $P_{\mathfrak{C}}$ *pour* $\mathfrak{C}$ *décrivant l'ensemble des quartiers de direction* D (4.1.5)) *est engendré par la réunion des sous-groupes* P_α *pour* ${}^v\alpha \in {}^v\mathbf{\Sigma}^+(D)$. Plus précisément, si l'on range les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}^+(D)$ en un ordre grignotant $(a_1, \ldots, a_m)$, *l'application produit* $(u_1, \ldots, u_m, h) \mapsto u_1 \ldots u_m h$ *est une bijection de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathfrak{U}_{a_j} \times \mathrm{H}$ *sur* $\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}^0$ (rappelons que l'on a désigné par $\mathfrak{U}_a$ la réunion des U_α pour ${}^v\alpha = a$). On voit de même que l'*application* $(u_1, \ldots, u_m, t) \mapsto u_1 \ldots u_m t$ *est une bijection de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathfrak{U}_{a_j} \times \nu^{-1}(\mathbf{V})$ *sur* $\mathfrak{B}_{\mathrm{D}}$.

(5.2.30) Nous allons maintenant étudier le cas où chaque P_α se décompose en produit semi-direct de H par un sous-groupe distingué U_α, ces décompositions étant convenablement cohérentes. De manière plus précise, jusqu'à la fin de 5.2, on suppose donnés un groupe G, un sous-groupe N de G, un homomorphisme surjectif ν de N sur $\mathbf{W}$ de noyau noté H, et pour chaque $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$, un sous-groupe U_α de G, ces données satisfaisant aux conditions (B 1) à (B 6) ci-dessous, où, pour toute partie $\Omega \subset \mathbf{A}$, on désigne par U_Ω le sous-groupe de G engendré par les U_α pour $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et $\alpha \supset \Omega$ (la condition (B 2) montrant que cette notation n'est pas ambiguë pour $\Omega = \alpha \in \mathbf{\Sigma}$).

(B 1) *Pour tout* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ *et tout* $n \in \mathrm{N}$, *on a* $n\mathrm{U}_\alpha n^{-1} = \mathrm{U}_{\nu(n).\alpha}$.

(B 2) *Soit* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$. *Pour tout* $\beta \in \mathbf{\Sigma}$ *avec* $\beta \supsetneqq \alpha$, *on a* $\mathrm{U}_\beta \subsetneqq \mathrm{U}_\alpha$ *et l'intersection des* U_β *pour* $\beta \in \mathbf{\Sigma}$ *et* $\beta \supset \alpha$ *est réduite à l'élément neutre.*

(B'3) *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbf{\Sigma}$, *de bords non parallèles, et soit* Ω *l'intersection des* $\gamma \in \mathbf{\Sigma}$, *avec* $\gamma \supset \alpha \cap \beta$ *et* $\gamma \not\supset \alpha$. *Alors* U_α *normalise* U_Ω.

(B''3) *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbf{\Sigma}$ *telles que* $\beta \supsetneqq \alpha^*$. *Le sous-ensemble* $\mathrm{U}_\alpha \mathrm{H} \mathrm{U}_\beta$ *est un sous-groupe de* G.

(B 4) *Soit* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$; *le sous-ensemble* $\mathrm{U}_\alpha \mathrm{H} \mathrm{U}_{(\alpha^*)_+} \cup \mathrm{U}_\alpha \nu^{-1}(r_\alpha) \mathrm{U}_\alpha$ *est un sous-groupe de* G.

(B 5) *Pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *et toute chambre vectorielle* D, *on a* $(\mathrm{H}.\mathrm{U}_{x+\mathrm{D}}) \cap \mathrm{U}_{x-\mathrm{D}} = \{1\}$.

(B 6) *Le groupe* G *est engendré par la réunion de* H *et des* U_α *pour* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$.

Remarquons que, compte tenu de (B 1), on peut se contenter de vérifier (B 5) pour une chambre vectorielle donnée à l'avance. D'autre part, (B 1) entraîne que H normalise chaque U_α, donc chaque sous-groupe U_Ω. On pose $\mathrm{P}_\Omega = \mathrm{H}.\mathrm{U}_\Omega$: c'est le sous-groupe de G engendré par H et les P_α pour $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et $\alpha \supset \Omega$. D'après (B 5), P_Ω est *produit semi-direct* de H par U_Ω dès que Ω contient un quartier.

Proposition **(5.2.31)**. — N, ν *et la famille des* P_α *pour* $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ *satisfont aux conditions* (A 1) *à* (A 6) *de* (5.2.1).

C'est immédiat. Notons de plus que les sous-groupes U_α pour $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ satisfont aux conditions de (5.2.3) et que $\mathfrak{U}_a$ est alors un sous-groupe pour tout $a \in {}^v\mathbf{\Sigma}$.

(5.2.32) On peut donc appliquer les résultats précédents. En particulier, le quadruplet (G, B, N, S) (avec $\mathrm{B} = \mathrm{P}_\mathrm{C}$ et S = image réciproque de $\mathbf{S}$ dans N/H) est un double système de Tits saturé. Par ailleurs, on peut préciser (5.2.6) et (5.2.11) :

Proposition. — *Soit* Ω *une partie non vide de* $\mathbf{A}$.

(i) *Supposons que* Ω *contienne un quartier et rangeons les éléments de* ${}^v\mathbf{\Sigma}(\Omega)$ *en un ordre grignotant* $(a_1, \ldots, a_m)$. *L'application* $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto u_1 \ldots u_m$ *est une bijection de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathrm{U}_{a_j(\Omega)}$ *sur le sous-groupe* U_Ω.

(ii) *Supposons que* Ω *soit d'intérieur non vide et soit* D *une chambre vectorielle. L'application* $(u, h, v) \mapsto uhv$ *est une bijection de* $U_{\Omega+D} \times H \times U_{\Omega-D}$ *sur* P_Ω.

La démonstration de (i) se fait exactement comme celle de (5.2.6), en utilisant (B'3) au lieu de (A 3); (ii) résulte de (i) et (5.2.11).

(5.2.33) On peut de même préciser la proposition (5.1.28) : en reprenant les notations de (5.1.28), on a $P_\Omega = U_\Delta N_\Omega U_\Delta U_{\tilde{\Omega}}$.

(5.2.34) Soit D une chambre vectorielle. Si $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ sont deux quartiers de **A** de direction D, on a $U_{\mathfrak{C}_1} \cup U_{\mathfrak{C}_2} \subset U_{\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2}$ et la réunion des sous-groupes $U_\mathfrak{C}$ pour $\mathfrak{C}$ décrivant l'ensemble des quartiers de direction D est un sous-groupe que nous noterons $\mathfrak{U}_D$. Si l'on range les éléments de ${}^v\mathbf{\Sigma}^+(D)$ en un ordre grignotant $(a_1, \ldots, a_m)$, il résulte de (5.2.32) que *l'application* $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto u_1 \ldots u_m$ *est une bijection de* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \mathfrak{U}_{a_j}$ *sur* $\mathfrak{U}_D$. D'autre part, on voit (cf. (5.2.29)) que *le groupe* $\mathfrak{B}_D^0$ *est produit semi-direct de* H *par le sous-groupe distingué* $\mathfrak{U}_D$ et que *le groupe* $\mathfrak{B}_D$ *est produit semi-direct de* $\nu^{-1}(\mathbf{V})$ *par le sous-groupe distingué* $\mathfrak{U}_D$. Enfin, on a $G = \mathfrak{B}_D . N . \mathfrak{B}_D = \mathfrak{U}_D . N . \mathfrak{U}_D$ et on peut même montrer que l'application évidente est une bijection de N sur $\mathfrak{U}_D \backslash G / \mathfrak{U}_D$.

(5.2.35) Soient $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et Ω une partie close de **A**. On suppose que α et Ω sont transverses et que $\Omega' = \alpha \cap \Omega$ contient une chambre de **A**. Alors U_α *normalise* U_Ω *et on a* $U_{\Omega'} = U_\alpha . U_\Omega$. En effet, soit $\beta \in \mathbf{\Sigma}$ avec $\beta \supset \Omega$. Pour $\gamma \in \mathbf{\Sigma}$, $\gamma \supset \alpha \cap \beta$, $\gamma \not\supset \alpha$, on a $\gamma \supset \alpha \cap \Omega$ et $\gamma \not\supset \alpha$, donc $\gamma \supset \Omega$. Si $u \in U_\alpha$, la condition (B'3) entraîne donc $u U_\beta u^{-1} \in U_\Omega$, d'où notre assertion.

Remarque **(5.2.36)**. — La condition (B'3) est équivalente à

(B'3 *bis*) *Pour* $\alpha, \beta \in \mathbf{\Sigma}$, *de bords non parallèles, le groupe des commutateurs* (U_α, U_β) *est contenu dans le sous-groupe engendré par les* U_γ, *pour* $\gamma \in \mathbf{\Sigma}$, $\gamma \supset \alpha \cap \beta$, $\gamma \not\supset \alpha$ *et* $\gamma \not\supset \beta$.

En effet, il est immédiat que (B'3 *bis*) entraîne (B'3) et la réciproque résulte de (5.2.6) [1].

---

[1] Dans [12] et [16], nous avons appelé « donnée radicielle affine de type $\mathbf{\Sigma}$ » un triplet $(N, \nu, (U_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{\Sigma}})$ satisfaisant à (B 1), (B 2), (B' 3 *bis*), (B'' 3), (B 4), (B 6) et une condition notée (DR 6) analogue à (B 5) mais distincte. En fait, cette condition (DR 6), bien qu'en général réalisée dans les applications que nous avons en vue, ne semble pas être conséquence des conditions de (5.2.30) et d'autre part, est peut-être insuffisante pour établir l'axiome (T 4) des systèmes de Tits, contrairement à ce que nous avions affirmé dans [12] et [16].

6. DONNÉES RADICIELLES VALUÉES

Dans ce paragraphe, la lettre V désigne un espace vectoriel réel, V^* son dual, Φ un système de racines dans V^*, de groupe de Weyl ${}^vW$ (opérant dans V et dans V^*). On suppose donné dans V, donc dans V^*, un produit scalaire invariant par ${}^vW$. Pour $a \in \Phi$, on désigne par r_a la réflexion associée à la racine a et on note $a^\vee$ la « coracine » associée à a, c'est-à-dire l'élément de V tel que $r_a(v) = v - a(v)a^\vee$ pour tout $v \in V$. Rappelons que les $a^\vee$ pour $a \in \Phi$ forment le système de racines dual de Φ. On donne une chambre D_0 de Φ dans V et on désigne par Π la base correspondante de Φ (« système de racines simples »), par Φ^+ (resp. Φ^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) pour D_0 (cf. (1.3.10) et (1.3.12)). On note $\Phi^{\text{réd}}$ (resp. Φ^{nm}) l'ensemble des racines non-divisibles (resp. non-multipliables), c'est-à-dire l'ensemble des $a \in \Phi$ tels que $a/2 \notin \Phi$ (resp. $2a \notin \Phi$) et on pose $\Phi^{+\,\text{réd}} = \Phi^{\text{réd}} \cap \Phi^+$ et $\Phi^{-\,\text{réd}} = \Phi^{\text{réd}} \cap \Phi^-$.

Dans un groupe X, le normalisateur d'une partie $Y \subset X$ est noté $\mathcal{N}_X(Y)$ ou simplement $\mathcal{N}(Y)$ s'il n'y a pas de confusion possible.

6.1. Données radicielles.

(6.1.1) On appelle *donnée radicielle de type* Φ dans un groupe G un système $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$ possédant les propriétés suivantes :

(DR 1) T *est un sous-groupe de* G *et, pour tout* $a \in \Phi$, U_a *est un sous-groupe de* G *non réduit à l'élément neutre.*

(DR 2) *Pour* $a, b \in \Phi$, *le groupe des commutateurs* (U_a, U_b) *est contenu dans le groupe engendré par les* U_{pa+qb} *pour* p, q *entiers strictement positifs et* $pa + qb \in \Phi$.

(DR 3) *Si* a *et* $2a$ *appartiennent à* Φ, *on a* $U_{2a} \subsetneqq U_a$.

(DR 4) *Pour* $a \in \Phi$, M_a *est une classe à droite suivant* T *et on a* $U_{-a} - \{1\} \subset U_a M_a U_a$.

(DR 5) *Pour* $a, b \in \Phi$ *et* $n \in M_a$, *on a*

$$nU_b n^{-1} = U_{r_a(b)}.$$

(DR 6) *Si* U^+ (resp. U^-) *désigne le groupe engendré par les* U_a *pour* $a \in \Phi^+$ (resp. Φ^-), *on a* $TU^+ \cap U^- = \{1\}$.

Cette donnée radicielle est dite *génératrice* si T et les U_a engendrent G.

(6.1.2) Notons quelques conséquences immédiates de ces axiomes. Pour $a \in \Phi$, nous posons $U_a^* = U_a - \{1\}$.

(1) *Pour* $a \in \Phi$, *on a* $U_a \neq U_{-a}$ *et* $U_a M_a U_a \cap \mathcal{N}(U_a) = \emptyset$. *En particulier,*

$$U_{-a} \cap \mathcal{N}(U_a) = \{1\}.$$

La première relation découle des axiomes (DR 1) et (DR 6). La seconde s'ensuit aussitôt, car s'il existait $g \in U_a m U_a \cap \mathcal{N}(U_a)$ avec $m \in M_a$, on aurait $gU_a g^{-1} = U_a$, d'où, compte tenu de (DR 5), $U_a = mU_a m^{-1} = U_{-a}$.

(2) *Pour* $a \in \Phi$ *et* $u \in U^*_{-a}$, *il existe un élément de* M_a, *noté* $m(u)$, *et un seul tel que* $u \in U_a . m(u) . U_a$. *Plus précisément, il existe un et un seul triplet* $(u', m, u'') \in U_a \times G \times U_a$ *tel que* $u = u'mu''$, $mU_a m^{-1} = U_{-a}$ *et* $mU_{-a} m^{-1} = U_a$, *et on a* $m \in M_a$ *et* $u' \neq 1$.

Vu (DR 4) et (DR 5), il suffit de montrer que si deux triplets (u', m, u'') et (u'_1, m_1, u''_1) possèdent les propriétés énoncées, ils sont égaux et on a $u' \neq 1$. Posons $u_1'^{-1} u' = u'_2 \in U_a$ et $m u''_1 u''^{-1} m^{-1} = u''_2 \in U_{-a}$. On a $u'_2 u_2''^{-1} = m_1 m^{-1} \in \mathcal{N}(U_a) \cap \mathcal{N}(U_{-a})$, d'où $u'_2 \in \mathcal{N}(U_{-a})$ et $u''_2 \in \mathcal{N}(U_a)$. Vu (1), ceci implique que $u'_2 = u''_2 = 1$, d'où la première assertion. La seconde résulte de ce que si u' était égal à 1, on aurait $m = mu''^{-1} m^{-1} . u \in U_{-a}$, d'où $U_a = mU_{-a} m^{-1} = U_{-a}$, en contradiction avec (1).

Pour $a \in \Phi$, *nous poserons* $M^0_a = m(U^*_a) = \{m(u) \mid u \in U^*_a\}$.

(3) *Pour* $a \in \Phi$, T *normalise* U_a *et* M_a.

En effet, soit $t \in T$ et soient u, u', m, u'' comme dans (2). On a $m \in M_a$, donc aussi $tm \in M_a$ (vu (DR 4)), et il résulte alors de (DR 5) que $t = (tm)m^{-1}$ normalise U_a. Pour une raison analogue, t normalise U_{-a}. Appliquant (2) à la relation ${}^t u = {}^t u' . {}^t m . {}^t u''$, on voit que ${}^t m \in M_a$. Puisque M_a est une classe à droite de T, ceci signifie que t normalise M_a.

(4) *On a* $M_a = M_a^{-1} = M_{-a}$ *et, si* $a/2 \in \Phi$, $M_a = M_{a/2}$.

En effet, soient u, u', m, u'' comme dans (2). Si $a/2 \in \Phi$, il résulte de (2) et (DR 5) que $m \in M_{a/2}$; par conséquent, $M_a = T . m = M_{a/2}$. Dans tous les cas, on a

$$u^{-1} = u''^{-1} m^{-1} u'^{-1} \qquad \text{et} \qquad u'^{-1} = (mu''m^{-1}) . m . u^{-1}.$$

En vertu de (2), ces relations impliquent que $m^{-1} \in M_a$ et $m \in M_{-a}$ et, compte tenu de (3) et (DR 4), on a $M_a^{-1} = m^{-1} T \subset M_a T = M_a$ et $M_{-a} = T . m = M_a$.

De (3) et (4), il résulte aussitôt que

(5) $T \cup M_a$ *est un sous-groupe de* G *admettant* T *comme sous-groupe distingué d'indice* 2.

(6) *Pour* $a \in \Phi$, *on a* $U^*_a . M_a . U_a = U^*_{-a} . T . U_a$.

En effet, il résulte de (DR 4), (2) et (5) que

$$U^*_a M_a U_a \subset U^*_{-a} M_a U_{-a} M_a U_a \subset U^*_{-a} T U_a \subset U^*_a M_a U_a T U_a = U^*_a M_a U_a.$$

(7) *Si* L_a *désigne le groupe engendré par* U_a, U_{-a} *et* T, *on a*

$$L_a = TU_a \cup U_a M_a U_a = M_a U_a \cup U_{-a} T U_a \neq U_{-a} T U_a.$$

La deuxième égalité résulte de (6). La première est une conséquence du fait que les deuxième et troisième membres sont manifestement contenus dans L_a et invariants par multiplication à droite par T (vu (3)), que le deuxième est invariant par multiplication à droite par U_a et que le troisième est invariant par multiplication à droite par U_{-a}. Enfin, on ne peut avoir $L_a = U_{-a}TU_a$, sinon il existerait $u \in U_a$, $u' \in U_{-a}$ et $t \in T$ tels que $m = u'tu \in M_a$, d'où on déduirait que $U_{-a} = mU_a m^{-1} = u'U_a u'^{-1}$ et $U_{-a} = U_a$, en contradiction avec (1).

(8) *On a* $\mathcal{N}(U_a) \cap L_a = TU_a$ *et* $\mathcal{N}(U_a) \cap \mathcal{N}(U_{-a}) \cap L_a = T$.

La première de ces relations résulte de (7) et (1). La seconde s'ensuit, vu (DR 6).

De (8), (DR 4) et (DR 5), il résulte aussitôt que

(9) $$M_a = \{x \in L_a \mid xU_a x^{-1} = U_{-a} \text{ et } xU_{-a}x^{-1} = U_a\}.$$

En particulier, on voit que M_a *est entièrement déterminé par la donnée de* T, U_a *et* U_{-a}, ce qui nous permettra de parler, par abus de langage, de *la donnée radicielle* $(T, (U_a)_{a\in\Phi})$.

(10) Soit N le groupe engendré par T et la réunion des M_a pour $a \in \Phi$. Si $\Phi \neq \emptyset$, c'est aussi le groupe engendré par les M_a. Il résulte de (DR 5) qu'*il existe un épimorphisme* ${}^v\nu : N \to {}^vW$ *et un seul tel que, pour tout* $a \in \Phi$ *et tout* $n \in N$, *l'on ait* $nU_a n^{-1} = U_b$ *avec* $b = {}^v\nu(n)(a)$. De plus, ${}^v\nu(M_a) = \{r_a\}$ pour tout $a \in \Phi$.

(11) Comme N normalise T d'après (8), on déduit de la transitivité de ${}^vW$ sur l'ensemble des chambres de Φ que *la condition* (DR 6) *reste satisfaite si l'on remplace la chambre de* Φ *utilisée pour définir* Φ^+ *et* Φ^- *par une autre chambre.*

(12) Soit T^0 l'intersection de T et du groupe engendré par la réunion des M_a^0 pour $a \in \Phi$ (cf. (2)). C'est évidemment un sous-groupe distingué de T et même de N. Alors, $(T^0, (U_a, T^0M_a^0)_{a\in\Phi})$ *est une donnée radicielle génératrice du groupe* G' *engendré par la réunion des* U_a *pour* $a \in \Phi$. Plus généralement, si X désigne un sous-groupe de T normalisé par M_a^0, le couple $(XT^0, (U_a, XT^0M_a^0)_{a\in\Phi})$ est une donnée radicielle génératrice du groupe engendré par X et G'. Ces assertions sont évidentes.

Exemples **(6.1.3)**. — Soit K un corps.

a) Soit $\Phi = \{a, -a\}$ et soit $G = SL_2(K)$. Soient T le sous-groupe des matrices diagonales, U_a (resp. U_{-a}) le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) « unipotentes », $m = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_a = M_{-a} = Tm$. On obtient ainsi une donnée radicielle génératrice dans G. La vérification des axiomes est immédiate; pour (DR 4) on utilise la relation

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad (u \in K^*),$$

d'où il résulte aussi qu'on a, avec les notations de (6.1.2) (2),

$$m\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Supposons désormais K commutatif, soit $\mathscr{G}$ un groupe algébrique simple connexe, défini et déployé sur K, et soit $\mathscr{T}$ un tore maximal de $\mathscr{G}$, défini et déployé sur K. Soit Φ le système des racines de $\mathscr{G}$ par rapport à $\mathscr{T}$. On sait que, pour tout $a\in\Phi$, il existe un sous-groupe algébrique $\mathscr{U}_a$ de $\mathscr{G}$ et un seul tel qu'il existe un isomorphisme x_a du groupe additif $\mathscr{A}dd$ sur $\mathscr{U}_a$ satisfaisant à la relation $t.x_a(u).t^{-1}=x_a(a(t).u)$ pour $u\in\mathscr{A}dd$ et $t\in\mathscr{T}$. Choisir un tel isomorphisme revient à choisir un élément X_a engendrant l'algèbre de Lie de $\mathscr{U}_a$. On sait ([17], [19]) que l'on peut choisir les x_a (ou les X_a) pour $a\in\Phi$ de telle sorte que

(2) pour tout $a\in\Phi$, il existe un épimorphisme ζ_a défini sur K de SL_2 sur le sous-groupe algébrique engendré par $\mathscr{U}_a$ et $\mathscr{U}_{-a}$ et un seul tel que $x_a(u)=\zeta_a\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ et $x_{-a}(u)=\zeta_a\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\right)$ pour tout $u\in\mathscr{A}dd$;

(3) pour $a, b\in\Phi$, avec $b\neq -a$, on a, pour $u, v\in\mathscr{A}dd$,

$$(x_a(u), x_b(v))=\prod_{pa+qb\subset\Phi,\, p,\, q\in\mathbf{N}^*} x_{pa+qb}(C_{a,b;p,q}u^p v^q)$$

où les coefficients $C_{a,b;p,q}$ sont des *entiers* (les racines $pa+qb$ étant rangées dans un ordre donné).

Ce choix, que nous supposons fait, correspond au choix d'une « base de Chevalley » dans l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ au sens de [8], ou encore à celui d'un « épinglage » de $\mathscr{G}$ au sens de [19].

Soit alors $G=\mathscr{G}(K)=$ ensemble des points de $\mathscr{G}$ rationnels sur K, et soient de même $T=\mathscr{T}(K)$, $U_a=\mathscr{U}_a(K)$ et $M_a=T.\zeta_a\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ $(a\in\Phi)$. Alors, $(T, (U_a, M_a))$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ *dans* G. Les conditions (DR 1) et (DR 3) sont évidemment satisfaites, (DR 2) résulte de (3) et (DR 4) résulte de l'exemple *a)*. Enfin, (DR 5) et (DR 6) sont bien connues *(loc. cit.)*. Notons que le groupe N est alors égal à $\mathscr{N}(\mathscr{T})(K)$, où $\mathscr{N}(\mathscr{T})$ désigne le normalisateur de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{G}$.

c) Plus généralement, soient $\mathscr{G}$ un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur K, $\mathscr{S}$ un tore de $\mathscr{G}$, défini et déployé sur K maximal, $\mathscr{S}'$ un tore maximal défini sur K de $\mathscr{G}$, contenant $\mathscr{S}$, Φ (resp. Φ') le système des racines de $\mathscr{G}$ par rapport à $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$). Pour $a\in\Phi$, on désigne par $\mathscr{U}_a$ le sous-groupe algébrique de $\mathscr{G}$ engendré par les sous-groupes $\mathscr{U}_{a'}$ pour $a'\in\Phi'$ telle que la restriction de a' à $\mathscr{S}$ soit égale à a ou à $2a$ (où $\mathscr{U}_{a'}$ désigne le sous-groupe défini comme en *b)* ci-dessus en y remplaçant K par une clôture algébrique de K, ou par une extension de K qui déploie $\mathscr{S}'$). Soit $\mathscr{Z}(\mathscr{S})$ (resp. $\mathscr{N}(\mathscr{S})$) le centralisateur (resp. normalisateur) de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{G}$. Posons $G=\mathscr{G}(K)$, $T=\mathscr{Z}(\mathscr{S})(K)$ et $U_a=\mathscr{U}_a(K)$ (pour $a\in\Phi$). Les résultats de [3] montrent alors que $(T, (U_a))$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ dans G, pour laquelle le groupe N est égal à $\mathscr{N}(\mathscr{S})(K)$.

(6.1.4) *Dans toute la suite du* § 6, *on désigne par* $(T, (U_a, M_a))$ *une donnée radicielle génératrice de type* Φ *dans un groupe* G et les symboles L_a, U^+, U^-, N, ${}^v\nu$ ont la signification définie en (6.1.1) ou (6.1.2). Pour simplifier les écritures, on pose $U_{2a}=\{1\}$ lorsque $a\in\Phi$ et $2a\notin\Phi$.

(6.1.5) Soit $\Phi=\bigcup_{i\in I}\Phi_i$ la décomposition de Φ en composantes irréductibles. Pour $i\in I$, soit G_i^0 le sous-groupe de G engendré par les U_a pour $a\in\Phi_i$. Il est immédiat que $(T\cap G_i^0, (U_a, M_a\cap G_i^0)_{a\in\Phi_i})$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ_i dans G_i^0. Le sous-groupe T normalise chaque G_i^0 et, vu (DR 2), tout élément de G_j^0 pour $j\neq i$ centralise G_i^0. Comme $(T, (U_a))$ est génératrice, on voit que chaque G_i^0 est un sous-groupe distingué de G et que $G_i^0\cap G_j^0$ est, pour $i\neq j$, contenu dans le centre du sous-groupe distingué G^0 de G engendré par les U_a (ou par les G_i^0), centre qui est d'ailleurs contenu dans T comme nous le verrons plus loin. Remarquons que $G=T.G^0$.

Proposition **(6.1.6)**. — *Le groupe* U^+ *est nilpotent. De plus, soient* Ψ *une partie de* Φ^+ *et* $\Psi^{\text{réd}}=\{a\in\Psi \mid a/2\notin\Psi\}$. *Pour tout* $a\in\Psi$, *soit* Y_a *un sous-groupe de* U_a *et soit* $X_a=Y_a$ *ou* $Y_a.Y_{2a}$ *selon que* $2a\notin\Psi$ *ou* $\in\Psi$. *Soit* X *le groupe engendré par les* Y_a. *Supposons que ceux-ci possèdent la propriété suivante :*

(i) *pour* $a, b\in\Psi$, (Y_a, Y_b) *est contenu dans le groupe engendré par les* Y_{ma+nb} *pour* $m, n\in\mathbf{N}^*$ *et* $ma+nb\in\Psi$.

Alors l'application produit

$$\prod_{a\in\Psi^{\text{réd}}} X_a \to X$$

est bijective quel que soit l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs du produit.

C'est une conséquence immédiate de (6.1.2) (11) et du lemme suivant.

Lemme **(6.1.7)**. — *Soit* X *un groupe. Soient* Ψ, $\Psi^{\text{réd}}$ *définis comme en* (6.1.6). *Pour tout* $a\in\Psi$, *soit* Y_a *un sous-groupe de* X *et soit* $X_a=Y_a$ *ou* $Y_a.Y_{2a}$ *selon que* $2a\notin\Psi$ *ou* $\in\Psi$. *Supposons que les* Y_a *engendrent* X *et possèdent la propriété* (i) *de* (6.1.6) *ainsi que la suivante :*

(ii) *si* $v\in V$, *l'intersection du groupe engendré par les* Y_a $(a\in\Psi,\ a(v)\leqslant 0)$ *et du groupe engendré par les* Y_a $(a\in\Psi,\ a(v)>0)$ *est réduite à l'élément neutre.*

Alors, le groupe X *est nilpotent et l'application produit*

$$\prod_{a\in\Psi^{\text{réd}}} X_a \to X \tag{1}$$

est bijective quel que soit l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs du produit.

La démonstration se fera par récurrence sur le nombre d'éléments de Ψ. Soit a_0 un élément maximal de Ψ pour la relation d'ordre total associée à D_0 (1.3.16). Alors, si $b\in\Psi$ et $m, n\in\mathbf{N}^*$, on a $ma_0+nb\notin\Psi$, de sorte que Y_{a_0} est central dans X, en vertu de (i). Posons $X'=X/Y_{a_0}$, et notons Y'_a $(a\in\Psi'=\Psi-\{a_0\})$ l'image canonique de Y_a dans X'. Il est clair que les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites si on remplace X, Ψ, (Y_a) par X', Ψ', (Y'_a), ce qui nous permet d'appliquer à ceux-ci l'hypothèse de récurrence. Puisque X' est nilpotent, X l'est aussi. Puisque l'application produit

$$\prod_{a\in\Psi'^{\text{réd}}} X'_a \to X' \tag{1'}$$

est surjective, il en est de même de

$$Y_{a_0} \times \prod_{a \in \Psi^{\text{réd}}} X_a \to X,$$

donc aussi de l'application (1), en vertu du fait que Y_{a_0} est central dans X. Reste à prouver l'injectivité de (1). Soient $x_a, y_a \in X_a$ $(a \in \Psi^{\text{réd}})$ tels que

$$\prod_{a \in \Psi^{\text{réd}}} x_a = \prod_{a \in \Psi^{\text{réd}}} y_a, \tag{2}$$

les facteurs des deux membres étant rangés dans « le même ordre ». Appliquant l'hypothèse de récurrence à l'image canonique de la relation (2) dans X', on voit que

$$x_a X_{a_0} = y_a X_{a_0}$$

pour tout a. Lorsque a et a_0 ne sont pas proportionnelles, ceci implique que

$$x_a = y_a, \tag{3}$$

ainsi qu'il résulte de (ii) appliqué à un point $v \in V$ tel que $a(v) \leqslant 0 < a_0(v)$. Puisque la relation (3) est satisfaite pour tous les éléments de $\Psi^{\text{réd}}$ sauf peut-être l'un d'entre eux, elle l'est aussi pour ce dernier, vu (2), et la démonstration est achevée.

Proposition **(6.1.8)**. — *Supposons Φ de rang 2. Soient $a_1, \ldots, a_{2k}$ les éléments de $\Phi^{\text{réd}}$ rangés dans un « ordre circulaire », c'est-à-dire de telle façon que l'on ait*

$$\Phi^{\text{réd}} \cap (\mathbf{Q}_+ a_{i-1} + \mathbf{Q}_+ a_{i+1}) = \{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}\}$$

pour $1 < i < 2k$. Les racines $a = a_1$ et $b = a_k$ forment alors une base de Φ et les éléments positifs correspondants de $\Phi^{\text{réd}}$ sont les a_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Définissons alors a_i pour tout $i \in \mathbf{Z}$ par la condition $a_{i+2k} = a_i$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. Soient de plus $u \in U_a$ et $u' \in U_b$, avec $u, u' \neq 1$; posons $m = m(u)$, $m' = m(u')^{-1}$ et $n = mm'$. Il existe une suite $(u_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ et une seule telle que $u_i \in U_{a_i}$, que $u_1 = u^{-1}$ et $u_k = u'$ et que les deux conditions suivantes soient réalisées :

$$(u, u') = u_2 \ldots u_{k-1} \tag{1}$$

$$u_i \in U_{-a_i} \cdot M_{a_i} \cdot u_{k+i}^{-1} \quad \textit{pour tout } i \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Posons $m_i = m(u_i)^{-1}$, de sorte que $m_1 = m$ et $m_k = m'$.

Alors les relations suivantes sont satisfaites pour tout $i \in \mathbf{Z}$:

$$m_{k+i} = m_i; \tag{3}$$

$$(u_i^{-1}, u_{k+i-1}) = u_{i+1} \ldots u_{k+i-2}; \tag{4}$$

$$u_{i+1} = m_i u_{k+i-1} m_i^{-1}; \tag{5}$$

$$u_2 = mu' m^{-1}; \tag{6}$$

$$m_{i+1} m_i = n; \tag{7}$$

$$m_{2i} = n^i m' n^{-i} \quad \textit{et} \quad m_{2i+1} = n^i m n^{-i}; \tag{8}$$

$$mm'mm' \ldots = m'mm'm \ldots, \tag{9}$$

chacun des deux membres comportant k facteurs.

La première assertion est immédiate. Remarquons d'emblée que la relation (2) et la définition de m_i se résument par la relation :

(2 *bis*) $$u_i \in U_{-a_i} m_i^{-1} u_{k+i}^{-1}.$$

Celle-ci équivaut à :

(2 *ter*) $$u_{k+i} \in u_i^{-1} U_{-a_i} m_i^{-1} = u_i^{-1} m_i^{-1} U_{a_i}.$$

Par suite, (2) *implique* (3).

Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur l'entier $j \geqslant 0$ l'assertion suivante :

(P_j) *Il existe une suite* $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+j}$ *et une seule possédant les propriétés suivantes* :

(i) $u_i \in U_{a_i}$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant k+j$, $u_1 = u^{-1}$ *et* $u_k = u'$;

(ii) $u_i \neq 1$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant j+1$ *et pour* $k \leqslant i \leqslant k+j$;

(iii) *la relation* (4) *est vraie pour* $1 \leqslant i \leqslant j+1$ *(et* (1) *est vraie)*;

(iv) *les relations* (2) *et* (5) *sont vraies pour* $1 \leqslant i \leqslant j$.

L'assertion (P_0) résulte de (DR 2) et (6.1.6). Soit $j \geqslant 1$ et supposons (P_{j-1}) démontrée. Puisque $u_j \neq 1$, il existe $u_{k+j}, v_{k+j} \in U^*_{a_{k+j}}$ tels que :

(10) $$u_j = v_{k+j} m_j^{-1} u_{k+j}^{-1} \quad \text{avec } m_j = m(u_j)^{-1} \in M_{a_j}.$$

Posons :

(11) $$u'_{j+1} = m_j u_{k+j-1} m_j^{-1}.$$

On a $u'_{j+1} \in U^*_{a_{j+1}}$ et :

$$(u_j^{-1}, u_{k+j-1}) = u_{k+j} m_j v_{k+j}^{-1} u_{k+j-1} v_{k+j} m_j^{-1} u_{k+j}^{-1} u_{k+j-1}^{-1} = u_{k+j} u'_{j+1} u_{k+j}^{-1} u_{k+j-1}^{-1}$$

puisque $U_{a_{k+j}}$ et $U_{a_{k+j-1}}$ commutent. On en déduit :

(12) $$(u_j^{-1}, u_{k+j-1}) = u'_{j+1} \cdot (u'^{-1}_{j+1}, u_{k+j}) \cdot u_{k+j-1}^{-1}.$$

Par l'hypothèse de récurrence, la relation (4) est vraie pour $i=j$. De (12), on déduit donc :

(13) $$(u'^{-1}_{j+1}, u_{k+j}) = (u'^{-1}_{j+1} u_{j+1}) u_{j+2} \ldots u_{k+j-2} u_{k+j-1}.$$

Vu (DR 2) et (6.1.6), ceci entraîne $u_{j+1} = u'_{j+1} \neq 1$, d'où la condition (ii) de (P_j), et, vu (11), que la relation (5) est vraie pour $i=j$. De plus, (13) se réduit alors à la relation (4) pour $i=j+1$. Enfin, la relation (2) pour $i=j$ résulte de (10). La suite $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant k+j}$ vérifie donc les conditions (i) à (iv) de (P_j). Son unicité résulte de l'hypothèse de récurrence et du fait que u_{k+j} est l'unique élément de $U_{a_{k+j}}$ satisfaisant à (2) pour $i=j$.

Finalement, nous avons montré qu'il existe une suite $(u_i)_{i \geqslant 1}$ et une seule telle que $u_i \in U^*_{a_i}$ et que les relations (1), (2), (4) et (5) soient satisfaites pour $i \geqslant 1$.

De manière analogue, ou en appliquant le résultat précédent après avoir remplacé a, b, u, u', a_i, u_i par b, a, u'^{-1}, u^{-1}, a_{k+1-i}, u_{k+1-i}^{-1} respectivement, on montre qu'il existe une suite $(u_i)_{i \leqslant k}$ et une seule telle que $u_i \in U^*_{a_i}$ et que les relations (1), (2), (4) et (5) soient satisfaites pour $i \leqslant 0$. Vu (1), (DR 2) et (6.1.6), ces deux suites se raccordent en une suite $(u_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ satisfaisant à (4) et (5) pour tout i (donc en particulier à (6)) et caractérisée par les propriétés (1) et (2). Nous avons déjà vu que (3) est alors satisfaite pour tout i.

De (5), on déduit que

$$u_{i+1} \in \mathrm{U}_{-a_{i+1}} \cdot m_i m_{k+i-1}^{-1} m_i^{-1} \cdot \mathrm{U}_{-a_{i+1}}.$$

Comme $m_i \mathrm{M}_{a_{k+i-1}} m_i^{-1} \subset \mathrm{M}_{a_{i+1}}$, on voit, compte tenu de (3), que

$$m_{i+1} = m_i m_{k+i-1} m_i^{-1} = m_i m_{i-1} m_i^{-1}$$

d'où $m_{i+1} m_i = m_i m_{i-1}$. Comme $m_1 = m$ et $m_0 = m_k = m'$, on en tire (7).

De plus, on a $m_{i+1} = m_i m_{i-1} m_i^{-1} = n m_{i-1} n^{-1}$, d'où (8). Enfin, (9) résulte de (8) appliquée à l'entier i tel que $2i = k$ ou que $2i+1 = k$.

Remarques **(6.1.9).** — *a)* Il est facile de voir que la démonstration de (6.1.8) reste valable si l'on prend une définition plus faible des données radicielles, par exemple celle de [36], qui inclut le cas des groupes de Ree de type ${}^2\mathrm{F}_4$.

b) Soit $a \in \Phi$; pour $x \in \mathrm{U}_a - \{1\}$, notons $f(x)$ l'unique élément de U_a tel que $x\mathrm{M}_a f(x) \cap \mathrm{U}_{-a} \neq \emptyset$. Dans de nombreux cas, l'application f est l'identité, par exemple pour la donnée radicielle canonique de $\mathrm{SL}_2(\mathrm{K})$ ((6.1.3) (1)), et plus généralement pour la donnée radicielle du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique semi-simple connexe décrite en (6.1.3) *c)*, lorsque a est une racine non multipliable ([3], § 7).

Dans tous les cas, de la relation $u_i = f(u_{k+1})^{-1} m_i^{-1} u_{k+i}^{-1}$, on tire

$$f(u_{k+i})^{-1} = u_i . m_i . m_i^{-1} u_{k+i} m_i, \qquad \text{d'où} \qquad f(u_i) = m_i^{-1} u_{k+i} m_i.$$

De (5) et (7), on déduit alors

$$u_{i+2} = n . (m_i^{-1} u_{k+i} m_i) . n^{-1} = n . f(u_i) . n^{-1}$$

d'où

$$u_{2i} = n^{i-1} m f^{i-1}(u') m^{-1} n^{1-i} \qquad \text{et} \qquad u_{2i+1} = n^i f^i(u^{-1}) n^{-i}.$$

Si en particulier f est l'identité pour chacune des a_i, on a

$$u_{2i+1} = n^i u^{-1} n^{-i} \qquad \text{et} \qquad u_{2i} = n^{i-1} m u' m^{-1} n^{1-i}.$$

c) La relation (9) n'est pas la seule identité entre m et m' dont l'image dans ${}^v\mathrm{W}$ donne la relation bien connue $({}^v\nu(mm'))^k = 1$. Par exemple, si Φ est de type C_2 et si a_1 est une racine longue, alors a_1 et a_3 sont fortement orthogonales et m_1 et m_3 commutent. On en déduit que

$$mm'mm'^{-1} = m'mm'^{-1}m.$$

De même, si Φ est de type G_2 et si a_1 est longue, alors a_1 et a_4 sont fortement orthogonales et on en déduit que

$$mm'mm'm^{-1}m'^{-1} = m'mm'm^{-1}m'^{-1}m.$$

Corollaire **(6.1.10)**. — *Soit* Ψ *un sous-système de racines de* Φ *et soit* Δ *une base de* Ψ. *Pour* $a\in\Delta$, *soit* N_a *une partie non vide de* M_a^0 *et soit* N_1 *le groupe engendré par les* N_a *pour* $a\in\Delta$. *Soit* X *un sous-groupe de* T *normalisé par* N_1 *et contenant les* N_a^2 *pour* $a\in\Delta$. *Alors, l'application* λ *qui, à* $n\in N_1X$, *fait correspondre la restriction de* ${}^v\nu(n)$ *au sous-espace engendré par* Ψ, *est un épimorphisme de* N_1X *sur le groupe de Weyl* ${}^vW_1$ *de* Ψ, *de noyau* X.

Il est immédiat que $\lambda^{-1}(1)\supset X$ et que $\lambda(N_1X)={}^vW_1$ (puisque ${}^v\nu(N_a)=\{r_a\}$ pour $a\in\Delta$). Pour tout $a\in\Delta$, l'image de N_a dans le groupe quotient N_1X/X est réduite à un élément $\overline{m}_a$ d'ordre 2 et les $\overline{m}_a$ engendrent N_1X/X. Soient $a, b\in\Delta$, avec $a\neq b$; en appliquant (6.1.8) (9) à la donnée radicielle (T, (U_c)), où c décrit le système de racines formé des $pa+qb$, avec $p, q\in\mathbf{Z}$ et $pa+qb\in\Phi$, on voit que, compte tenu des relations $\overline{m}_a^2=\overline{m}_b^2=1$, l'on a $(\overline{m}_a\overline{m}_b)^k=1$, avec $k=$ordre de r_ar_b. Par suite, les $\overline{m}_a$ pour $a\in\Delta$, satisfont aux relations de définition du groupe de Weyl ${}^vW_1$ et l'application canonique de N_1X/X sur ${}^vW_1$ est un isomorphisme.

Corollaire **(6.1.11)**. — (i) *Si* $\Phi\neq\emptyset$, *alors* N *est engendré par la réunion des* M_a *pour* $a\in\Pi$.

(ii) *On a* ${}^v\nu^{-1}(1)=T=N\cap TU^+$.

Soit N' le groupe engendré par les M_a pour $a\in\Pi$. On a ${}^v\nu(N')={}^vW$. Pour toute racine $b\in\Phi$, il existe $w\in{}^vW$ tel que $w(b)$ soit proportionnelle à une racine simple $a\in\Pi$ ([5], chap. VI, § 1, prop. 15); si $n\in{}^v\nu^{-1}(w)\cap N'$, on a alors d'après (6.1.2) (9) et (10)

$$M_b=n^{-1}M_an\subset N'$$

d'où (i).

La relation ${}^v\nu^{-1}(1)=T$ résulte de (6.1.10). Enfin, si $n\in N\cap TU^+$, alors $w={}^v\nu(n)$ conserve Φ^+ (d'après (DR 1), (DR 6) et (6.1.2) (10)), donc est l'élément neutre et on a $n\in T$.

Proposition **(6.1.12)**. — *Posons* $R=\{M_a\mid a\in\Pi\}\subset N/T$. *Alors* (G, TU^+, N, R) *est un système de Tits saturé de groupe de Weyl* N/T *isomorphe à* ${}^vW$.

Vu (6.1.11), il suffit de prouver les relations suivantes, pour $n\in N$, $a\in\Pi$ et $m\in M_a$:

(1) $$mTU^+m^{-1}\neq TU^+$$

(2) $$TU^+n.\{1, m\}.TU^+m=TU^+n.\{1, m\}.TU^+$$

et

(3) $$\bigcap_{x\in N}xTU^+x^{-1}\subset T.$$

La première résulte immédiatement de (DR 1), (DR 6) et du fait que $U_{-a}\subset mTU^+m^{-1}$. La seconde étant invariante lorsqu'on remplace n par nm, nous devons seulement l'établir dans le cas où $a'={}^v\nu(n)(a)\in\Phi^+$. Soit alors U' le groupe engendré par les U_b pour $b\in\Phi^+$ et $b\notin\mathbf{R}a$. Vu (6.1.6), on a $U^+=U_aU'$ et, avec les notations de (6.1.2) (7)

$$TU^+n.\{1, m\}.TU^+=TU^+n.\{1, m\}.U_aTU'\subset TU^+nL_aTU'.$$

Or, d'après (6.1.2) (7),

$$nL_a\subset nTU^+\cup nU_amU_aT=nTU^+\cup U_{a'}nmU_aT\subset TU^+.\{n, nm\}.TU^+$$

d'où (2). Enfin, (3) est conséquence de (DR 6).

Corollaire **(6.1.13)**. — *Conservons les notations de* (6.1.12). *On a*

(1)
$$\mathcal{N}(U^+) = TU^+,$$

et

(2)
$$T = \bigcap_{a \in \Phi} \mathcal{N}(U_a) = \mathcal{N}(U^+) \cap \mathcal{N}(U^-).$$

Le normalisateur de U^+ contenant TU^+, il est de la forme $TU^+N'TU^+$ avec $N' \subset N$ (1.2.9); mais si un élément n de N normalise U^+, son image par ${}^v\nu$ conserve Φ^+, en vertu de (DR 1) et (DR 6), et est donc l'élément neutre, de sorte que $n \in {}^v\nu^{-1}(1) = T$. Ainsi, $N' \subset T$, et $\mathcal{N}(U^+) = TU^+$. La relation (2) résulte à présent des inclusions suivantes (pour la première, cf. (6.1.2) (3)) :

$$T \subset \bigcap_{a \in \Phi} \mathcal{N}(U_a) \subset \mathcal{N}(U^+) \cap \mathcal{N}(U^-) = TU^+ \cap TU^- = T.$$

Remarque **(6.1.14)**. — Le corollaire précédent montre qu'une donnée radicielle *génératrice* est entièrement déterminée par le système des U_a.

(6.1.15) Notons encore quelques conséquences de (6.1.12) :

a) L'injection de N *dans* G *définit une bijection de* N (resp. ${}^vW$) *sur l'ensemble des doubles classes* $U^+\backslash G/U^+$ (resp. $TU^+\backslash G/TU^+$).

Vu (1.2.7), il suffit de prouver que, si $n \in N$ et $t \in T$ sont tels que $tn \in U^+nU^+$, alors $t = 1$. Or, on a d'après (6.1.6), $nU^+n^{-1} \subset U^+.U^-$ et notre assertion résulte de (DR 6).

b) Soit $w \in {}^vW$; le sous-groupe $nU^+n^{-1} \cap U^-$ est indépendant de $n \in {}^v\nu^{-1}(w)$: il résulte de (6.1.6) et (DR 6) que c'est le sous-groupe engendré par les U_a pour $a \in \Phi^- \cap w(\Phi^+)$. Notons-le U_w^+. On vérifie alors aisément que, pour tout $n \in {}^v\nu^{-1}(w)$, *l'application* $(u, t, u') \mapsto utnu'$ (resp. $(u, u') \mapsto unu'$) *est une bijection de* $U^+ \times T \times U_w^+$ (resp. $U^+ \times U_w^+$) *sur* U^+TnU^+ (resp. U^+nU^+).

c) Il existe $n \in N$ tel que $nU^+n^{-1} = U^-$ et $nU^-n^{-1} = U^+$: il suffit de choisir n tel que ${}^v\nu(n)$ soit l'élément de ${}^vW$ transformant la chambre D en $-$D. Par suite, *l'injection de* N *dans* G *définit aussi une bijection de* N (resp. ${}^vW$) *sur* $U^+\backslash G/U^-$ (resp. $TU^+\backslash G/TU^-$).

d) Soient X une partie de Π, ${}^vW_X$ le sous-groupe de ${}^vW$ engendré par les r_a pour $a \in X$, et $G_X = U^+T\,{}^vW_XU^+$. Alors, G_X est un sous-groupe parabolique de G et l'application $X \mapsto G_X$ est une bijection de $\mathcal{P}(\Pi)$ sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant TU^+ : ce n'est qu'une reformulation de (1.2.9).

6.2. Valuations d'une donnée radicielle.

On conserve les notations de (6.1.4).

Définition **(6.2.1)**. — *On appelle* valuation *de la donnée radicielle* $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi})$ *une famille* $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Phi}$, *où* φ_a *est une application de* U_a *dans* $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, *possédant les propriétés suivantes* :

(V 0) *pour tout* $a\in\Phi$, *l'image de* φ_a *contient au moins trois éléments*;

(V 1) *pour* $a\in\Phi$ *et* $k\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$, *l'ensemble* $U_{a,k}=\varphi_a^{-1}([k,\infty])$ *est un sous-groupe de* U_a *et on a* $U_{a,\infty}=\{1\}$;

(V 2) *pour tout* $a\in\Phi$ *et tout* $m\in M_a$, *la fonction*

$$u\mapsto\varphi_{-a}(u)-\varphi_a(mum^{-1})$$

est constante sur $U^*_{-a}=U_{-a}-\{1\}$;

(V 3) *soient* $a, b\in\Phi$ *et* $k,\ell\in\mathbf{R}$; *si* $b\notin-\mathbf{R}_+a$, *le groupe des commutateurs* $(U_{a,k}, U_{b,\ell})$ *est contenu dans le groupe engendré par les* $U_{pa+qb,pk+q\ell}$ *pour* $p, q\in\mathbf{N}^*$ *et* $pa+qb\in\Phi$;

(V 4) *si* a *et* $2a$ *appartiennent à* Φ, *alors* φ_{2a} *est la restriction de* $2\varphi_a$ *à* U_{2a};

(V 5) *soient* $a\in\Phi$, $u\in U_a$ *et* $u', u''\in U_{-a}$; *si* $u'uu''\in M_a$, *on a* $\varphi_{-a}(u')=-\varphi_a(u)$.

(6.2.2) Soit $\varphi=(\varphi_a)$ une valuation de $(T, (U_a))$. Par convention, nous poserons $U_{2a,k}=\{1\}$ lorsque $a\in\Phi$ et $2a\notin\Phi$ ($k\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}$). Pour $a\in\Phi$ et $u\in U_a$, on a

(1) $$\varphi_a(u)=\sup\{k\in\mathbf{R}\cup\{\infty\}\mid u\in U_{a,k}\}.$$

Vu (V 1), on a

(2) $$\varphi_a(u^{-1})=\varphi_a(u).$$

Il en résulte que, lorsque (V 1) est satisfaite, l'axiome (V 5) est équivalent à

(V 5 *bis*) *Soient* $a\in\Phi$, $u\in U_a$ *et* $u', u''\in U_{-a}$; *si* $u'uu''\in M_a$, *on a* $\varphi_{-a}(u'')=-\varphi_a(u)$.

Pour $a\in\Phi$ et $k\in\mathbf{R}$, on pose

$$M_{a,k}=M_a\cap U_{-a}\varphi_a^{-1}(k)U_{-a}.$$

Vu (6.1.2) (2), $M_{a,k}$ est non vide si et seulement si $k\in\varphi_a(U^*_a)$ et on a

(3) $$\varphi_a^{-1}(k)\subset U_{-a,-k}M_{a,k}U_{-a,-k}\qquad (a\in\Phi,\ k\in\mathbf{R}).$$

Lorsque $2a\in\Phi$, on a $M_{2a,2k}\subset M_{a,k}$.

Il résulte de (V 1) et (V 3) que les $U_{a,k}$ forment une base du filtre des voisinages de l'élément neutre pour une structure de groupe topologique dans U_a.

Pour $a\in\Phi$, on pose

$$\Gamma_a=\varphi_a(U^*_a),$$
$$\Gamma'_a=\{\varphi_a(u)\mid u\in U^*_a,\ \varphi_a(u)=\sup\,\varphi_a(uU_{2a})\}.$$

Vu (V 5) et (6.1.2) (2), on a $\Gamma_{-a}=-\Gamma_a$. Si $2a\notin\Phi$, on a $\Gamma'_a=\Gamma_a$. Vu (V 1) et (V 4), $\Gamma_a=\Gamma'_a\cup(1/2)\Gamma_{2a}$. Notons que Γ'_a peut être vide : pour qu'il en soit ainsi, il suffit que U_{2a} soit dense dans U_a (pour un exemple de cette situation, cf. (6.2.3) *d)*); cette condition est aussi nécessaire lorsque Γ_a est discret dans $\mathbf{R}$.

Exemples **(6.2.3).** — Soit K un corps muni d'une valuation réelle non impropre ω.

a) Soit $G=SL_2(K)$ et reprenons la donnée radicielle dans G définie en (6.1.3) *a)*. Pour $u\in K$, posons

$$\varphi_a\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\varphi_{-a}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\right)=\omega(u).$$

On vérifie immédiatement que les conditions (V 0), (V 1), (V 3) et (V 4) sont satisfaites. Si $m=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_a$, on a $m\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}m^{-1}=\begin{pmatrix}1 & xuy^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ d'où (V 2). Enfin, (V 5) résulte aussitôt de la formule (1) de (6.1.3) *a)*. Par suite, nous avons bien défini une valuation de la donnée radicielle (T, (U_a)). Remarquons que

$$\mathrm{M}_{a,k}=\left\{\begin{pmatrix}0 & u\\ -u^{-1} & 0\end{pmatrix}\,\middle|\,\omega(u)=k\right\}. \tag{1}$$

b) Reprenons les notations de (6.1.3) *b)*. Pour $a\in\Phi$ et $u=x_a(t)\in \mathrm{U}_a$ $(t\in \mathrm{K})$, posons $\varphi_a(u)=\omega(t)$. La famille $\varphi=(\varphi_a)$ est une valuation de la donnée radicielle (T, (U_a)). Ici encore, les conditions (V 0), (V 1) et (V 4) sont évidentes. La condition (V 3) résulte de l'assertion (3) de (6.1.3) *b)*. De plus, la famille $(\varphi_a\circ\zeta_a, \varphi_{-a}\circ\zeta_{-a})$ n'est autre que la valuation de la donnée radicielle de $\mathrm{SL}_2(\mathrm{K})$ décrite à l'exemple *a)*. On en déduit aussitôt (V 5) et aussi (V 2) lorsque $m=n_a=\zeta_a\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$. Comme $\mathrm{M}_a=\mathrm{T}n_a$, il suffit, pour achever la démonstration, de montrer que la fonction $u\mapsto(\varphi_a(tut^{-1})-\varphi_a(u))$ est constante sur U_a^* pour tout $t\in\mathrm{T}$, ce qui est évident puisque $tx_a(s)t^{-1}=x_a(a(t)s)$ pour tout $s\in\mathrm{K}$ et $t\in\mathrm{T}$.

c) L'un des buts de ce travail est de montrer que si K est un corps local et $\mathscr{G}$ un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur K, la donnée radicielle (T, (U_a)) décrite en (6.1.3) *c)* peut être valuée : c'est ce que nous verrons dans un chapitre ultérieur (voir aussi le § 10).

d) Supposons le corps valué K commutatif, non parfait de caractéristique 2, et soit $\mathrm{L}\subsetneq\mathrm{K}$ un sous-espace vectoriel de K sur K^2. Posons $\mathrm{G}=\mathrm{SL}_2(\mathrm{K})$, $\Phi=\{\pm a, \pm 2a\}$, soient $\mathrm{U}_{\pm a}$ et $\varphi_{\pm a}$ définis comme en (6.1.3) *a)* et (6.2.3) *a)*, posons

$$\mathrm{U}_{2a}=\left\{\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, u\in\mathrm{L}\right\},\qquad \mathrm{U}_{-2a}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, u\in\mathrm{L}\right\}$$

et $\varphi_{\pm 2a}=2\varphi_{\pm a}|\mathrm{U}_{\pm 2a}$. Alors (T, $(\mathrm{U}_b)_{b\in\Phi}$) est une donnée radicielle de type Φ (donc de type BC_1) dans G et $\varphi=(\varphi_b)$ en est une valuation. De plus, U_{2a} est dense dans U_a (et $\Gamma'_a=\emptyset$) dès que L est dense dans K. Il en est ainsi, par exemple, lorsque $\mathrm{K}=k((t))$ est un corps de séries formelles sur un corps k de degré infini sur k^2, si l'on choisit pour L le groupe des séries $\sum_i a_i t^i$ telles que le sous-espace vectoriel de k sur k^2 engendré par les a_i soit de dimension finie.

e) Reprenons les notations de (5.2.30) et supposons que la donnée radicielle (T, $(\mathrm{U}_a)_{a\in\Phi}$) et le système (N, ν, $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$) sont compatibles en ce sens que les conditions suivantes sont réalisées :

(i) on a $\mathrm{V}={}^v\mathbf{A}$, $\mathrm{V}^*={}^v\mathbf{A}^*$ et ${}^v\mathbf{W}={}^v\mathrm{W}$, ce qui équivaut à dire qu'il existe une application surjective $a\mapsto\bar{a}$ de Φ sur ${}^v\mathbf{\Sigma}$ telle que $\bar{a}\in\mathbf{R}_+a$ pour tout $a\in\Phi$;

(ii) le sous-groupe N coïncide avec celui noté également N en (6.1.2);

(iii) pour tout $a \in \Phi$, le sous-groupe U_a est la réunion des U_α pour $\alpha \in \mathbf{\Sigma}$ et ${}^v\alpha = a$, c'est-à-dire est le sous-groupe noté $\mathfrak{U}_a$ en 5.2.

En comparant (6.1.2) (10) et la condition (B 1) de (5.2.30), on voit aussitôt que l'homomorphisme ${}^v\nu : N \to {}^vW = {}^v\mathbf{W}$ défini en (6.1.2) coïncide avec celui noté également ${}^v\nu$ dans 5.2.

Identifions maintenant $\mathbf{A}$ et V en choisissant une origine o dans $\mathbf{A}$; pour $a \in V^*$ et $k \in \mathbf{R}$, désignons par $\alpha_{a,k}$ le demi-espace fermé $\{x \in \mathbf{A} \mid a(x) + k \geqslant 0\}$. Pour $a \in \Phi^{\text{réd}}$ et $u \in U_a$, posons

$$\varphi_a(u) = \sup\{k \in \mathbf{R} \mid u \in U_{\alpha_{a,k}}\}.$$

Pour $a \in \Phi - \Phi^{\text{réd}}$, et $u \in U_{2a}$, on pose $\varphi_{2a}(u) = 2\varphi_a(u)$.

Nous allons montrer que *la famille* $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \Phi}$ *ainsi définie est une* « quasi-valuation » *de la donnée radicielle* (T, (U_a)) en ce sens qu'elle satisfait aux conditions (V 0), (V 1), (V 2), (V 4), (V 5) et à la condition (V 3 *bis*), plus faible que (V 3), obtenue en remplaçant dans (V 3) l'hypothèse « $b \notin -\mathbf{R}_+ a$ » par l'hypothèse « $b \notin \mathbf{R}a$ ». On remarquera d'ailleurs qu'une partie des résultats que nous établirons sur les valuations d'une donnée radicielle restent valables pour les « quasi-valuations ».

La vérification de (V 0), (V 1) et (V 4) est immédiate. Pour démontrer (V 2), il suffit, vu (V 4) et (6.1.2) (4) de considérer le cas où $a \in \Phi^{\text{réd}}$. Soit alors $m \in M_a$; puisque ${}^v\nu(m) = r_a$, $\nu(m)$ est la réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan $a(x) + \ell = 0$ et on a, vu (B 1), $mU_{a,k}m^{-1} = U_{-a,k-2\ell}$ pour tout $k \in \mathbf{R}$, d'où $\varphi_{-a}(u) = \varphi_a(mum^{-1}) - 2\ell$ pour tout $u \in U_{-a}$.

Démontrons (V 3 *bis*). Soient $a, b \in \Phi$, non proportionnelles, et $k, \ell \in \mathbf{R}$. Les racines affines $\gamma \in \mathbf{\Sigma}$ qui contiennent le dièdre $\alpha_{a,k} \cap \alpha_{b,\ell}$ sont les racines affines de la forme $\alpha_{pa+qb,h}$ avec $pa + qb \in \Phi$, $p, q \in \mathbf{Q}_+$ et $h \geqslant pk + q\ell$. Si de plus γ ne contient ni $\alpha_{a,k}$ ni $\alpha_{b,\ell}$, on a $p, q > 0$. Ordonnons alors l'ensemble S des racines $s \in \Phi^{\text{réd}}$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels strictement positifs de a et b de telle sorte que leurs images dans ${}^v\mathbf{\Sigma}$ soient rangées en un ordre grignotant. Pour $s = pa + qb \in S$, posons $h(s) = pk + q\ell$. D'après (5.2.32), l'application produit est une bijection de $\prod_{s \in S} U_{s,h(s)}$ sur le sous-groupe U_Ω, avec $\Omega = \bigcap_{s \in S} \alpha_{s,h(s)}$. D'autre part, la proposition (6.1.6) entraîne que l'application produit π est aussi une bijection de $\prod_{s \in S} U_s$ sur le groupe engendré par les U_s. Posons alors $X_s = U_s$ si $s = pa + qb$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$, $X_s = U_{2s}$ si $s = pa + qb$ avec $2p, 2q \in \mathbf{N}^*$ mais p ou q n'appartenant pas à $\mathbf{N}^*$, et enfin $X_s = \{1\}$ dans tous les autres cas ($s \in S$). La restriction de π à $\prod_{s \in S} X_s$ est, toujours d'après (6.1.6), une bijection sur le sous-groupe X engendré par les X_s. Il en résulte que

$$X \cap U_\Omega = \prod_{pa+qb \in \Phi,\, p,\, q \in \mathbf{N}^*} U_{pa+qb,\, pk+q\ell}.$$

Or, si $x \in U_{a,k}$ et $y \in U_{b,\ell}$, le commutateur (x, y) appartient à U_Ω d'après (B′3 *bis*) et à X d'après (DR 2). Ceci démontre (V 3 *bis*).

Démontrons enfin (V 5). Ici encore, il suffit de considérer le cas $a \in \Phi^{\text{réd}}$. Soient

$u \in U_a$, $u', u'' \in U_{-a}$ tels que $u'uu'' \in M_a$. Soit $k = \varphi_a(u)$ et $\alpha = \alpha_{a,k}$ (on a $u \neq 1$ et $k \neq \infty$). On a alors $u \in U_\alpha$ et $u \notin U_{\alpha^* \cap \alpha_+}$. Il résulte alors de (5.2.30) (B 4) que $u = u_1' r u_1''$ avec $r \in \nu^{-1}(r_\alpha) \subset M_a$ et $u_1', u_1'' \in U_{\alpha^*} = U_{-a,-k}$. Vu (6.1.2) (2), on a $u' = u_1'$, d'où $\varphi_{-a}(u') \geqslant -k$. Si l'on avait $\varphi_{-a}(u') > -k$, on aurait $u' \in U_{(\alpha^*)_+}$ et

$$\alpha_+ \cap \alpha^* = u^{-1} u' r (\alpha_+ \cap \alpha^*) = u^{-1} u' ((\alpha^*)_+ \cap \alpha) = (\alpha^*)_+ \cap \alpha$$

ce qui est absurde. On a donc bien $\varphi_{-a}(u') = -\varphi_a(u)$, ce qui achève la démonstration.

Nous verrons plus loin une réciproque partielle (6.5).

(6.2.4) *Dans toute la suite du* § 6, *on désigne par* $\varphi = (\varphi_a)$ *une valuation de la donnée radicielle* (T, (U_a)). Lorsqu'une ambiguïté sera à craindre sur φ, on notera ${}^\varphi U_{a,k}$, ${}^\varphi M_{a,k}$, etc. les ensembles notés simplement $U_{a,k}$, $M_{a,k}$, etc. ci-dessus. On utilisera sans autre avertissement une notation analogue pour les autres symboles liés à φ qui seront définis ci-dessous.

(6.2.5) Soit $\lambda : \Phi \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction constante sur les composantes irréductibles de Φ et soit $v \in V$. Il est facile de voir que la famille $\psi = (\psi_a)$ définie par $\psi_a(u) = \lambda(a)\varphi_a(u) + a(v)$ pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, est une valuation de (T, (U_a)), que nous noterons $\lambda\varphi + v$. Les valuations φ et $\psi = \lambda\varphi + v$ seront dites *équivalentes*, et *équipollentes* si $\lambda = 1$. *L'application* $(\varphi, v) \mapsto \varphi + v$ *est une loi d'opération du groupe additif de* V *dans l'ensemble des valuations* et une *classe d'équipollence* de valuations est une orbite de V pour cette opération.

D'autre part, soit $n \in N$ et $w = {}^v\nu(n)$. Pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, on a d'après (6.1.2) (10), $n^{-1}un \in U_{w^{-1}(a)}$. Posons cette fois

$$\psi_a(u) = \varphi_{w^{-1}(a)}(n^{-1}un).$$

Ici encore, il est immédiat, puisque l'automorphisme intérieur défini par n est un automorphisme de la donnée radicielle (T, (U_a)), que la famille $\psi = (\psi_a)$ ainsi définie est une *valuation* de (T, (U_a)), que nous noterons $n.\varphi$. On obtient ainsi une *loi d'opération du groupe* N dans l'ensemble des valuations de (T, (U_a)) et on vérifie aussitôt que l'on a, pour $n \in N$, $v \in V$ et $\lambda : \Phi \to \mathbf{R}_+^*$ comme ci-dessus

(1) $$n.(\lambda\varphi + v) = \lambda(n.\varphi) + {}^v\nu(n)(v).$$

(6.2.6) Soit A l'ensemble des valuations équipollentes à φ : c'est un espace affine sous V, que nous munirons de la distance euclidienne correspondant au produit scalaire donné sur V. Pour $a \in V^*$ et $k \in \mathbf{R}$, on note comme plus haut $\alpha_{a,k}$ (ou ${}^\varphi\alpha_{a,k}$ si une confusion est à craindre) le demi-espace fermé de A formé des $x \in A$ tels que $a(x - \varphi) + k \geqslant 0$. Le bord d'un demi-espace fermé α est noté $\partial\alpha$. Pour $\alpha = \alpha_{a,k}$, avec $a \in \Phi^{\text{réd}}$, on pose $U_\alpha = U_{a,k}$ et $U_{\alpha+} = \bigcup_{h>k} U_{a,h}$.

On appelle *racines affines* de A les demi-espaces $\alpha_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \Gamma_a'$, et *murs* de A, les bords des racines affines. L'ensemble des racines affines est noté Σ. Enfin, on désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples $(\alpha, a) \in \Sigma \times \Phi$ tels que $\alpha = \alpha_{a,k}$ avec $k \in \Gamma_a'$. Il est clair que Σ, $\mathscr{E}$ et l'application $\alpha \mapsto U_\alpha$ restent inchangés si l'on remplace φ par une valuation équipollente.

Proposition **(6.2.7).** — *Pour* $i=1, \ldots, p$, *soient* $a_i \in \Phi$, $k_i \in \Gamma_{a_i}$ *et* $m_i \in \mathrm{M}_{a_i, k_i}$. *Posons* $n = m_1 \ldots m_p$ *et* $r_i = r_{a_i}$. *On a alors*

$$n.\varphi = \varphi - v$$

avec
$$v = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} k_i (r_1 \ldots r_{i-1})(a_i^{\vee}) \in \mathrm{V}.$$

En raisonnant par récurrence sur p, on se ramène aussitôt, vu (6.2.5) (1), au cas $p=1$, et on peut supposer $a = a_1 \in \Phi^{\text{réd}}$. Écrivons alors $m = m_1 = u'uu''$, avec $u \in \mathrm{U}_a$, $u', u'' \in \mathrm{U}_{-a}$. On a

$$\varphi_a(u) = -\varphi_{-a}(u') = -\varphi_{-a}(u'') = k_1 = k.$$

Posons $r = r_1 = r_a$ et soit tout d'abord $b \in \Phi$, b non proportionnelle à a. Soit $\ell \in \mathbf{R}$ et soit Ψ l'ensemble des éléments de Φ de la forme $pa + qb$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Pour $c = pa + qb$ posons $h(c) = pk + q\ell$. D'après (V 3) et (6.1.6), le produit $\prod_{c \in \Psi^{\text{réd}}} \mathrm{U}_{c, h(c)}$ est un groupe U' indépendant de l'ordre choisi sur $\Psi^{\text{réd}}$, et on a

$$\mathrm{U}_b \cap \mathrm{U}' = \mathrm{U}_{b, \ell}, \qquad \mathrm{U}_{r(b)} \cap \mathrm{U}' = \mathrm{U}_{r(b), h(r(b))} = \mathrm{U}_{r(b), \ell - b(a^{\vee})k}.$$

D'autre part, il résulte de (V 3) que U' est normalisé par u, u' et u'', donc par m. Par suite

$$m^{-1}\mathrm{U}_{b, \ell}m = (m^{-1}\mathrm{U}_b m) \cap \mathrm{U}' = \mathrm{U}_{r(b)} \cap \mathrm{U}' = \mathrm{U}_{r(b), \ell - kb(a^{\vee})}$$

d'où

(1) $$(m.\varphi)_b(x) = \varphi_{r(b)}(m^{-1}xm) = \varphi_b(x) - kb(a^{\vee}) \qquad (x \in \mathrm{U}_b).$$

Prenons maintenant $b = -a$. Comme $u'' = u^{-1}m(m^{-1}u'^{-1}m)$, on a

$$\varphi_a(m^{-1}u'm) = \varphi_a(m^{-1}u'^{-1}m) = -\varphi_{-a}(u'') = k = \varphi_{-a}(u') + 2k.$$

Vu (V 2) et la relation $a(a^{\vee}) = 2$, on en conclut que

(2) $$(m.\varphi)_{-a}(x) = \varphi_a(m^{-1}xm) = \varphi_{-a}(x) - k(-a)(a^{\vee}) \qquad (x \in \mathrm{U}_{-a}).$$

Utilisant de manière analogue la relation $u' = (mu''^{-1}m^{-1})mu^{-1}$, on voit que

(3) $$(m.\varphi)_a(x) = \varphi_a(x) - ka(a^{\vee}) \qquad (x \in \mathrm{U}_a).$$

Compte tenu de (V 4), les relations (1), (2) et (3) montrent que $m.\varphi = \varphi - ka^{\vee}$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire **(6.2.8).** — *Soient* φ *et* ψ *deux valuations de la donnée radicielle* $(\mathrm{T}, (\mathrm{U}_a))$. *Si* $\varphi_a = \psi_a$ *pour tout* $a \in \Pi$, *alors* $\varphi = \psi$.

On a ${}^{\varphi}\mathrm{M}_{a,k} = {}^{\psi}\mathrm{M}_{a,k}$ pour tout $a \in \Pi$ et tout $k \in \mathbf{R}$. Soit $b \in \Phi^{\text{réd}}$. Il existe $w \in {}^v\mathrm{W}$ tel que $c = w^{-1}(b) \in \Pi$. D'autre part, il existe une suite $a_1, \ldots, a_p$ d'éléments de Π telle que $w = r_{a_1} \ldots r_{a_p}$. Choisissons, pour $i = 1, \ldots, p$, un élément $k_i \in \Gamma_{a_i}$ et un élément $m_i \in {}^{\varphi}\mathrm{M}_{a_i, k_i} = {}^{\psi}\mathrm{M}_{a_i, k_i}$ et posons $m = m_1 \ldots m_p$. La proposition précédente montre alors que

$$\varphi_b(u) - \varphi_c(mum^{-1}) = \psi_b(u) - \psi_c(mum^{-1}) \qquad (u \in \mathrm{U}_b),$$

ce qui prouve notre assertion.

Corollaire **(6.2.9)**. — *Soient* $a, b \in \Phi$ *telles que* $b \notin \mathbf{R}a$ *et* $b-a \notin \Phi$, *et soient* $\Psi = \Phi \cap (\mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b)$ *le sous-système de racines qu'ils engendrent,* $a = a_1, a_2, \ldots, a_s = b, a_{s+1}, \ldots, a_{2s}$ *les éléments de* $\Psi^{\text{réd}}$ *rangés en « ordre circulaire » (cf.* (6.1.8)), $u \in \mathrm{U}_a$, $u' \in \mathrm{U}_b$ *et* $(u, u') = u_2 \ldots u_{s-1}$ *avec* $u_i \in \mathrm{U}_{a_i}$. *Alors, si* $i, p, q \in \mathbf{N}$ *sont tels que* $2 \leqslant i \leqslant s-1$ *et* $a_i = pa + qb$, *on a*

$$\varphi_{a_i}(u_i) = p\varphi_a(u) + q\varphi_b(u').$$

Nous pouvons évidemment supposer que $u \neq 1 \neq u'$. En vertu de (6.1.8), on a alors $u_2 = m(u) . u' . m(u)^{-1}$ et, appliquant la proposition (6.2.7) pour $n = m(u)$, on trouve que

$$(1) \qquad \varphi_{a_2}(u_2) = \varphi_b(u') - b(a^\vee) . \varphi_a(u).$$

Comme $a_2 = r_a(b) = b - b(a^\vee) . a$, ceci établit notre assertion pour $i = 2$.

Supposons à présent que $i > 2$ et raisonnons par récurrence sur i. Soit $u'' \in \mathrm{U}^*_{-a}$ défini par $u \in \mathrm{U}_a \mathrm{M}_a u''$. Vu l'axiome (V 5 *bis*) des valuations (6.2.2), on a

$$(2) \qquad \varphi_{-a}(u'') = -\varphi_a(u).$$

D'autre part, il résulte de (6.1.8) que $(u_2^{-1}, u'') = u_3 \ldots u_{s-1} u'$. Mais

$$a_i = pa + qb = qa_2 - (p + q . b(a^\vee)) . (-a).$$

On a donc, vu l'hypothèse de récurrence et compte tenu des relations (1) et (2),

$$\varphi_{a_i}(u_i) = q . \varphi_{a_2}(u_2) - (p + q . b(a^\vee)) . \varphi_{-a}(u'') = p\varphi_a(u) + q\varphi_b(u'),$$

c.q.f.d.

Proposition **(6.2.10)**. — *Soit* A *l'espace affine des valuations équipollentes à* φ.

(i) A *est stable sous l'action de* N. *Pour* $n \in \mathrm{N}$, *l'application* $\nu(n) : \psi \to n . \psi$ *de* A *dans lui-même est un automorphisme de l'espace euclidien* A, *dont l'image canonique dans* Aut V *est égale à* ${}^v\nu(n)$.

(ii) *Pour tout* $a \in \Phi$ *et tout* $k \in \Gamma_a$, *l'image par* ν *d'un élément de* $\mathrm{M}_{a,k}$ *est la réflexion orthogonale* $r_{a,k}$ *par rapport à l'hyperplan* $\partial\alpha_{a,k} = \{x \in \mathrm{A} \mid a(x - \varphi) + k = 0\}$.

(iii) *Pour tout* $n \in \mathrm{N}$ *et tout* $\alpha \in \Sigma$, *on a* $\nu(n)(\alpha) \in \Sigma$ *et* $n\mathrm{U}_\alpha n^{-1} = \mathrm{U}_{\nu(n)(\alpha)}$.

Vu (6.2.5) (1), la proposition (6.2.7) montre que $n . \mathrm{A} = \mathrm{A}$ pour tout n appartenant au sous-groupe N' de N engendré par les $\mathrm{M}_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$. Comme $\mathrm{N} = \mathrm{N'T}$, il suffit donc pour établir (i) de montrer que $t . \mathrm{A} = \mathrm{A}$ pour tout $t \in \mathrm{T}$. Soient alors $\psi \in \mathrm{A}$, $a \in \Phi$ et choisissons $k \in \Gamma_a$ et $n \in \mathrm{M}_{a,k}$. Comme n et tn appartiennent à M_a, on déduit aussitôt de (V 2) qu'il existe une constante $c(t, a)$ telle que

$$(t . \psi)_a(u) = \psi_a(u) + c(t, a) \qquad \text{pour } u \in \mathrm{U}_a.$$

Mais il existe un élément $v \in \mathrm{V}$ et un seul tel que $a(v) = c(t, a)$ pour tout $a \in \Pi$ et on a $(t . \psi)_a = (\psi + v)_a$ pour tout $a \in \Pi$, d'où $t . \psi \in \mathrm{A}$ et $t . \mathrm{A} = \mathrm{A}$ d'après (6.2.8). Compte tenu encore une fois de (6.2.5) (1), ceci démontre (i).

Si $m \in M_{a,k}$, alors ${}^v\nu(m) = r_a$ et la proposition (6.2.7) montre que

$$m.\left(\varphi - \frac{1}{2}ka^{\vee}\right) = \varphi - \frac{1}{2}ka^{\vee},$$

d'où (ii).

Enfin, soit $\alpha = \alpha_{a,k} \in \Sigma$ ($a \in \Phi$, $k \in \Gamma_a$), et soient $n \in N$, $w = {}^v\nu(n)$. La relation $u \in n U_\alpha n^{-1}$ équivaut à $u \in U_{w(a)}$ et $(n.\varphi)_{w(a)}(u) \geqslant -k$, ou encore à $u \in U_{w(a)}$ et

$$\varphi_{w(a)}(u) \geqslant -k + w(a)(n.\varphi - \varphi)$$

c'est-à-dire à $u \in U_\beta$ avec

$$\begin{aligned}\beta &= \{\psi \in A \mid w(a)(\psi - \varphi) + k - w(a)(n.\varphi - \varphi) \geqslant 0\}\\ &= \{\psi \in A \mid w(a)(\psi - n.\varphi) + k \geqslant 0\}\\ &= \{\psi \in A \mid a(n^{-1}.\psi - \varphi) + k \geqslant 0\} = \nu(n)(\alpha)\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

(6.2.11) On pose $H = \nu^{-1}(1)$ et $\hat{W} = \nu(N)$ et on désigne par W le sous-groupe de $\hat{W}$ engendré par les réflexions $r_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \Gamma_a$. Comme N permute les $M_{a,k}$, c'est un sous-groupe distingué de $\hat{W}$.

Posons $N' = \nu^{-1}(W)$, $T' = T \cap N'$ et soit G' le sous-groupe de G engendré par N' et les U_a pour $a \in \Phi$. Comme $M_a \cap N' \neq \emptyset$ pour $a \in \Phi$, on voit aisément que $(T', (U_a))$ est une donnée radicielle génératrice de type Φ dans G', pour laquelle le groupe N de (6.1.2) (10) n'est autre que N'.

Remarques **(6.2.12)**. — *a)* Soit $\Phi = \bigcup_i \Phi_i$ la décomposition de Φ en composantes irréductibles. Il est clair que $\varphi_i = (\varphi_a)_{a \in \Phi_i}$ est une valuation de la donnée radicielle $(T \cap G_i^0, (U_a)_{a \in \Phi_i})$ du groupe G_i^0 défini en (6.1.5). D'autre part, à la décomposition de Φ correspond une décomposition canonique de A en produit d'espaces affines A_i sous l'espace vectoriel dual du sous-espace engendré par Φ_i (cf. (1.3.9)). Il est clair que l'action de N est compatible avec cette décomposition en produit de A et que W se décompose en produit direct des groupes W_i définis à partir de G_i^0 et φ_i comme W l'a été à partir de G et φ. Ceci permet souvent de se ramener au cas où Φ est irréductible.

b) Soient $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, $u \neq 1$. Il résulte de (V 5) et de (6.2.10) (ii) que *la valuation $\varphi_a(u)$ est l'unique nombre réel k tel que $\nu(m(u))$ soit la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $\partial\alpha_{a,k}$.* On voit donc que φ est complètement déterminée par la donnée de l'homomorphisme $\nu : N \to \operatorname{Aut} A$. Plus précisément, soient A_0 un espace affine sous V, ν_0 un homomorphisme de N dans Aut A_0 dont le composé avec l'homomorphisme canonique de Aut A_0 dans Aut V est égal à ${}^v\nu$, et φ_0 un point de A_0. Pour *a* et *u* comme ci-dessus, $\nu_0(m(u))$ est une réflexion orthogonale par rapport à un hyperplan de A_0, de la forme $\{x \in A_0 \mid a(x - \varphi_0) + k = 0\}$ (avec $k \in \mathbf{R}$), puisque ${}^v\nu_0(m(u)) = r_a$.

Posons alors $\psi_a(u) = k$ et $\psi_a(1) = \infty$. Il est clair que, s'il existe une valuation φ de $(T, (U_a))$ et un isomorphisme j de ${}^\varphi A$ sur A_0 tel que $j(\varphi) = \varphi_0$ et $\nu_0(n) = j\nu(n)j^{-1}$ pour tout $n \in N$, alors on a $\varphi_a = \psi_a$ pour tout $a \in \Phi$.

Il est d'ailleurs immédiat que la famille $\psi=(\psi_a)$ satisfait toujours aux conditions (V 2), (V 4) et (V 5); la condition (V 0) est satisfaite dès que $\nu_0(T)$ engendre V. Pour s'assurer que ψ est bien une valuation, il ne reste plus qu'à vérifier les conditions (V 1) et (V 3). Il est possible que (V 1) suffise à entraîner que ψ est une « quasi-valuation » de (T, (U_a)), c'est-à-dire que, pour une famille ψ du type considéré ici, (V 1) entraîne la condition (V 3 *bis*) de (6.2.3) *e)*.

Application. — Soit K un corps et soit $G=SL_2(K)$; reprenons les notations de (6.1.3) *a)* et supposons que la donnée radicielle (T, (U_a, U_{-a})) soit munie d'une valuation φ. Quitte à remplacer φ par une valuation équipollente, on peut supposer que $\varphi_a\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0$. Pour $x\in K^*$, soit $\omega(x)\in\mathbf{R}$ tel que $\nu\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\right)=\omega(x)a^\vee$. On définit ainsi un homomorphisme $\omega: K^*\to\mathbf{R}$. Prolongeons ω à K tout entier en posant $\omega(0)=\infty$. Alors, ω *est une valuation non impropre de* K. En effet, vu (6.1.3) (1) et (6.2.10) (ii), $\nu\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est la réflexion par rapport à φ; par suite, pour $u\in K^*$,

$$\nu\left(\begin{pmatrix}0 & u\\ -u^{-1} & 0\end{pmatrix}\right)=\nu\left(\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^{-1}\end{pmatrix}\right)\circ\nu\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

est la réflexion par rapport à $\varphi+(1/2)\omega(u)a^\vee$. Utilisant une nouvelle fois (6.1.3) (1) et (6.2.10) (ii), on voit que $\varphi_a\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\omega(u)$ pour tout $u\in K$. La condition (V 1) montre alors que $\omega(u+v)\geqslant\inf(\omega(u),\omega(v))$ pour $u, v\in K$, donc que ω est une valuation de K, et (V 0) montre que ω n'est pas impropre.

Compte tenu de (6.2.3) *a)*, on voit donc que *les classes d'équipollence de valuations de la donnée radicielle « canonique » de* $SL_2(K)$ *correspondent bijectivement aux valuations non impropres de* K. Ce résultat sera généralisé en 10.2.

c) Supposons Φ *irréductible* et soit ψ une autre valuation de la donnée radicielle (T, (U_a)). *S'il existe* $a\in\Phi$ *tel que* $\varphi_a=\psi_a$, *alors les valuations* φ *et* ψ *sont équipollentes.* En effet, on se ramène aussitôt au cas où $a\in\Pi\cup 2\Pi$ et où, pour tout $b\in\Pi$, il existe un élément $u_b\in U_b$ tel que $\varphi_b(u_b)=\psi_b(u_b)=0$. D'après *b)*, il suffit de montrer que, dans ces conditions et après identification de $\varphi+V$ et de $\psi+V$ avec V de telle sorte que φ et ψ s'identifient à 0, on a ${}^\varphi\nu={}^\psi\nu$. Soit N_0 le groupe engendré par les $m(u_b)$. On a $N=N_0.T$ et il est clair que ${}^\varphi\nu\,|\,N_0={}^\psi\nu\,|\,N_0$ puisque ${}^\varphi\nu(m(u_b))$ comme ${}^\psi\nu(m(u_b))$ est la réflexion $r_{b,0}$. Il suffit donc de montrer que ${}^\varphi\nu(t)={}^\psi\nu(t)$ pour tout $t\in T$. Or, on a $a({}^\varphi\nu(t))=a({}^\psi\nu(t))$ puisque $\varphi_a=\psi_a$. Si $m\in N_0$ et $c={}^v\nu(m)^{-1}(a)$, on a

$$c({}^\varphi\nu(t))=a({}^v\nu(m)({}^\varphi\nu(t)))=a({}^\varphi\nu(mtm^{-1}))$$

et une formule semblable pour $c({}^\psi\nu(t))$, d'où $c({}^\varphi\nu(t))=c({}^\psi\nu(t))$ pour tout $t\in T$ et tout $c\in{}^v\nu(N_0)(a)$. Mais, puisque Φ est irréductible, les transformés de a par ${}^v\nu(N_0)={}^vW$ engendrent l'espace vectoriel V^*, ce qui achève de démontrer notre assertion.

d) Si $a, b \in \Phi$, *il existe une application* $g : U_a \to U_b$ *telle qu'on ait, pour toute valuation* φ *de la donnée radicielle* $(T, (U_c)_{c \in \Phi})$,

$$\varphi_b(g(u)) = -b(a^\vee) \cdot \varphi_a(u) + c^{te} \qquad (u \in U_a)$$

(la constante dépendant évidemment de φ).

Il suffit en effet de choisir arbitrairement un élément $u_0 \in U^*_{r_a(b)}$ et de poser

$$g(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u = 1 \\ m(u) \cdot u_0 \cdot m(u)^{-1} & \text{si} \quad u \neq 1. \end{cases}$$

(6.2.13) Nous allons maintenant étudier les ensembles Γ_a et Γ'_a définis en (6.2.2). Si $0 \in \Gamma_a$, on note $\widetilde{\Gamma}_a$ le sous-groupe de $\mathbf{R}$ engendré par Γ_a.

Définition. — On dit que la valuation φ *est* spéciale *si, pour toute racine* $a \in \Phi^{réd}$, *on a* $0 \in \Gamma_a$.

Proposition **(6.2.14)**. — *Pour que* φ *soit spéciale, il faut et il suffit que* 0 *appartienne à* Γ_a *pour tout* $a \in \Pi$. *On a alors* $\Gamma'_{w(b)} = \Gamma'_b$ *pour tout* $w \in {}^vW$ *et tout* $b \in \Phi$.

En effet, (6.2.7) entraîne que, pour $a, b \in \Phi$, on a

(1) $$\Gamma'_{r_a(b)} \supset \Gamma'_b - b(a^\vee)\Gamma_a.$$

En particulier, $\Gamma'_{r_a(b)} \supset \Gamma'_b$ dès que $0 \in \Gamma_a$. Comme les r_a pour $a \in \Pi$ engendrent ${}^vW$ et que toute racine est transformée d'une racine appartenant à $\Pi \cup 2\Pi$ par un élément de ${}^vW$, ceci entraîne la proposition.

Corollaire **(6.2.15)**. — *Il existe une valuation spéciale équipollente à* φ, *et même une valuation* ψ *équipollente à* φ *telle que* $0 \in \Gamma_a = \Gamma'_a$ *pour toute racine a appartenant à l'ensemble* Φ^{nm} *des racines non multipliables.*

Il suffit de prendre $\psi = \varphi + v$, avec $-a(v) \in \Gamma_a$ pour tout $a \in (\Pi \cup 2\Pi) \cap \Phi^{nm}$.

Corollaire **(6.2.16)**. — *Soit* $b \in \Phi$. *On a* $\Gamma'_{-b} = -\Gamma'_b$. *Si* $0 \in \Gamma_b$, *on a* $\Gamma'_b = \Gamma'_{-b} = \Gamma'_b + 2\widetilde{\Gamma}_b$. *Si de plus* Γ'_b *est un sous-ensemble discret de* $\mathbf{R}$ *et si* $0 \in \Gamma'_b$, *alors* Γ'_b *est un sous-groupe de* $\mathbf{R}$ *isomorphe à* $\mathbf{Z}$.

Les deux premières assertions résultent de (6.2.14) et de (6.2.14) (1) où l'on remplace a par b. Si de plus Γ'_b est discret et contient 0, alors $2\widetilde{\Gamma}_b$ est contenu dans Γ'_b, donc est un groupe discret, isomorphe à $\mathbf{Z}$ vu (V 0). Les relations $2\widetilde{\Gamma}_b \subset \Gamma'_b = \Gamma'_b + 2\widetilde{\Gamma}_b \subset \widetilde{\Gamma}_b$ entraînent alors $\Gamma'_b = \widetilde{\Gamma}_b$ ou $\Gamma'_b = 2\widetilde{\Gamma}_b$.

Exemple **(6.2.17)**. — Soit $\widetilde{\Gamma}$ un sous-groupe de $\mathbf{R}$ tel que $\widetilde{X} = \widetilde{\Gamma}/2\widetilde{\Gamma}$ soit un espace vectoriel de dimension >1 sur le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Soit X un système générateur de $\widetilde{X}$, contenant 0 et différent de $\widetilde{X}$ tout entier et soit Γ l'image réciproque de X dans $\widetilde{\Gamma}$. Alors Γ n'est pas un groupe, mais contient 0 et est stable par addition d'un élément de $2\widetilde{\Gamma}$, et $\widetilde{\Gamma}$ est le groupe engendré par Γ : il est d'ailleurs facile de voir que nous venons de décrire tous les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ possédant ces propriétés.

D'autre part, soit k un corps de caractéristique 2 et soit K_0 l'algèbre du groupe $\widetilde{\Gamma}$ à coefficients dans k. Notons $(X^\gamma)_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}}$ la base canonique de K_0. On obtient une valuation ω de K_0 à valeurs dans $\widetilde{\Gamma}$ en posant

$$(1) \qquad \omega(\sum_\gamma a_\gamma X^\gamma) = \inf\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}.$$

Le complété K de K_0 pour cette valuation est un corps, parfois appelé « corps des séries formelles sur k à exposants dans $\widetilde{\Gamma}$ ». Les éléments de K sont les séries $\sum_\gamma a_\gamma X^\gamma$ telles que, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, l'ensemble des $\gamma\leqslant\lambda$ tels que $a_\gamma\neq 0$ est fini; la valuation ω se prolonge à K et (1) reste valable.

Soit alors L le sous-ensemble de K formé des séries $\sum_\gamma a_\gamma X^\gamma$ telles que $a_\gamma = 0$ pour $\gamma\notin\Gamma$. On voit aussitôt que L est un sous-K^2-espace vectoriel de K, contenant K^2, mais n'est pas un sous-corps de K, bien que $x\in L$, $x\neq 0$, entraîne $x^{-1}=(x^{-2})x\in L$.

Soit enfin G le sous-ensemble de $SL_2(K)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ telles que les produits ab, ac, bd et cd appartiennent à L. On vérifie aisément que G est un *sous-groupe* de $SL_2(K)$. Reprenons alors les notations de (6.2.3) *a)* : il est immédiat que $(T\cap G, (U_a\cap G))$ est une donnée radicielle dans G et que $\psi = (\varphi_a \mid U_a\cap G)$ en est une valuation pour laquelle on a $\Gamma_a = \Gamma'_a = \Gamma$.

On voit donc que (6.2.16) est « le meilleur résultat possible » dans le cas général.

Proposition **(6.2.18)**. — *On suppose φ spéciale. Soient a et b deux racines non orthogonales.*

(i) *Si a et b sont de même longueur et $a\neq\pm b$, on a $\Gamma_a = \Gamma'_a = \Gamma_b$ et Γ_a est un groupe.*

(ii) *Si $(b\mid b) = 2(a\mid a)$ et si $0\in\Gamma'_a$, on a $\Gamma_b + 2\widetilde{\Gamma}_a \subset \Gamma_b = \Gamma'_b$ et $\Gamma'_a + \widetilde{\Gamma}_b \subset \Gamma'_a$.*

(iii) *Si $(b\mid b) = 3(a\mid a)$, on a $\Gamma_b + 3\Gamma_a \subset \Gamma_b = \Gamma'_b \subset \Gamma_a = \Gamma'_a$ et Γ_a et Γ_b sont des groupes.*

Sous l'hypothèse de (i), on a $2a\notin\Phi$, donc $\Gamma_a = \Gamma'_a$ et $a(b^\vee) = b(a^\vee) = \pm 1$. Quitte à remplacer b par $-b$, on peut supposer que $a(b^\vee) = -1$. Alors, $a+b$ est une racine de même longueur que a et b et on a $\Gamma_{a+b} = \Gamma_a = \Gamma_b$ (6.2.14). D'autre part, (6.2.14) (1) entraîne que $\Gamma_{a+b} \supset \Gamma_a + \Gamma_b$, d'où (i).

Sous l'hypothèse de (ii), on a $2b\notin\Phi$, donc $\Gamma_b = \Gamma'_b$; de plus, quitte à remplacer b par $-b$, on peut supposer que $b(a^\vee) = 2a(b^\vee) = -2$ et (ii) résulte alors de (6.2.14) (1) appliqué aux couples (a, b) et (b, a).

Sous l'hypothèse de (iii), le système de racines engendré par a et b est de type G_2 et il existe une racine c de même longueur que a (resp. b) et non orthogonale à a (resp. b). Donc $\Gamma_a = \Gamma'_a$ et $\Gamma_b = \Gamma'_b$ sont des groupes d'après (i) et le reste de (iii) se démontre comme (ii).

Proposition **(6.2.19)**. — *Si φ est spéciale, le groupe* W (resp. $\hat{W}$) *est produit semi-direct du stabilisateur de φ par le sous-groupe* $W\cap V$ (resp. $\hat{W}\cap V$) *des translations de* W (resp. $\hat{W}$). *De plus,* $W\cap V$ *est le groupe engendré par les translations $ka^\vee$, avec $a\in\Phi^{\text{réd}}$ et $k\in\widetilde{\Gamma}_a$.*

Si φ est spéciale, on a $M_{a,0}\neq\varnothing$ pour toute $a\in\Phi^{\text{réd}}$, d'où $r_{a,0}\in W$. L'image dans ${}^vW$

du stabilisateur de φ est donc ${}^v\mathrm{W}$ tout entier, d'où la première assertion. La deuxième résulte de (6.2.14) et de ce que ${}^v\mathrm{W}$ permute les coracines $a^\vee$.

Proposition **(6.2.20)**. — *Supposons φ spéciale. On a*

$$\mathrm{W} \cap \mathrm{V} = \{\sum_a \gamma_a a^\vee \mid a \in \Pi,\ \gamma_a \in \widetilde{\Gamma}_a\}$$
$$\widehat{\mathrm{W}} \cap \mathrm{V} \subset \{\sum_a \gamma_a \varpi_a \mid a \in \Pi,\ \gamma_a \in \widetilde{\Gamma}_a\}$$

où (ϖ_a) désigne la base de V *duale de la base* Π *de* V^* *(poids fondamentaux de* $(\Phi^{\text{réd}})^\vee$*).*

Pour toute racine $b \in \Phi^{\text{réd}}$, on a $b^\vee = \sum_{a \in \Pi} n_{b,a} a^\vee$ avec $n_{b,a} \in \mathbf{Z}$. De plus, il est bien connu que $n_{b,a}$ est pair (resp. multiple de 3) dès que $(a \mid a) = 2(b \mid b)$ (resp. $(a \mid a) = 3(b \mid b)$). La première assertion résulte alors de (6.2.14), (6.2.18) et (6.2.19).

Soit maintenant $v \in \widehat{\mathrm{W}} \cap \mathrm{V}$. Comme W est distingué dans $\widehat{\mathrm{W}}$, on a $v r_{a,0} v^{-1} r_{a,0} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ pour tout $a \in \Pi$, d'où $v - r_a(v) = a(v) a^\vee \in \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$, ce qui démontre la deuxième relation.

Définition **(6.2.21)**. — *On dit que φ est* discrète *si Γ_a est un sous-ensemble discret de* **R** *pour tout $a \in \Phi$.*

Nous avons déjà vu (6.2.16) que si φ est discrète et si $0 \in \Gamma'_a$, alors Γ'_a est un groupe isomorphe à **Z**.

Proposition **(6.2.22)**. — *L'ensemble $\Phi' = \{a \in \Phi \mid \Gamma'_a \neq \emptyset\}$ est un système de racines contenant Φ^{nm}. Supposons φ discrète. Alors* W *est un groupe de Weyl affine, Σ est le système de racines affines correspondant et $\mathscr{E}$ est un échelonnage de Φ' par Σ.*

La première assertion est immédiate. Supposons φ discrète. Quitte à la remplacer par une valuation équipollente, on peut la supposer spéciale. Chaque $\widetilde{\Gamma}_a$ (pour $a \in \Phi'$) est alors un groupe de la forme $e_a\mathbf{Z}$ avec $e_a > 0$ (6.2.16) et $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ est d'après (6.2.20) un réseau dans V. Comme W est engendré par des réflexions orthogonales, il en résulte que W est un groupe de Weyl affine ([5], chap. VI, § 2, n° 5, prop. 8). De plus, les réflexions $r_{a,k}$ pour $a \in \Phi'$ et $k \in \Gamma'_a$ forment un système générateur de W, invariant par automorphismes intérieurs. Par suite, ce sont toutes les réflexions de W ([5], chap. V, § 3, n° 2, cor. au th. 1) et Σ est exactement le système de racines affines associé à W. Que $\mathscr{E}$ soit un échelonnage de Φ' par Σ au sens de (1.4.1) est alors évident.

(6.2.23) Supposons Φ irréductible et φ discrète, telle que $0 \in \Gamma'_a$ pour tout $a \in \Phi^{\text{nm}}$ (6.2.15). On voit alors facilement qu'il existe un nombre réel $e > 0$ et un seul tel que l'une et une seulement des conditions suivantes soit réalisée (les notations sont celles de 1.4) :

1) L'échelonnage $\mathscr{E}$ est de type A_n $(n \geqslant 1)$, B_n $(n \geqslant 3)$, C_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4 ou G_2, on a $\Phi' = e.{}^v\Sigma$ et $\Gamma_a = \Gamma'_a = \mathbf{Z}e$ pour tout $a \in \Phi'$.

2) $\mathscr{E}$ est de type B-C_n $(n \geqslant 3)$, C-B_n $(n \geqslant 2)$ ou $\mathrm{F}_4^{\mathrm{I}}$ (resp. $\mathrm{G}_2^{\mathrm{I}}$), Φ' est le système de racines obtenu en multipliant les racines courtes de ${}^v\Sigma$ par $e\sqrt{2}$ (resp. $e\sqrt{3}$) et les

racines longues de ${}^v\Sigma$ par e; on a $\Gamma_a=\Gamma'_a=\mathbf{Z}e$ si a est une racine courte de Φ' et $\Gamma_a=\Gamma'_a=2\mathbf{Z}e$ (resp. $3\mathbf{Z}e$) si a est une racine longue de Φ'.

3) $\mathscr{E}$ est de type B-BC$_n$ ($n\geqslant 3$), $\Phi'=\Phi$ est de type BC$_n$, on a $\Phi^{\text{réd}}=e.{}^v\Sigma$, $\Gamma'_a=\mathbf{Z}e$ pour $a\in\Phi^{\text{réd}}$ et $\Gamma_a=\Gamma'_a=2\mathbf{Z}e$ pour $a\in\Phi-\Phi^{\text{réd}}$.

4) $\mathscr{E}$ est de type C-BC$_n^{\mathrm{X}}$ ($n\geqslant 1$) avec X = I, II, III ou IV, $\Phi'=\Phi$ est de type BC$_n$, $\Phi^{\text{nm}}=e.{}^v\Sigma$, on a $\Gamma'_a=\Gamma_a=\mathbf{Z}e$ pour $a\in\Phi^{\text{réd}}\cap\Phi^{\text{nm}}$; pour $a\in\Phi^{\text{réd}}\cap\frac{1}{2}\Phi$, on a

si X = I	$\Gamma'_a=(1/2)\mathbf{Z}e$	$\Gamma_{2a}=2\mathbf{Z}e$
si X = II	$\Gamma'_a=(1/2)\mathbf{Z}e$	$\Gamma_{2a}=\mathbf{Z}e$
si X = III	$\Gamma'_a=\mathbf{Z}e+\frac{1}{2}e$	$\Gamma_{2a}=2\mathbf{Z}e$
si X = IV	$\Gamma'_a=\mathbf{Z}e$ ou $\mathbf{Z}e+\frac{1}{2}e$	$\Gamma_{2a}=\mathbf{Z}e$.

Remarques **(6.2.24)**. — 1) Si $\mathscr{E}$ est de type C-BC$_n^{\mathrm{IV}}$, on peut, en remplaçant φ par une valuation équipollente, se ramener au cas où $\Gamma'_a=\mathbf{Z}e$ pour $a\in\Phi^{\text{réd}}\cap\frac{1}{2}\Phi$.

2) On voit que la donnée de $\mathscr{E}$ détermine Φ' et le système des Γ'_a à une constante multiplicative près (et à une « translation » près sur les Γ'_a); de même, la donnée de Φ' et des Γ'_a détermine $\mathscr{E}$.

6.3. Lemmes relatifs au rang un.

On conserve les hypothèses et notations de 6.2 (voir (6.2.4)). Nous allons démontrer des résultats qui ne font intervenir qu'une racine $a\in\Phi$ et ses multiples entiers (positifs ou négatifs) et qui expriment donc en fait des propriétés des données radicielles valuées de rang un. Ces résultats seront généralisés en 6.4 : les lemmes (6.3.2), (6.3.3), (6.3.6), (6.3.9) et (6.3.11) sont des cas particuliers de la proposition (6.4.9) et le lemme (6.3.7) est un cas particulier de la proposition (6.4.28), compte tenu de (6.4.25).

Lemme **(6.3.1)**. — *Soient $a\in\Phi$, $u\in \mathrm{U}_a$ et $u'\in\mathrm{U}_{-a}$ tels que $\varphi_a(u)+\varphi_{-a}(u')>0$. Il existe un triplet $(u_1, t, u'_1)\in\mathrm{U}_a\times\mathrm{T}\times\mathrm{U}_{-a}$ et un seul tel que $u'u=u_1tu'_1$. De plus, on a $t\in\mathrm{H}$, $\varphi_a(u_1)=\varphi_a(u)$ et $\varphi_{-a}(u'_1)=\varphi_{-a}(u')$.*

On ne peut avoir $u'u\in\mathrm{M}_a\mathrm{U}_{-a}$ car on aurait alors $u\in u'^{-1}\mathrm{M}_a\mathrm{U}_{-a}$ et $\varphi_a(u)+\varphi_{-a}(u')=0$ d'après (V 5). L'existence de (u_1, t, u'_1) résulte alors de (6.1.2) (7) et son unicité de (DR 6). Pour démontrer le reste du lemme, il suffit de traiter le cas $u\neq 1$, $u'\neq 1$, ce que nous supposons désormais. On a alors $u_1\neq 1$ et il existe $u'_2, u'_3\in\mathrm{U}_{-a}$ et $m\in\mathrm{M}_a$ tels que $u_1=u'_2mu'_3$, avec $\varphi_{-a}(u'_2)=-\varphi_a(u_1)$. On a alors

$$u=(u'^{-1}u'_2).mt.(t^{-1}u'_3tu'_1)\in\mathrm{U}_{-a}mt\mathrm{U}_{-a}$$

d'où $\varphi_a(u) = -\varphi_{-a}(u'^{-1}u'_2)$ puisque $mt \in M_a$. Il s'ensuit que

$$\varphi_{-a}(u'^{-1}u'_2) < \varphi_{-a}(u') = \varphi_{-a}(u'^{-1}).$$

Par conséquent $\varphi_{-a}(u'^{-1}u'_2) = \varphi_{-a}(u'_2)$ et

$$\varphi_a(u) = -\varphi_{-a}(u'_2) = \varphi_a(u_1).$$

En remplaçant a par $-a$, u par u'^{-1} et u' par u^{-1}, on obtient l'égalité $\varphi_{-a}(u'_1) = \varphi_{-a}(u')$.

Enfin, m et mt appartiennent tous deux à $M_{a,k}$ avec $k = \varphi_a(u) = \varphi_a(u_1)$; on a donc $\nu(t) = \nu(m^{-1}mt) = r^2_{a,k} = 1$ et $t \in H$.

Lemme **(6.3.2)**. — *Soient* $a \in \Phi$, $k, \ell \in \widetilde{\mathbf{R}}$ *avec* $k + \ell > 0$. *Le produit* $U_{a,k}HU_{-a,\ell}$ *est un groupe.*

Cela résulte de (6.3.1) puisque H normalise tous les U_α.

Lemme **(6.3.3)**. — *Soient* $a \in \Phi$, $k \in \Gamma_a$ *et* $m \in M_{a,k}$. *Soit* $U_{-a,-k+}$ *le sous-groupe réunion des* $U_{-a,\ell}$ *pour* $\ell > -k$. *Alors*

$$L_{a,k} = (U_{a,k}.H.U_{-a,-k+}) \cup (U_{a,k}.mH.U_{a,k})$$

est le groupe engendré par $H \cup U_{a,k} \cup U_{-a,-k}$.

Comme $M_{a,k} \subset U_{a,k}U_{-a,-k}U_{a,k}$, il est clair que $L_{a,k}$ est contenu dans le groupe engendré par H, $U_{a,k}$ et $U_{-a,-k}$, groupe qui est aussi engendré par H, $U_{a,k}$ et m puisque $mU_{a,k}m^{-1} = U_{-a,-k}$ d'après (6.2.10). Compte tenu de (6.3.1), on a

$$L_{a,k}H = L_{a,k}U_{a,k} = L_{a,k}$$

et il suffit de démontrer que $L_{a,k}m \subset L_{a,k}$. Comme

$$U_{a,k}HU_{-a,-k}m = U_{a,k}mHU_{a,k}$$

il suffit de montrer que $U_{a,k}mHU_{a,k}m = U_{a,k}HU_{-a,-k}$ est contenu dans $L_{a,k}$. Mais, vu (6.2.2) (3), on a

$$U_{-a,-k} \subset U_{-a,-k+} \cup U_{a,k}mHU_{a,k}$$

d'où le lemme.

Remarque **(6.3.4)**. — Soit $a \in \Phi$ et soit T_a l'image réciproque par ν du groupe des translations de vecteur proportionnel à $a^\vee$. Soit L'_a le groupe engendré par U_a et U_{-a} et soit L''_a le groupe engendré par L'_a et T_a. Posons $T'_a = L'_a \cap T_a$. Soit $k \in \Gamma_a$ et soit $m \in M_{a,k}$. On a :

(1) $$L'_a = U_aT'_a \cup U_amT'_aU_a$$

(2) $$L''_a = U_aT_a \cup U_amT_aU_a.$$

En effet, on a $mT_a = T_am = T_am^{-1}$, puisque $\nu(m)$ est la réflexion $r_{a,k}$. Par suite

$$U_amT_aU_am = U_aT_aU_{-a} \subset U_aT_a \cup (\bigcup_{r \in \Gamma_a} U_aT_aM_{a,r}U_a).$$

Mais $T_aM_{a,r} = mT_a$ et ceci montre que le second membre de (2) est stable par multiplication à droite par U_a, T_a et m, d'où l'on déduit aussitôt qu'il est égal à L''_a. Enfin, (1) résulte immédiatement de (2).

(6.3.5) Soient $r, s \in \mathbf{R}$, avec $r+s>0$, et soient $u \in \varphi_a^{-1}(r)$ et $u' \in \varphi_{-a}^{-1}(s)$. Posons $u = u'_1 m u'_2$ et $u' = u_1 m' u_2$, avec $m \in \mathrm{M}_{a,r}$, $m' \in \mathrm{M}_{-a,s}$, $u'_i \in \mathrm{U}_{-a,-r}$ et $u_i \in \mathrm{U}_{a,-s}$. Nous allons évaluer le commutateur $(u', u) = u'uu'^{-1}u^{-1}$. On a

(1) $$(u', u) \in u_1 . m'(u_2, u)m'^{-1} . m'um'^{-1} . \mathrm{U}_a$$

(2) $$(u', u) \in \mathrm{U}_{-a} . mu'^{-1}m^{-1} . m(u', u'_2)m^{-1} . u'^{-1}_1.$$

Vu (6.2.10), on a

$$m'um'^{-1} \in \mathrm{U}_{-a, r+2s} \quad \text{et} \quad mu'^{-1}m^{-1} \in \mathrm{U}_{a, s+2r}.$$

Supposons maintenant que u appartienne à U_{2a}. On a alors $(u_2, u) = 1$ et on déduit de (1) que

$$(u', u) \in \mathrm{U}_{a,-s} . \mathrm{U}_{-a, r+2s} . \mathrm{U}_a$$

d'où vu (6.3.2), la relation

(3) $$(u', u) \in \mathrm{U}_{-a, r+2s} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_a.$$

D'autre part, on a également $u'_2 \in \mathrm{U}_{-2a}$, d'où $(u', u'_2) = 1$, et on déduit de même de (2) la relation

(4) $$(u', u) \in \mathrm{U}_{-a} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a, 2r+s}.$$

Vu (DR 6), les deux relations (3) et (4) entraînent « par intersection » la relation

(5) $$(u', u) \in \mathrm{U}_{-a, r+2s} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a, 2r+s}$$

et il est immédiat que (5) *reste valable pour* $u \in \mathrm{U}_{2a, 2r}$ *et* $u' \in \mathrm{U}_{-a, s}$.

Lemme **(6.3.6)**. — *Soient $k, \ell \in \mathbf{R}$ tels que $k+\ell>0$. Le produit*

$$\mathrm{U}_{-a, \ell} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a, k} . \mathrm{U}_{2a, k-\ell}$$

est un groupe.

Il est clair que ce produit est stable par multiplication à gauche par $\mathrm{U}_{-a,\ell}$, H et $\mathrm{U}_{a,k}$ (vu (6.3.2)). Il l'est aussi par multiplication à gauche par un élément u de $\mathrm{U}_{2a, k-\ell}$: en effet, pour $u' \in \mathrm{U}_{-a,\ell}$, on a, vu (6.3.5) (5)

$$uu' = u'(u'^{-1}, u)u \in u' \mathrm{U}_{-a, 2\ell + (1/2)(k-\ell)} \mathrm{H} \mathrm{U}_{a,k} u$$

et $2\ell + (1/2)(k-\ell) > \ell$.

Lemme **(6.3.7)**. — *Soient $k, \ell \in \mathbf{R}$ avec $k+\ell>0$.*

(i) *Si* $u \in \mathrm{U}_{a,k}$ *et* $u' \in \mathrm{U}_{-a,\ell}$, *on a*

$$(u', u) \in \mathrm{U}_{-2a, k+3\ell} . \mathrm{U}_{-a, k+2\ell} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a, 2k+\ell} . \mathrm{U}_{2a, 3k+\ell}.$$

(ii) *Si* $u \in \mathrm{U}_{2a, 2k}$ *et* $u' \in \mathrm{U}_{-a,\ell}$, *on a*

$$(u', u) \in \mathrm{U}_{-2a, 2k+4\ell} . \mathrm{U}_{-a, 2k+3\ell} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a, 2k+\ell}.$$

Démontrons (i). On peut supposer $u \neq 1 \neq u'$. Posons $r = \varphi_a(u)$ et $s = \varphi_{-a}(u')$ et reprenons les notations de (6.3.5). On a $(u_2, u) \in \mathrm{U}_{2a, r-s}$ et $m'(u_2, u)m'^{-1} \in \mathrm{U}_{-2a, r-s+4s}$ et la relation (6.3.5) (1) entraîne

$$(u', u) \in \mathrm{U}_{a,-s} . \mathrm{U}_{-2a, r+3s} . \mathrm{U}_{-a, r+2s} . \mathrm{U}_a$$

d'où, compte tenu du lemme (6.3.6),

$$(u', u) \in U_{-2a, k+3\ell} . U_{-a, k+2\ell} . H . U_a .$$

On démontre de même en utilisant (6.3.5) (2) que

$$(u', u) \in U_{-a} . H . U_{a, 2k+\ell} . U_{2a, 3k+\ell}$$

d'où (i) (vu (DR 6)).

Si de plus $u \in U_{2a}$, on déduit de (6.3.5) (1), compte tenu des relations $(u_2, u) = 1$ et $m' u m'^{-1} \in U_{-2a, 2r+4s}$, que $(u', u) \in U_{a, -s} U_{-2a, 2r+4s} U_a$, d'où vu (6.3.6),

$$(u', u) \in U_{-2a, 2k+4\ell} . U_{-a, 2k+3\ell} . H . U_a .$$

D'autre part, (6.3.5) (5) entraîne

$$(u', u) \in U_{-a, k+2\ell} . H . U_{a, 2k+\ell}$$

d'où (ii).

(6.3.8) Soient $a \in \Phi$, $u \in U_a$, $v \in U_{-a}$. Par abus de langage, on dit que *le commutateur* (v, u) *admet une* H-*composante* s'il existe $h \in H$ tel que $(v, u) \in U_{-a} h U_a$ et cet élément $h \in H$ (qui est alors unique d'après (DR 6)) est appelé *la* H-*composante du commutateur* (v, u).

Lemme **(6.3.9)**. — *Soient* $k, k', \ell, \ell' \in \mathbf{R}$ *tels que* $k' \leqslant 2k$, $\ell' \leqslant 2\ell$, $k \leqslant k' + \ell$, $\ell \leqslant \ell' + k$, $k' + \ell' > 0$. *Pour* $u \in U_{a, k} \cup U_{2a, k'}$ *et* $u' \in U_{-a, \ell} \cup U_{-2a, \ell'}$, *le commutateur* (u', u) *admet une* H-*composante. Si* X *désigne le groupe engendré par les* H-*composantes de ces commutateurs, alors le groupe engendré par* $U_{-2a, \ell'} \cup U_{-a, \ell} \cup U_{a, k} \cup U_{2a, k'}$ *est le produit*

$$U_{-2a, \ell'} . U_{-a, \ell} . X . U_{a, k} . U_{2a, k'} .$$

La première assertion résulte immédiatement des hypothèses faites sur k, k', ℓ et ℓ' et du lemme (6.3.2). Pour démontrer la seconde, il suffit de montrer que le produit considéré est stable par multiplication à gauche par chacun de ses facteurs, ce qui résulte aisément de (6.3.7) et de la relation $uv = v(v^{-1}, u)u$.

Remarque **(6.3.10)**. — Le lemme (6.3.9) entraîne en particulier que les produits envisagés en (6.3.7) (i) et (ii) sont des groupes et contiennent donc respectivement les groupes des commutateurs $(U_{a, k}, U_{-a, \ell})$ et $(U_{2a, 2k}, U_{-a, \ell})$.

Lemme **(6.3.11)**. — *Soit* $a \in \Phi$ *tel que* $2a \in \Phi$ *et soient* $k, k' \in \mathbf{R}$ *avec* $k' \in \Gamma_{2a}$ *et* $k' < 2k$. *Soit* $m \in M_{2a, k'}$ *et posons*

$$L_{a, k, k'} = (U_{2a, k'} U_{a, k} H U_{-a, k-k'} U_{-2a, -k'+}) \cup (U_{2a, k'} U_{a, k} m H U_{a, k} U_{2a, k'}) .$$

Alors $L_{a, k, k'}$ *est le sous-groupe engendré par* $U_{2a, k'} \cup U_{a, k} \cup H \cup U_{-2a, -k'}$.

On peut supposer $k' = 0$. Compte tenu de la relation $m U_{a, k} m^{-1} = U_{-a, k}$ et de (6.3.9), on voit, en raisonnant comme en (6.3.3), qu'il suffit de montrer que $L_{a, k, 0} m \subset L_{a, k, 0}$ et même que $m H U_{a, k} U_{2a, 0} m = H U_{-a, k} U_{-2a, 0}$ est contenu dans $L_{a, k, 0}$. Comme on a évidemment $H U_{-a, k} U_{-2a, 0+} \subset L_{a, k, 0}$, il suffit de montrer que $H U_{-a, k} u \subset L_{a, k, 0}$

pour $u\in\varphi_{2a}^{-1}(0)$. On a alors $u\in U_{2a,0}HmU_{2a,0}$. D'après (6.3.9) (où l'on prend $k'=0$, $\ell=k$ et $\ell'=2k$), on a $HU_{-a,k}U_{2a,0}\subset U_{2a,0}U_{a,k}HU_{-a,k}$, d'où

$$HU_{-a,k}u\subset U_{2a,0}U_{a,k}HU_{-a,k}mU_{2a,0}=U_{2a,0}U_{a,k}HmU_{a,k}U_{2a,0}\subset L_{a,k,0}$$

ce qui achève la démonstration.

6.4. Les groupes U_f. Valuations prolongées.

On conserve les notations de 6.2 et 6.3.

(6.4.1) Soit $\widetilde{\mathbf{R}}$ la réunion de $\mathbf{R}\times\{0,1\}$ et d'un élément noté ∞ n'appartenant pas à $\mathbf{R}\times\{0,1\}$. Munissons $\widetilde{\mathbf{R}}$ de la loi d'opération suivante : pour $r,s\in\mathbf{R}$, on pose

$$\begin{aligned}
&(r,0)+(s,0)=(r+s,0)\\
&(r,0)+(s,1)=(s,1)+(r,0)=(r+s,1)\\
&(r,1)+(s,1)=(r+s,1)\\
&(r,0)+\infty\quad=(r,1)+\infty=\infty+(r,0)=\infty+(r,1)=\infty.
\end{aligned}$$

Munissons également $\widetilde{\mathbf{R}}$ de la relation d'ordre suivante : pour $r,s\in\mathbf{R}$, les relations $(r,0)\leqslant(s,0)$, $(r,0)\leqslant(s,1)$ et $(r,1)\leqslant(s,1)$ sont équivalentes à $r\leqslant s$, la relation $(r,1)\leqslant(s,0)$ est équivalente à $r<s$ et on a $u\leqslant\infty$ quel que soit $u\in\widetilde{\mathbf{R}}$. On vérifie immédiatement que ceci fait de $\widetilde{\mathbf{R}}$ un *monoïde commutatif totalement ordonné* et que l'application $r\mapsto(r,0)$ est un isomorphisme de monoïdes ordonnés de $\mathbf{R}$ sur un sous-monoïde de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Nous identifierons désormais un élément $r\in\mathbf{R}$ et son image $(r,0)$ et nous noterons $r+$ l'élément $(r,1)$ de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Notons que l'on a $r+=\mathrm{Inf}\{s\in\mathbf{R}\mid s>r\}$. Pour $t\in\mathbf{R}_+^*$ et $r\in\mathbf{R}$, on pose $t(r+)=(tr)+$. Pour $r\in\widetilde{\mathbf{R}}$, on pose $0r=0$.

D'autre part, on voit aisément que toute partie minorée de $\widetilde{\mathbf{R}}$ admet une borne inférieure et que toute partie non vide de $\widetilde{\mathbf{R}}$ admet une borne supérieure.

Nous étendrons alors la définition de $U_{a,k}$ pour $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$ (et $a\in\Phi$) en posant comme en (6.3.3)

$$U_{a,r+}=\bigcup_{s\in\mathbf{R},\,s>r}U_{a,s}$$

pour $r\in\mathbf{R}$.

(6.4.2) Ce paragraphe est consacré à l'étude de certains sous-groupes de G généralisant les sous-groupes notés P_Ω et U_Ω au § 5.2 : en (5.2.30), U_Ω a été défini, pour $\Omega\subset\mathbf{A}$, comme le groupe engendré par les U_α pour $\alpha\supset\Omega$. Autrement dit, dans le cas de l'exemple (6.2.3) *e)*, U_Ω est engendré par les $U_{a,f_\Omega(a)}$, où la fonction $f_\Omega:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ est définie par

$$f_\Omega(a)=\inf\{k\in\mathbf{R}\mid\Omega\subset\alpha_{a,k}\}\qquad(a\in\Phi). \tag{1}$$

Quant à P_Ω, il est égal à $H.U_\Omega$.

La généralisation est alors immédiate : soit f une application de Φ dans le monoïde $\widetilde{\mathbf{R}}$.

Dans toute la suite de ce travail, nous noterons U_f *le sous-groupe de* G *engendré par la réunion des sous-groupes* $U_{a,f(a)}$ *pour* $a \in \Phi$. De plus, nous poserons :

$$U_f^+ = U^+ \cap U_f, \qquad U_f^- = U^- \cap U_f, \qquad H_f = H \cap U_f, \qquad N_f = N \cap U_f,$$
$$U_{f,a} = U_a \cap U_f \quad (\text{pour } a \in \Phi).$$

Lorsque $a \in \Phi$ et $2a \notin \Phi$, il sera parfois commode d'attribuer une valeur à $f(2a)$: sauf mention expresse du contraire, nous prendrons $f(2a) = 2f(a)$. Rappelons que nous avons déjà fait la convention $U_{2a,k} = \{1\}$ dans ce cas pour $k \in \mathbf{R}$; nous l'étendons évidemment à $k \in \widetilde{\mathbf{R}}$.

Nous désignons par $U_f^{(a)}$ le sous-groupe engendré par la réunion des $U_{ia,f(ia)}$ pour $i \in \{\pm 1, \pm 2\}$ et nous posons, pour $a \in \Phi$:

$$N_f^{(a)} = N \cap U_f^{(a)} \quad \text{et} \quad H_f^{(a)} = H \cap U_f^{(a)}.$$

Il est clair que les sous-groupes U_f, H_f et N_f sont normalisés par H. Par suite, *pour tout sous-groupe* X *de* H, *le produit* $X.U_f$ *est un groupe*; en particulier, les sous-groupes $P_f = H.U_f$ sont la généralisation naturelle des sous-groupes P_Ω du § 5.

(6.4.3) Si Ω est une partie non vide de A, la fonction f_Ω définie par (6.4.2) (1) est « concave » au sens suivant :

Définition. — Une fonction $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ (resp. $f : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$) *est dite* concave *si, quelle que soit la famille finie* (a_i) *d'éléments de* Φ (resp. $\Phi \cup \{0\}$) *telle que* $\sum_i a_i \in \Phi$ (resp. $\sum_i a_i \in \Phi \cup \{0\}$), *on a*

(C) $$f(\sum_i a_i) \leqslant \sum_i f(a_i).$$

(6.4.4) Notons que toute fonction linéaire, c'est-à-dire de la forme $a \mapsto \lambda(a)$ avec $\lambda \in V$, est évidemment concave : elle coïncide d'ailleurs avec la fonction f_Ω où $\Omega \subset A$ est la partie réduite au point de A correspondant à λ dans l'identification de V avec A obtenue par le choix de l'origine φ dans A. Cependant, toute fonction concave, même à valeurs dans $\mathbf{R}$, n'est pas nécessairement de la forme f_Ω pour une partie $\Omega \subset A$. D'ailleurs, les résultats que nous allons établir au sujet des groupes U_f s'appliqueront à des fonctions plus générales que les fonctions concaves (cf. (6.4.8)).

Proposition **(6.4.5)**. — *Pour qu'une fonction* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *soit concave, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

(C 1) $$f(a) + f(b) \geqslant f(a+b) \quad \textit{pour } a, b, a+b \in \Phi;$$

(C 2) $$f(a) + f(-a) \geqslant 0 \quad \textit{pour } a \in \Phi.$$

Que (C 1) et (C 2) soient nécessaires est évident. Supposons-les réalisées et soient $a_1, \ldots, a_n \in \Phi$ telles que $a = \sum_i a_i \in \Phi$. Montrons par récurrence sur n que $f(a) \leqslant \sum_i f(a_i)$: cela résulte de (C 1) pour $n \leqslant 2$. Si $n > 2$, il existe un indice $j \in [1, n]$ tel que le produit scalaire $(a \mid a_j)$ soit positif, de sorte que $a - a_j$ ou bien est nul, ou bien est une racine a'.

Dans le premier cas, choisissons un indice $k\in[1, n]$ avec $k\neq j$; on a alors, vu l'hypothèse de récurrence et (C 2),

$$\sum_i f(a_i) = \Big(\sum_{i\neq j,k} f(a_i)\Big) + f(a_k) + f(a_j) \geqslant f(-a_k) + f(a_k) + f(a_j) \geqslant f(a_j) = f(a).$$

Dans le second cas, en appliquant l'hypothèse de récurrence à la famille $(a_i)_{i\neq j}$, on obtient :

$$\sum_i f(a_i) \geqslant f(a') + f(a_j) \geqslant f(a)$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition **(6.4.6).** — *Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction concave et soit* $g : \Phi \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction majorant f. Posons*

$$f_0 = \inf\Big(\sum_i t_i f(a_i)\Big)$$

où la borne inférieure est étendue à l'ensemble des couples formés d'une famille finie (a_i) *d'éléments de* Φ *et d'une famille finie* (t_i) *de nombres réels positifs telles que* $\sum_i t_i a_i = 0$ *et que* $\sum_i t_i = 1$. *Alors, on a* $f_0 \geqslant 0$ *et pour tout nombre réel* $c \leqslant f_0$, *il existe une forme linéaire* λ *sur* V^* *telle que la restriction de* $\lambda + c$ *à* Φ *soit majorée par f. De plus, si* $f(a) + f(-a) > 0$ *pour tout* $a \in \Phi$, *on a* $f_0 > 0$ *et il existe* $\mu \in V$ *et* $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, *tels que la restriction de* $\mu + k$ *à* Φ *soit majorée par g.*

Soit (a_i) une famille finie non vide d'éléments de Φ. Comme Φ engendre un sous-espace vectoriel sur le corps des rationnels de dimension égale à la dimension de V^*, les familles (t_i) de nombres rationnels telles que $\sum_i t_i a_i = 0$ sont denses dans l'ensemble des familles (t_i) de nombres réels telles que $\sum_i t_i a_i = 0$. Pour montrer que $f_0 \geqslant 0$, il suffit donc de montrer qu'une relation $\sum_i t_i a_i = 0$ entraîne $\sum_i t_i f(a_i) \geqslant 0$ dès que les t_i sont des nombres rationnels positifs, ou même seulement des entiers positifs. Autrement dit, on est ramené à montrer que, si (a_i) est une famille finie non vide d'éléments de Φ telle que $\sum_i a_i = 0$, alors on a $\sum_i f(a_i) \geqslant 0$. Choisissons un indice i_0; on a alors

$$(1) \qquad \sum_i f(a_i) = \Big(\sum_{i\neq i_0} f(a_i)\Big) + f(a_{i_0}) \geqslant f(-a_{i_0}) + f(a_{i_0}) \geqslant 0$$

d'après (C) et (C 2).

Pour démontrer l'existence de λ, il suffit de montrer que l'intersection des demi-espaces $L_a = \{x \in V \mid a(x) + c \leqslant f(a)\}$ pour $a \in \Phi$ et $f(a) < \infty$ n'est pas vide. Or on sait ([4], chap. II, § 2, exerc. 21) que, pour que l'intersection d'une famille finie $\mathscr{F}$ de parties convexes d'un espace vectoriel réel de dimension n soit non vide, il suffit que l'intersection de toute sous-famille de $n+1$ éléments de $\mathscr{F}$ soit non vide. De plus, si les éléments de $\mathscr{F}$ sont des demi-espaces, l'application répétée de ce résultat montre qu'il suffit que l'intersection de toute sous-famille finie composée de $r+1$ demi-espaces telle que les formes linéaires correspondantes forment un système de rang r (avec $1 \leqslant r \leqslant n$), soit non vide. Autrement dit, il nous suffit de vérifier que, si $a_1, \ldots, a_r$ sont des racines linéairement indépendantes et si $a_{r+1} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} t_i a_i \in \Phi$ (avec $t_i \in \mathbf{R}$), alors $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant r+1} L_{a_i}$ est non vide. Or, si cette intersection était vide, cela signifierait que les relations $a_i(x) \leqslant f(a_i) - c$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ entraînent $\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} t_i a_i(x) > f(a_{r+1}) - c$. Ceci n'est possible que si $t_i \leqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Pour $a \in \Phi$ avec $f(a) < \infty$, soit $f^-(a) \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = f^-(a)$ ou $f^-(a)+$. Choisissons $x \in A$ tel que $a_i(x) + c = f^-(a_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, ce qui est loisible puisque les a_i sont indépendantes. Par définition de f_0, on a :

$$f^-(a_{r+1}) - \sum_i t_i f^-(a_i) \geqslant (1 - \sum_i t_i) c$$

d'où $a_{r+1}(x) + c = \sum_i t_i f^-(a_i) + (1 - \sum_i t_i) c \leqslant f^-(a_{r+1}) \leqslant f(a_{r+1})$, ce qui achève la démonstration de l'existence de λ.

Supposons maintenant $f(a) + f(-a) > 0$ pour tout $a \in \Phi$. Vu (1), on a $f_0 \geqslant 0+$ et il existe $\lambda \in V$ tel que $f \geqslant \lambda$. Comme f est concave, l'ensemble Ψ des $a \in \Phi$ telles que $f(a) = \lambda(a)$ est une partie close de Φ telle que $\Psi \cap (-\Psi) = \emptyset$. Il existe donc $\nu \in V$ telle que $\nu(a) > 0$ pour $a \in \Psi$ ([5], chap. VI, § 1, nº 7, prop. 22). Posons $h = \inf\{g(a) - \lambda(a) \mid a \notin \Psi\}$, $d = \sup\{\nu(a) \mid a \in \Phi\}$ et $\delta = \inf\{\nu(a) \mid a \in \Psi\} > 0$. Alors g majore la restriction à Φ de la fonction $\alpha h + \lambda - \beta\nu$ dès que les nombres réels α, $\beta > 0$ satisfont aux inégalités $\alpha h/\delta \leqslant \beta \leqslant (1-\alpha)/d$.

Proposition **(6.4.7)**. — *Soit $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ une fonction concave. Alors, f possède les deux propriétés suivantes :*

(QC 1) *Pour toute racine $a \in \Phi$, on a*

$$U_f^{(a)} = U_{-2a, f(-2a)} \cdot U_{-a, f(-a)} \cdot U_{a, f(a)} \cdot U_{2a, f(2a)} \cdot N_f^{(a)}.$$

(QC 2) *Si $a, b \in \Phi$ ne sont pas proportionnelles, le groupe des commutateurs $(U_{a, f(a)}, U_{b, f(b)})$ est contenu dans le groupe engendré par les $U_{pa+qb, f(pa+qb)}$ pour $p, q \in \mathbf{N}^*$ et $pa + qb \in \Phi$.*

(QC 2) résulte de l'axiome (V 3) des valuations (6.2.1), compte tenu de la condition (C) qui entraîne $f(pa+qb) \leqslant pf(a) + qf(b)$ pour $a, b, pa+qb \in \Phi$ avec $p, q \in \mathbf{N}^*$.

Démontrons (QC 1). Puisque f est concave, on a, vu (C 1), les relations $f(-2a) \leqslant 2f(-a)$, $f(2a) \leqslant 2f(a)$, $f(a) \leqslant f(2a) + f(-a)$ et $f(-a) \leqslant f(-2a) + f(a)$; de ces relations et de (C 2), on tire

$$0 \leqslant f(2a) + f(-2a) \leqslant 2(f(a) + f(-a)).$$

Si $f(2a) + f(-2a) > 0$, la propriété (QC 1) résulte immédiatement de (6.3.9) (qui montre de plus que $N_f^{(a)} = H_f^{(a)}$). Si $f(a) + f(-a) = 0$, il résulte des relations précédentes que $f(2a) = 2f(a)$ et $f(-2a) = 2f(-a)$ et $U_f^{(a)}$ est engendré par $U_{a, f(a)} \cup U_{-a, f(-a)}$; la propriété (QC 1) résulte alors aussitôt de (6.3.3) si $f(a) \in \Gamma_a$ et de (6.3.2) dans le cas contraire.

Supposons enfin que $f(a) + f(-a) > 0$ et que $f(2a) + f(-2a) = 0$. Pour simplifier les notations, nous supposerons que $f(2a) = f(-2a) = 0$, ce qui est loisible, quitte à remplacer φ par une valuation équipollente. On a alors $k = f(a) = f(-a) > 0$. Si $0 \in \Gamma_{2a}$, (QC 1) résulte de (6.3.11) ; sinon, le groupe $U_f^{(a)}$ est réunion des groupes engendrés par les réunions $U_{-2a,r} \cup U_{-a,k} \cup U_{a,k} \cup U_{2a,0}$ pour $0 < 2r \leqslant k$ et il suffit encore une fois d'appliquer (6.3.9).

Définition **(6.4.8).** — *Une fonction* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *est dite* quasi-concave *si elle satisfait aux conditions* (QC 1) *et* (QC 2) *de* (6.4.7).

Nous venons de voir que toute fonction concave est quasi-concave. Dans certains cas, la réciproque est vraie. Reprenons par exemple les notations de l'exemple (6.2.3) *b)* : G est donc le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique semi-simple connexe $\mathscr{G}$ défini et déployé sur un corps valué K. Supposons de plus que $\mathscr{G}$ est simple. Les relations de commutation de Chevalley entraînent alors que toute fonction quasi-concave est concave, sauf lorsque $\mathscr{G}$ est de type B_n, C_n ou F_4 et que la caractéristique du corps résiduel de K est égale à 2, ou lorsque $\mathscr{G}$ est de type G_2 et que la caractéristique du corps résiduel de K est égale à 2 ou à 3. Dans ces cas d'exceptions, il est facile de construire des fonctions quasi-concaves qui ne sont pas concaves.

Proposition **(6.4.9).** — *Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction quasi-concave.*

(i) $U_{f,a} = U_{a,f(a)} \cdot U_{2a,f(2a)}$ *pour toute* $a \in \Phi$.

(ii) *L'application produit* $\prod_{a \in \Phi^{\pm \text{réd}}} U_{f,a} \to U_f^{\pm}$ *est bijective quel que soit l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs du produit.*

(iii) *On a* $U_f = U_f^- . U_f^+ . N_f$.

(iv) N_f *est le groupe engendré par les* $N_f^{(a)}$ *pour* $a \in \Phi$.

Pour $a \in \Phi$, posons $X_a = U_{a,f(a)} \cdot U_{2a,f(2a)}$. Vu (QC 2) et (6.1.6), le produit des X_a pour $a \in \Phi^{\pm \text{réd}}$ rangés dans un ordre arbitraire est un groupe, que nous noterons $X^{\pm}$. Soit d'autre part Y le groupe engendré par les $N_f^{(a)}$ pour $a \in \Phi$.

Nous allons tout d'abord montrer que le produit $X^- X^+ Y$ est indépendant du choix de la chambre de Weyl D utilisée pour définir Φ^+ et Φ^-. Pour cela, il suffit de faire voir que ce produit ne change pas si l'on remplace D par la chambre $r_a(D)$, où r_a est la réflexion associée à une racine a simple pour D. Désignons alors par X'_a (resp. X'_{-a}) le produit des X_b pour $b \in \Phi^{+\text{réd}}$, $b \neq a$ (resp. $b \in \Phi^{-\text{réd}}$, $b \neq -a$). Vu (QC 2) et (6.1.6), $X'_{\pm a}$ est un groupe et est normalisé par X_a et X_{-a}, donc par le groupe qu'ils engendrent, c'est-à-dire par $U_f^{(a)} = X_{-a} X_a N_f^{(a)}$ ((QC 1)). Par suite, on a

$$\begin{aligned} X^- X^+ Y &= X'_{-a} X_{-a} X_a X'_a Y = X'_{-a} X'_a X_{-a} X_a Y = X'_{-a} X'_a X_a X_{-a} N_f^{(a)} Y \\ &= X'_{-a} X_a X'_a X_{-a} Y \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

Il en résulte aussitôt que $X^- X^+ Y$ est stable par multiplication à gauche par tous les X_a pour $a \in \Phi^{\text{réd}}$, et par suite que

$$U_f = X^- X^+ Y.$$

Soient maintenant $x^+ \in X^+$, $x^- \in X^-$ et $y \in Y$. Si $x^- x^+ y \in U^-$, on a $x^+ y \in U^-$. Comme $Y \subset N$, on en déduit $y = 1$ ((6.1.15) *c)*), d'où $x^+ \in U^+ \cap U^- = \{1\}$ (DR 6). On en conclut que $U_f^- = X^-$ et on montre de même que $U_f^+ = X^+$: ceci démontre (ii), et (i) en résulte par intersection avec U_a. Enfin, si $x^-x^+y \in N$, on a, toujours d'après (6.1.15) *c)*, $y = x^-x^+y$, ce qui démontre (iv), et (iii) résulte alors de la relation $U_f = X^-X^+Y$.

Proposition **(6.4.10)**. — *Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction quasi-concave. Pour* $a \in \Phi$, *posons*

$$f'(a) = \inf\{k \in \Gamma'_a \mid k \geqslant f(a) \quad \text{ou} \quad a/2 \in \Phi \quad \text{et} \quad k \geqslant 2f(a/2)\}.$$

Soit Φ_f *l'ensemble des* $a \in \Phi$ *telles que* $f'(a) + f'(-a) = 0$. *Alors* Φ_f *est un système de racines dans l'espace* V_f^* *qu'il engendre et l'application qui à* $n \in N_f$ *fait correspondre la restriction de* ${}^v\nu(n)$ *à* V_f^* *est un homomorphisme surjectif de* N_f *sur le groupe de Weyl de* Φ_f, *de noyau* H_f.

Vu (6.4.9) (i), on a, pour $a \in \Phi$

$$f'(a) = \inf\{k \in \Gamma'_a \mid U_{a,k} \subset U_f\}.$$

Par suite, la fonction f' est en quelque sorte « covariante » par N_f. Plus précisément, soient $n \in N_f$, $a \in \Phi$ et $b = {}^v\nu(n)(a)$. Alors

$$f'(b) = f'(a) + a(\nu(n)^{-1}(\varphi) - \varphi). \tag{1}$$

Ceci montre en particulier que Φ_f est stable par ${}^v\nu(N_f)$. Il nous suffit donc de démontrer que ${}^v\nu(N_f)$ est engendré par les réflexions r_a pour $a \in \Phi_f$. Vu (6.4.9) (iv), cela résulte du lemme suivant :

Lemme **(6.4.11)**. — *Soient* f *et* f' *comme en* (6.4.10) *et soit* $a \in \Phi$.

(i) *On a* $f'(a) + f'(-a) \geqslant 0$ *et* $2f'(a) + f'(-2a) \geqslant 0$.

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) $N_f^{(a)} \not\subset H$;

b) *il existe* $k \in \mathbf{R}$ *tel que* $\nu(N_f^{(a)}) = \{1, r_{a,k}\} = \{1, r_{2a,2k}\}$;

c) ${}^v\nu(N_f^{(a)}) = \{1, r_a\} = \{1, r_{2a}\}$;

d) *a ou 2a appartient à* Φ_f.

Démontrons tout d'abord l'équivalence de *a)*, *b)* et *c)*. Il est clair que *b)* ou *c)* entraîne *a)*. D'autre part, on sait (6.3.4) que $\nu(N_f^{(a)})$ se compose de réflexions $r_{a,k}$ et de translations $ka^\vee$ avec $k \in \mathbf{R}$. S'il existait $k > 0$ et $n \in N_f^{(a)}$ tels que $\nu(n) = ka^\vee$, on aurait, pour tout entier $p > 0$:

$$n^p U_{a,f(a)} n^{-p} = U_{a,f(a)-2pk} \subset U_f$$

ce qui n'est possible que si $f(a) = \infty$ et on voit de même que l'on aurait $f(2a) = \infty$. Mais ceci est absurde, car cela entraîne $U_{f,a} \subset U_{-a}$ et $N_f^{(a)} = \{1\}$. Par suite, $\nu(N_f^{(a)})$ ne contient que des réflexions (en plus de 1), et ne peut contenir deux réflexions distinctes dont le produit serait une translation non nulle. D'où l'équivalence de *a)*, *b)* et *c)*.

Supposons maintenant $f'(a) + f'(-a) < 0$. Il existe alors $k \in \Gamma'_a$ et $h \in \Gamma'_{-a}$ tels que

$$f'(a) \leqslant k, \quad f'(-a) \leqslant h \quad \text{et} \quad k + h < 0.$$

Le groupe U_f contient alors $U_{a,k} \cup U_{-a,-k}$ et $U_{a,-h} \cup U_{-a,h}$, donc $M_{a,k}$ et $M_{a,-h}$, et $\nu(N_f^{(a)})$ contient les deux réflexions distinctes $r_{a,k}$ et $r_{a,-h}$. Or, nous venons de voir que ceci est impossible, d'où la première assertion de (i). De même, si $2f'(a)+f'(-2a)<0$, il existe $k \in \Gamma'_a$ et $h \in \Gamma'_{-2a}$ tels que $f'(a) \leqslant k$, $f'(-2a) \leqslant h$ et $2k+h<0$ et on voit comme ci-dessus que $\nu(N_f^{(a)})$ contient les deux réflexions distinctes $r_{2a,2k}$ et $r_{2a,-h}$, ce qui achève la démonstration de (i). Remarquons d'ailleurs qu'un raisonnement analogue montre que, si $2f'(a)+f'(-2a)=0$, alors a et $2a \in \Phi_f$.

Si $a \in \Phi_f$, on a $k=f'(a)=-f'(-a) \in \mathbf{R}$ d'après les formules définissant l'addition dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ (6.4.1). Par suite, $k \in \Gamma'_a$ et $M_{a,k} \subset N_f^{(a)}$. On voit de même que si $2a \in \Phi_f$, il existe $k \in \Gamma'_{2a}$ tel que $M_{2a,k} \subset N_f^{(a)}$. Ceci montre que *d)* entraîne *a)*.

Enfin, supposons *a)*, *b)* et *c)* satisfaites. Quitte à remplacer φ par une valuation équipollente, on peut supposer que $r_{a,0} \in \nu(N_f^{(a)})$. D'après (6.4.10) (1), on a alors

$$f'(a)=f'(-a) \quad \text{et} \quad f'(2a)=f'(-2a).$$

Vu (i), il en résulte que $f'(a) \geqslant 0$ et que $f'(2a) \geqslant 0$. Enfin, si $f'(a)$ et $f'(2a)$ étaient tous deux strictement positifs, $U_{f,a}$ serait contenu dans la réunion des groupes engendrés par $U_{a,r} \cup U_{-a,-r}$ pour $r \in \mathbf{R}$, $r>0$ et on aurait $N_f^{(a)} \subset H$ d'après (6.3.2), ce qui contredit *c)*. Par suite, *d)* est bien satisfaite.

La démonstration du lemme et celle de la proposition (6.4.10) sont achevées.

Remarques **(6.4.12)**. — *a)* Conservons les notations de (6.4.10). Pour $a \in \Phi$, posons

$$f''(a)=\inf\{k \in \Gamma_a \mid k \geqslant f(a) \quad \text{ou} \quad a/2 \in \Phi \quad \text{et} \quad k \geqslant 2f(a/2)\}.$$

On a $f''(a) \leqslant f'(a)$ et $f''(a)=f'(a)$ si $\Gamma'_a=\Gamma_a$, par exemple si $2a \notin \Phi$. On montre exactement comme ci-dessus que (6.4.11) (i) est aussi valable pour f'', autrement dit que l'on a, pour $a \in \Phi$:

(1) $$f''(a)+f''(-a) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2f''(a)+f''(-2a) \geqslant 0.$$

D'autre part, il est clair que $U_f=U_{f''}$. Par contre, on n'a pas toujours $U_f=U_{f'}$. Plus précisément, pour $a \in \Phi$, on a

(2) $$U_{a,f'(a)} \cdot U_{2a,f'(2a)} \subset U_{f,a} \subset U_{a,\inf\{f'(a),\frac{1}{2}f'(2a)\}}$$

la première inclusion étant une égalité dès que $\Gamma'_a \neq \emptyset$.

b) Supposons φ discrète et reprenons les notations de (6.2.22) *sqq*. Soit Ω une partie de l'espace affine A et considérons la fonction concave f_Ω et le groupe $U_\Omega=U_{f_\Omega}$ correspondants (6.4.2). Il est immédiat que, pour tout $a \in \Phi$, $f'_\Omega(a)$ est le plus petit nombre réel k tel que le demi-espace $\alpha_{a,k}=\{x \in A \mid a(x-\varphi)+k \geqslant 0\}$ soit une racine affine du système Σ associée à a par l'échelonnage $\mathscr{E}$ et contenant Ω. Par suite, *le système de racines* $\Phi_\Omega=\Phi_{f_\Omega}$ *se compose des racines* $a \in \Phi$ *pour lesquelles il existe* $k \in \mathbf{R}$ *tel que* $(\alpha_{a,k}, a) \in \mathscr{E}$ *et que* $\Omega \subset \partial\alpha_{a,k}$.

Supposons en particulier que Ω soit une facette F de A. Alors, Φ_F est exactement le système de racines attaché à F par $\mathscr{E}$ au sens de (1.4.2) et, d'après (1.4.5) *c), le graphe de Dynkin de* Φ_F *s'obtient en supprimant du graphe de Dynkin de l'échelonnage* $\mathscr{E}$ *les sommets n'appartenant pas au type* X *de* F.

(6.4.13) Dans ce qui suit, nous allons définir certains sous-groupes distingués de H et étudier l'intersection H_f de H avec un sous-groupe U_f. Soit $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$; nous désignerons par $H_{(k)}$ l'ensemble des $h\in H$ tels que

$$(h, U_{a,r}) = \{(h, u) \mid u\in U_{a,r}\} \subset U_{a,r+k}.U_{2a,2r+k}$$

pour tout $a\in\Phi$ et tout $r\in\mathbf{R}$ (ou $r\in\widetilde{\mathbf{R}}$). On vérifie immédiatement que les $H_{(k)}$ forment une famille décroissante de sous-groupes distingués de H, et même de N. On a $H_{(k)}=H$ pour $k\leqslant 0$ et $H_{(\infty)}$ est, compte tenu de (6.1.13), le centralisateur du sous-groupe de G engendré par les U_a pour $a\in\Phi$.

(6.4.14) Soit toujours $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$. Nous allons définir un autre sous-groupe, noté $H_{[k]}$, de H. Pour $k\leqslant 0$, $H_{[k]}$ est le sous-groupe engendré par la réunion des intersections avec H des sous-groupes engendrés par $U_{a,r}\cup U_{-a,-r}$ pour $a\in\Phi$ et $r\in\mathbf{R}$. Pour $0<k<\infty$, $H_{[k]}$ est le sous-groupe engendré par les H-composantes (6.3.8) des commutateurs (u, u') et (u', u) avec $u\in U_{a,r}$ et $u'\in U_{-a,s}$, $r+s=k$, ou bien $u\in U_{a,r}$ et $u'\in U_{-2a,s}$, $2r+s=k$ (pour a décrivant Φ). Ici encore, les $H_{[k]}$ forment une famille décroissante de sous-groupes distingués de H, et même de N. Enfin, on pose $H_{[\infty]}=\bigcap_k H_{[k]}$.

(6.4.15) Il n'est pas impossible que la condition

(Pr) $$H_{[k]}\subset H_{(k)} \quad \text{pour tout } k\in\widetilde{\mathbf{R}}$$

soit toujours satisfaite. Nous verrons plus loin qu'elle l'est dans des cas très généraux, par exemple dès que toutes les composantes irréductibles de Φ sont de rang >1, et aussi dans le cas des groupes algébriques semi-simples sur un corps local.

Remarquons que les $H_{[k]}$ sont contenus dans le groupe G' engendré par les U_a pour $a\in\Phi$. Par suite, si $H_{[\infty]}\subset H_{(\infty)}$, alors $H_{[\infty]}$ est contenu dans le centre de G'.

Exemples **(6.4.16)**. — *a)* Reprenons les notations de (6.2.3) *a)* ($G=SL_2(K)$), et soit $k>0$. On voit aisément que $H_{(k)}$ se compose des matrices $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y\end{pmatrix}\in SL_2(K)$ avec $\omega(xuy^{-1}-u)\geqslant\omega(u)+k$ pour tout $u\in K$, et que $H_{[k]}$ est engendré par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & ux^{-1}u^{-1}\end{pmatrix}$ avec $x, u\in K^*$ et $\omega(x-1)\geqslant k$. On en déduit aussitôt que la condition (Pr) est satisfaite. Si K est commutatif, on a

$$H_{(k)}=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\middle| x\in K^* \quad\text{et}\quad \omega(x^2-1)\geqslant k\right\}$$

$$H_{[k]}=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\middle| x\in K^* \quad\text{et}\quad \omega(x-1)\geqslant k\right\}.$$

b) Reprenons maintenant les notations de (6.2.3) *b)* (G est donc le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique semi-simple connexe $\mathscr{G}$ défini et déployé sur le corps valué commutatif K). Soit $k>0$. On vérifie immédiatement que

$$\mathrm{H}_{(k)}=\{t\in\mathrm{T}\mid\omega(a(t)-1)\geqslant k \text{ pour tout } a\in\Phi\}.$$

D'autre part, $\mathrm{H}_{[k]}$ est engendré par les images par les différents homomorphismes ζ_a (pour $a\in\Phi^+$) des sous-groupes analogues de $\mathrm{SL}_2(\mathrm{K})$. Or, si $a, b\in\Phi$ et $x\in\mathrm{K}^*$, on a $b\left(\zeta_a\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\right)\right)=x^{n_{a,b}}$, avec $n_{a,b}=2\dfrac{(b\mid a)}{(a\mid a)}$, ce qui montre que $\mathrm{H}_{[k]}\subset\mathrm{H}_{(k)}$.

Supposons de plus $\mathscr{G}$ simplement connexe et soit P le groupe des poids de $\mathscr{G}$. On sait que l'application qui à $t\in\mathrm{T}$ fait correspondre l'application $p\mapsto p(t)$ de P dans K^* est un isomorphisme de T sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{P},\mathrm{K}^*)$. Pour $a\in\Phi$, $p\in\mathrm{P}$ et $x\in\mathrm{K}^*$, on a $p\left(\zeta_a\left(\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x^{-1}\end{pmatrix}\right)\right)=x^n$ avec $n\in\mathbf{Z}$, d'où l'on tire que $\omega(p(t)-1)\geqslant k$ pour tout $t\in\mathrm{H}_{[k]}$. Inversement, soit $(p_a)_{a\in\Pi}$ la famille des poids fondamentaux associés à la base Π de Φ. On a

$$t=\prod_{a\in\Pi}\zeta_a\left(\begin{pmatrix}p_a(t) & 0\\ 0 & p_a(t)^{-1}\end{pmatrix}\right)\qquad(t\in\mathrm{T})$$

d'où l'on déduit que

$$\mathrm{H}_{[k]}=\{t\in\mathrm{T}\mid\omega(p(t)-1)\geqslant k \text{ pour tout poids } p\in\mathrm{P}\}.$$

Si $\mathscr{G}$ n'est pas simplement connexe, $\mathrm{H}_{[k]}$ est l'image canonique du sous-groupe correspondant du revêtement simplement connexe de $\mathscr{G}$.

Proposition **(6.4.17)**. — *Soit* $f:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction quasi-concave. Posons*

$$d(f)=\inf_{a\in\Phi}(\inf(f(a)+f(-a), f(-2a)+2f(a))).$$

Le groupe $\mathrm{H}_f=\mathrm{H}\cap\mathrm{U}_f$ *est contenu dans* $\mathrm{H}_{[d(f)]}$. *De plus,* H_f *est engendré par les* $\mathrm{H}_f^{(a)}=\mathrm{H}\cap\mathrm{N}_f^{(a)}=\mathrm{H}\cap\mathrm{U}_f^{(a)}$ *pour* $a\in\Phi$.

Démontrons la dernière assertion. Soit H' le sous-groupe engendré par les $\mathrm{H}_f^{(a)}$. C'est évidemment un sous-groupe distingué de N_f. Soit Δ une base de Φ_f, et soit N_1 le sous-groupe de N_f engendré par les $\mathrm{N}_f^{(a)}\cap\mathrm{M}_a^0$ pour $a\in\Delta$. Vu (6.4.10) et (6.4.9) (iv) on a $\mathrm{N}_f=\mathrm{N}_1\mathrm{H}'$ et (6.1.10) entraîne $\mathrm{H}'=\mathrm{H}_f$.

Pour achever la démonstration de la proposition, il nous suffit donc de montrer que $\mathrm{H}_f^{(a)}\subset\mathrm{H}_{[d(f)]}$ pour tout $a\in\Phi$. Soit $a\in\Phi$; posons, avec les notations de (6.4.12) *a)*,

$$r=\inf(f''(a),\tfrac{1}{2}f''(2a))\qquad\text{et}\qquad s=\inf(f''(-a),\tfrac{1}{2}f''(-2a)).$$

Vu (6.4.12) (1), on a $r+s\geqslant 0$ et $\mathrm{U}_f^{(a)}$ est contenu dans le groupe engendré par $\mathrm{U}_{a,r}$ et $\mathrm{U}_{-a,s}$. On en déduit que $\mathrm{H}_f\subset\mathrm{H}_{[0]}$, d'où le résultat cherché lorsque $d=d(f)\leqslant 0$. Supposons maintenant $d>0$; pour $\varepsilon\in\{\pm1,\pm2\}$, posons

$$r_\varepsilon=\inf\{\textstyle\sum_i f(\varepsilon_i a)\mid\varepsilon_i\in\{\pm1,\pm2\},\ \sum_i\varepsilon_i=\varepsilon\}.$$

Il est facile de voir que

$$r_{-2}\leqslant 2r_{-1}, \qquad r_2\leqslant 2r_1, \qquad r_1\leqslant r_2+r_{-1}, \qquad r_{-1}\leqslant r_{-2}+r_1 \qquad \text{et} \qquad r_2+r_{-2}\geqslant d>0.$$

On peut donc appliquer (6.3.9), qui montre que, si X désigne le groupe engendré par les H-composantes des commutateurs (u, u') pour $u\in U_{a, r_1}\cup U_{2a, r_2}$ et $u'\in U_{-a, r_{-1}}\cup U_{-2a, r_{-2}}$ le produit

$$Y=U_{-2a, r_{-2}}.U_{-a, r_{-1}}.X.U_{a, r_1}.U_{2a, r_2}$$

est un groupe qui contient $U_f^{(a)}$, puisque $r_\varepsilon\leqslant f(\varepsilon a)$. Or, on voit aisément que $r_1+r_{-1}\geqslant d$, $r_2+r_{-2}\geqslant d$, $2r_1+r_{-2}\geqslant d$ et $2r_{-1}+r_2\geqslant d$. Par conséquent $H_f^{(a)}\subset X\subset H_{[d]}$.

(6.4.18) Nous allons maintenant étudier les conditions sous lesquelles un groupe de la forme U_f (ou plus généralement $X.U_f$ avec $X\subset H$) normalise un autre groupe de la même forme. Nous aurons besoin de la notation suivante : si f et g sont deux fonctions sur Φ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{R}}$, on note $J(f, g)$ l'ensemble des triplets (a, ε, η) avec $a\in\Phi$, $\varepsilon, \eta\in\{1, 2\}$ et $\varepsilon g(\eta a)+\eta f(-\varepsilon a)>0$ et on désigne par $H_{f,g}$ le sous-groupe de H engendré par les H-composantes des commutateurs (u', u), avec $u'\in U_{-\varepsilon a, f(-\varepsilon a)}$, $u\in U_{\eta a, g(\eta a)}$ et $(a, \varepsilon, \eta)\in J(f, g)$. Il est immédiat que ce groupe est contenu dans $H_{[k]}$ avec

$$k=d(f, g)=\inf\{\varepsilon g(\eta a)+\eta f(-\varepsilon a)\,|\,(a, \varepsilon, \eta)\in J(f, g)\}.$$

Proposition **(6.4.19)**. — *Soient $f, g:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ deux fonctions quasi-concaves telles que*

(1) $$f(pa+qb)\leqslant pf(a)+qg(b) \quad \textit{pour } p, q\in\mathbf{N}^* \textit{ et } a, b, pa+qb\in\Phi.$$

Soit X *un sous-groupe de* H. *Pour que U_g normalise le groupe $X.U_f$ il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :*

(2) $$(X, U_{g,a})\subset U_{f,a} \quad \textit{pour tout } a\in\Phi;$$

(3) $$H_{f,g}\subset X.U_f.$$

Il est clair que ces conditions sont nécessaires. Supposons-les satisfaites. Il suffit de montrer que le commutateur d'un élément d'un système générateur de U_g avec un élément d'un système générateur de XU_f est contenu dans XU_f. Compte tenu de (2), il suffit donc de montrer que $(U_{a,f(a)}, U_{b,g(b)})\subset XU_f$ pour $a, b\in\Phi$. Si $b\notin-\mathbf{R}_+a$, cela résulte de l'axiome (V 3) des valuations (6.2.1) et de la condition (1). Sinon, il existe $c\in\Phi$ telle que $a=-\varepsilon c$ et $b=\eta c$, avec $\varepsilon, \eta\in\{1, 2\}$; si $(c, \varepsilon, \eta)\in J(f, g)$, l'inclusion à établir résulte de (1) et (3); si $(c, \varepsilon, \eta)\notin J(f, g)$, autrement dit si $\eta f(-\varepsilon c)+\varepsilon g(\eta c)\leqslant 0$, on a, vu la condition (1),

$$f(b)=f(\eta(-\varepsilon c)+(\varepsilon+1)(\eta c))\leqslant\eta f(-\varepsilon c)+(\varepsilon+1)g(\eta c)\leqslant g(\eta c)=g(b)$$

d'où $U_{b,g(b)}\subset U_{b,f(b)}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(6.4.20)**. — *Soient $f, g:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ comme en* (6.4.19). *Supposons de plus que pour tout couple (a, b) de racines telles que $a\in-\mathbf{R}_+b$, l'on ait $g(a)=\infty$ ou $f(b)=\infty$. Alors, U_g normalise U_f.*

En effet, on a alors $H_{f,g}=\{1\}$.

Corollaire **(6.4.21)**. — *Soient* f *et* g *comme en* (6.4.19). *Supposons de plus que* f *et* g *soient infinies sur* Φ^-. *Alors,* U_g *normalise* U_f.

Cela résulte de (6.4.20).

Corollaire **(6.4.22)**. — *Soient* $f, g : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *comme en* (6.4.19). *Posons*

$$r = \sup(\{f(a) - g(a) \mid a \in \Phi\} \cup \{f(2a) - 2g(a) \mid a, 2a \in \Phi\})$$
$$s = \inf(\{f(a) + g(-a) \mid a \in \Phi\} \cup \{f(2a) + 2g(-a), 2f(a) + g(-2a) \mid a, 2a \in \Phi\}).$$

Si X *est un sous-groupe de* H *tel que* $H_{[s]} \subset X \subset H_{(r)}$, *alors* U_g *normalise* $X.U_f$.

On a en effet $H_{f,g} \subset H_{[s]}$ et

$$(H_{(r)}, U_{a,g(a)}) \subset U_{a,g(a)+r} \cdot U_{2a,2g(a)+r} \subset U_{a,f(a)} \cdot U_{2a,f(2a)} \cdot$$

Proposition **(6.4.23)**. — *Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction* concave. *Pour* $a \in \Phi$, *posons*

$$f^*(a) = f(a) \quad \text{si} \quad f(a) + f(-a) > 0$$
$$f^*(a) = f(a) + \quad \text{si} \quad f(a) + f(-a) = 0.$$

Alors la fonction $f^* : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *est concave. Soient de plus* X *un sous-groupe de* H *et* X^* *un sous-groupe distingué de* X, *satisfaisant aux deux conditions* :

$$(1) \qquad H_{f,f^*} \subset X^*;$$

$$(2) \qquad (X^*, U_{f,a}) \subset U_{f^*,a} \quad \text{pour tout } a \in \Phi.$$

Alors, $X^*.U_{f^*}$ *est un sous-groupe distingué de* $X.U_f$.

Enfin, soit $\overline{G}$ *le groupe quotient* $XU_f/X^*U_{f^*}$ *et soient* $\overline{U}_a$ (*pour* $a \in \Phi \cup 2\Phi$) *l'image canonique de* $U_{a,f(a)}$ *dans* $\overline{G}$ *et* $\overline{T}$ *celle de* $X.H_f$. *Le groupe* $\overline{U}_a$ *n'est pas contenu dans* $\overline{U}_{2a}$ *si et seulement si* $a \in \Phi_f$ *et* $(\overline{T}, (\overline{U}_a)_{a \in \Phi_f})$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ_f *dans* $\overline{G}$.

Montrons tout d'abord que, pour $p, q \in \mathbf{N}^*$, $a, b, pa + qb \in \Phi$, on a

$$(3) \qquad f^*(pa + qb) \leqslant pf(a) + qf^*(b).$$

En effet, si (3) n'est pas satisfaite, on a nécessairement les relations suivantes, puisque $f(pa + qb) \leqslant pf(a) + qf(b)$:

$$f^*(pa+qb) \neq f(pa+qb) \quad \text{donc} \quad f(pa+qb) = -f(-pa-qb) \in \mathbf{R};$$
$$f^*(b) = f(b) \quad \text{donc} \quad f(b) + f(-b) > 0;$$
$$f(pa+qb) = pf(a) + qf(b) \quad \text{donc} \quad f(b) \in \mathbf{R}.$$

On en déduit que

$$pf(a) + (q-1)f(b) + f(-pa-qb) = -f(b) < f(-b)$$

ce qui contredit la concavité de f (condition (C) de (6.4.3)). D'où (3).

Comme $f^*(a) + f^*(-a) \geqslant f(a) + f(-a) \geqslant 0$, on déduit aussitôt de (3) et de (6.4.5) que f^* est concave, et les conditions (1), (2) et (3) entraînent, vu (6.4.19), que U_f normalise $X^*.U_{f^*}$, d'où la seconde assertion puisque X normalise U_{f^*} et X^*.

Supposons que $\overline{U}_a \not\subset \overline{U}_{2a}$, autrement dit que

(4) $$U_{a,f(a)} \not\subset U_{a,f^*(a)} \, . \, U_{2a,f(2a)}.$$

Ceci implique $f(a) \neq f^*(a)$, donc $f(a)+f(-a)=0$, d'où $f(2a)=2f(a)$ et

$$U_{a,f(a)} \not\subset U_{a,f(a)+} \, . \, U_{2a}.$$

Par suite, on a $f(a)=f'(a)\in\Gamma'_a$ et $f(-a)=-f(a)\in\Gamma'_{-a}$ (6.2.16), d'où $f(-a)=f'(-a)$ et $a\in\Phi_f$.

Réciproquement, si $a\in\Phi_f$, on a $f'(a)+f'(-a)=0$; comme $f'(a)\geqslant f(a)$ et $f(a)+f(-a)\geqslant 0$, on a $f(a)=-f(-a)=f'(a)\in\mathbf{R}$, d'où $f^*(a)>f(a)$ et $f'(a)\in\Gamma'_a$. On en déduit (4), d'où $\overline{U}_a \not\subset \overline{U}_{2a}$.

Enfin, la vérification de la dernière assertion est immédiate.

(6.4.24) Il est clair que $H_{f,f^*}\subset H_{[0+]}$ et on a $(H_{(0+)}, U_{f,a})\subset U_{f^*,a}$ pour tout $a\in\Phi$. Par suite, les conditions (1) et (2) de (6.4.23) sont satisfaites si l'on a

$$H_{[0+]}\subset X^*\subset H_{(0+)}.$$

Bien entendu, ceci n'est possible que si $H_{[0+]}\subset H_{(0+)}$, par exemple si φ satisfait à la condition (Pr) de (6.4.15). Mais, dans tous les cas, il existe des sous-groupes X^* satisfaisant aux conditions imposées en (6.4.22), par exemple H_{f,f^*} lui-même. Pour le montrer, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme **(6.4.25)**. — *Soient* $a\in\Phi$, $r\in\Gamma_a$ *et* $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$, *avec* $k>0$. *Soient* $u\in U_{-a,-r}$, $v\in U_{a,r+k}\cup U_{2a,2r+k}$ *et soit h la* H-*composante du commutateur* (v, u).

(i) *Si* $b\in\Phi$, $b\notin\mathbf{R}a$, *on a*

$$(h, U_{b,s})\subset U_{b,s+k}\, . \, U_{2b,2s+k} \quad \textit{pour tout } s\in\widetilde{\mathbf{R}}.$$

(ii) $$(h, U_{a,r})\subset U_{a,r+k}\, . \, U_{2a,2r+k}.$$

(iii) $$(h, U_{-a,-r})\subset U_{-a,-r+k}\, . \, U_{-2a,-2r+k}.$$

Quitte à remplacer φ par une valuation équipollente, on peut supposer, pour simplifier les notations, que $r=0$.

Soient $b\in\Phi$, $b\notin\mathbf{R}a$, et $s\in\widetilde{\mathbf{R}}$; soient X le groupe engendré par $U_{-a,0}\cup U_{a,k}\cup U_{2a,k}$ et Y le groupe engendré par les $U_{pa+qb,\,t(p,q)}$ avec $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}^*$, $pa+qb\in\Phi$ et $t(p,q)=qs$ si $p<0$ et $t(p,q)=k+qs$ si $p\geqslant 0$. L'axiome (V 3) des valuations montre que X normalise Y et que le commutateur d'un élément de $U_{-a,0}\cup U_{a,k}\cup U_{2a,k}$ et d'un élément de $U_{b,s}$ appartient à Y. On a donc $(X, U_{b,s})\subset Y$, de sorte que, compte tenu de (6.1.6),

$$(H\cap X, U_{b,s})\subset Y\cap U_b = U_{b,k+s}\, . \, U_{2b,k+2s}$$

ce qui démontre (i).

Démontrons (iii). Soit $x\in U_{-a,0}$ et soit Z le groupe $U_{-2a,k}\, . \, U_{-a,k}\, . \, H\, . \, U_{a,k}\, . \, U_{2a,k}$ (6.3.9). Vu (6.3.7), il existe $y_2\in U_{-2a,k}$, $y_1\in U_{-a,k}$, $z_1\in U_{a,k}$ et $z_2\in U_{2a,k}$ tels que

$(v, u) = y_2 y_1 h z_1 z_2$. D'autre part, v et les commutateurs (v^{-1}, x), (v^{-1}, xu), (x, y_i) et (x, z_i) appartiennent tous à Z. Par suite, on a

$$xvu = v(v^{-1}, x)xu \in \mathrm{Z}xu \qquad \text{et} \qquad xuv = v(v^{-1}, xu)xu \in \mathrm{Z}xu$$

d'où $x(v, u)x^{-1} \in \mathrm{Z}$. Mais $xy_i x^{-1} = (x, y_i)y_i$ et $xz_i x^{-1} = (x, z_i)z_i$ appartiennent aussi à Z. Par suite, on a $xhx^{-1} \in \mathrm{Z}$ et $(h, x) \in \mathrm{Z} \cap \mathrm{U}_{-a} = \mathrm{U}_{-a,k} . \mathrm{U}_{-2a,k}$, d'où (iii).

Enfin, (ii) résulte de (iii) et du lemme suivant :

Lemme **(6.4.26)**. — *Soient* $a \in \Phi$, $h \in \mathrm{H}$, $r \in \Gamma_a$ *et* $k \in \widetilde{\mathbf{R}}$ *avec* $k > 0$. *Si l'on a* $(h, \mathrm{U}_{-a,-r}) \subset \mathrm{U}_{-a,-r+k} . \mathrm{U}_{-2a,-2r+k}$, *alors on a aussi* $(h, \mathrm{U}_{a,r}) \subset \mathrm{U}_{a,r+k} . \mathrm{U}_{2a,2r+k}$.

On peut supposer $r = 0$. Comme $0 \in \Gamma_a$, le groupe $\mathrm{U}_{a,0}$ est engendré par $\varphi_a^{-1}(0)$ et, comme h normalise $\mathrm{U}_{a,k} . \mathrm{U}_{2a,k}$, il suffit de montrer que $(h, x) \in \mathrm{U}_{a,k} . \mathrm{U}_{2a,k}$ pour $x \in \varphi_a^{-1}(0)$. Posons $x = x'mx''$ avec $x', x'' \in \mathrm{U}_{-a,0}$ et $m \in \mathrm{M}_{a,0}$. Alors

$$(h, x) = h . x' . mh^{-1}m^{-1} . m(h, x'')m^{-1} . x'^{-1}$$
$$\in \mathrm{H} . \mathrm{U}_{-a,0} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a,k} . \mathrm{U}_{2a,k} . \mathrm{U}_{-a,0} \subset \mathrm{U}_{-a,0} . \mathrm{H} . \mathrm{U}_{a,k} . \mathrm{U}_{2a,k}$$

d'où le lemme.

Proposition **(6.4.27)**. — *Soient* f, f^* *comme en* (6.4.23). *Le sous-groupe* H_{f,f^*} *est distingué dans* H *et on a* $(\mathrm{H}_{f,f^*}, \mathrm{U}_{f,b}) \subset \mathrm{U}_{f^*,b}$ *pour tout* $b \in \Phi$.

La première assertion est évidente, puisque H normalise tous les $\mathrm{U}_{a,k}$. Comme H_{f,f^*} et $\mathrm{U}_{f,b}$ normalisent $\mathrm{U}_{f^*,b}$, il suffit de démontrer que, si h est la H-composante du commutateur d'un élément $u \in \mathrm{U}_{-\varepsilon a, f(-\varepsilon a)}$ et d'un élément $v \in \mathrm{U}_{\eta a, f^*(\eta a)}$ avec $a \in \Phi^{\mathrm{réd}}$, $\varepsilon, \eta \in \{1, 2\}$ et $\varepsilon f^*(\eta a) + \eta f(-\varepsilon a) > 0$, et si $x \in \mathrm{U}_{b, f(b)}$ avec $b \in \Phi$, alors $(h, x) \in \mathrm{U}_{b, f^*(b)}$. C'est évident si $f^*(b) = f(b)$ ou si $f(b) \notin \Gamma_b$. Si $b \notin \mathbf{R}a$, cela résulte de (6.4.25) (i). Supposons que $f(a) \in \Gamma_a$, $f(a) + f(-a) = 0$ et $b \in \{\pm a, \pm 2a\}$; alors $u \in \mathrm{U}_{-a, f(-a)}$ et $v \in \mathrm{U}_{a, f(a)+} \cup \mathrm{U}_{2a, 2f(a)+}$ (notons que, si $2a \in \Phi$, on a alors $f(2a) = 2f(a) = -f(-2a)$), et notre assertion résulte de (6.4.25) (ii) et (iii) (en prenant $r = f(a)$ et $k = 0+$).

Il ne nous reste à examiner que le cas où $f(a) + f(-a) > 0$, $f(2a) + f(-2a) = 0$, $f(2a) \in \Gamma_{2a}$ et $b = \pm 2a$. Posons $f(2a) = 2r$. On a $f(a) > r$, sinon la concavité de f entraînerait $f(-a) \leqslant f(-2a) + f(a) \leqslant \frac{1}{2} f(-2a) \leqslant -f(a)$. De même, $f(-a) > -r$ et on a $u \in \mathrm{U}_{-a,-r}$ et $v \in \mathrm{U}_{a,r+} \cup \mathrm{U}_{2a,2r+}$. D'après (6.4.25) (ii) et (iii), on a donc

$$(h, \mathrm{U}_{\pm 2a, \pm 2r}) \subset (h, \mathrm{U}_{\pm a, \pm r}) \cap \mathrm{U}_{\pm 2a} \subset \mathrm{U}_{\pm a, \pm r+} \cap \mathrm{U}_{\pm 2a} = \mathrm{U}_{\pm 2a, \pm 2r+}$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition **(6.4.28)**. — *Soient* $f, g, h : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *trois fonctions quasi-concaves. Posons* $f_1 = \inf(f, h)$ *et* $g_1 = \inf(g, h)$ *et supposons que, pour* $p, q \in \mathbf{N}^*$ *et* $a, b, pa + qb \in \Phi$, *l'on ait*

$$(1) \qquad h(pa + qb) \leqslant pf_1(a) + qg_1(b).$$

Soient de plus X *et* Y *deux sous-groupes de* H *tels que*

$$(2) \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{U}_{g,a}) \cup (\mathrm{Y}, \mathrm{U}_{f,a}) \cup (\mathrm{H}_{f_1, g_1}, \mathrm{U}_{f,a} \cup \mathrm{U}_{g,a}) \subset \mathrm{U}_{h,a}$$

pour tout $a \in \Phi$.

Alors, le produit $(X, Y).H_{f_1, g_1}.U_h$ *est un groupe contenant le groupe des commutateurs* $(X.U_f, Y.U_g)$.

Montrons tout d'abord que si $a \in \Phi$, et $\varepsilon, \eta \in \{1, 2\}$ sont tels que $-\varepsilon a, \eta a \in \Phi$ et $\eta f_1(-\varepsilon a) + \varepsilon g_1(\eta a) \leqslant 0$, alors on a $h(-\varepsilon a) = f_1(-\varepsilon a)$ et $h(\eta a) = g_1(\eta a)$. En effet

$$h(\eta a) = h(\eta(-\varepsilon a) + (\varepsilon + 1)(\eta a)) \leqslant \eta f_1(-\varepsilon a) + (\varepsilon + 1) g_1(\eta a) \leqslant g_1(\eta a)$$
$$h(-\varepsilon a) = h((\eta + 1)(-\varepsilon a) + \varepsilon(\eta a)) \leqslant (\eta + 1) f_1(-\varepsilon a) + \varepsilon g_1(\eta a) \leqslant f_1(-\varepsilon a).$$

Ceci étant, montrons que U_f normalise $H_{f_1, g_1}.U_h$. D'après (6.4.19), et compte tenu des conditions (1) et (2), il suffit de montrer que $H_{f, h} \subset H_{f_1, g_1}.U_h$. Soient donc $a \in \Phi$ et $\varepsilon, \eta \in \{1, 2\}$ tels que $-\varepsilon a, \eta a \in \Phi$ et que $\eta f(-\varepsilon a) + \varepsilon h(\eta a) > 0$, et soient $u \in U_{-\varepsilon a, f(-\varepsilon a)}$, $v \in U_{\eta a, h(\eta a)}$ et x la H-composante du commutateur (u, v). Si $\eta f_1(-\varepsilon a) + \varepsilon g_1(\eta a) > 0$, on a $x \in H_{f_1, g_1}$. Si $f_1(-\varepsilon a) < f(-\varepsilon a)$, on a $h(-\varepsilon a) < f(-\varepsilon a)$ et $(u, v) \in U_h$, donc $x \in U_h$. Enfin, si $f_1(-\varepsilon a) = f(-\varepsilon a)$ et $\eta f_1(-\varepsilon a) + \varepsilon g_1(\eta a) \leqslant 0$, on a d'une part $h(\eta a) = g_1(\eta a)$ d'après ce qui a été vu ci-dessus, d'autre part

$$\varepsilon h(\eta a) > -\eta f(-\varepsilon a) = -\eta f_1(-\varepsilon a) \geqslant \varepsilon g_1(\eta a)$$

d'où une contradiction. On montre de même que U_g normalise $H_{f_1, g_1}.U_h$.

Montrons maintenant que $(U_f, U_g) \subset H_{f_1, g_1}.U_h$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $(U_{a, f(a)}, U_{b, g(b)}) \subset H_{f_1, g_1}.U_h$ pour $a, b \in \Phi$. C'est évident d'après (V 3) et (1) si $b \notin -\mathbf{R}_+ a$. Il nous reste à montrer que $(U_{-\varepsilon a, f(-\varepsilon a)}, U_{\eta a, g(\eta a)}) \subset H_{f_1, g_1}.U_h$ pour $\varepsilon, \eta \in \{1, 2\}$ et $-\varepsilon a, \eta a \in \Phi$. Si $\varepsilon g_1(\eta a) + \eta f_1(-\varepsilon a) \leqslant 0$, cela résulte des inégalités $h(-\varepsilon a) \leqslant f(-\varepsilon a)$ et $h(\eta a) \leqslant g(\eta a)$ établies plus haut. Si $\varepsilon g_1(\eta a) + \eta f_1(-\varepsilon a) > 0$, cela résulte de (6.3.9) et de la définition même de H_{f_1, g_1}.

Par ailleurs, H, donc tout sous-groupe de H et en particulier X, Y et (X, Y), normalisent H_{f_1, g_1} et U_h. Par suite, $(X, Y).H_{f_1, g_1}.U_h$ est bien un groupe. D'autre part, (2) entraîne que $(X, U_g) \cup (Y, U_f) \subset H_{f_1, g_1}.U_h$ puisque U_f et U_g normalisent $H_{f_1, g_1}.U_h$. Enfin, soient $x \in X$, $y \in Y$, $u \in U_f$ et $v \in U_g$. On a

$$(xu, yv) = xy.(y^{-1}, u).(u, v).(v, x^{-1}).x^{-1}y^{-1}$$
$$\in xy.x^{-1}y^{-1}.yx(H_{f_1, g_1}.U_h)x^{-1}y^{-1} \subset (X, Y).H_{f_1, g_1}.U_h$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(6.4.29).** — *Soient* Δ *une partie de la base* Π *de* Φ *et* Ψ *l'ensemble des racines positives qui ne sont pas combinaisons linéaires d'éléments de* Δ. *Soient* $f, g : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *deux fonctions quasi-concaves. Supposons que* f (resp. g) *soit infinie sur* $\complement \Psi$ (resp. *sur* $-\Psi$). *Pour* $a \in \Phi$, *posons*

$$h(a) = \inf\{\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} f(a_i) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} g(b_j)\}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des couples de suites finies non vides (a_i) *et* (b_j) *d'éléments de* Φ, *tels que* $\sum_i a_i + \sum_j b_j = a$. *Alors, la fonction* $h : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *est concave et* $(U_f, U_g) \subset U_h$.

Il est immédiat que h est concave et satisfait à (6.4.28) (1) (avec $f_1 = \inf(f, h)$ et $g_1 = \inf(g, h)$). D'autre part, si $a = \sum_i a_i + \sum_j b_j \in -\Psi$, alors l'un au moins des a_i ou l'un au moins des b_j appartient à $-\Psi$; on a donc $h(a) = \infty$, d'où $f_1(a) = g_1(a) = \infty$;

si $a=\sum_i a_i+\sum_j b_j \in (\pm\Phi^+ \cap \complement\Psi)$, et si tous les a_i appartiennent à Ψ, alors l'un au moins des b_j appartient à $-\Psi$ et on a $h(a)=\infty$, d'où $f_1(a)=\infty$. On en conclut aisément que $H_{f_1, g_1}=\{1\}$ et le corollaire résulte de (6.4.28).

Corollaire **(6.4.30)**. — *Soient* $f_*, g_* : \Phi\cup\{0\}\rightarrow\widetilde{\mathbf{R}}$ *deux fonctions dont les restrictions à* Φ *sont quasi-concaves. Soit* h_* *l'application de* $\Phi\cup\{0\}$ *dans* $\widetilde{\mathbf{R}}\cup\{-\infty\}$ *définie par*

$$h_*(a)=\inf\{\sum_i f_*(a_i)+\sum_j g_*(b_j)\}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des couples de suites finies non vides (a_i) *et* (b_j) *d'éléments de* $\Phi\cup\{0\}$ *tels que* $a=\sum_i a_i+\sum_j b_j$ *(l'ordre sur* $\widetilde{\mathbf{R}}\cup\{-\infty\}$ *étant défini de manière évidente par* $-\infty<k$ *pour tout* $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$).

Si $h_*(0)\neq-\infty$, *on a* $h_*(a)\neq-\infty$ *pour tout* $a\in\Phi$ *et la restriction* h *de* h_* *à* Φ *est concave. Supposons en outre que* $H_{[h_*(0)]}\subset H_{(h_*(0))}$ *(par exemple que* φ *satisfait à la condition* (Pr)) *et soit* X (resp. Y) *un sous-groupe de* $H_{(f_*(0))}$ (resp. $H_{(g_*(0))}$). *Alors on a*

$$(X.U_f, Y.U_g)\subset(X, Y).H_{[h_*(0)]}.U_h.$$

On vérifie en effet aisément que, avec les notations de (6.4.28), on a $H_{f_1, g_1}\subset H_{[h_*(0)}$ et que les conditions (1) et (2) de (6.4.28) sont satisfaites.

Corollaire **(6.4.31)**. — *Soient* f *et* g *deux fonctions linéaires sur* Φ. *Posons*

$$k=\inf\{g(a)-f(a)\mid a\in\Phi^+\}.$$

On a

$$(U_f^+, U_g^+)\subset U_{f+k}^+.$$

Appliquons (6.4.29), avec $\Delta=\emptyset$ (d'où $\Psi=\Phi^+$ et $\complement\Psi=-\Psi=\Phi^-$), aux deux fonctions f^+ et g^+ égales à ∞ sur Φ^- et égales à f et g respectivement sur Φ^+. Ce sont bien des fonctions concaves et on a $U_f^+=U_{f^+}$, $U_g^+=U_{g^+}$. Soit h la fonction associée à f^+ et g^+ comme en (6.4.29). On a $h(a)=\infty$ pour $a\in\Phi^-$; si $a\in\Phi^+$, on a

$$h(a)=\inf\{\sum_i f(a_i)+\sum_j g(b_j)\}$$

la borne inférieure étant étendue aux couples de suites finies non vides (a_i) et (b_j) d'éléments de Φ^+ telles que $a=\sum_i a_i+\sum_j b_j$. Par suite

$$h(a)=\inf\{f(a)+\sum_j (g(b_j)-f(b_j))\}\geqslant f(a)+k.$$

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de supposer g linéaire : g quasi-concave suffit.

Corollaire **(6.4.32)**. — *Soit* L *une demi-droite d'origine* 0 *de* V^*, *contenue dans* D_0. *Pour* $x\in A$, *désignons par* U_x^+ *le sous-groupe engendré par les* $U_{a,-a(x-\varphi)}$ *pour* $a\in\Phi^+$. *Il existe une constante* k *avec* $0<k\leqslant 1$ *telle que l'on ait*

$$(U_x^+, U_y^+)\subset U_{x+k(y-x)}^+$$

quels que soient les points x *et* y *de* A *tels que* $x-y\in L$.

Soit v un élément de L; posons $k=\dfrac{\inf a(v)}{\sup a(v)}$, les bornes inférieures et supérieures étant étendues aux $a\in\Phi^+$. On a $0<k\leqslant 1$. Soit $t\in\mathbf{R}_+$ tel que $x=y+tv$ $(x, y\in A)$. D'après (6.4.31), on a

$$(U_x^+, U_y^+)\subset U_h^+$$

avec $h(b)=-b(x)+t.\inf_{a\in\Phi^+} a(v)\geqslant -b(x)+b(ktv)=-b(x+k(y-x))$.

Notons que si Φ est de rang un et de type BC_1, on a $k=1/2$. Si Φ est de type A_1, on a $(U_x^+, U_y^+)=\{1\}$ quels que soient $x, y\in A$.

(6.4.33) Nous allons maintenant étudier plus en détail les sous-groupes $H_{[k]}$ et $H_{(k)}$ et la condition (Pr) de (6.4.15).

Proposition. — Quels que soient $k, \ell\in\widetilde{\mathbf{R}}$, *le groupe des commutateurs* $(H_{(k)}, H_{(\ell)})$ *est contenu dans* $H_{(k+\ell)}$. *Si* $H_{[k]}\subset H_{(k)}$, *alors, pour* $a\in\Phi$ *et* $m\in M_a^0$, *on a* $(m, H_{(k)})\subset H_{[k]}$.

Pour démontrer la première assertion, on peut supposer $k, \ell>0$. Soient $h\in H_{(k)}$ et $h'\in H_{(\ell)}$ et soient $a\in\Phi$ et $x\in\mathbf{R}$. Pour $y\in\widetilde{\mathbf{R}}_+$, posons

$$X_y=U_{a, x+y}.U_{2a, 2x+y}\subset U_{a, x}.$$

D'après (V 3), le groupe des commutateurs (X_y, X_z) est contenu dans X_{y+z} pour $y, z\in\widetilde{\mathbf{R}}_+$ et X_y est un sous-groupe distingué de $U_{a, x}=X_0$. Soit alors $u\in U_{a, x}$; posons $v=(u^{-1}, h^{-1})$ et $v'=(u^{-1}, h'^{-1})$. Par définition (6.4.13), on a $v\in X_k$, $v'\in X_\ell$, $(h^{-1}, v')\in X_{k+\ell}$ et $(h'^{-1}, v)\in X_{k+\ell}$. Par suite, on a dans $U_{a, x}$ les congruences suivantes modulo $X_{k+\ell}$:

$$h^{-1}v'h\equiv v'$$

$$h^{-1}h'^{-1}uh'h=h^{-1}uv'h\equiv h^{-1}uhv'=uvv'$$

et de même

$$h'^{-1}h^{-1}uhh'\equiv uv'v.$$

Comme $(v, v')\in(X_k, X_\ell)\subset X_{k+\ell}$, on en déduit

$$h^{-1}h'^{-1}uh'h\equiv h'^{-1}h^{-1}uhh'$$

et $((h, h'), u)\in X_{k+\ell}$, d'où la première assertion.

Supposons maintenant que $H_{[k]}\subset H_{(k)}$ et posons $m=u'uu''$, avec $u\in U_{a, r}$ et $u', u''\in U_{-a, -r}$. Soit Y le groupe $U_{-2a, -2r+k}.U_{-a, -r+k}.H_{[k]}.U_{a, r+k}.U_{2a, 2r+k}$ (6.3.9) si $k>0$ et le groupe engendré par $U_{a, r}$ et $U_{a, -r}$ si $k\leqslant 0$. On déduit aussitôt de (6.4.19) que Y est normalisé par $U_{a, r}$ et par $U_{-a, -r}$. Soit alors $h\in H_{(k)}$. Comme le commutateur de h avec u, u' ou u'' appartient à Y, on a

$$(m, h)=u'uu''hu''^{-1}u^{-1}u'^{-1}h^{-1}\in u'uYhu^{-1}u'^{-1}h^{-1}=u'Yuhu^{-1}u'^{-1}h^{-1}=u'Yhu'^{-1}h^{-1}=Y$$

d'où $(m, h)\in Y\cap H=H_{[k]}$.

Proposition **(6.4.34).** — *Soit* $k\in\widetilde{\mathbf{R}}$, *avec* $k>0$; *pour qu'un élément* h *de* H *appartienne à* $H_{(k)}$, *il faut et il suffit que l'on ait*

(1) $$(h, U_{a, r})\subset U_{a, r+k}.U_{2a, 2r+k} \quad \textit{pour tout } r\in\mathbf{R},$$

quelle que soit $a\in\Pi$.

Notons tout d'abord que si (1) est vraie pour une racine $a \in \Phi$, alors elle est satisfaite si on remplace a par $2a$. Ceci étant, il suffit, pour démontrer la proposition, de faire voir que la condition « (1) est satisfaite pour les éléments a de la base Π » est indépendante du choix de Π. Pour cela, il suffit de démontrer les deux assertions suivantes :

(2) Si (1) est satisfaite pour $a \in \Phi$, elle l'est aussi pour $-a$.

(3) Si (1) est satisfaite pour deux éléments distincts a et b de Π, alors elle l'est aussi pour $c = r_a(b)$.

Or, (2) n'est autre que le lemme (6.4.26). Démontrons (3); soit $u \in U_c$, avec $u \neq 1$. Puisque a et c sont linéairement indépendantes, on peut supposer, quitte à remplacer φ par une valuation équipollente, que $\varphi_c(u) = 0$ et que $0 \in \Gamma_a$. Soit alors $v \in \varphi_a^{-1}(0)$; posons $m = m(v)$ et $v' = m^{-1}um$. Pour tout $\ell \in \widetilde{\mathbf{R}}$, notons X_ℓ (resp. Y_ℓ) le groupe engendré par les $U_{pa+qb,\ell}$ pour $p, q \in \mathbf{N}^*$, $pa+qb \in \Phi$ (resp. et $pa+qb \notin \{c, 2c\}$). D'après (6.1.8), u est l'unique élément de U_c tel que $(v, v') \in uY_0$. D'autre part, on vérifie aussitôt, d'après (6.4.21), que X_k est distingué dans X_0. Comme $hvh^{-1} \equiv v$ et $hv'h^{-1} \equiv v'$ modulo X_k, on a aussi $h(v, v')h^{-1} \equiv (v, v')$ modulo X_k, et $huh^{-1} \equiv u$ modulo $X_k Y_0 \cap U_c = U_{c,k} . U_{2c,k}$ (6.4.9), ce qui démontre (3).

Proposition **(6.4.35)**. — *Si Φ n'a pas de composante irréductible de rang un, alors la condition* (Pr) *est satisfaite.*

Soit $k \in \widetilde{\mathbf{R}}$ avec $k > 0$, et soit $b \in \Phi$. Il nous suffit de montrer que, si $h \in H$ est la H-composante d'un commutateur (v, u), avec $u \in U_{-b,r}$ et $v \in U_{b,r+k} \cup U_{2b,2r+k}$ (avec $r \in \Gamma_b$), alors $h \in H_{(k)}$. Or, le lemme (6.4.25) montre que la condition (6.4.34) (1) est satisfaite pour toute racine $a \notin \mathbf{R}b$ et l'hypothèse faite sur Φ entraîne que l'on peut choisir la base Π de Φ de telle sorte que $b \notin \mathbf{R}\Pi$. Notre assertion est alors conséquence de (6.4.34).

Remarque **(6.4.36)**. — Un raisonnement plus compliqué permet de montrer que la condition (Pr) est satisfaite dès que Φ ne contient pas de composante irréductible de type BC_1. Nous ne connaissons d'ailleurs pas d'exemple où elle ne l'est pas.

Proposition **(6.4.37)**. — *Supposons satisfaite la condition* (Pr) *et soient* $k, \ell \in \widetilde{\mathbf{R}}_+$. *On a*

$$(1) \qquad (H_{(k)}, H_{[\ell]}) \subset H_{[k+\ell]}$$

$$(2) \qquad (H_{[k]}, H_{[\ell]}) \subset H_{[k+\ell]}.$$

Il suffit de démontrer (1). On peut supposer $k > 0$, et comme $H_{[k+\ell]}$ est distingué dans H, il suffit de prouver que le commutateur d'un élément de $H_{(k)}$ et d'un élément d'un système générateur de $H_{[\ell]}$ appartient à $H_{[k+\ell]}$. Soit alors $a \in \Phi$ et $r \in \mathbf{R}$; le groupe engendré par $U_{-a,-r} \cup U_{a,r+\ell} \cup U_{2a,2r+\ell}$ est alors le groupe U_f, où f est la restriction à Φ de la fonction $f_* : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ définie par $f_*(b) = \infty$ pour $b \in \Phi \cup \{0\}$, $b \neq \pm a, \pm 2a$, $f_*(-2a) = -2r$, $f_*(-a) = -r$, $f_*(a) = r + \ell$ et $f_*(2a) = 2r + \ell$. Il suffit de montrer que

$$(H_{(k)}, U_f \cap H) \subset H_{[k+\ell]}.$$

Posons $g_*(b)=\infty$ pour $b\in\Phi$ et $g_*(0)=k$ et appliquons (6.4.30), avec $X=\{1\}$ et $Y=H_{(k)}$. On en déduit

$$(H_{(k)}, U_f)\subset H_{[h_*(0)]}.U_h$$

où h est la restriction à Φ de la fonction $h_* : \Phi\cup\{0\}\rightarrow\widetilde{\mathbf{R}}$ définie par $h_*(b)=\infty$ pour $b\in\Phi$, $b\neq\pm a, \pm 2a$, $h_*(0)=k+\ell$, $h_*(-2a)=k-2r$, $h_*(-a)=k-r$, $h_*(a)=k+\ell+r$ et $h_*(2a)=k+\ell+2r$. Mais (6.3.9) entraîne que $U_h\cap H\subset H_{[2k+\ell]}\subset H_{[k+\ell]}$, ce qui achève la démonstration.

Définition **(6.4.38)**. — *On appelle* prolongement *de la valuation* φ *une application* $\varphi_0 : H\rightarrow\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}$ *satisfaisant aux deux conditions :*

(P 1) *Pour tout* $k\in\mathbf{R}$, *l'image réciproque* $U_{0,k}=\varphi_0^{-1}([k,\infty])$ *est un sous-groupe de* H *et on a* $H_{[k]}\subset U_{0,k}\subset H_{(k)}$.

(P 2) *Pour* $k, \ell\in\mathbf{R}$, *on a* $(U_{0,k}, U_{0,\ell})\subset U_{0,k+\ell}$.

On dit que φ *est* prolongeable *si elle possède un prolongement. On appelle* valuation prolongée *de la donnée radicielle* $(T, (U_a))$ *un couple* (ψ, ψ_0) *formé d'une valuation* ψ *de* $(T, (U_a))$ *et d'un prolongement* ψ_0 *de* ψ.

Remarquons que la condition (P 2) entraîne que chacun des $U_{0,k}$ est un sous-groupe distingué de $U_{0,0}=H$. La condition (P 1) jointe à (6.4.33) montre même que $U_{0,k}$ est un sous-groupe distingué de N. D'autre part, (P 1) et (P 2) restent valables si l'on admet la valeur ∞ pour k ou ℓ. Notons encore que la condition (P 1) peut s'expliciter ainsi : quels que soient $a\in\Phi$, $h, k\in\mathbf{R}$, $U_{0,k}$ est un groupe et l'on a

(P 1') $$(U_{a,h}, U_{0,k})\subset U_{a,h+k}.U_{2a,2h+k}.$$

(P 1'') Les H-composantes des commutateurs (u, u') et (u', u) avec $u\in U_{a,r}$, $u'\in U_{-a,s}$ (resp. $u'\in U_{-2a,s}$) avec $r+s=k$ (resp. $2r+s=k$) appartiennent à $U_{0,k}$.

Proposition **(6.4.39)**. — *Pour que la valuation* φ *soit prolongeable, il faut et il suffit que la condition* (Pr) *de* (6.4.15) *soit satisfaite.*

Il est clair que (Pr) est nécessaire. Réciproquement, si (Pr) est satisfaite, les deux fonctions $\varphi_{[0]}$ et $\varphi_{(0)}$ définies par

$$\varphi_{[0]}(h)=\sup(\{k\in\mathbf{R}\mid h\in H_{[k]}\}\cup\{0\})$$
$$\varphi_{(0)}(h)=\sup\{k\in\mathbf{R}\mid h\in H_{(k)}\}$$

(pour $h\in H$) sont, d'après (6.4.37), des prolongements de φ.

(6.4.40) Dans la suite de ce travail, nous poserons $U_0=H$. Cela rend plus cohérentes les notations $U_{a,k}$ pour $a\in\Phi\cup\{0\}$ et $k\in\mathbf{R}$ et se justifie par le fait que H joue à certains égards, relativement à l'élément 0 de V^*, le même rôle que les groupes U_a relativement aux racines $a\in\Phi$. C'est par exemple ce que montre la proposition suivante, qui fait apparaître le parallélisme entre 0 et les racines vis-à-vis d'une valuation prolongée.

Proposition **(6.4.41)**. — *Pour* $a \in \Phi \cup \{0\}$, *soit* ψ_a *une application de* U_a *dans* $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$, *avec* $\psi_0(u) \geqslant 0$ *pour tout* $u \in U_0$. *Pour que le couple* $((\psi_a)_{a \in \Phi}, \psi_0)$ *soit une valuation prolongée de la donnée radicielle* $(T, (U_a))$, *il faut et il suffit que les applications* ψ_a *satisfassent aux conditions* (V 0), (V 1), (V 2), (V 4) *et* (V 5) *de* (6.2.1) (*où l'on remplace la lettre* φ *par* ψ) *et aux deux conditions suivantes* :

(V 1 *bis*) *Pour tout* $k \in \mathbf{R}$, *l'ensemble* $U_{0,k} = \psi_0^{-1}([k, \infty])$ *est un groupe.*

(VP) *Soient* $a, b \in \Phi \cup \{0\}$ *et* $k, \ell \in \mathbf{R}$. *Soit* Ψ *l'ensemble des éléments de* $\Phi \cup \{0\}$ *de la forme* $pa+qb$ *avec* $p, q \in \mathbf{N}^*$; *pour* $c \in \Psi$, *posons* $k(c) = \inf\{pk+q\ell \mid p, q \in \mathbf{N}^*, pa+qb=c\}$. *Alors, le groupe des commutateurs* $(U_{a,k}, U_{b,\ell})$ *est contenu dans le produit des groupes* $U_{c,k(c)}$ *pour* $c \in \Psi$ *et* $c/2 \in \Psi$, *pris dans un ordre convenable.*

On vérifie aisément que ces conditions sont nécessaires. Supposons-les satisfaites. Alors, $\psi = (\psi_a)_{a \in \Phi}$ est une valuation, car (VP) pour $b \notin -\mathbf{R}_+ a$ n'est autre que (V 3). De plus, (VP) entraîne (P 2) (prendre $a=b=0$) et implique que $U_{0,k} \subset H_{(k)}$ (prendre $a=0$ et $b \in \Phi$) et que $H_{[r]} \subset U_{0,r}$ (prendre $a \in \Phi$ et $b=-a$, $k+\ell=r$, ou $b=-2a$, $2k+\ell=r$ et utiliser (6.3.9)).

Définition **(6.4.42)**. — *Soit* φ_0 *un prolongement de* φ. *Pour toute fonction* $f : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$, *notons encore* U_f *le sous-groupe de* G *engendré par les* $U_{a,f(a)}$ *pour* $a \in \Phi \cup \{0\}$ (*pour* $k=r+$, *avec* $r \in \mathbf{R}$, *on désigne par* $U_{0,k}$ *la réunion des* $U_{0,s}$ *pour* $s \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $s>r$). *On dit que f est* quasi-concave (*relativement à* (φ, φ_0)) *si la restriction de f à* Φ *est quasi-concave et si* $H_{f|\Phi}$ *est contenu dans* $U_{0,f(0)}$.

Si $f : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ est concave (6.4.4), alors f est quasi-concave : cela résulte de (6.4.17), puisque $f(0) \leqslant d(f \mid \Phi)$. D'autre part, si f est quasi-concave, on a $U_f \cap U_0 = U_{0,f(0)}$.

Proposition **(6.4.43)**. — *Soit* φ_0 *un prolongement de* φ *et soient* $f, g : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *deux fonctions quasi-concaves telles que* $f(pa+qb) \leqslant pf(a)+qg(b)$ *pour* $p, q \in \mathbf{N}^*$, a, b *et* $pa+qb \in \Phi \cup \{0\}$. *Alors,* U_f *est normalisé par* U_g.

En effet, on a $H_{f|\Phi, g|\Phi} \subset U_{0,f(0)}$ et

$$(U_{0,f(0)}, U_{a,g(a)}) \subset (H_{(f(0))}, U_{a,g(a)}) \subset U_{a,g(a)+f(0)} \cdot U_{2a,2g(a)+f(0)} \subset U_{a,f(a)} \cdot U_{2a,f(2a)}$$

et il suffit d'appliquer (6.4.19) (avec $X = U_{0,f(0)}$).

Proposition **(6.4.44)**. — *Soit* φ_0 *un prolongement de* φ. *Soient* $f, g : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *deux fonctions quasi-concaves et soit* $h : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}} \cup \{-\infty\}$ *définie par*

$$h(a) = \inf\{\sum_i f(a_i) + \sum_j g(b_j)\}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des couples de suites finies non vides (a_i) *et* (b_j) *d'éléments de* $\Phi \cup \{0\}$ *tels que* $a = \sum_i a_i + \sum_j b_j$. *Si* $h(0) \neq -\infty$, *alors h est concave et on a* $(U_f, U_g) \subset U_h$.

C'est un cas particulier de (6.4.30) (en prenant $X = U_{0,f(0)}$ et $Y = U_{0,g(0)}$).

Proposition **(6.4.45).** — *Supposons la valuation* φ *prolongeable (c'est-à-dire que la condition* (Pr) *est satisfaite). Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction quasi-concave. On suppose qu'il existe une fonction linéaire* $\lambda \in V$ *et un* $k \in \widetilde{\mathbf{R}}$ *avec* $k > 0+$ *et* $f \geqslant \lambda + k$ (cf. (6.4.6)). *Soit* H' *un sous-groupe de* $H_{(k)}$. *Posons* $Z = H'.U_f$ *et, pour* $n \in \mathbf{N}^*$

$$Z_n = Z \cap (\mathscr{C}^n(H').H_{[nk]}.U_{\lambda+nk}) \quad (^1).$$

Alors, on a :

(1) $(Z_n, Z_{n'}) \subset Z_{n+n'}$ *quels que soient* $n, n' \in \mathbf{N}^*$;

(2) $\mathscr{C}^n(Z) \subset Z_n$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}^*$;

(3) $\mathscr{C}^\infty(Z) \subset H_{(\infty)}$ *(qui est, rappelons-le, le centralisateur du groupe engendré par les* U^a *pour* $a \in \Phi$ (6.4.13));

(4) *si* $H' \subset H_{[k]}$, *alors* $\mathscr{C}^\infty(Z)$ *est contenu dans* $H_{[\infty]}$ *et est contenu dans le centre de* Z. *Si de plus* $H_{[\infty]} = \{1\}$, *alors* Z *est pronilpotent.*

Appliquons (6.4.30), en prenant pour f_* (resp. g_*) la restriction à $\Phi \cup \{0\}$ de la fonction $\lambda + nk$ (resp. $\lambda + n'k$) et pour X (resp. Y) le sous-groupe $\mathscr{C}^n(H').H_{[nk]}$ (resp. $\mathscr{C}^{n'}(H').H_{[n'k]}$). Vu (6.4.33), on a bien $X \subset H_{(nk)} = H_{(f_*(0))}$ et $Y \subset H_{(n'k)} \subset H_{(g_*(0))}$. Avec les notations de (6.4.30), on a $h_* \geqslant \lambda + (n+n')k$ et (1) en résulte, compte tenu des relations $(\mathscr{C}^n(H'), \mathscr{C}^{n'}(H')) \subset \mathscr{C}^{n+n'}(H')$ et $(H_{(nk)}, H_{[n'k]}) \subset H_{[(n+n')k]}$ (6.4.37). On en déduit (2) et (3), en utilisant (6.4.33), (6.4.9) et (DR 6). Enfin, si $H' \subset H_{[k]}$, on a $\mathscr{C}^n(H') \subset H_{[nk]}$, d'où $\mathscr{C}^\infty(Z) \subset H_{[\infty]}$. D'autre part, Z est contenu dans le groupe engendré par les U_a pour $a \in \Phi$ et (4) résulte de (6.4.15).

Corollaire **(6.4.46).** — *Supposons* φ *prolongeable et discrète et soit* $e \in \mathbf{R}_+^*$ *tel que* $\Gamma_a \subset \mathbf{Z}e$ *pour tout* $a \in \Phi$. *Supposons de plus* $H_{[\infty]} = \{1\}$. *Reprenons les hypothèses et notations de* (6.4.23). *Alors,* $H_{f,f^*} \subset H_{[e]}$. *Si* $X^* \subset H_{[e]}$, *alors* $X^*.U_{f^*}$ *est un sous-groupe distingué pronilpotent de* $X.U_f$.

Nous avons vu (6.4.24) que $H_{f,f^*} \subset H_{[0+]}$ et il est clair que $H_{[0+]} = H_{[e]}$. Pour $a \in \Phi$, posons $g(a) = \inf\{t \in \mathbf{Z}e \mid t \geqslant f^*(a)\}$. Il est clair que $U_g = U_{f^*}$ et que g est quasi-concave. De plus, vu (6.4.6), il existe une fonction linéaire λ et $k \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $g > \lambda + k$. On peut supposer $k \leqslant e$. Nos assertions résultent alors de (6.4.45), vu (6.4.23).

Remarques **(6.4.47).** — (1) l'hypothèse faite en (6.4.46) que $\Gamma_a \subset \mathbf{Z}e$ pour tout $a \in \Phi$ n'est pas bien restrictive. En effet, les résultats de (6.2.23) montrent que toute valuation discrète est équivalente (6.2.5) à une valuation jouissant de cette propriété.

2) Reprenons les hypothèses et notations de (6.4.23) et (6.4.46). On peut prendre $X = H$ et $X^* = H_{[e]}$. Le groupe $H.U_f$ est alors extension de $\overline{G} = HU_f/H_{[e]}U_{f^*}$, qui possède une donnée radicielle génératrice $(H/H_{[e]}, (\overline{U}_a))$ de type Φ_f, ce qui l'apparente à un groupe algébrique réductif, par le groupe pronilpotent $H_{[e]}.U_{f^*}$. Nous retrouverons cette situation plus tard, dans le cas des groupes algébriques semi-

(1) Pour tout groupe X, on note $\mathscr{C}^n(X)$ le n-ième terme de la série centrale descendante de X, de sorte que $\mathscr{C}^1(X) = X$ et $\mathscr{C}^{n+1}(X) = (\mathscr{C}^n(X), X)$, et on pose $\mathscr{C}^\infty(X) = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathscr{C}^n(X)$.

simples sur un corps local : $\overline{G}$ sera alors le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique réductif sur le corps résiduel k et $\mathrm{Ker}(H.U_f \to \overline{G})$ le groupe des points rationnels d'un groupe proalgébrique prounipotent sur k, le « radical prounipotent » de $H.U_f$.

Proposition **(6.4.48)**. — *Soit* $g : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction concave telle que* $g(0) > 0$. *Soit* $f : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ *une fonction quasi-concave majorant la restriction de* g *à* Φ *et soit* X *un sous-groupe de* H *contenant* H_g. *Soient* $(a_1, \ldots, a_m)$ *les éléments de* $\Phi^{\text{réd}}$ *rangés dans un ordre quelconque et soit* $j \in \mathbf{N}$, *avec* $0 \leqslant j \leqslant m$. *Soit*

$$\tau_j : X \times \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} U_{f, a_i} \to X.U_f$$

l'application $(x, u_1, \ldots, u_m) \mapsto u_1 \ldots u_j x u_{j+1} \ldots u_m$.

(i) *L'application* τ_j *est injective.*

(ii) *Si, pour tout* $a \in \Phi$, *le groupe* U_a, *muni de la structure de groupe topologique admettant la famille des* $U_{a,k}$ *(pour* $k \in \mathbf{R}$*) comme système fondamental de voisinages de* 1, *est complet, alors* τ_j *est bijective.*

On se ramène aisément au cas où $j = m$ et où Φ est irréductible, ce que nous supposons désormais. Si Φ est de rang un, la proposition résulte de (DR 6), (6.4.9) et (6.4.10) (notons d'ailleurs que l'hypothèse faite en (ii) est inutile dans ce cas). Supposons désormais Φ irréductible de rang $\geqslant 2$; la valuation φ est alors prolongeable (6.4.35), ce qui nous permettra d'utiliser (6.4.45).

Soit $u \in X.U_f$; on sait ((6.4.9), (6.4.10) et (6.1.6)) qu'il existe une suite $(u_i'')_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et une seule telle que $u_i'' \in U_{f, a_i}$ pour tout i, et que

$$(1) \qquad u \in \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant m,\, a_i \in \Phi^+} u_i''\Big).\Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant m,\, a_i \in \Phi^-} u_i''\Big).X$$

(ce qui entraîne d'ailleurs que τ_j est toujours bijective dès que $a_i \in \Phi^+$ pour $1 \leqslant i \leqslant m/2$). Soient de plus $u_i, u_i' \in U_{f, a_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Il existe alors une fonction h sur Φ, à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ (et non dans $\widetilde{\mathbf{R}}$), supérieure à f'' (avec les notations de (6.4.12) *a)*) et telle que l'on ait

$$u_i, u_i', u_i'' \in U_{a_i, h(a_i)}.U_{2a_i, h(2a_i)} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Pour $a \in \Phi^{\text{réd}}$, on a $h(a) \geqslant f''(a) \geqslant f(a) \geqslant g(a)$ et, lorsque $2a \in \Phi$, on a

$$h(2a) \geqslant f''(2a) \geqslant \inf\{f(2a), 2f(a)\} \geqslant \inf\{g(2a), 2g(a)\} \geqslant g(2a).$$

Soient alors $\lambda \in V$ et $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, tels que $h \geqslant \lambda + k$ (6.4.6).

Posons $Z = H_{[k]}.U_{\lambda+k}$, $Z_n = H_{[nk]}.U_{\lambda+nk}$ (pour $n \in \mathbf{N}^*$) et $Z_\infty = H_{[\infty]}$. Supposons qu'il existe $x, x' \in X$ et $q \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ tels que

$$(2) \qquad u_1 \ldots u_m x = u_1' \ldots u_m' x' \quad \text{modulo } Z_q$$

(notons que Z_q est un sous-groupe distingué de $H.Z$ et que les u_i et les u_i' appartiennent à Z). Nous allons alors montrer, par récurrence sur n, que, pour tout i et tout entier $n \leqslant q$, l'on a

$$(3) \qquad u_i^{-1} u_i' = v_i \in Z_n \cap U_{a_i} = U_{\lambda+nk, a_i}.$$

C'est évident si $n=1$. Si (3) est satisfaite, pour une valeur $n<q$, la relation $(Z, Z_n) \subset Z_{n+1}$ ((6.4.45) (1)) entraîne

$$x' x^{-1} \equiv v_1 \dots v_m \quad \text{mod. } Z_{n+1}.$$

Comme Z_n/Z_{n+1} est commutatif, ceci implique

$$(4) \qquad \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant m,\, a_i \in \Phi^+} v_i\Big) \cdot \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant m,\, a_i \in \Phi^-} v_i\Big) \cdot x x'^{-1} \in Z_{n+1}.$$

En appliquant (6.4.9) au groupe $HZ_{n+1} = HU_{\lambda+nk}$, et compte tenu de (DR 6) et (6.1.6), on voit que (4) entraîne $v_i \in Z_{n+1}$ pour tout i.

Par suite, (3) est vraie pour tout $n \leqslant q$. En prenant $q=\infty$, ceci démontre (i).

Démontrons maintenant que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x^{(n)} \in XH_{[nk]}$ et une suite $(u_i^{(n)})$ tels que $u_i^{(n)} \in U_{\lambda+k, a_i}$ pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant m$, et que

$$(5) \qquad u \equiv u_1^{(n)} \dots u_m^{(n)} x^{(n)} \quad \text{mod. } Z_{n+1}.$$

Remarquons que, si les relations (5) sont vraies pour tout n, alors, vu ce qui précède, on a, pour tout n et tout i

$$(6) \qquad u_i^{(n)} \equiv u_i^{(n+1)} \quad \text{mod. } U_{\lambda+nk, a_i}.$$

Pour $n=1$, la relation (5) est satisfaite en posant $u_i^{(1)} = u_i''$, puisque $(Z, Z) \subset Z_2$. Supposons (5) réalisée pour une valeur de $n \geqslant 1$. Posons $u = u^{(n+1)} u_1^{(n)} \dots u_m^{(n)} x^{(n)}$. En appliquant (6.4.9) à Z_{n+1}, compte tenu de la commutativité de Z_{n+1}/Z_{n+2}, on voit qu'il existe $y \in H_{[(n+1)k]}$ et $v_i \in Z_{n+1} \cap U_{a_i}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant m$) tels que $u^{(n+1)} \equiv v_1 \dots v_m y \bmod Z_{n+2}$. On a alors

$$u = v_1 \dots v_m y u_1^{(n)} \dots u_m^{(n)} x^{(n)} \equiv \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} (v_i u_i^{(n)})\Big) \cdot x^{(n+1)} \bmod Z_{n+2}$$

avec $x^{(n+1)} \in H_{[(n+1)k]} \cdot X$.

Nous avons bien démontré (5), donc (6), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Enfin, supposons l'hypothèse de (ii) satisfaite. Alors, (6) montre que, pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant m$, la suite $(u_i^{(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un élément $v_i \in U_{f, a_i}$. Posons $y = (v_1 \dots v_m)^{-1} u \in XU_f$. On a alors $y = z_1 z_2 h$, avec $z_1 \in U_f^+$, $z_2 \in U_f^-$ et $h \in X$. D'autre part, $y \equiv x^{(n)} \bmod Z_{n+1}$. Appliquant encore une fois (6.4.9) et (DR 6), on en conclut que $z_1 \in U^+ \cap Z_{n+1}$ et $z_2 \in U^- \cap Z_{n+1}$ pour tout entier n, d'où $z_1 = z_2 = 1$ et $y = h \in X$. Par suite, $u = v_1 \dots v_m y$ appartient bien à l'image de τ_m, ce qui achève la démonstration de (ii) et de la proposition.

6.5. Valuations discrètes et doubles systèmes de Tits.

Dans ce numéro, nous conservons les notations de 6.2, notamment celles introduites en (6.2.4), et celles de 6.4 (cf. en particulier (6.4.2) et (6.4.3) pour la signification des symboles P_f et f_Ω), et nous supposons en outre que la valuation φ est discrète. Vu (6.2.22), ceci nous permet de reprendre aussi les notations de 1.3 et de supposer que $A = \mathbf{A}$, $W = \mathbf{W}$, $\Sigma = \mathbf{\Sigma}$.

Théorème. — *Soit* G′ *le sous-groupe de* G *engendré par* $N'=\nu^{-1}(W)$ *et les* U_a $(a \in \Phi)$. *Posons* $T'=T\cap N'$ *et* $B=P_{f_{\mathbf{C}}}$.

(i) *On a* $B\cap N'=H$ *et* $N'/H=\mathbf{W}$. *Le quadruplet* $(G', B, N', \mathbf{S})$ *est un double système de Tits. Si on substitue ce système à celui noté* (G, B, N, S) *au* § 4, *les groupes notés* $\mathfrak{B}^0_D$ *et* $\mathfrak{B}_D$ *en* 4.1 *sont respectivement les groupes* HU^+ *et* $T'U^+$ (*pour* $D=D_0$).

(ii) *L'injection de* G′ *dans* G *est un homomorphisme* (B, N′)*-adapté de type connexe, pour lequel les objets notés* $\hat{N}$, $\hat{\nu}$ *et* $\hat{\mathbf{W}}$ *en* 4.1 *sont respectivement égaux à* N, ν *et* $\hat{W}$.

Ce théorème est une conséquence presque immédiate de (5.2.19) et (5.2.31). Cependant, à l'intention du lecteur qui n'aurait pas lu le § 5 (à l'exception de (5.1.1)), nous en donnerons une autre démonstration, essentiellement basée sur (6.4.9).

Montrons tout d'abord que (i) entraîne (ii). En effet, G est engendré par G′ et T et G′ est normalisé par T, d'où $G=T.G'=N.G'$. Or, si $n\in N$, on a $nN'n^{-1}=N'$ et (6.2.10) (iii) montre que nBn^{-1} est le stabilisateur dans G′ de la chambre $\nu(n).\mathbf{C}$, donc est de la forme $n'Bn'^{-1}$ avec $n'\in N'$. Ceci montre que l'injection de G′ dans G est bien B-N′-adaptée. De plus, on a $N\subset\hat{N}$, d'où $\hat{N}=N.(\hat{N}\cap G')=N.N'=N$ et il est immédiat que $\hat{\nu}=\nu$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Démontrons maintenant (i). Les deux premières relations de (i) résultent respectivement de (6.4.10) et de la définition de N′.

Pour tout $a\in\Phi$, il existe $k\in\Gamma_a$ tel que $\mathbf{C}\subset\alpha_{a,k}$ et on a $U_a=\bigcup_{t\in T'} tU_{a,k}t^{-1}\subset T'BT'$. Par conséquent, $(G', B, N', \mathbf{S})$ satisfait à l'axiome (T 1) de (1.2.6). L'axiome (T 2) résulte du fait que $(\mathbf{W}, \mathbf{S})$ est un système de Coxeter (1.3.4).

Soient $s\in\mathbf{S}$ et $w\in\mathbf{W}$, et soit $\alpha=\alpha_{a,k}\in\Sigma$ défini par les conditions $\mathbf{C}\subset\alpha$ et $s=r_\alpha$ (1.3.3). Vu (6.4.9), on a $U_a\cap sBs^{-1}=U_{\alpha_+}$ (1.3.3) et $U_a\cap B=U_\alpha$. Par conséquent, $sBs^{-1}\neq B$, ce qui établit (T 4). Soit Ψ l'ensemble des racines affines minimales parmi celles contenant $\mathbf{C}$. Posons $\Psi'=\Psi-\{\alpha\}$. Vu (6.4.9), on a

$$B=\Big(\prod_{\beta\in\Psi'}U_\beta\Big).H.U_\alpha \tag{1}$$

à condition de ranger les facteurs du produit entre parenthèses dans un ordre convenable. Comme α est la seule racine affine contenant $\mathbf{C}$ et non $s(\mathbf{C})$, on a $sU_\beta s^{-1}\subset B$ pour tout $\beta\in\Psi'$, donc, en vertu de (1),

$$sB\subset BsU_\alpha. \tag{2}$$

D'autre part, on a aussi

$$(U_\alpha sHU_\alpha\cup U_{(\alpha^*)_+}HU_\alpha).wB\subset BswB\cup BwB. \tag{3}$$

En effet, vu (6.3.3), la parenthèse du premier membre est un groupe, qui contient manifestement $\nu^{-1}(s)$, de sorte que le premier membre de l'inclusion (3) ne change pas si on remplace w par sw. Quitte à effectuer cette substitution au besoin, on peut donc supposer que $w^{-1}(\alpha)\supset\mathbf{C}$, auquel cas (3) est évident puisqu'on a alors $HU_\alpha w\subset wB$. De (2) et (3), il résulte que

$$sBw \subset BsU_\alpha wB \subset BswB \cup BwB$$

ce qui est l'axiome (T 3) de (1.2.6).

Il est ainsi établi que $(G', B, N', \mathbf{S})$ est un système de Tits.

D'après (4.1.5), $g \in \mathfrak{B}^0_D$ si et seulement s'il existe $v \in V$ tel que $t^{-1}gt \in B$ pour tout $t \in T$ tel que $\nu(t) \in v + D$. Comme $B \subset U^-.H.U^+$ (6.4.9), et que U^-, H et U^+ sont normalisés par T, on en déduit successivement $\mathfrak{B}^0_D \subset U^- HU^+$ puis $\mathfrak{B}^0_D = HU^+$ car $\{u \in U^- \mid tut^{-1} \in B \text{ pour } \nu(t) \in v + D\} = \{1\}$. Enfin, on a $\mathfrak{B}_D = T'U^+$ d'après (4.1.5).

Enfin, il résulte de (6.1.12), appliqué à la donnée radicielle $(T', (U_a))$ dans le groupe G', que $(G', T'U^+)$ est un système de Tits, donc que $(G', B, N', \mathbf{S})$ est un double système de Tits. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 1. — Soit $\Omega \subset \mathbf{A}$, $\Omega \neq \emptyset$. Le sous-groupe noté P_Ω en 4.1 n'est autre que le sous-groupe P_{f_Ω} : cela résulte de (5.2.19), mais est aussi conséquence d'un résultat plus général que nous démontrerons en (7.1.11).

Remarque 2. — Soit (V_n) une suite décroissante de sous-groupes de G, formant un système fondamental de voisinages de 1 pour une structure de groupe topologique complet sur G. Supposons de plus que B et les U_a soient des sous-groupes fermés et que la topologie induite sur chaque U_a soit celle définie par les $U_{a,k}$. On voit alors que la condition de (6.4.48) (ii) est satisfaite. De plus, les hypothèses de (2.8.2) le sont aussi : il suffit de considérer une suite croissante de parties bornées convexes (Ω_n) de A, d'intérieur non vide, et telles que $f_{\Omega_n}(a) \geqslant \inf\{k \in \mathbf{R} \mid U_{a,k} \subset V_n\}$ pour tout $a \in \Phi$. On vérifie en effet aussitôt que $P_{\Omega_n} \subset H.V_n$.

7. IMMEUBLE D'UNE DONNÉE RADICIELLE VALUÉE

On conserve les notations des numéros 6.2 à 6.4. Nous avons vu (6.5) que, lorsque la valuation φ est *discrète*, elle définit un système de Tits de type affine et par suite un immeuble sur lequel opère G. Dans ce paragraphe, nous allons construire, sans supposer φ discrète, un espace métrique $\mathscr{I}$ sur lequel opère G, qui s'identifie à l'immeuble de G lorsque φ est discrète et qui, dans le cas général, en conserve certaines structures et propriétés. Bien que $\mathscr{I}$ ne soit plus, dans le cas non discret, un complexe polysimplicial, nous définirons encore ses chambres et ses facettes.

Avant de définir $\mathscr{I}$ au n° 7.3, nous étudierons certains sous-groupes de G, étroitement liés à des cas particuliers des groupes U_f du n° 6.4, et qui sont les généralisations des fixateurs et stabilisateurs étudiés au § 4 dans le cas de l'immeuble d'un système de Tits de type affine. Nous introduirons en particulier des sous-groupes associés aux chambres de A, notés $B_{x, D}$, qui joueront le rôle du groupe B d'un tel système.

Lorsque φ est discrète, les résultats des §§ 7 et 8 se ramènent pour la plupart à des cas particuliers de résultats déjà établis aux §§ 3, 4 et 5, mais que nous retrouvons par une méthode différente. La principale nouveauté de cette approche est évidemment qu'elle s'applique aussi au cas des valuations non discrètes, en particulier au cas des valuations *denses*, i.e. telles que, pour toute racine $a \in \Phi$, l'image $\Gamma_a = \varphi_a(U_a^*)$ est dense dans $\mathbf{R}$ (remarquons que, lorsque Φ est irréductible, ceci équivaut à la densité de Γ_a dans $\mathbf{R}$ pour *une* racine $a \in \Phi$).

Si D est une chambre vectorielle de Φ, nous notons Φ_D^+ (resp. Φ_D^-) l'ensemble des racines $a \in \Phi$ positives (resp. négatives) sur D, Π_D la base de Φ correspondante et U_D^+ (resp. U_D^-) le sous-groupe de G engendré par les U_a pour $a \in \Phi_D^+$ (resp. $a \in \Phi_D^-$).

7.1. Les sous-groupes $\mathbf{P}_\Omega$ et $\hat{\mathbf{P}}_\Omega$.

(7.1.1) Soit Ω une partie non vide de l'espace affine A (6.2.6). En (6.4.3), nous lui avons fait correspondre une fonction concave $f_\Omega : \Phi \to \mathbf{R}$ en posant, pour $a \in \Phi$:

$$f_\Omega(a) = \inf\{k \in \mathbf{R} \mid a(x) + k \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \Omega\}$$

(désormais, nous identifions A à l'espace vectoriel V par le choix de l'origine φ, ce qui nous permet aussi de considérer les éléments de V^*, et en particulier les racines $a \in \Phi$, comme des fonctions sur A; de même, un élément $x \in A$ définit une fonction linéaire $a \mapsto -a(x)$ sur Φ, que nous noterons encore parfois x). A cette fonction concave f_Ω, on associe comme en (6.4.2) le sous-groupe U_{f_Ω} engendré par la réunion des $U_{a,f_\Omega(a)}$ pour $a \in \Phi$ et le sous-groupe $P_{f_\Omega} = H.U_{f_\Omega}$, que nous noterons plus simplement U_Ω et P_Ω. Comme $U_{a,f_\Omega(a)}$ est la réunion des $U_{a,k}$ pour $k \in \Gamma_a$ et $k \geqslant f_\Omega(a)$, on voit que U_Ω *est engendré par la réunion des sous-groupes* U_α, *où* α *décrit l'ensemble des racines affines* (6.2.6) *contenant* Ω (cf. (5.2.30)).

(7.1.2) Il est clair que U_Ω et P_Ω ne dépendent que de l'intersection des racines affines contenant Ω, c'est-à-dire de l'ensemble

$$\mathrm{cl}(\Omega) = \bigcap_{a \in \Phi,\, k \in \Gamma_a,\, k \geqslant f_\Omega(a)} \{x \in A \mid a(x) + k \geqslant 0\}.$$

L'ensemble $\mathrm{cl}(\Omega)$, que nous appellerons encore *enclos* de Ω, est une partie convexe fermée de A; nous dirons encore que Ω est *close* si $\Omega = \mathrm{cl}(\Omega)$ (cf. (2.4.4)).

(7.1.3) Nous avons vu (6.4.10) que le sous-groupe $N_{f_\Omega} = N \cap U_\Omega$ possède la propriété suivante : son image $\nu(N_{f_\Omega})$ dans $\widehat{W} = \nu(N) = N/H$ est le sous-groupe engendré par les réflexions $r_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \Gamma'_a$ tels que $\Omega \subset \{x \in A \mid a(x) + k = 0\}$, donc s'identifie au groupe de Weyl du système de racines $\Phi_\Omega = \Phi_{f_\Omega}$ formé des racines $a \in \Phi$ pour lesquelles il existe $k \in \Gamma'_a$ avec $a(\Omega) = \{-k\}$. Nous poserons

$$N_\Omega = H.N_{f_\Omega} = H.(N \cap U_\Omega) = N \cap P_\Omega.$$

Lorsque Ω est réduit à un point x, nous écrirons U_x, P_x, etc. au lieu de $U_{\{x\}}$, $P_{\{x\}}$, etc.

Notons enfin que l'application qui à $\Omega \subset A$, $\Omega \neq \emptyset$, fait correspondre U_Ω (resp. P_Ω, N_Ω, Φ_Ω) est décroissante pour l'inclusion.

(7.1.4) Comme en (1.3.11), nous appellerons *quartier* de A l'ensemble $x + D$ des transformés d'un point $x \in A$ (appelé *sommet* du quartier) par les éléments d'une chambre vectorielle D (appelée *direction* du quartier). On a $U_{x+D} \subset U_D^+$ et $N_{x+D} = H$. Si $\Omega \subset A$ contient un quartier de direction D, on a donc aussi $U_\Omega \subset U_D^+$ et $N_\Omega = H$. Plus généralement, pour toute partie non vide Ω de A, on a

$$P_\Omega \cap U_D^+ = U_{\Omega+D}, \qquad P_\Omega \cap U_D^- = U_{\Omega-D} \tag{1}$$

d'où, d'après (6.4.9),

$$P_\Omega = N_\Omega . U_{\Omega+D} . U_{\Omega-D} \tag{2}$$

pour toute chambre vectorielle D.

Proposition **(7.1.5)**. — *Soient* Ω *et* Ω' *deux parties non vides de* A *et soit* D *une chambre vectorielle.*

(i) *Si* $\Omega' \subset \Omega + \overline{D}$, *on a*

$$P_\Omega . P_{\Omega'} \subset N_\Omega . U_D^- . U_{\Omega'+D} . N_{\Omega'}.$$

(ii) *Si* $\Omega' \subset \Omega + \overline{D}$ *et* $\Omega \subset \Omega' - \overline{D}$, *on a*

$$P_\Omega . P_{\Omega'} = N_\Omega . U_{\Omega-D} . U_{\Omega'+D} . N_{\Omega'}.$$

Vu (7.1.4) (2) on a

$$P_\Omega P_{\Omega'} = N_\Omega U_{\Omega-D} U_{\Omega+D} U_{\Omega'+D} U_{\Omega'-D} N_{\Omega'}.$$

Si $\Omega' \subset \Omega + \overline{D}$, on a aussi $\Omega' + D \subset \Omega + \overline{D}$ et $U_{\Omega'+D} \supset U_{\Omega+D}$. Par suite

$$P_\Omega P_{\Omega'} = N_\Omega U_{\Omega-D} P_{\Omega'} = N_\Omega U_{\Omega-D} U_{\Omega'-D} U_{\Omega'+D} N_{\Omega'}$$

d'où (i), puisque $U_{\Omega-D} U_{\Omega'-D} \subset U_D^-$. Si de plus $\Omega \subset \Omega' - \overline{D}$, on a $U_{\Omega'-D} \subset U_{\Omega-D}$, d'où (ii).

Corollaire **(7.1.6)**. — *Soient x un point de* A *et* Ω *une partie non vide de* A. *Il existe une chambre vectorielle* D *telle que*

$$P_\Omega . P_x \subset N_\Omega . U_D^- . U_{x+D} . N_x.$$

Il suffit de choisir un point $y \in \Omega$, de choisir D de telle sorte que $x - y \in \overline{D}$ et d'appliquer (7.1.5) (i).

Corollaire **(7.1.7)**. — *Soient x et y deux points de* A. *Il existe une chambre vectorielle* D *telle que*

$$P_y . P_x = N_y . U_{y-D} . U_{x+D} . N_x.$$

Il suffit de choisir D de telle sorte que $x - y \in \overline{D}$ et d'appliquer (7.1.5) (ii).

(7.1.8) Soit toujours $\Omega \subset A$, $\Omega \neq \emptyset$. Il est clair que $\nu(n)(x) = x$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $n \in N_\Omega$. Nous désignerons par $\hat{N}_\Omega$ le fixateur de Ω dans N :

$$\hat{N}_\Omega = \{n \in N \mid \nu(n)(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\}.$$

On a $N_\Omega \subset \hat{N}_\Omega$ et il est immédiat que $\hat{N}_\Omega$ normalise P_Ω, puisque N permute les racines affines (6.2.10). Par suite,

$$\hat{P}_\Omega = \hat{N}_\Omega . P_\Omega = \hat{N}_\Omega . U_\Omega$$

est un groupe, ayant P_Ω et U_Ω comme sous-groupes distingués. Pour toute chambre vectorielle D, on a

$$\hat{P}_\Omega = \hat{N}_\Omega . U_{\Omega+D} . U_{\Omega-D}$$

et on déduit immédiatement de (6.1.15) que

$$(1) \qquad \hat{P}_\Omega \cap U_D^+ = U_{\Omega+D}, \qquad \hat{P}_\Omega \cap U_D^- = U_{\Omega-D} \qquad \text{et} \qquad \hat{P}_\Omega \cap N = \hat{N}_\Omega.$$

L'application $\Omega \mapsto \hat{P}_\Omega$ est décroissante pour l'inclusion. D'autre part, pour tout $n \in N$ et tout $\Omega \subset A$, $\Omega \neq \emptyset$, on a

$$n P_\Omega n^{-1} = P_{\nu(n)(\Omega)} \qquad \text{et} \qquad n \hat{P}_\Omega n^{-1} = \hat{P}_{\nu(n)(\Omega)}.$$

On vérifie aussitôt que les notations $\hat{N}_\Omega$ et $\hat{P}_\Omega$ sont cohérentes, dans le cas d'une valuation discrète, avec celles du § 4.

Proposition **(7.1.9)**. — *Soit* Ω *une partie non vide de* A. *Si la valuation* φ *est* dense, *on a*

$$\hat{N}_{\mathrm{cl}(\Omega)} = \hat{N}_\Omega \qquad \textit{et} \qquad \hat{P}_{\mathrm{cl}(\Omega)} = \hat{P}_\Omega.$$

Puisque $U_{cl(\Omega)} = U_\Omega$ (7.1.2), la première égalité entraîne la seconde.

Comme $\Omega \neq \emptyset$, l'ensemble L des points fixes de $\hat{N}_\Omega$ dans A est un sous-espace affine de A, dont la direction L^0 est le sous-espace vectoriel de V lieu des points fixes du sous-groupe ${}^v\nu(\hat{N}_\Omega)$ du groupe de Weyl ${}^vW$ de Φ. Or, on sait que L^0 est alors l'intersection des noyaux des racines de Φ qui le contiennent. Par suite, L est l'intersection des hyperplans de A parallèles à un mur de A et contenant Ω, ou encore l'intersection des demi-espaces fermés M de A, équipollents à une racine affine et contenant Ω. Mais, un tel demi-espace, sans être nécessairement lui-même une racine affine, est intersection de racines affines puisque φ est dense. Par suite, L est clos et $cl(\Omega) \subset L$, d'où la proposition.

Remarquons que lorsque φ est discrète, les égalités de la proposition (7.1.9) sont encore vraies lorsque Ω contient un ouvert non vide, mais ne le sont pas nécessairement dans le cas général.

Remarque **(7.1.10)**. — Soit $x \in A$; on a $\hat{N}_x = \nu^{-1}(\hat{W}_x)$, où $\hat{W}_x$ est le stabilisateur de x dans $\hat{W} = \nu(N)$. Lorsque G est engendré par H et les U_a (cas « simplement connexe ») et que φ est discrète, $\hat{W} = W$ est le groupe de Weyl affine du système de racines ${}^v\Sigma$ (1.3.8) et est engendré par les réflexions par rapport aux murs de A. On sait que $\hat{W}_x$ est alors engendré par les réflexions par rapport aux murs de A passant par x (1.3.5). Par suite, on a $\hat{N}_x = N_x$ et $\hat{P}_x = P_x$.

Ceci n'est plus nécessairement exact lorsque φ n'est pas discrète, même si l'on suppose que G est engendré par les U_a et que les Γ_a sont des groupes pour tout $a \in \Phi$.

Exemples. — 1) Supposons $\Phi = \{a, -a\}$ de type A_1 et φ spéciale. Le groupe W est alors le groupe des transformations de la forme $x \mapsto \varepsilon x + \gamma a^\vee$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\gamma \in \tilde{\Gamma}_a$ (où $\tilde{\Gamma}_a$ est le groupe engendré par Γ_a) (6.2.20). Les points $x \in A$ appartenant à un mur de A sont les points de la forme $(1/2)\gamma a^\vee$ avec $\gamma \in \Gamma_a$, tandis que les points x pour lesquels il existe un élément non trivial de W les stabilisant sont les points $(1/2)\gamma a^\vee$ pour $\gamma \in \tilde{\Gamma}_a$. On voit donc que, si Γ_a n'est pas un groupe, il y a des points $x \in A$ tels que $\hat{N}_x \neq N_x$, même si l'on suppose que $\hat{W} = W$.

2) Soit K un corps valué pour une valuation ω; soit $\Gamma = \omega(K^*)$ et supposons que $\Gamma/2\Gamma$ soit un espace vectoriel de dimension > 1 sur le corps $\mathbf{F}_2$. Prenons pour G le groupe des points rationnels sur K d'un groupe algébrique simple déployé sur K de type G_2 (nécessairement simplement connexe), muni de la donnée radicielle valuée définie en (6.2.3) *b)*. Soient λ et μ deux éléments de Γ dont les images dans $\Gamma/2\Gamma$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{F}_2$; posons $x = (1/2)(\lambda a^\vee + \mu b^\vee)$, où a, b sont les deux racines d'une base du système de racines de G. On vérifie alors aisément que la symétrie par rapport à x appartient au stabilisateur de x dans $\hat{W} = W$ et que cependant aucun mur de A ne passe par x. On a donc $\hat{N}_x \neq N_x$.

Proposition **(7.1.11)**. — *Soit* $\Omega \subset A$, $\Omega \neq \emptyset$. *On a*

$$\hat{P}_\Omega = \bigcap_{x \in \Omega} \hat{P}_x.$$

Montrons tout d'abord que, pour $\Omega\subset A$, $\Omega\neq\emptyset$, et $x\in A$, on a

$$\hat{P}_\Omega\cap\hat{P}_x=\hat{P}_{\Omega\cup\{x\}}. \tag{1}$$

Soit en effet $y\in\Omega$ et soit D une chambre vectorielle telle que $x-y\in\overline{D}$. On a alors $U_{\Omega+D}\subset U_{y+D}\subset U_{x+D}$. Soit $g\in\hat{P}_\Omega\cap\hat{P}_x$. Posons $g=nvu$, avec $n\in\hat{N}_\Omega$, $v\in U_{\Omega-D}$ et $u\in U_{\Omega+D}$ (7.1.8). Comme $u\in U_{x+D}\subset\hat{P}_x$, on a $gu^{-1}\in\hat{P}_x$, d'où $nv=n'u'v'$, avec $n'\in\hat{N}_x$, $u'\in U_{x+D}$ et $v'\in U_{x-D}$. Par suite $n'^{-1}n=u'(v'v^{-1})\in U^+_D.U^-_D$, d'où, d'après (6.1.15), $n'=n$ et d'après (DR 6), $v'=v$. On en déduit que $n\in\hat{N}_x\cap\hat{N}_\Omega=\hat{N}_{\Omega\cup\{x\}}$, $v\in U_{\Omega-D}\cap U_{x-D}$ et $u\in U_{\Omega+D}\cap\hat{P}_x$. Or, il résulte immédiatement de (7.1.8) (1) et (6.4.9) que

$$U_{\Omega-D}\cap\hat{P}_x=U_{(\Omega\cup\{x\})-D} \quad \text{et} \quad U_{\Omega+D}\cap\hat{P}_x=U_{(\Omega\cup\{x\})+D},$$

d'où (1).

De (1), on déduit aussitôt par récurrence sur k que, pour $x_1,\ldots,x_k$ dans Ω, on a

$$\hat{P}_{\{x_1,\ldots,x_k\}}=\hat{P}_{x_1}\cap\ldots\cap\hat{P}_{x_k}.$$

Il nous suffit maintenant de montrer que, si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante croissante (pour l'inclusion) de parties non vides de A, de réunion Ω, on a

$$\hat{P}_\Omega=\bigcap_{i\in I}\hat{P}_{\Omega_i}.$$

On peut évidemment supposer que les Ω_i contiennent tous un même point x. On a alors $H\subset\hat{N}_{\Omega_i}\subset\hat{N}_x$ pour tout i, et $\hat{N}_x/H$ est fini. Soit $g\in\bigcap_i\hat{P}_{\Omega_i}$; choisissons une chambre vectorielle D et écrivons, pour chaque $i\in I$,

$$g=n_iu_iv_i \quad \text{avec} \quad n_i\in\hat{N}_{\Omega_i},\ u_i\in U_{\Omega_i+D} \quad \text{et} \quad v_i\in U_{\Omega_i-D}.$$

Quitte à extraire une sous-famille cofinale, on peut supposer qu'il existe $n\in\hat{N}_x$ tel que $n_i=nh_i$, avec $h_i\in H$ pour tout $i\in I$. Vu (DR 6), les relations $h_iu_iv_i=h_ju_jv_j$ pour $i,j\in I$ entraînent que h_i, u_i et v_i sont indépendants de i, et appartiennent respectivement à H, à $\bigcap_i U_{\Omega_i+D}=U_{\Omega+D}$ et $\bigcap_i U_{\Omega_i-D}=U_{\Omega-D}$. Comme $n\in\bigcap_i\hat{N}_{\Omega_i}=\hat{N}_\Omega$, on en déduit $g\in\hat{P}_\Omega$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(7.1.12).** — *Soient Ω et Ω' deux parties non vides de* A. *On a*

$$\hat{P}_\Omega\cap\hat{P}_{\Omega'}=\hat{P}_{\Omega\cup\Omega'}.$$

Remarque **(7.1.13).** — Si Ω et Ω' sont deux parties non vides de A, on a $f_{\mathrm{cl}(\Omega\cup\Omega')}=\sup(f_\Omega,f_{\Omega'})$. On pourrait chercher à généraliser (7.1.12) en montrant que $U_f\cap U_g\subset HU_{\sup(f,g)}$ dès que f et g sont des fonctions concaves sur Φ, ce qui entraîne que $\sup(f,g)$ est aussi concave. Mais cette assertion est en général inexacte. Prenons par exemple pour G le groupe des points rationnels sur K d'un groupe algébrique simple déployé de type G_2 sur un corps K valué pour une valuation non impropre, muni de la donnée radicielle définie en (6.2.3) *b)*. Soit (a, b) une base de Φ, b étant la racine longue. Posons, pour $c \in \Phi$:

$$\begin{array}{llll} f(c)=0 & \text{si } c=\pm a, \pm(2b+3a) & f(c)=0+ & \text{sinon} \\ g(c)=0 & \text{si } c=\pm(b+a), \pm(b+3a) & g(c)=0+ & \text{sinon.} \end{array}$$

On vérifie aisément que f et g sont concaves et que $U_f \cap U_g \not\subset HU_{\sup(f,g)}$: en effet, $N_{\sup(f,g)} \subset H$ alors que $N_f \cap N_g$ contient un élément dont l'image dans ${}^vW$ est égale à -1.

7.2. Chambres et facettes de A.

(7.2.1) Soit X un ensemble et soit $\mathscr{F}$ une base de filtre sur X; nous appellerons *germe* de $\mathscr{F}$ le filtre engendré par $\mathscr{F}$. Si Y est une partie de X, nous dirons que le germe γ de $\mathscr{F}$ est *contenu* dans Y s'il existe un élément de γ (ou de $\mathscr{F}$) qui est contenu dans Y. Plus généralement, s'il existe $Z \in \gamma$ tel que $Y \cap Z = \emptyset$, nous poserons $\gamma \cap Y = \emptyset$; sinon, les intersections $Z \cap Y$ pour $Z \in \gamma$ forment une base de filtre sur X, dont nous désignerons le germe par $\gamma \cap Y$: il est contenu dans Y.

Si X est un espace topologique, on appellera *adhérence* de γ et on notera $\overline{\gamma}$ le germe associé à la base de filtre formée des adhérences des éléments de γ (ou de $\mathscr{F}$). On dira que γ est d'*intérieur non vide* si les intérieurs des éléments de γ sont non vides; ceux-ci forment alors une base de filtre dont le germe sera appelé l'*intérieur* de γ. On dira que γ est *ouvert* s'il est égal à son intérieur.

(7.2.2) Soit $\mathscr{F}$ une base de filtre sur l'espace affine A. La famille des U_Ω pour $\Omega \in \mathscr{F}$ est filtrante croissante pour l'inclusion; sa réunion est donc un sous-groupe de G, qui ne dépend que du germe γ de $\mathscr{F}$; on le notera U_γ. On définit de manière analogue les sous-groupes N_γ, P_γ, $\hat{N}_\gamma$, $\hat{P}_\gamma$ et le système de racines Φ_γ.

(7.2.3) Soit D une chambre vectorielle. Les quartiers de A de direction D forment une base de filtre. Le germe associé sera noté $\gamma(D)$ et appelé le *germe de quartier* de direction D de A. Il est immédiat que

$$U_{\gamma(D)} = U_D^+ \quad \text{et} \quad P_{\gamma(D)} = \hat{P}_{\gamma(D)} = H.U_D^+.$$

(7.2.4) Soient x un point de A et E un cône convexe non vide de sommet o de V, qui soit ouvert dans le sous-espace vectoriel qu'il engendre. Nous noterons $\gamma(x, E)$ le germe de la base de filtre formée des parties X de A possédant les deux propriétés suivantes : X est intersection de racines affines et de complémentaires de racines affines et il existe un voisinage Y de x dans A tel que $X \cap (x+E) \supset Y \cap (x+E)$. On pose

$$U_{x,E} = U_{\gamma(x,E)}, \qquad P_{x,E} = P_{\gamma(x,E)}, \qquad \text{etc.}$$

On appelle *facette* de A un germe de la forme $\gamma(x, E)$, où E est soit réduit à $\{0\}$, soit une demi-droite ouverte d'origine o dans V. Pour qu'un germe $\gamma(x, E)$ soit une facette, il faut et il suffit que pour toute racine $a \in \Phi_x$, le cône convexe E ou bien soit contenu dans l'hyperplan $\{v \in V \mid a(v)=0\}$, ou bien ne rencontre pas cet hyperplan.

C'est en particulier le cas si E est une facette vectorielle de Φ. On posera alors $F_{x,E}=\gamma(x, E)$. Si E est une chambre vectorielle, la facette $F_{x,E}$ sera appelée une *chambre* de A et sera notée aussi $C_{x,E}$.

Deux facettes $F_{x,E}$ et $F_{x',E'}$ sont égales si et seulement si elles sont contenues dans les mêmes racines affines, ou encore, ce qui revient au même, si l'on a $P_{x,E}=P_{x',E'}$. Lorsque φ est dense, ceci entraîne $x=x'$. Dans tous les cas, on a $F_{x,E}=F_{x,E'}$ si et seulement si les projections canoniques de E et E' dans le dual du sous-espace vectoriel de V engendré par Φ_x sont contenues dans une même facette vectorielle de Φ_x. L'image réciproque E'' de cette facette vectorielle dans V, que nous appellerons aussi, par abus de langage, une facette vectorielle de Φ_x dans V, est donc le plus grand cône convexe de V tel que $F_{x,E}=F_{x,E''}$ et l'application $E''\mapsto F_{x,E''}$ est une bijection de l'ensemble des facettes vectorielles de Φ_x dans V sur l'ensemble des facettes de la forme $F_{x,E}$. La facette vectorielle E'' est appelée la *direction* de $F_{x,E''}$ en x et on appelle *dimension* de $F_{x,E''}$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par E''. On vérifie aisément que cette dimension ne dépend pas du choix de x et que l'ensemble des $X\in F_{x,E''}$ qui sont des parties convexes de $x+E''$ dont tous les points sont internes, est une base du filtre $F_{x,E''}$. Pour qu'une facette F soit une chambre, il faut et il suffit que $\dim F=\dim V$.

Toute facette F est contenue dans l'adhérence d'au moins une chambre C; on a alors $P_C\subset P_F$. Plus généralement, pour qu'une facette F soit contenue dans l'adhérence d'une facette F', il faut et il suffit que l'on ait $P_F\supset P_{F'}$.

(7.2.5) Lorsque φ est discrète, on retrouve ainsi, à une identification canonique près, les notions de chambres et facettes déjà vues : on vérifie en effet qu'une facette (resp. chambre) au sens de (7.2.4) n'est autre que le filtre formé de toutes les parties de A contenant une facette (resp. chambre) au sens du § 2.

Lorsque φ est dense, on voit immédiatement que $\gamma(x, E)$ est le filtre formé de toutes les parties X de A pour lesquelles il existe un voisinage Y de x dans A tel que $X\cap(x+E')\supset Y\cap(x+E')$, où E' est la direction de $\gamma(x, E)$ en x.

Dans tous les cas, on appellera *centre* d'une facette $F_{x,E}$ la limite suivant le filtre $\gamma(x, E)$ des centres de gravité des parties compactes appartenant à $\gamma(x, E)$. Lorsque φ est discrète, on retrouve ainsi le centre de gravité de la facette $F_{x,E}$; lorsque φ est dense, le centre de $F_{x,E}$ est x.

(7.2.6) Soit $x\in A$ et soit D une chambre vectorielle. Comme la chambre $C_{x,D}$ est ouverte dans A (au sens de (7.2.1)), tout élément de $\hat{N}_{x,D}$ laisse fixes tous les points d'un ouvert non vide de A et par suite appartient à H. On a donc $\hat{P}_{x,D}=P_{x,D}$. Nous poserons

$$B_{x,D}=P_{x,D}=\hat{P}_{x,D}.$$

On vérifie immédiatement que l'on a $U_{x,D}=U_{f_{x,D}}$, où la fonction $f_{x,D}:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ est définie par

$$(1)\qquad \begin{cases} f_{x,D}(a)=-a(x) & \text{si } a\in\Phi_D^+ \\ f_{x,D}(a)=(-a(x))+ & \text{si } a\in\Phi_D^-. \end{cases}$$

On a $\Phi_{x,\mathrm{D}}=\emptyset$, $\mathrm{N}_{x,\mathrm{D}}=\mathrm{H}$ et, en tenant compte de ce que $f_{x,\mathrm{D}}(2a)=2f_{x,\mathrm{D}}(a)$ lorsque a, $2a\in\Phi$, on tire de (6.4.9) que

(2) $$\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}=\mathrm{H}.\mathrm{U}_{x,\mathrm{D}}=\prod_{a\in\Phi_{\mathrm{D}}^{+\mathrm{réd}}}\mathrm{U}_{a,-a(x)}.\mathrm{H}.\prod_{a\in\Phi_{\mathrm{D}}^{-\mathrm{réd}}}\mathrm{U}_{a,-a(x)+}.$$

Plus généralement, si Δ est une autre chambre vectorielle, on a

(3) $$\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}=\prod_{a\in\Phi_{\Delta}^{+\mathrm{réd}}}\mathrm{U}_{a,f_{x,\mathrm{D}}(a)}.\mathrm{H}.\prod_{a\in\Phi_{\Delta}^{-\mathrm{réd}}}\mathrm{U}_{a,f_{x,\mathrm{D}}(a)}.$$

Rappelons (6.4.9) que (2) et (3) représentent en réalité des décompositions de $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ en produit direct (ensembliste) et que la place du facteur H, que nous avons mis « au milieu », est sans importance.

Plus généralement, soit $\mathrm{F}=\gamma(x,\mathrm{E})$ une facette. On a $\mathrm{U}_{\mathrm{F}}=\mathrm{U}_{f_{\mathrm{F}}}$ où la fonction $f_{\mathrm{F}}:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ est définie par

$f_{\mathrm{F}}(a)=-a(x)$ si la racine a est positive ou nulle sur E

$f_{\mathrm{F}}(a)=-a(x)+$ si la racine a est strictement négative sur E.

(7.2.7) Soit $x\in\mathrm{A}$. Considérons la fonction $f_x^*:\Phi\to\widetilde{\mathbf{R}}$ associée comme en (6.4.23) à la fonction linéaire $f_x: a\mapsto -a(x)$. On a $f_x^*(a)=-a(x)+$ pour tout $a\in\Phi_x$. Reprenons les notations de (6.4.18) et posons $\mathrm{H}_x^*=\mathrm{H}_{f_x,f_x^*}$: c'est un sous-groupe distingué de H et nous avons vu ((6.4.23) et (6.4.27)) que

$$\mathrm{P}_x^*=\mathrm{H}_x^*.\mathrm{U}_{f_x^*}$$

est un sous-groupe distingué de $\mathrm{P}_x=\mathrm{H}.\mathrm{U}_{f_x}$; de plus, le groupe quotient $\overline{\mathrm{G}}_x=\mathrm{P}_x/\mathrm{P}_x^*$ est muni d'une donnée radicielle $(\overline{\mathrm{T}},(\overline{\mathrm{U}}_a)_{a\in\Phi_x})$ de type Φ_x, où $\overline{\mathrm{T}}$ (resp. $\overline{\mathrm{U}}_a$) est l'image canonique de H (resp. $\mathrm{U}_{a,-a(x)}$) dans $\overline{\mathrm{G}}_x$. On voit alors aisément que, si D est une chambre vectorielle, *le sous-groupe* $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ *est l'image réciproque dans* P_x *du sous-groupe parabolique minimal* $\overline{\mathrm{T}}\overline{\mathrm{U}}_{\mathrm{D}}^+$ *de* $\overline{\mathrm{G}}_x$ (6.1.12) engendré par $\overline{\mathrm{T}}$ et les $\overline{\mathrm{U}}_a$ pour $a\in\Phi_x\cap\Phi_{\mathrm{D}}^+$. Plus généralement, les $\mathrm{P}_{x,\mathrm{E}}$ sont les images réciproques des sous-groupes paraboliques de $\overline{\mathrm{G}}_x$ associées aux différentes facettes vectorielles de Φ_x.

Remarquons par ailleurs que P_x^* est un sous-groupe distingué de $\hat{\mathrm{P}}_x$ et que l'injection canonique de $\mathrm{P}_x/\mathrm{P}_x^*$ dans $\hat{\mathrm{P}}_x/\mathrm{P}_x^*$ est adaptée au système de Tits de $\overline{\mathrm{G}}_x$ ((1.2.13) et (6.1.12)).

7.3. Décomposition d'Iwasawa et décomposition de Bruhat.

Dans ce numéro, nous allons démontrer que les sous-groupes $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ associés aux chambres de A donnent lieu à des « décompositions d'Iwasawa » $\mathrm{G}=\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^+.\mathrm{N}.\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ et à des « décompositions de Bruhat » $\mathrm{G}=\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.\mathrm{N}.\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$. Dans le cas où φ est discrète, nous retrouvons donc simplement par une autre méthode des résultats antérieurs ((1.2.7) et (5.1.3)). Notons cependant que la « formule de Schiffmann » (7.3.3) n'a pas encore été démontrée dans le cas discret.

Proposition (**7.3.1**). — *Soient* D *et* D′ *deux chambres vectorielles et soit* x *un point de* A.

(i) *On a* $G=U_D^+.N.B_{x,D'}$.

(ii) *Plus précisément, l'application naturelle de* $\hat{W}=N/H$ *dans l'ensemble des doubles classes* $U_D^+\backslash G/B_{x,D'}$ *est bijective.*

Posons $U=U_D^+$, $B=B_{x,D'}$, $Z=U.N.B$ et, pour $a\in\Phi$, $f(a)=f_{x,D'}(a)$: il existe $k\in\mathbf{R}$ tel que, ou bien $f(a)=k$ et $f(-a)=-k+$, ou bien $f(a)=k+$ et $f(-a)=-k$. On note B_a le sous-groupe de G engendré par $U_{a,f(a)}$, $U_{-a,f(-a)}$ et H. Rappelons que l'on a, d'après (6.3.2),

$$B_a=HU_{a,f(a)}U_{-a,f(-a)}=HU_{-a,f(-a)}U_{a,f(a)}.$$

(1) Soit $a\in\Phi$. Nous allons montrer que le groupe L_a engendré par U_a, U_{-a} et T est contenu dans $Z_a=U_a.T.\{1, m_a\}.B_a$, où m_a est un élément quelconque de $M_a^0\subset N$ (cf. (6.1.2) (2)). Vu (6.1.2) (7), il suffit de montrer que $U_aTm_aU_a\subset Z_a$, ou encore que $m_au\in Z_a$ pour tout $u\in U_a$. Si $\varphi_a(u)\geqslant f(a)$, c'est évident puisque $u\in B_a$. Si $\varphi_a(u)<f(a)$, on peut écrire $u=v'mv''$, avec $m\in M_a^0$ et $v', v''\in U_{-a}$; de plus ((6.2.2) (V 5 *bis*)), on a $\varphi_{-a}(v'')=-\varphi_a(u)$ et on vérifie immédiatement que, dans les deux cas possibles (i.e. $f(a)\in\mathbf{R}$ ou $f(a)\in\mathbf{R}+$), ceci entraîne que v'' appartient à B_a. On a alors

$$m_au=m_av'm_a^{-1}.m_am.v''\in U_a.T.B_a\subset Z_a$$

puisque $m_aU_{-a}m_a^{-1}=U_a$ et que $M_a^2\subset T$ ((6.1.2) (5)).

(2) Soit maintenant a une racine simple pour la chambre vectorielle D. Nous allons montrer que

$$U_{-a}.Z\subset Z.$$

D'après (DR 2), le sous-groupe U'_a de U^+ engendré par les U_b pour $b\in\Phi_D^+$ et $b\neq a$, est normalisé par U_a et U_{-a} et on a (6.1.6) $U^+=U'_a.U_a$. Par suite,

$$U_{-a}.Z=U_{-a}U'_aU_aNB=U'_aU_{-a}U_aNB\subset U'_a.L_a.N.B.$$

D'après (1), on a donc

$$U_{-a}Z\subset UT\{1, m_a\}B_aNB\subset(UTU_aU_{-a}NB)\cup(UTm_aU_{-a}U_aNB).$$

Comme $UTU_a=UT$ et que $m_aU_{-a}U_am_a^{-1}=U_aU_{-a}$, on voit qu'il suffit de démontrer que

$$un\in Z \quad \text{pour tout } n\in N \text{ et tout } u\in U_{-a}.$$

Posons alors $v=n^{-1}un$; on a $v\in U_b$, avec $b=-{}^v\nu(n^{-1})(a)$. En appliquant (1) à la racine $-b$, on en tire, puisque $v\in L_{-b}$:

$$un=nv\in nU_{-b}NB=nU_{-b}n^{-1}nNB=U_aNB\subset Z.$$

(3) Par suite, Z est stable par multiplication à gauche par les U_{-a} pour $a\in\Pi_D$; mais il est évident qu'il est aussi stable par multiplication à gauche par les U_a pour $a\in\Phi_D^+$ et par T, donc par G tout entier (6.1.4); ceci achève la démonstration de (i).

(4) Soient $n, n' \in \mathrm{N}$ tels que $n' \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+} n\mathrm{B}$. Posons $\Delta = {}^{v}\nu(n^{-1})(\mathrm{D})$. Vu (7.2.6) (3), on a

$$n'^{-1}n \in \mathrm{B}.\mathrm{U}_{\Delta}^{+} = \mathrm{H}.(\mathrm{U}_{\Delta}^{-} \cap \mathrm{B}).\mathrm{U}_{\Delta}^{+}$$

d'où $n'^{-1}n \in \mathrm{H}$ d'après (6.1.15). Ceci démontre (ii).

Corollaire **(7.3.2).** — (i) *L'application naturelle de* N/N_x (resp. $\mathrm{N}/\hat{\mathrm{N}}_x$) *dans* $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}\backslash \mathrm{G}/\mathrm{P}_x$ (resp. $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}\backslash \mathrm{G}/\hat{\mathrm{P}}_x$) *est bijective.*

(ii) *Si x est un point spécial de* A (6.2.13), *l'application naturelle de* T/H *dans* $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}\backslash \mathrm{G}/\mathrm{P}_x$ *est bijective.*

Démontrons (i). Compte tenu de (7.3.1) (i), il suffit de montrer que, si $n, n' \in \mathrm{N}$ satisfont à $n' \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+} n\mathrm{P}_x$ (resp. $n' \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+} n\hat{\mathrm{P}}_x$), on a $n \in n'\mathrm{N}_x$ (resp. $n \in n'\hat{\mathrm{N}}_x$). Or, on a alors, en posant comme plus haut $\Delta = {}^{v}\nu(n^{-1})(\mathrm{D})$:

$$n'^{-1}n \in \mathrm{P}_x.\mathrm{U}_{\Delta}^{+} = \mathrm{N}_x.(\mathrm{U}_{\Delta}^{-} \cap \mathrm{P}_x).\mathrm{U}_{\Delta}^{+} \qquad (\text{resp. } n'^{-1}n \in \hat{\mathrm{N}}_x.(\mathrm{U}_{\Delta}^{-} \cap \hat{\mathrm{P}}_x).\mathrm{U}_{\Delta}^{+})$$

((7.1.4) et (7.1.8)) et notre assertion résulte de (6.1.15).

Si x est un point spécial, N est produit semi-direct de N_x par T et (ii) résulte de (i). Notons qu'on a alors $\hat{\mathrm{P}}_x = \mathrm{P}_x$.

Proposition **(7.3.3).** — *Soient x un point de* A, D *une chambre vectorielle, a un élément de* Φ_{D}^{-}, *v un élément de* U_a *et n un élément de* N. *Si* $v \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+} n\mathrm{P}_x$, *ou bien* $\varphi_a(v) \geqslant -a(x)$, $v \in \hat{\mathrm{P}}_x$ *et* $n \in \hat{\mathrm{N}}_x$, *ou bien* $a(\nu(n)(x)-x) > 0$ *et* $\varphi_a(v) = -a(x) - (1/2)a(\nu(n)(x)-x)$ (« formule de Schiffmann »).

Supposons $k = \varphi_a(v) < -a(x)$. On a alors $v = u'mu''$, avec $u', u'' \in \mathrm{U}_{-a,-k}$ et $m \in \mathrm{M}_{a,k}$ ((6.2.2) (3)). Comme $\mathrm{U}_{-a,-k} \subset \hat{\mathrm{P}}_x \cap \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$, on a, d'après (7.3.2), $m \in n\hat{\mathrm{N}}_x$, d'où

$$\nu(n)(x) = \nu(m)(x) = x - ka^{\vee} - a(x)a^{\vee}$$
$$a(\nu(n)(x)-x) = -2k - 2a(x)$$

d'où la proposition.

On remarquera que (7.3.3) est l'analogue d'une formule donnée par G. Schiffmann dans le cas des groupes de Lie semi-simples réels de rang réel un ([33]).

Théorème **(7.3.4).** — *Soient x, x' deux points de* A *et soient* D, D' *deux chambres vectorielles.*

(i) *On a* $\mathrm{G} = \mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.\mathrm{N}.\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$.

(ii) *Plus précisément, l'application canonique de* N *dans l'ensemble des doubles classes modulo* $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ *et* $\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$ *fournit par passage au quotient une bijection de* $\hat{\mathrm{W}} = \mathrm{N}/\mathrm{H}$ *sur* $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}\backslash \mathrm{G}/\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$.

(7.3.5) Avant de démontrer ce théorème, introduisons quelques notations. Soient x et x' deux points de A, et soient D et D' deux chambres vectorielles. Un hyperplan de A contenant x et x' et parallèle à un mur du système de racines Φ ne peut rencontrer le quartier $x' + \mathrm{D}'$; il en résulte aussitôt qu'il existe une chambre vectorielle et une seule, notée $\mathrm{D}(x; x', \mathrm{D}')$, telle que le quartier $x + \mathrm{D}(x; x', \mathrm{D}')$ contienne l'intersection d'un voisinage de x' avec le quartier $x'+D'$. Nous noterons alors $w(x, D; x', D')$ l'unique élément du groupe de Weyl ${}^vW$ tel que

$$D(x; x', D') = w(x, D; x', D').D \tag{1}$$

et nous noterons $\lambda(x, D; x', D')$ la longueur de $w(x, D; x', D')$ dans ${}^vW$ relativement au système générateur de ${}^vW$ formé des réflexions par rapport aux murs de la chambre vectorielle D.

(7.3.6) Nous allons maintenant énoncer un lemme et montrer comment il entraîne le théorème. La démonstration du lemme sera donnée ensuite (7.3.8).

Lemme. — Soient $x, x' \in A$, *soient* D *et* D' *deux chambres vectorielles et soit* L *une demi-droite ouverte d'origine* o *de* V, *contenue dans* D. *Soient* $g \in G$ *et* $n \in N$ *tels que* $g \in B_{x,D} n B_{x',D'}$.

(i) *L'une des deux conditions suivantes est réalisée* :

(i 1) $g \in B_{z,D} n B_{x',D'}$ *pour tout* $z \in x+L$;

(i 2) *il existe un point* $y \in x+L$ *et un élément* $n' \in N$ *tels que*

$$g \in B_{z,D} n B_{x',D'} \quad \textit{pour tout } z \in]x, y[$$

$$g \in B_{y,D} n' B_{x',D'}$$

$$\lambda(y, D; n'.x', {}^v\nu(n')(D')) > \lambda(x, D; n.x', {}^v\nu(n)(D')).$$

(ii) *On a* $g \in B_{z,D}.N.B_{x',D'}$ *pour tout* $z \in x+L$.

(7.3.7) Montrons comment (7.3.6) entraîne (7.3.4), dont nous reprenons les notations. Soit $g \in G$; d'après (7.3.1), il existe $n \in N$ et $u \in U_D^-$ tels que $g \in unB_{x',D'}$. Posons

$$u = \prod_{a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}} u_a \quad \text{avec} \quad u_a \in U_{-a}.$$

Soit L une demi-droite ouverte d'origine o dans V, contenue dans D; comme $a(v) > 0$ pour $a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}$ et $v \in L$, il existe un point $y \in x-L$ tel que $-a(y)+\varphi_{-a}(u_a) > 0$ pour tout $a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}$; on a alors $u_a \in U_{-a,\,a(y)+}$ pour tout a, et $u \in B_{y,D}$. Par suite, on a $g \in B_{y,D} n B_{x',D'}$ d'où $g \in B_{x,D}.N.B_{x',D'}$ d'après (7.3.6) (ii) (où l'on remplace x par y et où l'on prend $z=x$) ce qui démontre (i).

Démontrons maintenant (ii), autrement dit démontrons l'injectivité de l'application canonique de N/H dans l'ensemble des doubles classes $B\backslash G/B'$, en posant $B = B_{x,D}$ et $B' = B_{x',D'}$. Soient $n, n' \in N$ tels que $n' \in BnB'$. On a alors $1 \in BnB'n'^{-1} = Bn''B''$, en posant $n'' = nn'^{-1}$ et $B'' = n'B'n'^{-1}$, ou encore $n'' \in BB''$. Posons $x'' = n'.x'$, $D'' = {}^v\nu(n')(D')$ (d'où $B'' = B_{x'',D''}$), $\Delta = D(x; x'', D'')$ et $\gamma = (x+\Delta) \cap C_{x'',D''}$. On a alors $B'' = P_\gamma$. Faisant usage de (7.1.5), on en déduit que $BB'' \subset U_\Delta^+.H.U_\Delta^-$; comme $N \cap U_\Delta^+ H U_\Delta^- = H$ (6.1.15 (*a*)), on a $n'' \in H$ et $n' \in nH$, c.q.f.d.

(7.3.8) Passons maintenant à la démonstration du lemme (7.3.6). Montrons tout d'abord (ii), en supposant (i) démontré. Si l'on est dans le cas (i 1), il n'y a rien de plus à prouver; si l'on est dans le cas (i 2), on peut appliquer une nouvelle fois (i), en remplaçant x par y, et n par n'. Raisonnant ainsi par application répétée de (i), on finira forcément au bout d'un nombre fini d'opérations par se trouver dans le cas (i 2), puisque les longueurs des éléments de ${}^v\mathrm{W}$ sont bornées. On obtiendra donc ainsi une suite finie $y_0=y, y_1, \ldots, y_k$ de points de A, avec $y_{i+1}\in y_i+\mathrm{L}$, et des éléments $n_1=n', n_2, \ldots, n_{k+1}$ de N tels que $g\in \mathrm{B}_{z,\mathrm{D}}n\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$ pour $z\in[x, y_0[$, que $g\in \mathrm{B}_{z,\mathrm{D}}n_i\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$ pour $z\in[y_{i-1}, y_i[$ et que $g\in \mathrm{B}_{z,\mathrm{D}}n_{k+1}\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$ pour $z=y_k$ ou $z\in y_k+\mathrm{L}$, d'où (ii).

Reste à démontrer (i). Tout d'abord, on voit aisément qu'on peut se ramener au cas où $n=1$, en remplaçant g par gn^{-1}, x' par $n.x'$ et D' par ${}^v\nu(n).\mathrm{D}'$. Nous supposerons donc désormais que

$$g\in \mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}.$$

Posons $\Delta=\mathrm{D}(x; x', \mathrm{D}')$ et

$$\Psi=\Phi_{\mathrm{D}}^{-\,\mathrm{réd}}\cap\Phi_{\Delta}^{-},\qquad \Psi'=\Phi_{\mathrm{D}}^{-\,\mathrm{réd}}\cap\Phi_{\Delta}^{+}.$$

D'après (6.4.9), tout élément $b\in \mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme

$$b=\prod_{a\in\Phi_{\mathrm{D}}^{+\,\mathrm{réd}}}u_a.\prod_{a\in\Psi}u_a.\prod_{a\in\Psi'}u_a.h$$

avec $u_a\in \mathrm{U}_{a, f_{x,\mathrm{D}}(a)}$ et $h\in \mathrm{H}$.

Pour $a\in\Phi_{\mathrm{D}}^{+}$ et $z\in x+\mathrm{L}$, on a $a(z)>a(x)$ et par suite $\mathrm{U}_{a, f_{x,\mathrm{D}}(a)}\subset \mathrm{B}_{z,\mathrm{D}}$. D'autre part, par définition de Δ, on a $x'\in x+\overline{\Delta}$ et il existe $v\in \mathrm{D}'$ tel que $x'+v\in x+\Delta$. Si $a\in\Phi_{\Delta}^{+}$, on a donc $a(x')\geqslant a(x)$ et $a(x')+a(v)>a(x)$, d'où $a(x')>a(x)$ lorsque $a\in\Phi_{\Delta}^{+}\cap\Phi_{\mathrm{D}'}^{-}$. On en déduit aussitôt que $\mathrm{U}_{a, f_{x,\mathrm{D}}(a)}\subset \mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$ pour tout $a\in\Phi_{\Delta}^{+}$, et en particulier pour $a\in\Psi'$.

On voit donc que, quitte à multiplier g par un élément qui appartient à tous les $\mathrm{B}_{z,\mathrm{D}}$ pour $z\in x+\mathrm{L}$, on peut se ramener au cas où $g\in u\mathrm{B}_{x',\mathrm{D}'}$, avec $u=\prod_{a\in\Psi}u_a$, $u_a\in \mathrm{U}_{a,-a(x)+}$.

Si $u=1$, la condition (i 1) est évidemment satisfaite. Notons que c'est le cas lorsque $\Delta=-\mathrm{D}$, c'est-à-dire lorsque $\lambda(x, \mathrm{D}; x', \mathrm{D}')$ a la plus grande valeur possible, puisqu'alors $\Psi=\emptyset$.

Si $u\neq 1$, il existe un point $y\in x+\mathrm{L}$ et un seul tel que $a(y)\geqslant-\varphi_a(u_a)$ pour tout $a\in\Psi\subset\Phi_{\mathrm{D}}^{-}$ et que $a(y)=-\varphi_a(u_a)$ pour une racine $a\in\Psi$ au moins. On a alors

$$(1)\qquad u\in \mathrm{U}_{y-\Delta}\cap \mathrm{U}_{y-\mathrm{D}}\subset \mathrm{U}_y,\qquad u\notin \mathrm{U}_{y^*}$$

(où y^* désigne la fonction concave associée à la fonction linéaire y comme en (6.4.23)). Or, nous avons vu ((6.4.23) et (6.4.27)) qu'il existe un sous-groupe H^* de H tel que le sous-groupe $\mathrm{H}^*\mathrm{U}_{y^*}$ soit distingué dans HU_y et que le groupe quotient $\overline{\mathrm{G}}=\mathrm{HU}_y/\mathrm{H}^*\mathrm{U}_{y^*}$ soit muni d'une donnée radicielle génératrice $(\overline{\mathrm{T}}, (\overline{\mathrm{U}}_a)_{a\in\Phi_y})$ de type Φ_y, où $\overline{\mathrm{T}}$ est l'image canonique de H, $\overline{\mathrm{U}}_a$ l'image canonique de $\mathrm{U}_{a,y(a)}$, et où Φ_y est le système de racines formé des éléments $a\in\Phi$ tels que $a(y)\in\Gamma'_a$. Posons alors $\Delta'=\mathrm{D}(y; x', \mathrm{D}')$; on tire de (6.1.15) qu'il existe $u'\in \mathrm{U}_{y+\mathrm{D}}$, $u''\in \mathrm{U}_{y+\Delta'}$ et $n'\in \mathrm{N}_y$ tels que

$$(2)\qquad u\in \mathrm{U}_{y^*}u'n'u''.$$

Mais $U_{y+D} \cup U_{y*} \subset B_{y,D}$ et $U_{y+\Delta'} \subset B_{x',D'}$ puisque $C_{x',D'} \cap (y+\Delta') \neq \emptyset$. Par suite, on a $u \in B_{y,D} n' B_{x',D'}$ et $g \in B_{y,D} n' B_{x',D'}$, d'où la deuxième relation de (i 2).

D'autre part, pour tout $z \in]x, y[$, on a $a(z) > -\varphi_a(u_a)$ pour tout $a \in \Psi$, ce qui entraîne que $u \in B_{z,D}$ et $g \in B_{z,D} . B_{x',D'}$: c'est la première relation de (i 2).

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que

$$\lambda(y, D; n'.x', {}^v\nu(n')(D')) > \lambda(x, D; x', D') \tag{3}$$

pour achever la démonstration de (i 2) dans le cas $u \neq 1$, ce qui terminera la démonstration du lemme.

Pour cela, nous allons tout d'abord montrer que

$$\lambda(y, D; x', D') \geqslant \lambda(x, D; x', D'). \tag{4}$$

En effet, soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des hyperplans de V noyaux d'éléments de Φ. On sait que la longueur d'un élément w de ${}^v W$ est égale au nombre d'éléments de $\mathscr{M}$ séparant D et $w(D)$ ([5], chap. VI, § 1, n° 6). Par suite, $\lambda(z, D; x', D')$ est, pour $z \in A$, le cardinal de l'ensemble $\mathscr{M}_z$ des éléments $M \in \mathscr{M}$ tels que $z + M$ sépare $z + D$ et un voisinage de x dans $x + \overline{D}'$. Or, pour $M \in \mathscr{M}$, l'ensemble des $z \in A$ tels que $M \in \mathscr{M}_z$ est, soit le demi-espace ouvert $x' + M + D$, soit le demi-espace fermé $x' + M + \overline{D}$, et son intersection avec $x + L$ est une demi-droite (ouverte ou fermée). Par suite, $\mathscr{M}_y \supset \mathscr{M}_x$, d'où (4). En réalité, ce qui précède montre même que $w' = w(y, D; x', D')$ majore $w = w(x, D; x', D')$ en ce sens qu'il existe $w'' \in {}^v W$ tel que $w' = ww''$ avec $\ell(w') = \ell(w) + \ell(w'')$.

De plus, on a

$$\lambda(y, D; x', D') > \lambda(x, D; x', D') \quad \textit{dès que } n' \in H. \tag{5}$$

En effet, ce qui précède montre que l'on ne peut avoir égalité dans (4) que lorsque $w' = w$, ou encore $\Delta' = \Delta$. Or l'image $\overline{u}$ de u dans $\overline{G}$ est contenue dans le groupe $\overline{U}_D^- \cap \overline{U}_\Delta^-$ engendré par les $\overline{U}_a$ pour les racines $a \in \Phi_y$ qui sont négatives sur D et sur Δ, tandis que l'image $\overline{u}'$ (resp. $\overline{u}''$) de u' (resp. u'') est contenue dans le groupe $\overline{U}_D^+$ (resp. $\overline{U}_{\Delta'}^+$) engendré par les $\overline{U}_a$ pour $a \in \Phi_y$ positive sur D (resp. Δ'). Si $n' \in H$ et $\Delta = \Delta'$, on a donc

$$\overline{u} \in U_D^- \cap U_\Delta^- \cap U_D^+ T U_\Delta^+$$

d'où $\overline{u} = 1$ d'après (DR 6) et (6.1.6). On en déduit que $u \in U_{y*}$, ce qui contredit (1). D'où (5).

Utilisant (4) et (5), on voit que (3) sera conséquence de

$$\lambda(y, D; n'(x'), {}^v\nu(n')(D')) \geqslant \lambda(y, D; x', D') \quad \textit{et l'égalité ne peut avoir lieu que si } n' \in H. \tag{6}$$

Mais, puisque $n' \in N_y$, on voit aisément que

$$w(y, D; n'.x', {}^v\nu(n')(D')) = {}^v\nu(n') w(y, D; x', D').$$

En posant $t = {}^v\nu(n')$ et $w' = w(y, D; x', D')$, on voit que (6) est équivalent à

$$\ell(tw') \geqslant \ell(w') \quad \textit{et l'égalité ne peut avoir lieu que si } t = 1. \tag{7}$$

Identifions le groupe de Weyl ${}^v W'$ de Φ_y à un sous-groupe de ${}^v W$ et identifions une chambre vectorielle de Φ_y, qui est un cône simplicial dans un quotient de V, avec son image réciproque dans V. Soit alors E la chambre vectorielle de Φ_y qui contient D. Soit R (resp. R') le système générateur de ${}^v\mathrm{W}$ (resp. ${}^v\mathrm{W}'$) formé des réflexions par rapport aux murs de D (resp. E) et soit w_0 (resp. w'_0) l'élément de plus grande longueur par rapport à R (resp. R') de ${}^v\mathrm{W}$ (resp. ${}^v\mathrm{W}'$). On a $w_0(\mathrm{D}) = -\mathrm{D}$ et $w'_0(\mathrm{E}) = -\mathrm{E}$, d'où $w'_0(\mathrm{E}) \supset w_0(\mathrm{D})$.

Considérons dans $\overline{\mathrm{G}}$ le sous-groupe parabolique minimal $\overline{\mathrm{B}}$ associé à la chambre vectorielle E : on a $\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{T}} . \prod_{a \in \Phi_y \cap \Phi_{\mathrm{D}}^+} \overline{\mathrm{U}}_a$.

Comme $w'(\mathrm{D}) = \Delta'$, on a $\overline{\mathrm{U}}_{y+\Delta'} \subset w' \overline{\mathrm{B}} w'^{-1}$ (avec les conventions de notations habituelles permettant de faire le produit d'un élément de ${}^v\mathrm{W}'$ et d'une classe suivant $\overline{\mathrm{B}}$). Les relations (1) et (2) entraînent alors

$$\bar{u} \in w'_0 \overline{\mathrm{B}} w_0'^{-1} \tag{8}$$

$$\bar{u} \in \overline{\mathrm{B}} t w' \overline{\mathrm{B}} w'^{-1}. \tag{9}$$

Considérons alors une décomposition réduite $(r_k, \ldots, r_1)$ de $w'^{-1} w_0$ (dans ${}^v\mathrm{W}$, par rapport à R) : on a donc $w_0 = w' r_k \ldots r_1$ et on sait que $\ell(w') = \ell(w_0) - k$ ([5], chap. VI, § 1, n° 6, cor. 3 de la prop. 17). Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, posons

$$w_i = w' r_k \ldots r_{i+1}$$

d'où en particulier $w_k = w'$. On a $w_i = w_{i+1} r_i$, ce qui entraîne que les chambres vectorielles $w_i(\mathrm{D})$ et $w_{i+1}(\mathrm{D})$ sont mitoyennes et la réflexion s_i par rapport à leur mur commun est égale à $w_{i+1} w_i^{-1} = w_{i+1} r_i w_{i+1}^{-1} = w_i r_i w_i^{-1}$.

Soit d'autre part w'_i l'unique élément de ${}^v\mathrm{W}'$ tel que la chambre $w'_i(\mathrm{E})$ de Φ_y contienne la chambre $w_i(\mathrm{D})$ de Φ. Remarquons que cette notation est bien cohérente avec la notation w'_0; d'autre part, on a $w'_k = w_k = w'$ puisque $w' \in {}^v\mathrm{W}'$. Enfin, notons que les deux chambres $w'_i(\mathrm{E})$ et $w'_{i+1}(\mathrm{E})$ sont mitoyennes ou confondues suivant que s_i appartient ou non à ${}^v\mathrm{W}'$. Dans le premier cas, on a aussi $s_i = w'_{i+1} w_i'^{-1}$.

D'après (6.1.15 (*a*)), il existe, pour tout $i = 0, \ldots, k$, un élément $\bar{w}'_i \in {}^v\mathrm{W}'$ et un seul tel que

$$\overline{\mathrm{B}} \bar{u} w'_i \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{B}} \bar{w}'_i \overline{\mathrm{B}}$$

et on a $\bar{w}'_0 = w'_0$ d'après (8) et $\bar{w}'_k = t w'$ d'après (9), puisque $w'_k = w'$.

Soit $\mathrm{I} = \{0, \ldots, k-1\}$ et soit I_1 l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ tels que $w'_{i+1} = w'_i$. Il est clair que

$$\text{si } i \in \mathrm{I}_1, \text{ on a } w'_{i+1} = w'_i \text{ et } \bar{w}'_{i+1} = \bar{w}'_i. \tag{10}$$

De plus, nous avons vu plus haut que

$$\text{si } i \notin \mathrm{I}_1, \text{ on a } w'_{i+1} w_i'^{-1} = w_{i+1} w_i^{-1} = s_i. \tag{11}$$

Si $i \notin \mathrm{I}_1$, on voit que $w_{i+1}'^{-1} w'_i = w_i'^{-1} s_i w'_i$ est une réflexion par rapport à un mur de E, c'est-à-dire un élément r'_i de R'. De (6.1.15) et de l'axiome (T 3) des systèmes de Tits, on déduit donc que, pour $i \notin \mathrm{I}_1$, on a

$$\overline{\mathrm{B}} \bar{w}'_{i+1} \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{B}} \bar{u} w'_{i+1} \overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{B}} \bar{u} w'_i r'_i \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{B}} \bar{w}'_i \overline{\mathrm{B}} r'_i \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{B}} \bar{w}'_i \overline{\mathrm{B}} \cup \overline{\mathrm{B}} \bar{w}'_i r'_i \overline{\mathrm{B}}$$

d'où l'on déduit une partition de $I-I_1$ en deux ensembles (éventuellement vides) : l'ensemble I_2 des $i\notin I-I_1$ tels que $\overline{w}'_{i+1}=\overline{w}'_i$ et l'ensemble I_3 des $i\in I-I_1$ tels que $\overline{w}'_{i+1}=\overline{w}'_i r'_i$.

Posons enfin $\overline{w}_i=\overline{w}'_i w'^{-1}_i w_i$ (pour $i=0,\ldots,k$). On a $\overline{w}_0=w_0$ et

$$\overline{w}_k=tw'.w'^{-1}.w'=tw'.$$

Pour $i\in I$, posons

$$d_i=\overline{w}^{-1}_{i+1}\overline{w}_i=w^{-1}_{i+1}w'_{i+1}\overline{w}'^{-1}_{i+1}\overline{w}'_i w'^{-1}_i w_i.$$

Si $i\in I_1$, on a $d_i=w^{-1}_{i+1}w_i=r_i$ d'après (10).

Si $i\in I_2$, on a (en utilisant (11)), $d_i=w^{-1}_{i+1}w'_{i+1}w'^{-1}_i w_i=w^{-1}_{i+1}s_i w_i=1$.

Si $i\in I_3$, on a $d_i=w^{-1}_{i+1}w'_{i+1}r'_i w'^{-1}_i w_i=w^{-1}_{i+1}w_i=r_i$.

Par suite, on a

$$w_0=\overline{w}_0=\overline{w}_k(\overline{w}_k^{-1}\overline{w}_{k-1})\ldots(\overline{w}_1^{-1}\overline{w}_0)=tw'.\prod_{i\in I_1\cup I_3} r_i$$

d'où $\ell(tw')\geqslant\ell(w_0)-\mathrm{Card}(I_1\cup I_3)\geqslant\ell(w_0)-k=\ell(w')$ et on ne peut avoir $\ell(tw')=\ell(w')$ que si $I_2=\emptyset$, ce qui entraîne $w_0=tw_0$ et $t=1$. Nous avons donc bien démontré (7), ce qui achève la démonstration du lemme (7.3.6) et par suite du théorème (7.3.4).

Proposition **(7.3.9)**. — *Soit* F *une facette de* A *et soit* L *un sous-groupe de* G *contenant* H *et tel que* $L\cap U_a=P_F\cap U_a$ *pour tout* $a\in\Phi$. *Soit* $N^\dagger_F$ *le stabilisateur de* F *dans* N *et posons* $P^\dagger_F=N^\dagger_F.P_F$. *Alors* $P^\dagger_F$ *est un sous-groupe de* G *et on a*

$$P_F\subset L\subset P^\dagger_F.$$

La première assertion résulte immédiatement de ce que $N^\dagger_F$ normalise P_F. D'autre part, on a bien $P_F\subset L$ puisque P_F est engendré par H et les $U_a\cap P_F$. Comme P_F contient un groupe de la forme $B_{x,D}$ pour une chambre $C_{x,D}$, on déduit de (7.3.4) que si $L\not\subset P^\dagger_F$ il existe $n\in N\cap L$ tel que $n.F\neq F$. Il existe alors une racine affine α qui contient l'une et l'une seulement des deux facettes F et $\nu(n).F$; quitte à remplacer éventuellement n par n^{-1}, et α par $\nu(n^{-1}).\alpha$, on peut supposer que $\alpha\supset F$ et $\alpha\not\supset\nu(n).F$. On a alors $U_\alpha\subset L$ et $U_{\nu(n^{-1}).\alpha}=n^{-1}.U_\alpha.n\subset L$. Vu (7.2.6) et (6.4.9), ceci entraîne $\nu(n^{-1}).\alpha\supset F$, ce qui est absurde.

7.4. L'immeuble de G.

(7.4.1) Considérons la relation suivante entre deux éléments (g,x) et (h,y) du produit $G\times A$:

(R) *il existe* $n\in N$ *tel que* $y=\nu(n)(x)$ *et* $g^{-1}hn\in\hat{P}_x$.

Comme $\hat{P}_x=P_x.\hat{N}_x$ et que $\hat{N}_x$ est le stabilisateur de x dans N, cette relation (R) est équivalente à la relation obtenue en y remplaçant $\hat{P}_x$ par P_x. Montrons que (R) *est une* *relation d'équivalence.* Soient $g, h, k \in \mathrm{G}$, $x, y, z \in \mathrm{A}$ et $m, n \in \mathrm{N}$ tels que $y = \nu(m)(x)$, $z = \nu(n)(y)$, $g^{-1}hm \in \hat{\mathrm{P}}_x$ et $h^{-1}kn \in \hat{\mathrm{P}}_y$. D'après (7.1.8), on a $\hat{\mathrm{P}}_y = m\hat{\mathrm{P}}_x m^{-1}$; on en déduit :

$$h^{-1}gm^{-1} = m(m^{-1}h^{-1}g)m^{-1} \in \hat{\mathrm{P}}_y \quad \text{et} \quad x = \nu(m^{-1})(y)$$

$$g^{-1}knm = g^{-1}hm.m^{-1}h^{-1}knm \in \hat{\mathrm{P}}_x.m^{-1}\hat{\mathrm{P}}_y m = \hat{\mathrm{P}}_x \quad \text{et} \quad z = \nu(nm)(x).$$

La première de ces relations montre la symétrie de (R), et la seconde la transitivité; enfin la réflexivité est évidente.

Définition **(7.4.2)**. — *On appelle* immeuble *de* G *(muni de la donnée radicielle* (T, (U_a))) *et de la valuation* φ *de celle-ci) l'ensemble* ${}^{\varphi}\mathscr{I} = \mathscr{I}$ *quotient du produit* $\mathrm{G} \times \mathrm{A}$ *par la relation d'équivalence* (R).

L'immeuble ${}^{\varphi}\mathscr{I}$ ne dépend manifestement que de la classe d'équipollence de φ.

L'application j qui, à $x \in \mathrm{A}$, fait correspondre l'image canonique du couple $(1, x)$ dans $\mathscr{I}$ est injective. En effet, si $j(x) = j(y)$ $(x, y \in \mathrm{A})$, il existe $n \in \mathrm{N}$ tel que $y = \nu(n)(x)$ et $n \in \hat{\mathrm{P}}_x$; comme $\mathrm{N} \cap \hat{\mathrm{P}}_x = \hat{\mathrm{N}}_x$ (7.1.8), on a $y = x$. *Nous identifierons désormais* A *et son image dans* $\mathscr{I}$ *grâce à* j.

D'autre part, l'opération de G sur $\mathrm{G} \times \mathrm{A}$ obtenue en faisant agir G sur lui-même par les translations à gauche est compatible avec (R) et définit par passage au quotient une opération $(g, x) \mapsto g.x$ de G sur $\mathscr{I}$, telle que l'image de (g, x) dans $\mathscr{I}$ soit égale à $g.x$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout $x \in \mathrm{A}$. Pour $n \in \mathrm{N}$, l'action de n sur $\mathscr{I}$ ainsi obtenue prolonge son action sur A donnée par ν : on a $n.x = \nu(n)(x)$ pour tout $n \in \mathrm{N}$ et tout $x \in \mathrm{A}$. Il est clair que $\mathscr{I} = \mathrm{G}.\mathrm{A}$.

Enfin, on vérifie aisément qu'en appliquant la construction précédente dans le cas où φ est discrète, on retrouve bien à isomorphisme près l'immeuble de G associé au système de Tits de G (6.5).

Proposition **(7.4.3)**. — *Soit* ψ *une valuation équivalente à* φ (6.2.5). *Il existe une application* $i : {}^{\varphi}\mathscr{I} \to {}^{\psi}\mathscr{I}$ *et une seule possédant les propriétés suivantes :*

a) $i(g.x) = g.i(x)$ *pour* $x \in {}^{\varphi}\mathscr{I}$ *et* $g \in \mathrm{G}$;

b) *la restriction de* i *à* A *est une affinité de* $\mathrm{A} = \varphi + \mathrm{V}$ *sur* $\psi + \mathrm{V}$.

Si $\lambda : \Phi \to \mathbf{R}_+^*$ *est la fonction définie par* $\psi \in \lambda\varphi + \mathrm{V}$, *on a* $i(\varphi) = \lambda\varphi$.

On a $\lambda(\varphi + \mathrm{V}) = \psi + \mathrm{V}$. Soit $i_1 : \mathrm{A} \to \psi + \mathrm{V}$ l'affinité $x \mapsto \lambda x$. Il est clair que

(1) $$ {}^{\varphi}\mathrm{P}_x = {}^{\psi}\mathrm{P}_{i_1(x)} \quad (x \in \mathrm{A})$$

et, vu (6.2.5) (1), que

(2) $$ i_1(n.x) = n.i_1(x) \quad (x \in \mathrm{A}, n \in \mathrm{N}).$$

Par conséquent

(3) $$ {}^{\varphi}\hat{\mathrm{N}}_x = {}^{\psi}\hat{\mathrm{N}}_{i_1(x)} \quad \text{et} \quad {}^{\varphi}\hat{\mathrm{P}}_x = {}^{\psi}\hat{\mathrm{P}}_{i_1(x)} \quad (x \in \mathrm{A}).$$

On en déduit aussitôt que i_1 s'étend de façon unique en une application $i : {}^{\varphi}\mathscr{I} \to {}^{\psi}\mathscr{I}$ possédant les propriétés (*a*) et (*b*). Réciproquement, soit $i : {}^{\varphi}\mathscr{I} \to {}^{\psi}\mathscr{I}$ possédant la propriété (*a*). En vertu de la définition de l'immeuble, on a

$$(4) \qquad {}^{\varphi}\widehat{\mathrm{P}}_x = {}^{\psi}\widehat{\mathrm{P}}_{i(x)} \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{A}.$$

Soit x un point spécial de A et y un point de A distinct de x. Il existe une racine affine α contenant x mais non y. Vu (7.1.8) (1) et (6.4.9), on a $\mathrm{U}_\alpha \subset {}^{\varphi}\widehat{\mathrm{P}}_x$ et $\mathrm{U}_\alpha \not\subset {}^{\varphi}\widehat{\mathrm{P}}_y = {}^{\psi}\widehat{\mathrm{P}}_{\lambda y}$. Vu (4), il en résulte que $i(x) \neq \lambda y$. Autrement dit, on a $i(x) = \lambda x$ pour tout point spécial x de A. Si i possède la propriété (*b*), ceci implique que $i \,|\, \mathrm{A} = i_1$, d'où l'unicité de i et la dernière assertion de l'énoncé.

Proposition **(7.4.4)**. — *Soit* Ω *une partie non vide ou une facette de* A. *Le fixateur de* Ω *dans* G *(pour l'action de* G *sur* $\mathscr{I}$*) est égal à* $\widehat{\mathrm{P}}_\Omega$.

(Le fixateur d'un germe est par définition la réunion des fixateurs de ses éléments.) Cela résulte de la définition de $\mathscr{I}$ lorsque Ω est réduit à un point, et le cas général s'ensuit, vu (7.1.11).

Proposition **(7.4.5)**. — *Soit* $a \in \Phi$ *et soit* $u \in \mathrm{U}_a^*$. *Posons* $k = \varphi_a(u)$. *L'ensemble des points de* A *laissés fixes par* u *est la racine affine*

$$\alpha_{a,k} = \{x \in \mathrm{A} \,|\, a(x) + k \geqslant 0\}.$$

Pour tout point $x \in \mathrm{A}$, on a en effet $\widehat{\mathrm{P}}_x \cap \mathrm{U}_a = \mathrm{U}_{a,-a(x)}$ et $u \in \widehat{\mathrm{P}}_x$ équivaut à $k \geqslant -a(x)$.

On remarquera qu'il existe des points de $\mathscr{I}$ fixes par u en dehors de A (cf. (7.4.33)).

Corollaire **(7.4.6)**. — *Pour toute partie close non vide* Ω *de* A, *l'ensemble des points de* A *laissés fixes par tous les éléments de* $\widehat{\mathrm{P}}_\Omega$ *est égal à* Ω.

Cela résulte de (7.4.5) lorsque Ω est une racine affine. Le cas général s'en déduit, puisque $\mathrm{cl}(\Omega)$ est l'intersection des racines affines contenant Ω.

Définition **(7.4.7)**. — *On appelle* appartement *de* $\mathscr{I}$ *un transformé de* A *par un élément de* G.

Proposition **(7.4.8)**. — *Soit* $g \in \mathrm{G}$. *L'intersection* $\mathrm{A} \cap g^{-1}.\mathrm{A}$ *est une partie close de* A *et il existe* $n \in \mathrm{N}$ *tel que* $g.x = n.x$ *pour tout* $x \in \mathrm{A} \cap g^{-1}.\mathrm{A}$.

On peut supposer $\Omega = \mathrm{A} \cap g^{-1}.\mathrm{A} \neq \emptyset$. Soit $\mathscr{X}$ l'ensemble des parties X de Ω telles que $g^{-1}\mathrm{N} \cap \widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{X} \neq \emptyset$. La définition même de $\mathscr{I}$ entraîne que $\mathscr{X}$ contient toutes les parties de Ω réduites à un point. Soient $\mathrm{X} \in \mathscr{X}$, $y \in \Omega$ et $n_\mathrm{X}, n_y \in \mathrm{N}$ tels que $g^{-1}n_\mathrm{X} \in \widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{X}$ et $g^{-1}n_y \in \widehat{\mathrm{P}}_y$. Vu (7.1.6), il existe une chambre vectorielle D telle que

$$n_\mathrm{X}^{-1}n_y \in \widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{X}.\widehat{\mathrm{P}}_y \subset \widehat{\mathrm{N}}_\mathrm{X}.\mathrm{U}_\mathrm{D}^-.\mathrm{U}_\mathrm{D}^+.\widehat{\mathrm{N}}_y$$

(on a tenu compte des relations $\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{N}}_\mathrm{X}\mathrm{P}_\mathrm{X}$ et $\widehat{\mathrm{P}}_y = \mathrm{P}_y\widehat{\mathrm{N}}_y$). Il existe donc des éléments $n'_\mathrm{X} \in \widehat{\mathrm{N}}_\mathrm{X}$ et $n'_y \in \widehat{\mathrm{N}}_y$ tels que $n_\mathrm{X}'^{-1}n_\mathrm{X}^{-1}n_y n'_y \in \mathrm{N} \cap \mathrm{U}_\mathrm{D}^-\mathrm{U}_\mathrm{D}^+ = \{1\}$. Posons $n = n_\mathrm{X}n'_\mathrm{X} = n_y n'_y$; on a alors $g^{-1}n\in\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}}\cap\widehat{\mathrm{P}}_y=\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}\cup\{y\}}$. On en déduit, par récurrence sur k, que toute partie de Ω composée d'un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_k$ de Ω, appartient à $\mathscr{X}$.

Soit alors $x_0\in\Omega$ et écrivons Ω comme réunion d'une famille filtrante croissante de parties finies X_i, chacune d'elles contenant x_0. Il existe n_0 et $n_i\in\mathrm{N}$ tels que $g^{-1}n_0\in\widehat{\mathrm{P}}_{x_0}$ et $g^{-1}n_i\in\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}_i}\subset\widehat{\mathrm{P}}_{x_0}$. On a alors $n_i^{-1}n_0\in\widehat{\mathrm{N}}_{x_0}$ et, comme $\widehat{\mathrm{N}}_{x_0}/\mathrm{H}$ est fini, on peut supposer, quitte à extraire une sous-famille cofinale et à multiplier à droite les n_i par des éléments de H, que n_i est indépendant de i. On a alors $g^{-1}n_i\in\cap\widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}_i}=\widehat{\mathrm{P}}_\Omega$ (7.1.11), d'où la dernière assertion. De plus, il existe $n'\in\widehat{\mathrm{N}}_\Omega$ tel que $g^{-1}n_in'\in\mathrm{P}_\Omega=\mathrm{P}_{\mathrm{cl}(\Omega)}$ (7.1.2), d'où $g.x\in\mathrm{A}$ pour tout $x\in\mathrm{cl}(\Omega)$, ce qui entraîne que Ω est close.

Corollaire **(7.4.9)**. — *Soit* Ω *une partie ou une facette de* A.

(i) *Le fixateur* $\widehat{\mathrm{P}}_\Omega$ *de* Ω *est transitif sur l'ensemble des appartements contenant* Ω.

(ii) *Supposons que* Ω *soit une chambre, et soit* $b\in\mathrm{P}_\Omega$. *On a* $b.x=x$ *pour tout* $x\in\mathrm{A}\cap b.\mathrm{A}$.

Soit $\mathrm{A}'=g.\mathrm{A}$ un appartement contenant Ω et soit $n\in\mathrm{N}$ tel que $g^{-1}.x=n.x$ pour tout $x\in\mathrm{A}\cap g.\mathrm{A}$. On a alors $gn\in\widehat{\mathrm{P}}_\Omega$ et $\mathrm{A}'=gn.\mathrm{A}$, d'où (i). Si Ω est une chambre et si $g\in\mathrm{P}_\Omega$, on a, vu (7.2.6), $n\in\mathrm{N}\cap\mathrm{P}_\mathrm{C}=\mathrm{H}$, d'où (ii).

On comparera (7.4.9) avec (2.5.8) et (2.5.9).

Corollaire **(7.4.10)**. — *Le sous-groupe* N (resp. H) *est le stabilisateur* (resp. *fixateur*) *de* A *dans* G.

Soit $g\in\mathrm{G}$ tel que $g.\mathrm{A}=\mathrm{A}$. D'après (7.4.8), il existe $n\in\mathrm{N}$ tel que $g^{-1}n\in\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{A}$. Mais on a $\mathrm{U}_\mathrm{A}=\{1\}$ puisque A n'est contenu dans aucune racine affine, et $\widehat{\mathrm{P}}_\mathrm{A}=\widehat{\mathrm{N}}_\mathrm{A}=\mathrm{H}$. D'où le corollaire, compte tenu de ce que H est par définition le noyau de ν.

On comparera (7.4.10) avec (2.2.5).

(7.4.11) Comme en (2.2.8), il résulte de (7.4.10) que *sur tout appartement* A' *de* $\mathscr{I}$, *il existe une structure d'espace affine euclidien* et une seule telle que, pour tout $g\in\mathrm{G}$ avec $\mathrm{A}'=g.\mathrm{A}$, l'application $x\mapsto g.x$ soit un isomorphisme d'espaces affines euclidiens de A sur A'. En particulier, chaque appartement A' de $\mathscr{I}$ est ainsi muni d'une *distance* $d_{\mathrm{A}'}$.

D'autre part, (7.4.8) montre aussitôt que, si M est une partie d'un appartement, l'ensemble $g.\mathrm{cl}(g^{-1}.\mathrm{M})$ est indépendant du choix de $g\in\mathrm{G}$ tel que $\mathrm{M}\subset g.\mathrm{A}$. Cet ensemble est appelé l'*enclos* de M et est noté cl(M); il est contenu dans tout appartement contenant M. On dit que M est *close* si $\mathrm{cl(M)}=\mathrm{M}$.

Définition **(7.4.12)**. — *On appelle* quartier (resp. germe de quartier, chambre, facette) *de* $\mathscr{I}$ *un transformé d'un quartier* (resp. *germe de quartier, chambre, facette*) *de* A *par un élément de* G.

Bien entendu, on identifie un germe de A, défini par une base de filtre $\mathscr{F}$ sur A, avec le germe défini par $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{I}$.

La définition (7.4.12) est justifiée par la proposition suivante :

Proposition **(7.4.13)**. — (i) *Si une facette* X *de* $\mathscr{I}$ *rencontre un appartement* $\mathrm{A}'=g.\mathrm{A}$ *de* $\mathscr{I}$, *il existe une facette* Y *de* A *telle que* $\mathrm{X}=g.\mathrm{Y}$ *et* X *est contenue dans* A'.

(ii) *Si un quartier* (resp. *germe de quartier*) X *de* $\mathscr{I}$ *est contenu dans un appartement* $A'=g.A$, *il existe un quartier* (resp. *germe de quartier*) Y *de* A *tel que* $X=g.Y$.

Démontrons (i). Soient x un point de A, E une facette vectorielle de Φ_x et h un élément de G tels que $X=h.F_{x,E}$. Supposons que X rencontre $g.A$. Pour tout voisinage convexe Ω de x dans A, on a $h.(\Omega\cap(x+E))\cap g.A\neq\emptyset$. Si Ω est suffisamment petit, il existe une demi-droite ouverte d'origine o dans V, soit E′, telle que $E'\subset E$ et $h.(\Omega\cap(x+E'))\subset g.A$. On a $F_{x,E}=F_{x,E'}$ et d'après (7.4.8), il existe $n\in N$ tel que $g^{-1}h.y=n.y$ pour tout $y\in A\cap g^{-1}h.A$. On a alors $n^{-1}g^{-1}h\in\hat{P}_{x,E'}=\hat{P}_{x,E}$ et $X=h.F_{x,E}=g.F_{x'',E''}$ avec $x''=n.x$ et $E''={}^v\nu(n)(E)$.

La démonstration de (ii) est analogue, en plus simple.

On voit en particulier que *les facettes* (resp. *chambres*) *de* $\mathscr{I}$ *qui rencontrent* A *ne sont autres que les facettes* (resp. *chambres*) *de* A.

Corollaire **(7.4.14)**. — *Soient* F *et* F′ *deux facettes de* A *telles que* F′ *soit contenue dans l'adhérence de* F *dans* A (7.2.1). *Soit* $g\in G$. *Tout appartement de* $\mathscr{I}$ *contenant* $g.F$ *contient aussi* $g.F'$.

Cela résulte de (7.4.13), compte tenu de ce que $A\cap h.A$ est une partie fermée de A pour tout $h\in G$ (7.4.8).

Proposition **(7.4.15)**. — *Soient* Ω *et* Ω' *deux parties ou facettes de* A *et soit* $\hat{W}_\Omega$ (resp. $\hat{W}_{\Omega'}$) *l'image de* $\hat{N}_\Omega$ (resp. $\hat{N}_{\Omega'}$) *dans* $\hat{W}$. *L'application naturelle de* $\hat{W}_\Omega\backslash\hat{W}/\hat{W}_{\Omega'}$ *dans* $\hat{P}_\Omega\backslash G/\hat{P}_{\Omega'}$ *est bijective.*

La démonstration est identique à celle de (4.2.1), en remplaçant la référence (2.5.8) par (7.4.9).

Proposition **(7.4.16)**. — *Supposons que la valuation* φ *soit dense. Soient* x *un point de* A *et* E *une facette vectorielle.*

(i) *Le seul point de* A *laissé fixe par* $P_{x,E}$ *est* x.

(ii) *Soit* $g\in G$ *tel que* $gP_{x,E}g^{-1}\subset\hat{P}_x$; *alors* $g\in\hat{P}_x$.

Soit $y\in A$, $y\neq x$. Puisque φ est dense, il existe une racine affine contenant x et ne contenant pas y; vu (7.4.5), ceci démontre (i). Démontrons (ii). Vu (7.3.4), on peut supposer $g\in N$. Or, pour $n\in N$, on a $nP_{x,E}n^{-1}=P_{n.x,E'}$, avec $E'={}^v\nu(n)(E)$, et (ii) résulte de (i).

Corollaire **(7.4.17)**. — *Si la valuation* φ *est dense, le normalisateur de* P_x (resp. $\hat{P}_x$) *est égal à* $\hat{P}_x$ *quel que soit* $x\in A$.

Théorème **(7.4.18)**. — (i) *Deux chambres* (resp. *facettes, points*) *de* $\mathscr{I}$ *sont contenues dans un même appartement.*

(ii) *Une chambre* (resp. *facette, point*) *de* $\mathscr{I}$ *et un germe de quartier sont contenus dans un même appartement.*

(iii) *Deux germes de quartier de* $\mathscr{I}$ *sont contenus dans un même appartement.*

Ces assertions ne sont en fait que des traductions géométriques de (7.3.4), (7.3.1) et (6.1.15) *a)* respectivement. Compte tenu de (7.4.14), il suffit de les démontrer dans le cas des chambres et des germes de quartier.

Soient C et C′ deux chambres de $\mathscr{I}$. Quitte à les transformer par un même élément de G, on peut supposer que C est de la forme $C_{x,D}$ et que $C'=g.C_{x',D'}$, où x et x' sont deux points de A, D et D′ deux chambres vectorielles et où $g\in G$. Vu (7.3.4), on a $g=bnb'$, avec $b\in B_{x,D}$, $n\in N$ et $b'\in B_{x',D'}$. Cela étant, $C=b.C$ et $C'=bn.C_{x',D'}$ sont contenues dans le même appartement $b.A$.

On démontre de même (ii) à partir de (7.3.1) et (iii) à partir de (6.1.15); voir aussi (4.2.5).

Théorème **(7.4.19)**. — *Soient* C *une chambre de* $\mathscr{I}$ *et* A′ *un appartement contenant* C. *Il existe une application* ρ *et une seule de* $\mathscr{I}$ *dans* A′ *telle que, pour tout* $b\in B_C$, *la restriction de* ρ *à l'appartement* $b.A'$ *coïncide avec la restriction de l'application* $x\mapsto b^{-1}.x$. *La restriction de* ρ *à* A′ *est l'identité et, si* x *est un point de* A′ *adhérent à* C, *on a* $\rho^{-1}(x)=\{x\}$.

Pour la démonstration, voir (2.3.2) et (2.3.4). Comme en (2.3.5), cette application ρ est notée $\rho_{A';C}$ et est appelée la *rétraction de* $\mathscr{I}$ *sur* A′ *de centre* C.

Proposition **(7.4.20)**. — (i) *Il existe une distance* d *sur* $\mathscr{I}$ *et une seule dont la restriction à tout appartement* A′ *de* $\mathscr{I}$ *est la distance euclidienne de* A′ (7.4.11). *Elle est invariante par* G.

(ii) *Soient* C *une chambre de* $\mathscr{I}$, x *un point adhérent à* C *et* A′ *un appartement contenant* C. *Soit* ρ *la rétraction de* $\mathscr{I}$ *sur* A′ *de centre* C. *Pour tous* $y, z\in\mathscr{I}$, *on a*

$$d(\rho(y),\rho(z))\leqslant d(y,z).$$

Si de plus C, y *et* z *sont contenus dans un même appartement, on a* $d(\rho(y),\rho(z))=d(y,z)$. *En particulier,* $d(x,\rho(y))=d(x,y)$ *pour tout* $y\in\mathscr{I}$.

(iii) *Soient* $x,y\in\mathscr{I}$ *et soit* $S=\{z\in\mathscr{I}\mid d(x,y)=d(x,z)+d(z,y)\}$. *Alors,* S *est contenu dans tout appartement* A′ *contenant* x *et* y, *et coïncide avec le segment* $[xy]$ *de l'espace affine* A′. *On pose* $S=[xy]$. *Toute isométrie de* $\mathscr{I}$, *et en particulier tout élément de* G, *qui laisse fixes* x *et* y, *laisse fixe tout point de* $[xy]$.

(iv) *Soient* x, y, z, z' *quatre points de* $\mathscr{I}$ *tels que* $z\in[xy]$, *et soit* $\varepsilon\in\mathbf{R}_+$ *tel que* $d(x,z')\leqslant d(x,z)+\varepsilon d(x,y)$ *et* $d(y,z')\leqslant d(y,z)+\varepsilon d(x,y)$. *On a alors*

$$d(z,z')^2\leqslant 4d(x,z)d(y,z)\varepsilon+d(x,y)^2\varepsilon^2.$$

(v) *Soient* $x,y\in\mathscr{I}$ *et* $t\in[0,1]$. *Notons* $tx+(1-t)y$ *l'unique point* z *de* $[xy]$ *tel que* $d(y,z)=td(x,y)$. *L'application* $(t,x,y)\mapsto tx+(1-t)y$ *de* $[0,1]\times\mathscr{I}\times\mathscr{I}$ *dans* $\mathscr{I}$ *est continue. L'espace métrique* $\mathscr{I}$ *est contractile.*

Pour la démonstration, voir les n^os (2.5.1) à (2.5.4) et (2.5.14) à (2.5.16). Dans la démonstration de (2.5.3) (i) on remplacera l'utilisation des facettes par celle du lemme suivant :

Lemme **(7.4.21)**. — *Soient* C *une chambre,* A′ *un appartement et* x, y *deux points de* A′. *Il existe une suite monotone* $(x_0=x, x_1, \ldots, x_m=y)$ *de points du segment* $[xy]$ *de* A′ *telle que,* *pour tout* $i=0, \ldots, m-1$, *le segment* $[x_i x_{i+1}]$ *de* A′ *et la chambre* C *soient contenus dans un même appartement.*

On peut supposer $x \neq y$. Pour tout point $z \in]xy[$, il existe des chambres C_z^+ et C_z^- contenues dans A′, telles que $]xz[\cap C_z^- \neq \emptyset$ et $]zy[\cap C_z^+ \neq \emptyset$. Soit A_z^+ (resp. A_z^-) un appartement contenant C et C_z^+ (resp. C_z^-). Il existe alors $z^+ \in]zy[$ et $z^- \in]xz[$ tels que $[zz^+] \subset A_z^+$ et $[z^- z] \subset A_z^-$. On définit de manière analogue x^+ et A_x^+ d'une part, y^- et A_y^- d'autre part. Il existe alors un nombre fini de points $z_1, \ldots, z_k$ de $[xy]$ tels que les $]z_i^- z_i^+[$ forment avec $[xx^+[$ et $]y^- y]$ un recouvrement ouvert de $[xy]$. Il suffit alors d'ordonner en une suite monotone les points x, x^+, z_i^-, z_i, z_i^+, y^- et y pour obtenir la suite cherchée.

Remarque **(7.4.22)**. — Soient C et C′ deux chambres de A et soit $g = bnb' \in G$, avec $b \in B_C$, $n \in N$ et $b \in B_{C'}$. Comme la restriction de $\rho_{A;C}$ à l'appartement $b.A \supset g.C'$ coïncide avec l'action de b^{-1}, on a $\rho_{A;C}(g.C') = n.C'$.

De même, on a $\rho_{A;C}(g.x) = n.x$ dès que $g \in B_C n \hat{P}_x$ ($x \in A$, $n \in N$).

(7.4.23) Soient v un élément de longueur 1 de V, $E = E(v)$ la facette vectorielle qui le contient et $\widetilde{E} = \widetilde{E}(v)$ le sous-espace vectoriel engendré par E. On pose

$$c(v) = \sin(\alpha/2)$$

où α est le plus petit des angles que fait v avec ses transformés distincts de lui-même par les divers éléments de ${}^v W$.

Si $\widetilde{E} = V$, on pose $k(v) = +\infty$; si $\widetilde{E} \neq V$, on pose

$$k(v) = \sin \beta$$

où β est le plus petit des angles que fait v avec les sous-espaces vectoriels engendrés par les facettes vectorielles non contenues dans $\widetilde{E}$ et de dimension $\leqslant \dim \widetilde{E}$. Enfin, on note $\delta(v)$ la distance de v au complémentaire de E dans $\widetilde{E}$, et on pose

$$h(v) = \inf\{c(v), k(v), \delta(v)\}.$$

Notons que $h(v) > 0$.

Proposition **(7.4.24)**. — *On garde les notations de* (7.4.23). *Soient* $x, y_1, z \in A$ *tels que* $x \in [zy_1]$ *et* $y_1 - z \in \mathbf{R}_+^* v$. *Soient* $g \in \hat{P}_z$ *et* $y \in \mathscr{I}$ *tels que* $g^{-1}.y \in A$ *et que*

$$d(y, y_1) + d(g^{-1}.y, y_1) \leqslant 2c(v) d(x, y_1).$$

Alors, $g \in \hat{P}_x$.

L'ensemble des $t \in [zx]$ tels que $g \in \hat{P}_t$ est un segment $[zm]$. Supposons $m \neq x$. On note D une chambre vectorielle telle que $v \in \overline{D}$ et ρ la rétraction sur A ayant pour centre la chambre $C_{m,D}$. Soit $n \in N$ tel que $g \in B_{m,D} n B_{m,D}$. Comme $g.m = m$, on a $n.m = m$; d'autre part, il existe d'après (7.4.22) un point $m' \in]my_1]$ tel que $\rho(g.p) = n.p$ pour $p \in [mm']$. Comme $\rho(g.[my_1])$ est le segment $[m\rho(g.y_1)]$, on voit que $[m\rho(g.y_1)] = n.[my_1]$, et que

$$\rho(g.y_1) - y_1 = d(m, y_1)({}^v\nu(n)(v) - v).$$

Or, on a ${}^v\nu(n)(v) \neq v$: sinon, compte tenu de ce qu'un élément de $B_{m,D}$ laisse fixes les points d'un voisinage de m dans $m+\overline{D}$, on aurait $g.(m+tv)=m+tv$ pour tout $t \geqslant 0$ assez petit, ce qui contredit la définition de m. Par suite, la longueur de ${}^v\nu(n)(v)-v$ est au moins égale à $2c(v)$ et on a

$$d(\rho(g.y_1), y_1) \geqslant 2c(v)d(m, y_1) > 2c(v)d(x, y_1) \geqslant d(y, y_1) + d(g^{-1}.y, y_1)$$

$$d(\rho(g.y_1), y_1) > d(y, y_1) + d(y, g.y_1) \geqslant d(\rho(y), y_1) + d(\rho(y), \rho(g.y_1)) \geqslant d(y_1, \rho(g.y_1))$$

d'où une contradiction. Donc $m=x$ et $g \in \widehat{P}_x$.

Proposition **(7.4.25)**. — *Soient* A′ *un appartement de* $\mathscr{I}$ *et* γ *un germe de quartier contenu dans* A′. *Il existe une application notée* $\rho_{A';\gamma}$ *de* $\mathscr{I}$ *dans* A′ *et une seule possédant la propriété suivante : pour toute partie bornée* M *de* $\mathscr{I}$, *il existe un quartier* $\mathfrak{C}$ *de* A′ *appartenant à* γ *tel que, pour toute chambre* C *contenue dans* $\mathfrak{C}$, *l'on ait* $\rho_{A';\gamma}(y)=\rho_{A';C}(y)$ *pour tout* $y \in M$.

On peut supposer $A'=A$ et $\gamma=\gamma(D)$, où D est une chambre vectorielle. L'unicité de $\rho_{A';\gamma}$ est claire. Soit M une partie bornée de $\mathscr{I}$; soient $y_1 \in A$ et $v \in -D$. Posons $r=\sup\{d(y_1,y) \mid y \in M\}$ et soit $x \in y_1-\mathbf{R}_+^* v$ tel que la boule de centre y_1 et de rayon r de A soit contenue dans le quartier $x-D$. Soient $y \in M$ et $g \in G$ tel que $y'=g.y \in A$. Écrivons $g=hnu$, avec $h \in \widehat{P}_{y'}$, $n \in N$ et $u \in U_D^+$ (7.3.1). Alors $u.y \in A$. D'autre part, il existe $z \in x-\mathbf{R}_+^* v$ tel que $u \in U_{z+D}$ et, vu (7.4.19), on a $u.y=\rho_{A;C}(y)$ pour toute chambre $C \subset z+D$, d'où

$$d(y_1, u.y) \leqslant d(y_1, y) \leqslant r \leqslant c(v)d(y_1, x).$$

Appliquant (7.4.24), on voit que $u \in \widehat{P}_x$, donc $u \in U_{x+D}$ et on a

$$u.y=\rho_{A;C}(y) \tag{1}$$

pour toute chambre $C \subset x+D$ et tout $y \in M$. La proposition en résulte.

Comme en 2.9, l'application $\rho_{A';\gamma}$ s'appelle la *rétraction de* $\mathscr{I}$ *sur* A′ *relativement au germe de quartier* γ. Il est clair qu'elle est l'identité sur A′ et diminue les distances.

Proposition **(7.4.26)**. — *On reprend les notations de* (7.4.23). *Soient* $z \in A$ *et* $g \in \widehat{P}_z$; *posons* $\tau=\sup\{t \in \mathbf{R} \mid g.(z+tv)=z+tv\}$. *Pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *tel que* $t \geqslant \tau$, *on a*

$$2c(v)(t-\tau) \leqslant d(z+tv, g.(z+tv)) \leqslant 2(t-\tau).$$

Soit $t \in \mathbf{R}$, $t \geqslant \tau$. Posons

$$y=y_1=z+tv, \qquad d=d(y, g.y) \qquad \text{et} \qquad x=y-((1/2)c(v)^{-1}d)v.$$

De (7.4.24) on déduit que $g \in \widehat{P}_x$, d'où

$$\tau \geqslant t-(1/2)c(v)^{-1}d$$

ce qui est la première des inégalités annoncées.

D'autre part, posons $u = z + \tau v$; on a

$$d(z+tv, g.(z+tv)) \leqslant d(u, z+tv) + d(u, g.(z+tv)) = 2(t-\tau)$$

pour tout $t \geqslant \tau$, d'où la deuxième inégalité.

Remarquons que *lorsque* Φ *est de rang un, on a* $c(v) = 1$.

Corollaire **(7.4.27)**. — *Soit* D *une chambre vectorielle telle que* $v \in \overline{\mathrm{D}}$. *Soient* $y \in \mathrm{A}$, $u \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}_{+}$.

(i) *Si* $d(y, u.y) \leqslant \lambda$, *on a* $u \in \mathrm{U}_{y+(1/2)c(v)^{-1}\lambda v+\mathrm{D}}$.

(ii) *Si* $u \in \mathrm{U}_{y+\lambda v+\mathrm{D}}$, *on a* $d(y, u.y) \leqslant \sup(0, 2\lambda)$.

Soit $s = \inf\{t \in \mathbf{R} \mid u \in \mathrm{U}_{y+tv+\mathrm{D}}\}$. Comme $u \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$, on a $s < \infty$. Si $s \leqslant 0$, on a $u.y = y$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons $s > 0$ et appliquons (7.4.26) en y remplaçant v par $-v$ et en prenant $g = u$, $z = y + sv$, $t = s$. On a alors $\tau = 0$, d'où

$$2c(v)s \leqslant d(y, u.y) \leqslant 2s$$

ce qui démontre (i) et (ii).

Remarque **(7.4.28)**. — Soient $x \in \mathrm{A}$, $u \in \mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$ et $n \in \mathrm{N}$ tels que $u \in \hat{\mathrm{P}}_x n \hat{\mathrm{P}}_x$. On a alors $d(x, u.x) = d(x, n.x)$ et (7.4.27) établit une double inégalité entre la « grandeur » de n mesurée par $d(x, n.x)$ et celle de u, mesurée par le plus petit $\lambda \in \mathbf{R}_{+}$ tel que u appartienne au sous-groupe $\mathrm{U}_{x+\lambda v+\mathrm{D}}$. Remarquons que, lorsque $v \in \mathrm{D}$, les sous-groupes $\mathrm{U}_{x+\lambda v+\mathrm{D}}$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$ forment une filtration décroissante de $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$ et permettent de définir une « valuation » φ_v de $\mathrm{U}_{\mathrm{D}}^{+}$.

Proposition **(7.4.29)**. — *Reprenons les notations de* (7.4.23). *Soient* $x, x', y_1, y'_1 \in \mathrm{A}$ *tels que* $y_1 - x$, $x - x'$ *et* $x' - y'_1$ *appartiennent à* $\mathbf{R}_{+}^{*} v$. *Posons* $\mathrm{L} = x + \widetilde{\mathrm{E}} = x' + \widetilde{\mathrm{E}}$ *et soient* $y \in \hat{\mathrm{P}}_x.\mathrm{L}$ *et* $y' \in \hat{\mathrm{P}}_{x'}.\mathrm{L}$ *tels que*

$$d(y, y_1) < h(v)d(x, y_1) \quad \text{et} \quad d(y', y'_1) < h(v)d(x', y'_1).$$

Alors, $(x - \mathrm{E}) \cap (x' + \mathrm{E}) \subset \mathrm{cl}(\{y, y'\})$.

Soit C une chambre de A à laquelle y'_1 est adhérent; posons $\rho = \rho_{\mathrm{A};\mathrm{C}}$ et soit $g \in \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}}$ tel que $\rho(y) = g.y$. On a

$$d(y, y_1) + d(g.y, y_1) \leqslant 2d(y, y_1) < 2c(v)d(x, y_1)$$

et $g \in \hat{\mathrm{P}}_x$ d'après (7.4.24). Comme $\mathrm{cl}(\{x\} \cup \mathrm{C}) \supset (y'_1 + \mathrm{E}) \cap (x - \mathrm{E}) \supset (x' + \mathrm{E}) \cap (x - \mathrm{E})$ on a $g \in \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{C}} \cap \hat{\mathrm{P}}_{(x'+\mathrm{E}) \cap (x-\mathrm{E})}$.

Montrons que $\rho(y) \in x + \mathrm{E}$. Il existe $z \in \mathrm{L}$ et $h \in \hat{\mathrm{P}}_x$ tels que $\rho(y) = gh.z$; vu (7.4.8), il existe $n \in \hat{\mathrm{N}}_x$ tel que $\rho(y) = n.z$, d'où

$$\rho(y) - x = {}^{v}\nu(n)(z - x).$$

Comme $z - x \in \widetilde{\mathrm{E}}$, on voit que $\rho(y) - x$ appartient à une facette vectorielle de dimension $\leqslant \dim \widetilde{\mathrm{E}}$. Si $\rho(y) - x \notin \widetilde{\mathrm{E}}$, alors

$$d(y_1, y) \geqslant d(y_1, \rho(y)) \geqslant k(v)d(y_1, x) \geqslant h(v)d(y_1, x)$$

ce qui est contraire aux hypothèses. De plus, on a

$$d(y_1, \rho(y)) \leqslant d(y_1, y) < \delta(v) d(y_1, x)$$

ce qui entraîne que $\rho(y) = g.y$ appartient à $x + \mathrm{E}$.

Soit alors $t \in \mathbf{R}_+$ suffisamment grand pour que $g.y \in x + tv - \mathrm{E}$. Posons $z = x + tv$ et $y'' = g.y'$. Raisonnant alors comme on vient de le faire, mais en remplaçant x, y'_1, y_1, y, v et E respectivement par x', z, y'_1, y'', $-v$ et $-\mathrm{E}$, on voit, compte tenu de ce que $d(y'_1, y'') = d(y'_1, y')$ et que $y'' \in \hat{\mathrm{P}}_{x'}.y' \subset \hat{\mathrm{P}}_{x'}.\mathrm{L}$, qu'il existe

$$g' \in \hat{\mathrm{P}}_z \cap \hat{\mathrm{P}}_{(x'+\mathrm{E}) \cap (z-\mathrm{E})} \subset \hat{\mathrm{P}}_{g.y} \cap \hat{\mathrm{P}}_{(x'+\mathrm{E}) \cap (x-\mathrm{E})}$$

tel que $g'g.y = g.y \in x + \mathrm{E}$ et $g'g.y' = g'.y'' \in x' - \mathrm{E}$. On a alors

$$\mathrm{cl}(\{y, y'\}) = g^{-1}g'^{-1}.\,\mathrm{cl}(\{g'g.y, g'g.y'\}) \supset g^{-1}g'^{-1}.((x'+\mathrm{E}) \cap (x-\mathrm{E})) = (x'+\mathrm{E}) \cap (x-\mathrm{E}).$$

Corollaire **(7.4.30)**. — *Gardons les notations de* (7.4.23) *et soit* λ *un nombre réel tel que* $0 \leqslant \lambda < 1$. *Il existe un nombre réel* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour* $x, x' \in \mathrm{A}$ *et* $y, y' \in \mathscr{I}$, *les relations* $x' - x \in \mathbf{R}^*_+ v$, $d(x, y) < \varepsilon d(x, x')$, $d(x', y') < \varepsilon d(x, x')$, $\{y, y'\} \subset \hat{\mathrm{P}}_u.(x + \widetilde{\mathrm{E}})$ *pour tout* $u \in [xx']$, *entraînent l'existence de* $z, z' \in [yy'] \cap \mathrm{A}$ *avec* $d(z, z') \geqslant \lambda d(x, x')$.

La démonstration à partir de (7.4.29) est très analogue à celle de (2.8.10) à partir de (2.8.9). Nous la laissons au lecteur.

Remarque **(7.4.31)**. — Si E est une chambre vectorielle, on a $\mathrm{L} = x + \widetilde{\mathrm{E}} = \mathrm{A}$ et les conditions $y \in \hat{\mathrm{P}}_x.\mathrm{L}$, $y' \in \hat{\mathrm{P}}_{x'}.\mathrm{L}$ ou $y, y' \in \hat{\mathrm{P}}_u.(x + \widetilde{\mathrm{E}})$ de (7.4.29) et (7.4.30) sont automatiquement satisfaites; on a en effet $\mathscr{I} = \hat{\mathrm{P}}_x.\mathrm{A}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ d'après (7.4.9) (i) et (7.4.18) (i).

Corollaire **(7.4.32)**. — *L'appartement* A *est la plus petite partie convexe de* $\mathscr{I}$ *stable par* T.

On démontre (7.4.32) à partir de (7.4.30) exactement comme (2.8.11) à partir de (2.8.10).

Proposition **(7.4.33)**. — *Soit* v *un élément de longueur* 1 *de* V, *contenu dans la chambre vectorielle* D. *Il existe une constante* $h > 0$ *possédant la propriété suivante : si* $x \in \mathrm{A}$, $u \in \mathrm{U}_{x+\mathrm{D}}$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}_+$, *alors* u *laisse fixes tous les points de* $\mathscr{I}$ *situés dans la boule de centre* $x + \lambda v$ *et de rayon* $h\lambda$. *Si* Φ *est de rang un, on peut prendre* $h = 1/2$. *Si* Φ *est de type* A_1, *on peut prendre* $h = 1$.

Soient x, u et λ comme dans l'énoncé; posons $y = x + \lambda v$ et $c = c(v)^{-1}$. Soit $z \in \mathscr{I}$; posons $\delta = \lambda^{-1} d(y, z)$ et $t = \rho_{\mathrm{A};\,\gamma(\mathrm{D})}(z)$. Vu (7.4.25) (1) il existe $u' \in \mathrm{U}^+_{\mathrm{D}}$ tel que $z = u'.t$. On a $d(y, t) \leqslant d(y, z)$, d'où $d(y, u'.y) \leqslant d(y, z) + d(u'.t, u'.y) = d(y, z) + d(t, y) \leqslant 2\lambda\delta$. D'après (7.4.27) (i), on a donc $u' \in \mathrm{U}_{y + c\lambda\delta v + \mathrm{D}}$. Posons $x' = y + c\lambda\delta v$. D'après (6.4.32), il existe une constante k, ne dépendant que de v, avec $0 < k \leqslant 1$, telle que

$$(\mathrm{U}_{x+\mathrm{D}}, \mathrm{U}_{x'+\mathrm{D}}) \subset \mathrm{U}_{x' + k(x - x') + \mathrm{D}}.$$

Posons $r = \delta(v)$ (7.4.23); on voit aisément que $t \in x' + k(x - x') + \mathrm{D}$ dès que

$$c\delta - k(1 + c\delta) \leqslant -r^{-1}\delta.$$

Comme $k \leqslant 1$, il suffit pour cela que $\delta \leqslant kr$. Si cette condition est satisfaite, on a aussi $t \in x + \mathrm{D}$ et

$$u.z = uu'.t = uu'u^{-1}.t = u'(u'^{-1}, u).t = u'.t = z.$$

Il suffit donc de prendre $h = kr$. Si Φ est de rang un, on a $r = 1$ et on peut prendre $k = 1/2$ (6.4.32); si Φ est de type A_1, on peut prendre $k = 1$.

Corollaire **(7.4.34).** — *Supposons φ dense. Il existe deux constantes $\sigma, \tau > 0$ telles que, quels que soient les points $x, y \in \mathscr{I}$, il existe $g \in \mathrm{G}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(1) *g laisse fixes tous les points de $\mathscr{I}$ appartenant à la boule de centre x et de rayon $\sigma d(x, y)$;*

(2) $$d(y, g.y) \geqslant \tau d(x, y).$$

Pour $t \in \mathrm{V}$, $t \neq 0$, notons $\alpha(t)$ le plus petit des angles formés par t et les $a^\vee$ pour $a \in \Phi$ et posons $\alpha = \inf_{t \in \mathrm{V}, t \neq 0} \cos \alpha(t)$; on a $\alpha > 0$. Soit v un élément de longueur 1 de V, contenu dans une chambre vectorielle D et soit h la constante correspondante introduite en (7.4.33). Nous allons montrer que les constantes $\sigma = (1/3)h\alpha$ et $\tau = (2/3)c(v)\alpha$ répondent à la question.

Il suffit de le faire voir lorsque $x, y \in \mathrm{A}$ et $x - y \in \overline{\mathrm{D}}$. Soit alors $a \in \Phi$ telle que le cosinus de l'angle de $x - y$ avec $a^\vee$ soit $\geqslant \alpha$; on a $a \in \Phi_{\mathrm{D}}^{+}$. Posons $d = d(x, y)$ et soit $z \in [xy]$ tel que $-a(z) \in \Gamma_a$ et que $d(x, z) \geqslant (1/3)d$, $d(y, z) \geqslant (1/3)d$: un tel point existe puisque φ est dense. Soit $u \in \mathrm{U}_a$ tel que $\varphi_a(u) = -a(z)$. On sait (7.4.5) que l'ensemble des points fixes de u dans A est le demi-espace $\{t \in \mathrm{A} \mid a(t) - a(z) \geqslant 0\}$. En particulier, on a $u \in \mathrm{U}_{x - \lambda v + \mathrm{D}}$ avec $\lambda = a(x - z)a(v)^{-1} \geqslant \alpha d(x, z) \geqslant (\alpha/3)d$. De (7.4.33) on déduit alors que $u.t = t$ pour tout $t \in \mathscr{I}$ tel que $d(x, t) \leqslant h(\alpha/3)d = \sigma d(x, y)$: c'est la condition (1).

D'autre part, on voit de même que $u \notin \mathrm{U}_{y + \mu v + \mathrm{D}}$ dès que $\mu < a(z - y)a(v)^{-1}$. De (7.4.27) (i), on tire alors

$$d(y, u.y) \geqslant 2c(v)a(z - y)a(v)^{-1} \geqslant 2c(v)\alpha d(y, z) \geqslant \tau d(x, y)$$

ce qui démontre (2).

7.5. Le complété de l'immeuble.

(7.5.1) Lorsque φ est discrète, l'immeuble de G est un espace métrique complet (2.5.12). Il n'en est pas de même en général. Notons alors $\hat{\mathscr{I}}$ le complété de $\mathscr{I}$. Les opérations de G ainsi que les rétractions sur un appartement se prolongent par continuité à $\hat{\mathscr{I}}$. D'autre part, on déduit aisément de (7.4.20) (iv) que, si des x_i (resp. y_i) de $\mathscr{I}$ tendent vers un point x (resp. y) de $\hat{\mathscr{I}}$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$, les $tx_i + (1 - t)y_i$ tendent vers un point $z \in \hat{\mathscr{I}}$ et z ne dépend que de t, x et y; on pose alors $z = tx + (1 - t)y$ et $[xy] = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}$. On voit par continuité que les assertions (7.4.20) (iv) et (v) sont encore valables si l'on y remplace $\mathscr{I}$ par $\hat{\mathscr{I}}$. On en déduit aussitôt que $[xy]$ est l'unique géodésique de $\hat{\mathscr{I}}$ joignant x à y; plus précisément, on a

$$[xy] = \{z \in \hat{\mathscr{I}} \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}.$$

Proposition (**7.5.2**). — *Soit v un élément de longueur* 1 *de* V, *contenu dans une chambre vectorielle* D. *Pour tout point $x \in \hat{\mathscr{I}}$, il existe un triplet $(y, (\lambda_p), (u_p))$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :*

(1) $y \in \mathrm{A}$, $(\lambda_p)_{p\geqslant 1}$ *est une suite décroissante de nombres réels tendant vers zéro et* $(u_p)_{p\geqslant 1}$ *est une suite d'éléments de* U_D^+;

(2) $$u_{p+1} \in u_p \mathrm{U}_{y+\lambda_p v+\mathrm{D}} \quad \textit{pour tout } p \geqslant 1;$$

(3) $x = \lim\limits_{p\to\infty} u_p . y$.

Réciproquement, pour tout triplet $(y, (\lambda_p), (u_p))$ satisfaisant à (1) *et* (2), *la suite des $u_p . y$ converge vers un élément x de $\hat{\mathscr{I}}$. Pour que l'on ait $x \in \mathscr{I}$, il faut et il suffit qu'il existe un $u \in \mathrm{U}_\mathrm{D}^+$ tel que*

(4) $$u_p \in u\mathrm{U}_{y+\lambda_p v+\mathrm{D}} \quad \textit{pour tout } p \geqslant 1.$$

On a alors $x = u . y$.

Soit $x \in \hat{\mathscr{I}}$ et soit ρ la rétraction sur A relativement au germe de quartier $\gamma(\mathrm{D})$, prolongée par continuité à $\hat{\mathscr{I}}$. Soit $(x_p)_{p\geqslant 1}$ une suite de points de $\mathscr{I}$ telle que $\varepsilon_p = d(x, x_p)$ décroisse et tende vers zéro quand p tend vers l'infini. Posons $y = \rho(x)$ et $y_p = \rho(x_p)$. Pour tout $p \geqslant 1$, il existe $u_p \in \mathrm{U}_\mathrm{D}^+$ tel que $x_p = u_p . y_p$ (7.4.25) (1). Comme

$$d(u_p . y, u_p . y_p) = d(y, y_p) \leqslant d(x, x_p),$$

on voit que, quitte à remplacer les x_p par les $u_p . y$ et à en extraire une suite partielle, on peut supposer que $x_p = u_p . y$ pour tout $p \geqslant 1$.

Si $q \geqslant p$, on a $d(u_q^{-1} u_p . y, y) = d(u_p . y, u_q . y) \leqslant 2\varepsilon_p$. D'après (7.4.27) (i) on a

(2 *bis*) $$u_q^{-1} u_p \in \mathrm{U}_{y+\lambda_p v+\mathrm{D}} \quad \text{pour } q \geqslant p$$

en posant $\lambda_p = c(v)^{-1}\varepsilon_p$. Il est clair que $(y, (\lambda_p), (u_p))$ satisfait à (1), (2) et (3).

Réciproquement, soit $(y, (\lambda_p), (u_p))$ satisfaisant à (1) et (2). Vu la décroissance de (λ_p), la condition (2 *bis*) est satisfaite. On tire alors de (7.4.27) (ii) que $d(u_p . y, u_q . y) = d(u_q^{-1} . u_p . y, y) \leqslant 2\lambda_p$ pour $q \geqslant p$, d'où la convergence de la suite $(u_p . y)$ vers un élément $x \in \hat{\mathscr{I}}$.

Si $x \in \mathscr{I}$, il existe $u \in \mathrm{U}_\mathrm{D}^+$ tel que $x = u . y$. On a alors

$$d(u . y, u_p . y) = \lim_{q\to\infty} d(u_q . y, u_p . y) \leqslant 2\lambda_p.$$

D'après (7.4.27) (i), on a donc

$$u \in u_p \mathrm{U}_{x+c(v)^{-1}\lambda_p v+\mathrm{D}} \quad \text{pour tout } p.$$

Mais, pour $q \geqslant p$ assez grand, on a $\lambda_p \geqslant c(v)^{-1}\lambda_q$ d'où

$$u \in u_q \mathrm{U}_{x+\lambda_p v+\mathrm{D}}$$

ce qui, vu (2 *bis*), entraîne (4). Inversement, si (4) est satisfaite, on déduit de (7.4.27) (ii) que $d(u . y, u_p . y) \leqslant 2\lambda_p$, d'où $x = u . y \in \mathscr{I}$.

(7.5.3) Pour $a \in \Phi$, appelons boule de centre $u \in U_a$ et de rayon $k \in \mathbf{R}$ dans U_a la classe à gauche $uU_{a,k}$.

Proposition **(7.5.4)**. — *Pour que l'immeuble $\mathscr{I}$ soit complet, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite pour tout* $a \in \Phi^{\text{réd}}$:

(MC) *Toute suite décroissante pour l'inclusion de boules de rayon majoré de* U_a *a une intersection non vide.*

Montrons que la condition est nécessaire. Soit $a \in \Phi^{\text{réd}}$, et, pour p entier $\geqslant 1$, soient $u_p \in U_a$ et $k_p \in \mathbf{R}$ tels que $k_q \geqslant k_p$ et $u_q U_{a,k_q} \subset u_p U_{a,k_p}$ pour $q \geqslant p$, et que $k = \sup\limits_p k_p < \infty$. Soit D une chambre vectorielle telle que $a \in \Phi_D^+$ et soit v un élément de longueur 1 de D. Soit $y \in A$ tel que $a(y) = -k$; posons $\lambda_p = a(v)^{-1}(k - k_p)$, d'où $U_{a,k_p} = U_a \cap U_{y+\lambda_p v+D}$. D'après (7.5.2), la suite $(u_p.y)$ converge vers un point $x \in \hat{\mathscr{I}}$. Supposons $\mathscr{I}$ complet; on a alors $x \in \mathscr{I}$ et, d'après (7.5.2), l'intersection des $u_p U_{y+\lambda_p v+D}$ est non vide. Soit u un élément de cette intersection. D'après (6.1.6), il existe $u_1 \in U_a$ et $u_2 \in \prod\limits_{b \in \Phi_D^{+\text{réd}}, b \neq a} U_b$ tels que $u = u_1 u_2$. Comme $u_p^{-1} u_1 u_2 \in U_{y+\lambda_p v+D}$, on a $u_p^{-1} u_1 \in U_a \cap U_{y+\lambda_p v+D} = U_{a,k_p}$ (6.4.9), d'où $\bigcap\limits_p u_p U_{a,k_p} \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons (MC) satisfaite pour tout $a \in \Phi^{\text{réd}}$. Pour montrer que $\mathscr{I}$ est complet, il suffit, d'après (7.5.2), de montrer que, si $y \in A$, $u_p \in U_D^+$, $\lambda_p \in \mathbf{R}_+$ et $v \in D$ sont tels que

$$u_p U_{y+\lambda_p v+D} \supset u_q U_{y+\lambda_q v+D} \quad \text{pour } q \geqslant p,$$

alors l'intersection $X = \bigcap\limits_p u_p U_{y+\lambda_p v+D}$ n'est pas vide.

Rangeons les racines de $\Phi_D^{+\text{réd}}$ en un ordre grignotant $(a_1, \ldots, a_m)$ (1.3.15). Pour $i = 1, \ldots, m$, posons $U_i = U_{a_i}$ et soit U'_i le groupe engendré par les U_j pour $i < j \leqslant m$. On sait ((DR 2) et (6.1.6)) que U'_i est normalisé par U_i et que U'_{i-1} est produit semi-direct de U_i par U'_i. Posons de plus

$$U^p = U_{y+\lambda_p v+D}, \qquad U_i^p = U^p \cap U_i, \qquad U_i'^p = U^p \cap U'_i.$$

D'après (6.4.9), on a

$$U_{i-1}'^p = U_i^p . U_i'^p \qquad \text{et} \qquad U_i^p = U_{a_i, -a_i(y) - a_i(v)\lambda_p} \supset U_{a_i, -a_i(y)}.$$

Nous allons montrer par récurrence sur i, qu'il existe $t_i \in U_D^+$ et $u_{p,i} \in U'_i$ (pour $i = 0, \ldots, m$ et $p \geqslant 1$) tels que

$$(1; i) \qquad t_i u_p U^p \supset u_{p,i} U_i'^p \quad \text{pour tout } p.$$

$$(2; i) \qquad u_{q,i} U_i'^q \subset u_{p,i} U_i'^p \quad \text{pour } q \geqslant p.$$

C'est vrai pour $i = 0$ (en posant $U'_0 = U_D^+$ et $U_0'^p = U^p$) : il suffit de prendre $t_0 = 1$ et $u_{p,0} = u_p$. Supposons $i \geqslant 1$ et supposons t_{i-1} et les $u_{p,i-1}$ déjà construits, satisfaisant à $(1; i-1)$ et $(2; i-1)$. Soit f l'homomorphisme de U'_{i-1} sur U_i défini par $x \in f(x) U'_i$ pour $x \in U'_{i-1}$. On a $f(u_{p,i-1} U_{i-1}'^p) = f(u_{p,i-1}) U_i^p$ et $(2; i-1)$ joint à (MC) et à la relation

$U_i^p \supset U_{a_i, -a_i(y)}$ entraîne qu'il existe $s \in \bigcap_p f(u_{p,i-1}) U_i^p$. Posons $t_i = s^{-1} t_{i-1}$. Comme $U_i^p U_i' = U_i' U_i^p$, il existe un élément $u_{p,i}$ et un seul de U_i' tel que $s^{-1} u_{p,i-1} \in u_{p,i} U_i^p$. Pour tout p, on a alors

$$t_i u_p U^p \supset s^{-1} u_{p,i-1} U'^p_{i-1} = u_{p,i} U'^p_{i-1} \supset (u_{p,i} U'^p_{i-1}) \cap U_i' = u_{p,i} U_i'^p$$

et, pour $q \geqslant p$,

$$u_{q,i} U_i'^q = (s^{-1} u_{q,i-1} U'^q_{i-1}) \cap U_i' \subset (s^{-1} u_{p,i-1} U'^p_{i-1}) \cap U_i' = u_{p,i} U_i'^p$$

d'où $(1; i)$ et $(2; i)$.

Comme $U'_m = \{1\}$, on a $u_{p,m} = 1$ pour tout p et $(1; m)$ entraîne $t_m^{-1} \in u_p U^p$ pour tout p, ce qui montre que $X \neq \emptyset$ et achève la démonstration.

Exemple **(7.5.5)**. — Reprenons les notations de (6.2.3) *a)* (donnée radicielle valuée canonique de $SL_2(K)$, où K est un corps commutatif ou non, muni d'une valuation ω non impropre) ou de (6.2.3) *b)* (donnée radicielle valuée du groupe des points rationnels sur K d'un groupe algébrique semi-simple déployé sur K, où K est un corps commutatif, muni d'une valuation ω non impropre). Chaque groupe U_a muni de la valuation φ_a est alors isomorphe au groupe additif de K, muni de ω. La condition (MC) signifie donc que *le complété de* K *pour* ω *est maximalement complet* [34]. On remarquera que ceci est toujours vrai lorsque ω est *discrète*, ce qui correspond bien au fait que l'immeuble de G est toujours complet lorsque φ est discrète.

Remarque **(7.5.6)**. — La condition (MC) peut être satisfaite pour toute $a \in \Phi^{\text{réd}}$ sans l'être pour toute $a \in \Phi$. Reprenons par exemple les notations de l'*exemple* (6.2.3) *d)*, en prenant pour K le corps des séries formelles à exposants bien ordonnés dans un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}$ ([6], chap. VI, § 3, exerc. 2), dense dans $\mathbf{R}$ et tel que $\Gamma/2\Gamma$ soit infini, à coefficients dans un corps k de caractéristique 2, et en prenant pour L le sous-groupe additif engendré par les éléments de la forme $u^2 X^\gamma$, avec $u \in K$ et $\gamma \in \Gamma$. On voit alors aisément que L est un sous-corps de K. D'autre part, il est bien connu que K est maximalement complet (*ibid.*, § 5, exerc. 5), ce qui montre que (MC) est satisfaite lorsque a est une racine courte. Par contre, on voit aisément que le complété de L n'est pas maximalement complet et que la condition (MC) n'est pas satisfaite lorsque a est une racine longue.

(7.5.7) Soient A un appartement de $\mathscr{I}$ et C une chambre de A. Il est évident que la rétraction $\rho_{A;C}$ se prolonge par continuité en une application, notée encore $\rho_{A;C}$, de $\hat{\mathscr{I}}$ sur A et que (7.4.20) (ii) est encore valable si l'on y remplace $\mathscr{I}$ par $\hat{\mathscr{I}}$. De même, une rétraction par rapport à un germe de quartier se prolonge par continuité à $\hat{\mathscr{I}}$.

(7.5.8) Supposons la valuation φ dense, et soient σ et τ les constantes dont (7.4.34) assure l'existence. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\sigma' = (1-2\varepsilon)\sigma - \varepsilon$ et $\tau' = (1-2\varepsilon)\tau - 2\varepsilon$ soient strictement positifs. Soient x et y deux points distincts de $\hat{\mathscr{I}}$ et choisissons deux points x' et y' de $\mathscr{I}$ tels que $d(x,x')$ et $d(y,y')$ soient inférieurs à $\varepsilon d(x,y)$, d'où $d(x',y') \geqslant (1-2\varepsilon)d(x,y)$. D'après (7.4.34), il existe $g \in G$ laissant fixes tous les points de $\mathscr{I}$ appartenant à la boule de centre x' et de rayon $(1-2\varepsilon)\sigma d(x,y)$ et tel que $d(y', g.y') \geqslant (1-2\varepsilon)\tau d(x,y)$. Par continuité, on voit que g laisse fixes tous les points de $\hat{\mathscr{I}}$ appartenant à la boule de centre x et de rayon $\sigma' d(x,y)$ et on voit également que $d(y, g.y) \geqslant \tau' d(x,y)$. Autrement dit, on voit que, quitte à diminuer les constantes σ et τ, *le corollaire* (7.4.34) *reste vrai si on y remplace* $\mathscr{I}$ *par* $\hat{\mathscr{I}}$.

7.6. Restriction à un sous-groupe.

Définition **(7.6.1)**. — *On dit qu'une partie* Φ_1 *de* Φ *est* quasi-close (cf. [3], 3.8) *si, quels que soient* $a, b \in \Phi_1$, *le groupe des commutateurs* (U_a, U_b) *est contenu dans le groupe engendré par les* U_{pa+qb} *pour* p, q *entiers strictement positifs et* $pa+qb \in \Phi_1$.

Il est clair qu'une partie close est quasi-close.

(7.6.2) Dans toute la suite de 7.6, on désigne par Φ_1 un sous-système de racines quasi-clos. On note G_1^0 le sous-groupe de G engendré par les U_a pour $a \in \Phi_1$, N_1^0 le sous-groupe engendré par les M_a^0 pour $a \in \Phi_1$ ((6.1.2) (2)) et on pose $T_1^0 = T \cap N_1^0$. De plus, on donne un sous-groupe T_1 de T, contenant T_1^0; on désigne par G_1 le sous-groupe engendré par G_1^0 et T_1.

Proposition **(7.6.3)**. — $(T_1, (U_a, M_a^0.T_1)_{a \in \Phi_1})$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ_1 *dans* G_1 *et* $\varphi_1 = (\varphi_a)_{a \in \Phi_1}$ *en est une valuation.*

La seule chose à vérifier qui ne soit pas absolument évidente est que φ_1 satisfait à (V 3). Mais, soient $a, b \in \Phi_1$ et $h, k \in \mathbf{R}$, tels que $b \notin -\mathbf{R}_+^* a$. Pour un ordre quelconque sur l'ensemble E des éléments de Φ de la forme $pa+qb$, avec $p, q \in \mathbf{N}^*$, p et q non tous deux pairs, on a :

$$(U_{a,k}, U_{b,h}) \subset \Big(\prod_{c=pa+qb \in E} U_{c,pk+qh}\Big) \cap \Big(\prod_{c \in E \cap \Phi_1} U_c\Big)$$

compte tenu de ce que, si $2pa+2qb \in \Phi_1$ $(p, q \in \mathbf{N}^*)$, alors $pa+qb \in \Phi_1$, comme le montre un simple coup d'œil sur les systèmes de racines de rang 2. Comme l'application produit de $\prod_{c \in E} U_c$ dans G est injective (6.1.6), on en déduit que (V 3) est satisfaite.

Les objets que les §§ 6 et 7 permettent d'associer à la donnée radicielle valuée de G_1 seront notés par la même lettre que pour G, mais affectée de l'indice ou de l'exposant 1. Par exemple, V_1^* est le sous-espace de V^* engendré par Φ_1 et V_1 est le quotient de V par l'intersection des noyaux des $a \in \Phi_1$, intersection que nous noterons L_1. Nous noterons ${}^v\pi$ l'application canonique de V sur V_1 et π l'application affine de A sur A_1 définie par $\pi(\varphi+v) = \varphi_1 + {}^v\pi(v)$ pour $v \in V$. On identifie ${}^vW_1$ avec le sous-groupe de ${}^vW$ engendré par les réflexions r_a pour $a \in \Phi_1$. Notons que ${}^vW_1$ opère trivialement sur L_1.

Il est immédiat que $N_1 = N_1^0.T_1 \subset N$.

Si f est une fonction quasi-concave sur Φ_1, on note U_f^1 le sous-groupe correspondant de G_1 (6.4.2); les notations U_Ω^1, P_Ω^1 et $\hat{P}_\Omega^1$ (pour $\Omega\subset A_1$) sont claires.

Proposition **(7.6.4).** — (i) *Il existe une application et une seule* $\tilde{\pi} : G_1.A\to\mathscr{I}_1$ *de l'ensemble des transformés des points de* A *par les éléments de* G_1 *sur l'immeuble de* G_1, *prolongeant* $\pi : A\to A_1$ *et commutant avec les actions de* G_1 *sur* $G_1.A$ *et sur* $\mathscr{I}_1$.

(ii) *On a* $\tilde{\pi}^{-1}(A_1)=A$ *et l'image réciproque par* $\tilde{\pi}$ *de tout appartement* (resp. *demi-appartement, mur*) *de* $\mathscr{I}_1$ *est un appartement* (resp. *demi-appartement, mur*) *de* $\mathscr{I}$.

(iii) *Il existe une loi d'opération* $(x, v)\mapsto x+v$ *et une seule de* L_1 *dans* $G_1.A$, *prolongeant l'action de* L_1 *sur* A *et telle que* $g.(x+v)=g.x+v$ *pour* $g\in G_1$, $x\in G_1.A$ *et* $v\in L_1$. *L'application* $\tilde{\pi}$ *passe au quotient par* L_1 *et définit une bijection de* $(G_1.A)/L_1$ *sur* $\mathscr{I}_1$.

Montrons tout d'abord que

$$\pi\circ\nu(n)=\nu_1(n)\circ\pi \qquad \textit{pour tout } n\in N_1. \tag{1}$$

C'est immédiat s'il existe $a\in\Phi_1$ et $k\in\mathbf{R}$ tels que $n\in M_{a,k}^1$: en effet, $\nu(n)$ (resp. $\nu_1(n)$) est alors la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $a(x-\varphi)+k=0$ (resp. $a(x-\varphi_1)+k=0$). Si $n\in T_1$, il existe $v\in V$ (resp. $v_1\in V_1$) tel que $n.y=y+v$ (resp. $n.y_1=y_1+v_1$) pour tout $y\in A$ (resp. $y_1\in A_1$). On a, pour $a\in\Phi_1$ et $k\in\mathbf{R}$:

$$nU_{a,k}n^{-1}=U_{a,k-a(v)}=U_{a,k-a(v_1)}$$

d'où $a(v)=a(v_1)$ pour tout $a\in\Phi_1$. Par suite, $v_1={}^v\pi(v)$ et $\pi(n.y)=n.\pi(y)$ pour tout $y\in A$.

La formule (1) résulte alors de ce qui précède, puisque N_1 est engendré par T_1 et la réunion des $M_{a,k}^1$.

Soit maintenant $x\in A$. Il est immédiat que $U_{\pi(x)}^1\subset U_x$. Comme $G_1=U_{\pi(x)}^1.N_1.U_{\pi(x)}^1$ (7.3.4), on a, vu (1) :

$$G_1\cap\hat{P}_x=U_{\pi(x)}^1.(N_1\cap\hat{P}_x).U_{\pi(x)}^1\subset\hat{P}_{\pi(x)}^1. \tag{2}$$

Soit maintenant $g\in G_1$ et posons $\Omega=A\cap g^{-1}.A$. Supposons Ω non vide et soit $x\in\Omega$. Posons $\Omega'=\Omega\cap(x+L_1)$. Vu (7.4.8), il existe $n\in N$ tel que $g.y=n.y$ pour tout $y\in\Omega$, d'où

$$g\in n\hat{P}_\Omega\cap G_1=n\hat{P}_\Omega\cap U_{\pi(x),D_1}^1.N_1.U_{\pi(x)}^1\subset n\hat{P}_\Omega\cap U_{x,D}.N_1.\hat{P}_{\Omega'}$$

en désignant par D (resp. D_1) une chambre vectorielle de Φ (resp. Φ_1) telles que $D\subset\pi^{-1}(D_1)$. Vu (7.4.15), il existe donc $n_1\in N_1$ tel que

$$n\in(N\cap U_{x,D})n_1(N\cap\hat{P}_{\Omega'})=Hn_1\hat{N}_{\Omega'}=n_1\hat{N}_{\Omega'},$$

d'où

$$g\in n_1(\hat{P}_u\cap G_1)\subset n_1\hat{P}_{\pi(u)}^1 \qquad \textit{pour tout } u\in A\cap g^{-1}.A\cap(x+L_1). \tag{3}$$

Ceci étant, démontrons (i). L'unicité de $\tilde{\pi}$ est claire. Pour montrer son existence, il suffit de faire voir que si $x\in A$ et $g\in G_1$ sont tels que $g.x\in A$, alors on a $\pi(g.x)=g.\pi(x)$. Soit alors $n_1\in N_1$ satisfaisant à (3); vu (1) et (2), on a

$$\pi(g.x)=\pi(n_1.x)=n_1.\pi(x)=g.\pi(x).$$

Démontrons (ii). Soient $x\in A$ et $g\in G_1$ tels que $\pi(g.x)\in A_1$. Vu (7.4.8), il existe $n\in N_1$ tel que $g\in n\hat{P}^1_{\pi(x)}$. Comme $\hat{P}^1_{\pi(x)}=\hat{N}^1_{\pi(x)}.U^1_{\pi(x)}\subset N_1.\hat{P}_x$, on a $g.x\in N_1.x\subset A$, d'où (ii).

Démontrons (iii). L'unicité de la loi d'opération cherchée est claire. Pour montrer son existence, il suffit de faire voir que si $z=g.y$, avec $y, z\in A$ et si $g\in G_1$ et $v\in L_1$, on a $g.(y+v)=z+v$. Or, on a alors

$$\tilde{\pi}(g.(y+v))=g.\tilde{\pi}(y+v)=g.\tilde{\pi}(y)=\tilde{\pi}(g.y)=\pi(z)\in A_1$$

et $g.(y+v)\in A$ vu (ii). Soit alors $n_1\in N_1$ satisfaisant à (3), avec $x=y$. On a

$$g.(y+v)=n_1.(y+v)=n_1.y+{}^v\nu(n_1).v=z+v$$

car ${}^v\nu(n_1)\in{}^vW_1$ est l'identité sur L_1.

Corollaire **(7.6.5)**. — *Soit p la projection orthogonale de* V *sur* L_1 *et soit* S_1 *le sous-groupe formé des* $t\in T$ *tels que* $p\circ\nu(t)=0$. *Soit* Ω *une partie non vide de* A.

(i) *On a* $T_1^0=T\cap G_1^0\subset S_1$.

(ii) *Si* $T_1\subset S_1$, *on a* $G_1\cap\hat{P}_\Omega=\hat{P}^1_{\pi(\Omega)}$.

(iii) *On a* $G_1\cap\hat{P}_\Omega=G_1\cap\hat{P}_{\Omega+L_1}=(G_1\cap G_1^0.S_1)\cap\hat{P}_\Omega\subset\hat{P}^1_{\pi(\Omega)}$.

L'assertion (i) résulte aussitôt de (6.1.2) (12), (6.1.13) et (6.2.10) (ii). Démontrons (ii). Vu (7.6.4) (i), il suffit de montrer que $\hat{P}^1_{\pi(\Omega)}\subset\hat{P}_\Omega$ dès que $T_1\subset S_1$, ou encore, vu (7.1.8), que $\hat{N}^1_{\pi(\Omega)}\subset\hat{P}_\Omega$. Soit alors $n\in\hat{N}^1_{\pi(\Omega)}\subset N_1\subset N_1^0.S_1$. Tout élément de N_1^0 ou de S_1 laisse invariants les sous-espaces affines de la forme $y+\operatorname{Ker}p$ pour $y\in A$; d'autre part, $\nu(n)$ laisse invariants les sous-espaces affines de la forme $x+L_1$ pour $x\in\Omega$ ((7.6.4) (i)). Il en résulte que $n\in\hat{P}_\Omega$, d'où (ii).

Démontrons (iii). La première égalité résulte de (7.6.4) (iii) et la dernière inclusion de (7.6.4) (i). Il reste à montrer que $G_1\cap\hat{P}_\Omega\subset G_1^0.S_1$. Soit $g\in G_1\cap\hat{P}_\Omega$. Comme les immeubles de G_1 et de G_1^0 sont les mêmes, il existe $h\in G_1^0\cap\hat{P}^1_{\pi(\Omega)}$ tel que $h^{-1}.A_1=g.A_1$. Vu (ii), on a $h\in\hat{P}_\Omega$ et $n=hg\in N_1\cap\hat{P}_\Omega$. Ecrivons $n=tn_1$ avec $n_1\in N_1^0$ et $t\in T_1$ et soit $x\in\Omega$. On a d'une part

$$(1)\qquad \nu(n)(x+\operatorname{Ker}p)=\nu(t)(x+\operatorname{Ker}p)$$

et d'autre part

$$(2)\qquad \nu(n)(x+\operatorname{Ker}p)=\nu(n).x+{}^v\nu(n)(\operatorname{Ker}p)=x+\operatorname{Ker}p.$$

En comparant (1) et (2), on voit que $t\in S_1$ et on a bien

$$g=h^{-1}n\in G_1^0.N_1^0.S_1=G_1^0.S_1.$$

8. BORNOLOGIE DÉFINIE PAR UNE DONNÉE RADICIELLE VALUÉE

On conserve les notations des §§ 6 et 7.

8.1. Bornologies compatibles avec une donnée radicielle valuée.

Définition **(8.1.1)**. — *Une bornologie* $\mathscr{B}$ *sur* G *est dite* faiblement compatible *avec la donnée radicielle valuée de* G *(ou plus simplement avec la valuation* φ*) si elle est compatible avec la loi de groupe de* G, *si les sous-groupes* $U_{a,k}$ *sont bornés et les sous-groupes* U_a *non bornés pour* $\mathscr{B}$, *quels que soient* $a \in \Phi$ *et* $k \in \mathbf{R}$.

On dit que $\mathscr{B}$ *est* compatible *avec* φ *si de plus le sous-groupe* $H_{[0]}$ *défini en* (6.4.14), *est borné pour* $\mathscr{B}$.

Proposition **(8.1.2)**. — *Soit* $\mathscr{B}$ *une bornologie faiblement compatible avec* φ. *Soient* x *un point de* A *et* D *une chambre vectorielle.*

(i) *Pour qu'une partie* X *de* G *soit bornée pour* $\mathscr{B}$, *il faut et il suffit que*

$$(U_{x+D}.U_{x-D}.X.U_{x-D}.U_{x+D}) \cap N$$

soit bornée pour $\mathscr{B}$.

(ii) *L'ensemble* $\mathscr{B} \cap \mathscr{P}(N)$ *des parties bornées de* N *est une bornologie sur* N, *compatible avec la loi de groupe de* N, *et satisfaisant aux deux conditions suivantes* :

(BCN 1) *L'image par* ν *de tout borné de* N *est une partie bornée de* Isom A *(muni de sa bornologie naturelle) ((3.1.2) b)).*

(BCN 2) *Quels que soient* $a \in \Phi$ *et* $k \in \mathbf{R}$, *l'intersection*

$$T \cap (U_{a,k}U_{-a,k}U_{a,k}U_{-a,k}U_{a,k})$$

est bornée.

(iii) *Toute partie bornée de* U_a *est contenue dans un* $U_{a,k}$ $(a \in \Phi,\ k \in \mathbf{R})$.

D'après (7.3.4) et (7.2.6) (2), on a $G = U_{x-D}U_{x+D}NU_{x+D}U_{x-D}$, d'où

$$X \subset U_{x-D}.U_{x+D}.((U_{x+D}U_{x-D}XU_{x-D}U_{x+D}) \cap N).U_{x+D}.U_{x-D}.$$

D'autre part, U_{x+D} et U_{x-D} sont bornés pour $\mathscr{B}$ puisque l'on a par exemple (6.4.9)

$$U_{x+D} = \prod_{a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}} U_{a,-a(x)}.$$

On en déduit (i).

Démontrons (BCN 1) en raisonnant par l'absurde. Soit X une partie bornée de N dont l'image $\nu(X)$ ne soit pas bornée dans Isom A. Quitte à multiplier X par une partie finie, on peut supposer que $\nu(X)$ est stable par multiplication à gauche par le stabilisateur d'un point spécial et $\nu(X)$ contient alors des translations de longueur arbitrairement grande. Plus précisément, X contient une suite (x_n) telle que $t_n = \nu(x_n)$ soit une translation de longueur $|t_n|$ tendant vers l'infini et de direction $t_n/|t_n|$ tendant vers un élément $v \in V$ de longueur 1. Soit alors $a \in \Phi$ tel que $a(v) > 0$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} a(t_n) = +\infty$ et

$$U_a = \bigcup_n U_{a, -a(t_n)} = \bigcup_n x_n U_{a,0} x_n^{-1} \subset X . U_{a,0} . X^{-1}$$

est borné, ce qui est absurde.

Ceci démontre (ii), car (BCN 2) est évidente.

Démontrons (iii) par l'absurde. Soit (u_n) une suite bornée de points de U_a telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_a(u_n) = -\infty$ et soit $k = \sup\limits_n \varphi_a(u_n)$. D'après (V 5), on a $m(u_n) \in U_{-a,-k} u_n U_{-a,-k}$ et l'ensemble des réflexions $r_{a,\varphi_a(u_n)} = \nu(m(u_n))$ est borné, ce qui est absurde.

Proposition **(8.1.3)**. — *Soit* D *une chambre vectorielle et soit* $\mathscr{U}_D^+$ *la plus petite bornologie sur* U_D^+ *compatible avec la loi de groupe et contenant les* $U_{a,k}$ *pour* $a \in \Phi_D^+$ *et* $k \in \mathbf{R}$. *Soit* $X \subset U_D^+$; *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) X *est borné pour* $\mathscr{U}_D^+$;

(ii) *quel que soit l'ordre dans lequel on range les racines* $a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}$, *il existe* $k \in \mathbf{R}$ *tel que* $X \subset \prod\limits_{a \in \Phi_D^{+\,\text{réd}}} U_{a,k}$;

(iii) *il existe* $x \in A$ *tel que* $X \subset U_{x+D}$.

Il est clair que (iii) entraîne (ii) (6.4.9) et que (ii) entraîne (i). Soit $X \in \mathscr{U}_D^+$; alors X est contenu dans un produit fini de sous-groupes U_{a_i,k_i} avec $a_i \in \Phi_D^+$ et $k_i \in \mathbf{R}$. Pour $a \in \Phi_D^+$, posons $h(a) = \inf\{k_i \mid a_i = a\}$ et soit $x \in A$ tel que $a(x) > -h(a)$ pour tout $a \in \Phi_D^+$. On a alors $X \subset U_{x+D}$.

Proposition **(8.1.4)**. — *Soit* $\mathscr{N}$ *une bornologie sur* N, *compatible avec la loi de groupe et satisfaisant aux deux conditions* (BCN 1) *et* (BCN 2) *de* (8.1.2). *Soit* $\mathscr{G}$ *la plus petite bornologie sur* G *contenant* $\mathscr{N}$ *et les* $U_{a,k}$ *pour* $a \in \Phi$ *et* $k \in \mathbf{R}$ *et telle que* $M, M' \in \mathscr{G}$ *entraîne* $MM' \in \mathscr{G}$.

(i) $\mathscr{G}$ *est une bornologie faiblement compatible avec* φ *et en particulier est compatible avec la loi de groupe de* G.

(ii) $\mathscr{G}$ *induit sur* N *la bornologie donnée* $\mathscr{N}$ *et pour toute chambre vectorielle* D, *la bornologie* $\mathscr{G}$ *induit sur* U_D^+ *la bornologie* $\mathscr{U}_D^+$ (8.1.3).

(iii) *Soit* D *une chambre vectorielle. Pour qu'une partie* X *de* G *soit bornée pour* $\mathscr{G}$, *il faut et il suffit qu'il existe* $Y^+ \subset \mathscr{U}_D^+$, $Y^- \subset \mathscr{U}_D^- = \mathscr{U}_{-D}^+$ *et* $Y^0 \subset \mathscr{N}$ *telles que*

$$X \subset Y^+ . Y^- . Y^0.$$

Introduisons quelques conventions de notation : si $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ sont deux ensembles de parties de G, on pose $\mathscr{X} . \mathscr{Y} = \{XY \mid X \in \mathscr{X}, Y \in \mathscr{Y}\}$ et $\mathscr{X}^{-1} = \{X^{-1} \mid X \in \mathscr{X}\}$, et on écrit $\mathscr{X} \prec \mathscr{Y}$ si tout élément de $\mathscr{X}$ est contenu dans une réunion finie d'éléments de $\mathscr{Y}$. Soit $\mathscr{T} = \mathscr{N} \cap \mathfrak{P}(T)$ la bornologie induite par $\mathscr{N}$ sur T et, pour $a \in \Phi$, notons $\mathscr{U}_a$ l'ensemble des $U_{a,k}$ pour $k \in \mathbf{R}$.

Soit alors $\mathscr{H}$ l'ensemble des parties X de G satisfaisant à la condition de (iii) pour une chambre vectorielle D donnée. Comme $G = U_D^+ U_D^- N$ (6.1.12), c'est une bornologie sur G. Montrons que $\mathscr{H}$ est une bornologie compatible avec la loi de groupe de G, ou encore que

(1) $$\mathscr{H}^{-1}.\mathscr{H} \prec \mathscr{H}.$$

Tout élément de $\mathscr{H}^{-1}$ est contenu dans une réunion finie de produits finis d'ensembles appartenant soit à $\mathscr{E}$, soit à l'un des $\mathscr{U}_a$ pour $a \in \Phi$, soit à $\{\{n\} \mid n \in N\}$. Comme $\mathscr{U}_{-a} = n\mathscr{U}_a n^{-1}$ pour $n \in M_a$ et que N est engendré par T et par la réunion des M_b pour b parcourant la base Π_D de Φ correspondant à D (6.1.11), on voit que tout élément de $\mathscr{H}^{-1}$ est contenu dans une réunion finie de produits finis d'ensembles appartenant soit à $\mathscr{E}$, soit à l'un des $\mathscr{U}_a$ pour $a \in \Phi_D^+$, soit à l'ensemble des $\{m\}$ pour $b \in \Pi_D$ et $m \in M_b$.

D'après (8.1.3), on a $\mathscr{U}_a.\mathscr{H} \prec \mathscr{H}$ et la condition (BCN 1) entraîne que $\mathscr{E}.\mathscr{H} \prec \mathscr{H}$. Pour prouver (1), il suffit donc de faire voir que :

(2) *pour* $b \in \Pi_D$ *et* $m \in M_b$, *on a* $m\mathscr{H} \prec \mathscr{H}$.

Soit U'^+ (resp. U'^-) le groupe engendré par les U_c pour $c \in \Phi_D^+$ (resp. Φ_D^-) non proportionnel à b. Posons $\mathscr{U}^{\pm} = \mathscr{U}_D^{\pm}$, $\mathscr{U}'^+ = \mathscr{U}^+ \cap \mathfrak{P}(U'^+)$ et $\mathscr{U}'^- = \mathscr{U}^- \cap \mathfrak{P}(U'^-)$. Les relations suivantes sont évidentes :

(3) $$m\mathscr{U}_b m^{-1} = \mathscr{U}_{-b}, \qquad m\mathscr{U}_{-b} m^{-1} = \mathscr{U}_b;$$

(4) $$m\mathscr{U}'^+ m^{-1} = \mathscr{U}'^+, \qquad m\mathscr{U}'^- m^{-1} = \mathscr{U}'^-;$$

(5) $$\mathscr{E}.\mathscr{U}_b \prec \mathscr{U}_b.\mathscr{E}, \qquad \mathscr{E}.\mathscr{U}_{-b} \prec \mathscr{U}_{-b}.\mathscr{E};$$

(6) $$\mathscr{E}.\mathscr{U}'^+ \prec \mathscr{U}'^+.\mathscr{E}, \qquad \mathscr{E}.\mathscr{U}'^- \prec \mathscr{U}'^-.\mathscr{E}.$$

Nous allons montrer que :

(7) $$\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{U}_b \prec \mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{E} \cup \mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.m\mathscr{E}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que, quels que soient $h, k \in \mathbf{R}$, on a :

(8) $$\{U_{-b,h}.U_{b,k}\} \prec \mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{E} \cup \mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.m\mathscr{E}$$

et on peut supposer $h = k < 0$. Pour $u \in U_{-b}$ avec $r = \varphi_b(u) \leqslant -2k$, on a :

$$u \in U_{b,-r} m T U_{b,-r} \subset U_{b,2k} m T U_{b,2k}.$$

Par suite, il existe une partie Y de T telle que :

(9) $$U_{-b,k} - U_{-b,-2k} \subset U_{b,2k} m Y U_{b,2k}$$

et on peut choisir Y de telle sorte que :

(10) $$Y \subset m^{-1} U_{b,2k} U_{-b,k} U_{b,2k}.$$

Soit $s \in \Gamma_b$, $s > 2k$. Il existe $t \in T$ tel que $m^{-1} \in t M_{b,s}^0 \subset t U_{b,s} U_{-b,-s} U_{b,s}$ et (10) entraîne que $Y \in \mathscr{E}$ d'après (BCN 2).

D'autre part, on a d'après (6.3.2) $U_{-b,-2k}U_{b,k} \subset U_{b,k}U_{-b,-2k}H$ et on voit comme ci-dessus qu'il existe $Y' \in \mathscr{E}$ telle que :

$$U_{-b,-2k}.U_{b,k} \subset U_{b,k}.U_{-b,-2k}.Y'. \tag{11}$$

Il résulte alors de (9) et (11) que :

$$U_{-b,k}.U_{b,k} \subset (U_{b,2k}.mY.U_{b,2k}) \cup (U_{b,k}.U_{-b,-2k}.Y').$$

Compte tenu de (3) et (5), on en déduit (8), d'où (7). Finalement, on voit en utilisant (3), (4), (6) et (7), que :

$$\begin{aligned} m\mathscr{H} &\prec m.\mathscr{U}'^{+}.\mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{U}'^{-}.\mathscr{N} = \mathscr{U}'^{+}.\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{U}_b.\mathscr{U}'^{-}.m\mathscr{N} \\ &\prec \mathscr{U}'^{+}.\mathscr{U}_b.\mathscr{U}_{-b}.\{1, m\}.\mathscr{E}.\mathscr{U}'^{-}.\mathscr{N} \prec \mathscr{U}^{+}.\mathscr{U}_{-b}.\mathscr{U}'^{-}.\{1, m\}.\mathscr{E}.\mathscr{N} \\ &\prec \mathscr{U}^{+}.\mathscr{U}^{-}.\mathscr{N} = \mathscr{H}. \end{aligned}$$

Il est à présent clair que $\mathscr{H} = \mathscr{G}$.

D'autre part, pour $Y^+ \subset U_D^+$, $Y^- \subset U_D^-$ et $Y^0 \subset N$, on a ((6.1.15) *c)*)

$$U_D^+ \cap Y^+Y^-Y^0 \subset Y^+$$
$$N \cap Y^+Y^-Y^0 \subset Y^0.$$

Par conséquent, $\mathscr{G} = \mathscr{H}$ induit sur N (resp. U_D^+) la bornologie $\mathscr{N}$ (resp. $\mathscr{U}_D^+$). Vu l'invariance de $\mathscr{G}$ par automorphismes intérieurs, on en déduit que $\mathscr{G}$ est faiblement compatible avec φ et satisfait à (ii), ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(8.1.5)**. — *L'application qui, à une bornologie sur* G, *fait correspondre la bornologie induite sur* N, *est une bijection de l'ensemble des bornologies faiblement compatibles avec* φ *sur l'ensemble des bornologies sur* N *compatibles avec la loi de groupe de* N *et satisfaisant aux conditions* (BCN 1) *et* (BCN 2).

Cela résulte de (8.1.2) et (8.1.4).

La bijection réciproque de celle décrite dans le corollaire sera notée $\mathscr{N} \mapsto \mathscr{B}(\mathscr{N})$.

Remarques **(8.1.6)**. — *a)* Une bornologie $\mathscr{B}$ sur G qui contient les $U_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$, qui induit sur N une bornologie $\mathscr{N}$ compatible avec la loi de groupe de N satisfaisant à la condition (BCN 1) et qui est telle que $M, M' \in \mathscr{B}$ entraîne $MM' \in \mathscr{B}$, est faiblement compatible avec φ : il est clair en effet que $\mathscr{N}$ satisfait à (BCN 2) et que $\mathscr{B}$ satisfait à (8.1.2) (i); par suite, on a $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathscr{N})$.

b) Reprenons les notations de (8.1.4). Il n'est pas vrai que toute partie bornée de G (pour $\mathscr{G}$) soit contenue dans un ensemble de la forme

$$Y^+.Y^0.Y^- \quad \text{avec} \quad Y^+ \in \mathscr{U}^+,\ Y^- \in \mathscr{U}^- \quad \text{et} \quad Y^0 \in \mathscr{N} \tag{1}$$

ni même que toute partie bornée de $U^+.T.U^-$ soit contenue dans un produit de la forme (1) avec de plus $Y^0 \in \mathscr{E}$. Un contre-exemple est fourni par l'ensemble

$$m.(U_{b,k} - \{1\})$$

pour $b \in \Phi^+$, $m \in M_b$ et $k \in \mathbf{R}$.

Définition **(8.1.7)**. — *On appelle* bornologie définie par φ *et on note* $\mathscr{B}(\varphi)$ *la bornologie sur* G *image réciproque de la bornologie naturelle de* Isom $\mathscr{I}$ *par l'application canonique de* G *dans* Isom $\mathscr{I}$ (7.4.20).

On notera que, dans le cas où φ est discrète, cette bornologie coïncide avec celle définie par le système de Tits défini par φ (3.1.8).

Proposition **(8.1.8)**. — *La bornologie* $\mathscr{B}(\varphi)$ *est compatible avec* φ *et coïncide avec la bornologie* $\mathscr{B}(\mathscr{N})$, *où* $\mathscr{N}$ *est la bornologie sur* N *image réciproque par* ν *de la bornologie naturelle de* Isom A.

Soient $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$ et soit $x \in \mathrm{A}$ tel que $a(x) \geqslant -k$. On a alors $\mathrm{U}_{a,k} \subset \widehat{\mathrm{P}}_x$, ce qui montre que $\mathrm{U}_{a,k}$ est borné pour $\mathscr{B}(\varphi)$. Par contre, le corollaire (7.4.27) montre que U_a n'est pas borné. De plus, H tout entier, donc *a fortiori* $\mathrm{H}_{[0]}$, est borné puisque H laisse fixes tous les points de A. Enfin, l'image d'une partie X de N est bornée dans Isom $\mathscr{I}$ si et seulement si $\nu(\mathrm{X})$ est borné dans Isom A, d'où la dernière assertion.

Corollaire **(8.1.9)**. — *Soit* $\mathscr{B}$ *une bornologie faiblement compatible avec* φ. *Supposons que pour toute partie* X *de* $\nu(\mathrm{T})$ *bornée dans* Isom A, *il existe une partie* Y *de* T *appartenant à* $\mathscr{B}$, *telle que* $\mathrm{X} = \nu(\mathrm{Y})$. *Alors la bornologie définie par* φ *est engendrée par* $\mathscr{B}.\mathrm{H}$.

En effet, la bornologie image réciproque par ν de la bornologie naturelle de Isom A est engendrée par $\mathscr{N}.\mathrm{H}$, où $\mathscr{N}$ est la bornologie induite par $\mathscr{B}$ sur N.

Théorème **(8.1.10)**. — *Soit* ψ *une autre valuation de la donnée radicielle de* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *les valuations* φ *et* ψ *sont équivalentes* (6.2.5);
b) *les bornologies* $\mathscr{B}(\varphi)$ *et* $\mathscr{B}(\psi)$ *sont égales*;
c) *les bornologies* $\mathscr{B}(\varphi)$ *et* $\mathscr{B}(\psi)$ *induisent la même bornologie sur* U_a *pour tout* $a \in \Phi$;
d) *les bornologies* $\mathscr{B}(\varphi)$ *et* $\mathscr{B}(\psi)$ *induisent la même bornologie sur* N;
e) *pour tout* $a \in \Phi$, *il existe une bijection* $f_a : {}^{\varphi}\Gamma_a \to {}^{\psi}\Gamma_a$ *telle que* $\psi_a = f_a \circ \varphi_a$.

Supposons φ et ψ équivalentes et soit i la bijection canonique de l'immeuble ${}^{\varphi}\mathscr{I}$ sur ${}^{\psi}\mathscr{I}$ (7.4.3). Vu (7.4.3) *b)*, la restriction de i à ${}^{\varphi}\mathrm{A}$ est bornée, donc aussi i elle-même ((7.4.3) *a)*, (7.4.18) et (7.4.20)). On en déduit aussitôt que $\mathscr{B}(\varphi) \subset \mathscr{B}(\psi)$. On voit de même que $\mathscr{B}(\psi) \subset \mathscr{B}(\varphi)$, d'où l'implication *a)* $\Rightarrow$ *b)*.

Il est clair que *b)* entraîne *c)* et *d)*. Montrons que *c)* entraîne *d)*. Il suffit pour cela de remarquer qu'une partie Y de T est bornée pour $\mathscr{B}(\varphi)$ si et seulement si, pour tout $a \in \Phi$ et toute partie $\mathrm{X} \subset \mathrm{U}_a$ bornée pour $\mathscr{B}(\varphi)$, l'ensemble des txt^{-1} pour $t \in \mathrm{Y}$ et $x \in \mathrm{X}$ est borné pour la bornologie induite par $\mathscr{B}(\varphi)$ sur U_a, et qu'une partie de N est bornée si et seulement si elle est contenue dans la réunion d'un nombre fini de translatées de parties bornées de T.

Montrons que *d)* entraîne *e)*. Pour cela, considérons la relation d'équivalence ${}^{\varphi}\mathscr{R}_a : \varphi_a(u) = \varphi_a(v)$ sur U_a (pour $a \in \Phi$). Elle équivaut à la relation

$$m(u) \in \mathrm{H}m(v)$$

ou encore au fait que les deux réflexions $\nu(m(u))$ et $\nu(m(v))$ sont égales. Mais, quels que soient u et v dans U_a, $\nu(m(u))$ et $\nu(m(v))$ sont deux réflexions par rapport à des hyperplans parallèles et dire qu'elles sont égales revient à dire qu'elles engendrent un sous-groupe borné de Isom A. Vu (8.1.8), ceci veut dire que $m(u)$ et $m(v)$ engendrent un sous-groupe *borné* de N. Par suite, *d)* entraîne que les relations d'équivalence ${}^{\varphi}\mathcal{R}_a$ et ${}^{\psi}\mathcal{R}_a$ sont les mêmes pour tout a, d'où *e)*.

Montrons enfin que *e)* entraîne *a)*. Quitte à remplacer φ et ψ par des valuations équipollentes, on peut supposer que, pour tout a appartenant à une base Π de Φ, il existe un élément $u_a \in U_a$ tel que $\varphi_a(u_a) = \psi_a(u_a) = 0$. Vu (6.2.7) (1), on a, pour $u \in U_a$:

$$\varphi_{-a}(m(u_a)um(u_a)^{-1}) = \varphi_a(u), \qquad \psi_{-a}(m(u_a)um(u_a)^{-1}) = \psi_a(u)$$

d'où $f_{-a} = f_a$.

Soient maintenant $u, v \in U_a$, $k = \varphi_a(u)$ et $\ell = \varphi_a(v)$. Toujours d'après (6.2.8) (1), on a

$$\varphi_{-a}(m(u)vm(u)^{-1}) = \ell - 2k$$
$$\psi_{-a}(m(u)vm(u)^{-1}) = f_a(\ell) - 2f_a(k)$$

d'où $f_a(\ell - 2k) = f_a(\ell) - 2f_a(k)$. Comme $0, k \in \Gamma_a$ et $\Gamma_a \supset \Gamma_a + 2\widetilde{\Gamma}_a$ (6.2.16), on voit que $pk \in \Gamma_a$ et que :

$$f_a(pk) = pf_a(k) \qquad \text{pour tout } k \in \Gamma_a \text{ et tout } p \in \mathbf{Z}.$$

Pour $u \in U_a$, le sous-groupe ${}^{\varphi}U_{a, \varphi_a(u)}$ est engendré par les $v \in U_a$ tels que $\varphi_a(v) = \varphi_a(u)$. Il coïncide donc avec le sous-groupe ${}^{\psi}U_{a, \psi_a(u)}$, d'où l'on déduit aisément que f_a est décroissante. Comme Γ_a est dense dans $\mathbf{R}$ ou bien est un sous-groupe de $\mathbf{R}$ isomorphe à $\mathbf{Z}$, on en déduit aisément qu'*il existe une constante strictement positive* $\lambda(a)$ *telle que* f_a *est la multiplication par* $\lambda(a)$, et ceci pour tout $a \in \Pi$.

Soient maintenant $a \in \Pi$ et $b \in \Phi$ telle que f_b soit aussi la multiplication par une constante $\lambda(b)$. Utilisant encore une fois (6.2.7) (1), on a, pour $v \in U_b$:

$$\varphi_{r_a(b)}(m(u_a)vm(u_a)^{-1}) = \varphi_b(v), \qquad \psi_{r_a(b)}(m(u_a)vm(u_a)^{-1}) = \psi_b(v)$$

d'où l'on déduit que $f_{r_a(b)}$ *est la multiplication par* $\lambda(b)$.

Comme les r_a pour $a \in \Pi$ engendrent le groupe de Weyl ${}^{v}W$ de Φ et que toute $b \in \Phi^{\text{réd}}$ est transformée d'un élément de Π par un élément de ${}^{v}W$, on voit que f_b *est la multiplication par une constante* $\lambda(b)$ *pour toute* $b \in \Phi^{\text{réd}}$, *donc aussi pour toute* $b \in \Phi$ d'après (V 4).

Enfin, pour $u \in U_a$, $v \in U_b$, $k = \varphi_a(u)$ et $\ell = \varphi_b(v)$, on a

$$\varphi_{r_a(b)}(m(u)vm(u)^{-1}) = \ell - kb(a^{\vee})$$
$$\psi_{r_a(b)}(m(u)vm(u)^{-1}) = \psi_b(v) - \psi_a(u)b(a^{\vee}) = \lambda(b)\ell - \lambda(a)kb(a^{\vee})$$
$$= \lambda(b)(\ell - kb(a^{\vee}))$$

d'où l'on déduit que si $b(a^{\vee}) \neq 0$, c'est-à-dire *si* a *et* b *ne sont pas orthogonales, on a* $\lambda(a) = \lambda(b)$. Par suite, la fonction λ est bien constante sur les composantes irréductibles de Φ, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(8.1.11)**. — *Soit* $\gamma : G \to G$ *un automorphisme de groupe bornologique, conservant* T *et l'ensemble des* U_a. *Il existe une application* $\gamma_* : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ *et une seule possédant les propriétés suivantes :*

a) $\gamma_*(g.x) = \gamma(g).\gamma_*(x)$ *pour tous* $g \in G$ *et* $x \in \mathscr{I}$;

b) $\gamma_*(A) = A$ *et la restriction de* γ_* *à* A *est une affinité.*

L'application γ_* *est bijective et équicontinue : plus précisément, il existe des constantes* $m, M \in \mathbf{R}_+^*$ *telles que*

$$md(x,y) \leqslant d(\gamma_*(x), \gamma_*(y)) \leqslant Md(x,y)$$

quels que soient $x, y \in \mathscr{I}$.

L'existence et l'unicité de γ_* sont des conséquences immédiates de (8.1.10) et (7.4.3), appliqués aux valuations φ et $\varphi \circ \gamma$. Le reste de l'énoncé résulte aussitôt de *a)*, *b)* et (7.4.20), compte tenu de ce qu'une affinité d'un espace euclidien sur lui-même possède les propriétés en question.

Remarque **(8.1.12)**. — On peut montrer que, si $\gamma : G \to G$ est un automorphisme de groupe bornologique, il existe une application $\gamma_* : \mathscr{I} \to \mathscr{I}$ et une seule possédant la propriété (8.1.11) *a)* et telle que :

b') pour toute partie convexe bornée Ω de A, la restriction de γ_* à Ω est un isomorphisme d'ensembles affines sur une partie convexe bornée d'appartement.

Si φ est dense, *a)* entraîne déjà l'unicité de γ_* (cela résulte de (8.2.1)). Si φ est discrète, γ_* est caractérisée par *a)* et :

b'') la restriction de γ_* à toute facette F de $\mathscr{I}$ est une application affine de F sur une autre facette.

Dans le cas discret, ces assertions résultent des §§ 2 et 3, notamment de 3.3 et 3.5.

Proposition **(8.1.13)**. — *Reprenons les hypothèses et notations de* 7.6. *Soit p la projection orthogonale de* V *sur* L_1 *et soit* S_1 *le sous-groupe de* T *formé des éléments* $t \in T$ *tels que* $p \circ \nu(t) = 0$.

(i) $\mathscr{B}(\varphi)$ *induit sur* G_1 *une bornologie compatible avec* φ_1.

(ii) *Pour que* $\mathscr{B}(\varphi)$ *induise sur* G_1 *la bornologie* $\mathscr{B}(\varphi_1)$, *il faut et il suffit que* G_1 *soit contenu dans* $G_1^0 S_1$.

(iii) *Pour qu'une partie* M *de* G_1 *soit bornée pour* $\mathscr{B}(\varphi)$, *il faut et il suffit qu'elle soit bornée pour* $\mathscr{B}(\varphi_1)$ *et contenue dans une partie de la forme* $G_1^0.(p \circ \nu)^{-1}(X)$, *où* X *est une partie bornée de* L_1.

(iv) *Pour qu'un sous-groupe de* G_1 *soit borné pour* $\mathscr{B}(\varphi)$, *il faut et il suffit qu'il soit borné pour* $\mathscr{B}(\varphi_1)$ *et contenu dans* $G_1^0.S_1$.

L'assertion (i) est immédiate. Démontrons (iii). Soit $M \subset G_1$, bornée pour $\mathscr{B}(\varphi_1)$ (resp. $\mathscr{B}(\varphi)$). Il existe des parties bornées pour $\mathscr{B}(\varphi_1)$ (resp. $\mathscr{B}(\varphi)$) $Y^+ \subset U_1^+$, $Y^- \subset U_1^-$ et $Z \subset T_1$, et une partie finie $F \subset N_1 \cap G_1^0$ telles que $M \subset Y^+.Y^-.F.Z$. Comme Y^+, Y^- et F sont bornées pour $\mathscr{B}(\varphi)$ (resp. $\mathscr{B}(\varphi_1)$), on voit aisément que l'on est ramené à démontrer que l'image par ν d'une partie Z de T_1 dans Isom A est bornée si et seulement si $\nu_1(Z)$ est bornée dans Isom A_1 et $p \circ \nu(Z)$ est bornée dans L_1, ce qui est immédiat.

Enfin, vu (7.6.5) (i), l'homomorphisme $p \circ \vee : \mathrm{T} \rightarrow \mathrm{L}_1$ s'étend de façon unique en un homomorphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}}^0.\mathrm{T}$ dans L_1 de noyau $\mathrm{G}_{\mathrm{I}}^0.\mathrm{S}_1$. Les assertions (ii) et (iv) résultent alors de (iii).

8.2. Sous-groupes bornés maximaux.

Dans ce numéro, nous supposons que *la valuation* φ *de la donnée radicielle de* G *est dense* : pour le cas discret, voir le § 3. On munit G de la bornologie $\mathscr{B}(\varphi)$ définie par φ (8.1.7).

Proposition **(8.2.1)**. — (i) *L'application* $x \mapsto \hat{\mathrm{P}}_x$ *est une bijection du complété* $\hat{\mathscr{I}}$ *de l'immeuble de* G *sur l'ensemble des sous-groupes bornés maximaux de* G.

(ii) *Soient* x *et* y *deux points de* $\hat{\mathscr{I}}$. *Les sous-groupes bornés maximaux* $\hat{\mathrm{P}}_x$ *et* $\hat{\mathrm{P}}_y$ *sont conjugués si et seulement si* x *et* y *appartiennent à la même orbite de* G *dans* $\hat{\mathscr{I}}$.

Il résulte aussitôt de la définition de la bornologie de G (8.1.7) que les sous-groupes $\hat{\mathrm{P}}_x$ sont bornés. D'autre part, l'espace métrique complet $\hat{\mathscr{I}}$ satisfait à la condition (CN) de (3.2.3) : en effet, on montre exactement comme en (3.2.1) (compte tenu de (7.4.20)) que la relation (3.2.1) (1) est exacte quels que soient $x, y, z \in \mathscr{I}$, en prenant $m = (x/2) + (y/2)$ (cf. (7.4.20) (v)) et ceci reste vrai par continuité pour $x, y, z \in \hat{\mathscr{I}}$ (cf. (7.5.1)). Par suite, *tout sous-groupe borné de* Isom $\hat{\mathscr{I}}$, *donc aussi tout sous-groupe borné de* G, *possède un point fixe dans* $\hat{\mathscr{I}}$ (3.2.3), donc est contenu dans un sous-groupe $\hat{\mathrm{P}}_x$ avec $x \in \hat{\mathscr{I}}$. Pour achever la démonstration de (i), il suffit de montrer que, si x et y sont deux points distincts de $\mathscr{I}$, on a $\hat{\mathrm{P}}_x \not\subset \hat{\mathrm{P}}_y$; or, ceci résulte de (7.4.34) et (7.5.8). L'assertion (ii) est alors évidente.

(8.2.2) On comparera (8.2.1) aux résultats du § 3; lorsque φ est dense, tous les stabilisateurs des différents points de $\mathscr{I}$ sont des sous-groupes bornés maximaux (et il y en a encore d'autres lorsque $\mathscr{I}$ n'est pas complet), alors que, lorsque φ est discrète, seuls certains d'entre eux le sont : ceux qui correspondent aux sommets du complexe polysimplicial $\mathscr{I}$ lorsque G est engendré par H et les U_a et, dans le cas général, ceux qui correspondent aux centres de gravité de certaines facettes. De plus, lorsque φ est discrète, il n'y a qu'un nombre fini, en général plus grand que 1, de classes de conjugaison de sous-groupes bornés maximaux. Lorsque φ est dense, il y a en général une infinité de classes de conjugaison; cependant lorsque $\mathscr{I}$ est complet (condition (MC) de (7.5.4)) et que $\Gamma_a = \mathbf{R}$ pour tout $a \in \Phi$, il n'y a qu'une seule classe de conjugaison !

Lemme **(8.2.3)**. — *Soient* x *un point de* A, D *une chambre vectorielle et* L *un sous-groupe de* G, *contenant* $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ *et non contenu dans* $\hat{\mathrm{P}}_x$. *Il existe une racine* $a \in \Phi$ *telle que* $\mathrm{L} \cap \mathrm{U}_a \not\subset \mathrm{U}_{a,-a(x)} = \mathrm{U}_a \cap \hat{\mathrm{P}}_x$.

Vu (7.3.4), on a $\mathrm{L} = \mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.(\mathrm{N} \cap \mathrm{L}).\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}$ et il existe $n \in \mathrm{N} \cap \mathrm{L}$ avec $n \notin \hat{\mathrm{N}}_x$. Posons

$v = \nu(n).x - x \in V$; puisque $v \neq 0$, il existe $a \in \Phi^{\text{réd}}$ telle que $a(v) > 0$. Posons $b = {}^v\nu(n^{-1}).a$. Comme $U_{b, -b(x)+} \subset B_{x, D} \subset L$, on a :

$$U_{a, -a(x+v)+} = n.U_{b, -b(x)+}.n^{-1} \subset L$$

et comme φ est dense, il existe $h \in \Gamma_a$ tel que $-a(x+v) < h < -a(x)$, d'où le lemme puisque $U_{a,h} \subset L$ et $U_{a,h} \not\subset U_{a, -a(x)}$.

Proposition **(8.2.4)**. — *Soient* $x \in A$ *et* D *une chambre vectorielle.*

(i) *Tout sous-groupe borné de* G *contenant* $B_{x, D}$ *est contenu dans* $\hat{P}_x$.

(ii) *Si* Φ *est irréductible, tout sous-groupe de* G *contenant* $B_{x, D}$, *ou bien est contenu dans* $\hat{P}_x$, *ou bien contient le sous-groupe* G′ *de* G *engendré par* H *et les* U_a *pour* $a \in \Phi$.

Soit L un sous-groupe contenant $B_{x, D}$ et non contenu dans $\hat{P}_x$. Vu le lemme (8.2.3), il existe une racine $a \in \Phi^{\text{réd}}$ telle que $L \cap U_a \not\subset U_{a, -a(x)}$. Compte tenu de ce que φ est dense, on en déduit qu'il existe $h, k \in \Gamma_a$ tels que $h < k < -a(x)$ et que $U_{a,h} \subset L$. Le sous-groupe L contient alors d'une part les deux sous-groupes $U_{a,h}$ et $U_{-a,-h}$, d'autre part les deux sous-groupes $U_{a,k}$ et $U_{-a,-k}$. Par suite, $\nu(N \cap L)$ contient les deux réflexions $r_{a,k}$ et $r_{a,h}$, donc la translation $t = r_{a,h} \circ r_{a,k}$ de vecteur non nul $(k-h)a^\vee$. Il en résulte que L n'est pas borné, d'où (i).

Soit maintenant c une racine non orthogonale à a, et posons $m = \langle c, a^\vee \rangle$; on a $m \neq 0$. Pour $q \in \mathbf{Z}$, on a

$$L \supset t^q U_{c, -c(x)+} t^{-q} = U_{c, -c(x) - qm(k-h)+}$$

ce qui montre que L contient U_c tout entier, et le même raisonnement montre que L contient U_{-c}. Par suite, $\nu(N \cap L)$ contient une translation de la forme $\ell.c^\vee$, avec $\ell \neq 0$. On montre ainsi de proche en proche que L contient tous les groupes U_c pour les racines $c \in \Phi$ qui peuvent être reliées à a par une suite $(c_0 = a, c_1, \ldots, c_s = c)$ de racines telle que c_i et c_{i+1} ne soient pas orthogonales pour $0 \leqslant i < s$, autrement dit pour les racines c de la composante irréductible de Φ qui contient a. Ceci démontre (ii).

Rappelons (6.2.20) que le groupe quotient G/G′ est un groupe de torsion dont tout élément est annulé par une puissance de l'indice de connexion de Φ.

Remarque **(8.2.5)**. — La proposition (8.2.4) jointe aux résultats rappelés en (7.2.7) et en (1.2.19) permet de déterminer tous les sous-groupes de G contenant $B_{x, D}$.

9. DESCENTE D'UNE DONNÉE RADICIELLE VALUÉE

Nous conservons les notations des §§ 6, 7 et 8. Le but de ce paragraphe est de montrer que, sous certaines conditions, la donnée radicielle valuée de G « se descend » à un sous-groupe et procure une donnée radicielle valuée de ce sous-groupe.

9.1. Valuations induites.

(9.1.1) Dans tout le § 9, on désigne par $V^\natural$ un sous-espace vectoriel de V. Pour $a \in V^*$, on désigne par $a^\natural$ la restriction de a à $V^\natural$. Pour tout $b \in (V^\natural)^*$, on note Φ_b (resp. Φ_b^+) l'ensemble des $a \in \Phi$ telles que $a^\natural \in \mathbf{R}.b$ (resp. $a^\natural \in \mathbf{R}_+^*.b$). Il est clair que Φ_b est un sous-système de racines rationnellement clos de Φ. On note Z le sous-groupe engendré par T et les U_a pour $a \in \Phi_0$ (*i.e.* pour $a \in \Phi$ et $a^\natural = 0$). Pour $b \in (V^\natural)^*$, on désigne :

par U_b le sous-groupe engendré par les U_a pour $a \in \Phi_b^+$;

par L_b le sous-groupe engendré par Z, U_b et U_{-b};

par M_b l'ensemble des $x \in L_b$ tels que $xZx^{-1} = Z$, $xU_bx^{-1} = U_{-b}$ et $xU_{-b}x^{-1} = U_b$.

Lemme **(9.1.2)**. — *Pour tout* $b \in (V^\natural)^*$, *le couple* $(T, (U_a, M_a)_{a \in \Phi_b})$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ_b *dans* L_b. *De plus,* Z *normalise* U_b *et* U_{-b}; *les sous-groupes* $Z.U_b$ *et* $Z.U_{-b}$ *sont des sous-groupes paraboliques de* L_b *et on a* $ZU_b \cap ZU_{-b} = Z$.

La première assertion est immédiate (cf. (7.6.3)). Les autres le sont aussi lorsque $b = 0$. Supposons donc $b \neq 0$. Que Z normalise U_b et U_{-b} résulte aussitôt de la condition (DR 2) de (6.1.1) et de (6.1.2) (3). De plus, si l'on choisit la chambre vectorielle D_0 de telle sorte que $\Phi_b^+ \subset \Phi^+$, ce qui est loisible, et si l'on pose $U_Z^+ = Z \cap U^+$ et $U_Z^- = Z \cap U^-$, on voit que $TU_Z^+U_b$ et $TU_Z^-U_{-b}$ sont des sous-groupes paraboliques minimaux de L_b, ce qui entraîne que ZU_b et ZU_{-b} sont des sous-groupes paraboliques de L_b. Enfin, soit $u \in U_b$, $v \in U_{-b}$ et $z \in Z$ tels que $v = zu$. Vu (6.1.15), il existe un élément $n \in Z \cap N$ et un seul tel que $z = v'nu'$, avec $v' \in U_Z^-$ et $u' \in U_Z^+$. On a alors $v = v'nu'u \in U^-nU^+ \cap U^-$, d'où $n = 1$ d'après (6.1.15) et $v = v'$ d'après (DR 6). On a donc $v \in U_{-b} \cap U_Z^- = \{1\}$ (6.1.6), ce qui démontre la dernière assertion.

Lemme **(9.1.3)**. — *Soit* $b \in (V^\natural)^*$; *si* $M_b \neq \emptyset$, *il existe un élément* $n \in N \cap L_b$ *tel que* $M_b = Zn$.

C'est évident si $b = 0$. Supposons $b \neq 0$ et reprenons les notations de (9.1.2). Vu (6.1.15) *c)*, il existe $n \in N \cap L_b$ tel que

$$n^{-1}TU_Z^+U_bn = TU_Z^-U_{-b} \qquad \text{et} \qquad n^{-1}TU_Z^-U_{-b}n = TU_Z^+U_b.$$

Si $m \in M_b$, les sous-groupes $n^{-1}ZU_b n$ et $m^{-1}ZU_b m = ZU_{-b}$ sont deux sous-groupes paraboliques conjugués contenant tous deux le même sous-groupe parabolique minimal $TU_Z^- U_{-b}$. Ils sont donc égaux et mn^{-1} normalise ZU_b, donc appartient à ZU_b. On voit de même que mn^{-1} appartient à ZU_{-b}, donc finalement à Z d'après (9.1.2); d'où le lemme.

(9.1.4) Pour $b \in (V^\natural)^*$, $b \neq 0$, et $k \in \mathbf{R}$, on désigne par $U_{b,k}$ le sous-groupe de G engendré par les $U_{a,rk}$ pour $a \in \Phi_b^+$, $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $a^\natural = rb$. Avec les notations de 6.4, $U_{b,k}$ est le sous-groupe U_f associé à la fonction $f = f(b, k)$ sur Φ définie par

$$(1) \qquad \begin{cases} f(b,k)(a) = rk & \text{si} \quad a = rb \text{ avec } r \in \mathbf{R}_+^* \\ f(b,k)(a) = +\infty & \text{si} \quad a \notin \Phi_b^+. \end{cases}$$

On vérifie aussitôt que $f(b, k)$ est une fonction *concave*.

Lemme **(9.1.5)**. — *Soient* $b \in (V^\natural)^*$, $b \neq 0$, *et* $k \in \mathbf{R}$. *Pour* $r \in \mathbf{R}_+^*$, *soit* $\beta(r)$ *l'ensemble des* $a \in \Phi^{\text{réd}}$ *telles que* $a^\natural = rb$. *L'application produit (pour un ordre fixé quelconque) est une bijection de* $\prod_{r \in \mathbf{R}_+^*} (\prod_{a \in \beta(r)} U_a)$ (resp. $\prod_{r \in \mathbf{R}_+^*} (\prod_{a \in \beta(r)} U_{a,rk})$) *sur* U_b (resp. $U_{b,k}$).

Cela résulte aussitôt de (6.1.6) et (6.4.9).

Lemme **(9.1.6)**. — *Soit* $b \in (V^\natural)^*$, $b \neq 0$. *Pour* $u \in U_b$, *posons*

$$\varphi_b(u) = \sup\{k \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \mid u \in U_{b,k}\}.$$

L'image réciproque $\varphi_b^{-1}([k, +\infty])$ *est le sous-groupe* $U_{b,k}$. *Pour tout* $s \in \mathbf{R}_+^*$, *on a* $U_{sb} = U_b$ *et* $\varphi_{sb} = s\varphi_b$.

C'est évident.

(9.1.7) Reprenons les notations du § 7 : soit $\mathscr{I}$ l'immeuble de G, A l'appartement canonique, identifié à l'ensemble $\varphi + V$ des valuations équipollentes à φ. Posons $A_\natural = \varphi + V^\natural$.

Lemme **(9.1.8)**. — *Soient* $b \in (V^\natural)^*$, $b \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$ *et* $u \in U_b$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\varphi_b(u) = k$;

(ii) *l'ensemble des points fixes de* u *dans* $A_\natural$ *est le demi-espace* $\alpha_{b,k}$ *de* $A_\natural$ *formé des* $x \in A_\natural$ *tels que* $b(x - \varphi) + k \geqslant 0$.

De plus, si $k \in \varphi_b(U_b - \{1\})$, *le demi-espace* $\alpha_{b,k}$ *est l'intersection avec* $A_\natural$ *d'au moins une racine affine de* A.

On peut supposer que Φ_b^+ n'est pas vide.

Notons D_b l'intersection des demi-espaces fermés de V de la forme $\{x \in V \mid a(x) \geqslant 0\}$ pour $a \in \Phi_b^+$. C'est un cône convexe d'intérieur non vide, contenant une chambre de Weyl D de Φ, et dont l'intersection avec $V^\natural$ est le demi-espace fermé $R_b = \{x \in V \mid b(x) \geqslant 0\}$.

Soient $a \in \Phi$ et $h \in \mathbf{R}$. Tout élément de $U_{a,h}$ laisse fixes les points du demi-espace

$\alpha_{a,h}=\{x\in A \mid a(x-\varphi)+h\geqslant 0\}$ de A (7.4.5); si $a^\natural=rb$, avec $r\in\mathbf{R}_+^*$, on a $\alpha_{a,rk}\cap A_\natural=\alpha_{b,k}$. Par conséquent, *tout élément de* $U_{b,k}$ *laisse fixes tous les points de* $\alpha_{b,k}$.

D'autre part, si $a\in\Phi_b^+$ et $h\in\mathbf{R}$, le demi-espace $\alpha_{a,h}$ contient un translaté de D_b. Comme l'intersection d'un nombre fini de translatés du cône convexe D_b contient encore un translaté de D_b et que l'ensemble $F(u)$ des points fixes de u dans A est convexe, on voit que $F(u)+D_b=F(u)$. Soit $x\in A_\natural$ tel que $u.x=x$; posons $h=-b(x-\varphi)$. Alors, u laisse fixes tous les points de $\Omega=x+D_b$ et appartient au sous-groupe $\hat{P}_\Omega\cap U_D^+$ qui est engendré par les U_α pour $\alpha\supset\Omega$ et $\alpha\in\Sigma$ (7.1.8); or, les seules racines affines contenant Ω sont les $\alpha_{a,\ell}$ pour $a\in\Phi_b^+$, $s\in\mathbf{R}_+^*$, $a^\natural=sb$ et $\ell\geqslant sh$. On a donc $u\in U_{b,h}$ et $\varphi_b(u)\geqslant h$. Ceci, joint au résultat précédent, montre l'équivalence de (i) et (ii).

Enfin, si $\varphi_b(u)=k$, il existe $s\in\mathbf{R}_+^*$ et $a\in\Phi_b^+$ tels que $a^\natural=sb$ et $sk\in\varphi_a(U_a)$, d'où la dernière assertion.

Définition **(9.1.9)**. — *Soient* $G^\natural$ *un sous-groupe de* G, $\Phi^\natural$ *un système de racines dans* $(V^\natural)^*$ [1] *et* $(T^\natural, (U_b^\natural)_{b\in\Phi^\natural})$ *une donnée radicielle génératrice de type* $\Phi^\natural$ *dans* $G^\natural$. *On dit que cette donnée radicielle est* compatible *avec celle de* G *si l'on a*

(DDR 1) $\qquad U_b^\natural\subset U_b$ *pour tout* $b\in\Phi^\natural$.

Dans toute la suite de 9.1, nous nous donnons le sous-espace vectoriel $V^\natural$ de V, un sous-groupe $G^\natural$ de G, un système de racines $\Phi^\natural$ dans $(V^\natural)^*$ et une donnée radicielle génératrice $(T^\natural, (U_b^\natural))$ de type $\Phi^\natural$ dans $G^\natural$, compatible avec celle de G. Les objets que le § 6 permet d'associer à cette donnée radicielle seront désignés par la même lettre qu'au § 6, mais affectée de l'exposant $\natural$: par exemple, on note ${}^vW^\natural$ le groupe de Weyl de $\Phi^\natural$ et on note $D^\natural$ une chambre vectorielle de $\Phi^\natural$ dans $V^\natural$. On suppose, ce qui est loisible, que la chambre vectorielle D est telle que $\bar{D}\cap V^\natural\subset\bar{D}^\natural$. Les notations $M_b^\natural$, $N^\natural$, $\Phi^{\natural+}$, $U^{\natural+}$, etc. s'expliquent alors d'elles-mêmes.

Pour $b\in\Phi^\natural$, on note $\varphi_b^\natural$ la restriction de φ_b à $U_b^\natural$ et on pose $\varphi^\natural=(\varphi_b^\natural)_{b\in\Phi^\natural}$.

Proposition **(9.1.10)**. — *La famille* $\varphi^\natural$ *satisfait aux conditions* (V 1) *et* (V 4) *de* (6.2.1). *Elle satisfait également à* (V 3) *sauf peut-être lorsque les deux racines a et b de* $\Phi^\natural$ *sont égales et que* $2a\in\Phi^\natural$. *Cependant, cette dernière restriction peut être levée si l'on suppose que la condition suivante est réalisée :*

(DDR 2) $\qquad$ *pour tout* $a\in\Phi^\natural$ *tel que* $2a\in\Phi^\natural$, *on a* $\mathrm{Card}\{c^\natural \mid c\in\Phi_a^+\}\leqslant 2$.

Que (V 1) et (V 4) soient satisfaites résulte du lemme (9.1.6). Soient maintenant $a, b\in\Phi^\natural$. Posons

$$\Psi^\natural=\{pa+qb \mid p, q\in\mathbf{N}^*\}\cap\Phi^\natural$$
$$\Psi\ =\{c\in\Phi \mid c^\natural\in\mathbf{R}_+^* a+\mathbf{R}_+^* b\}$$

[1] On prendra garde que, contrairement à ce que la notation pourrait faire croire, on ne suppose pas que $\Phi^\natural=\{a^\natural \mid a\in\Phi\}$.

Soit Y le groupe engendré par les U_c pour $c \in \Psi$ et soit $Y^\natural$ le groupe engendré par les $U_d^\natural$ pour $d \in \Psi^\natural$. Vu (6.1.6), les applications produit suivantes sont des bijections :

$$\theta : \Big(\prod_{d \in \Psi^{\natural\,\text{réd}}} U_d\Big) \times \prod_{c \in \Psi^{\text{réd}},\, c^\natural \notin \mathbf{R}_+^*.\Psi^\natural} U_c \to Y$$

$$\theta : \Big(\prod_{d \in \Psi^{\natural\,\text{réd}}} U_d^\natural\Big) \times \{1\} \to Y^\natural.$$

Appliquons alors (6.4.29) aux deux fonctions concaves $f = f(a, k)$ et $g = f(b, \ell)$ (avec $k, \ell \in \mathbf{R}$) : on a $(U_f, U_g) \subset U_h$, où la fonction $h : \Phi \to \widetilde{\mathbf{R}}$ est définie par

$$h(c) = \inf\{\sum_i f(a_i) + \sum_j g(b_j)\} \tag{1}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des décompositions $c = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} b_j$, où $a_i, b_j \in \Phi$ et $\operatorname{Card} I \geqslant 1$, $\operatorname{Card} J \geqslant 1$.

Supposons a et b non proportionnelles. On vérifie alors immédiatement que $h(c) = +\infty$ si $c \notin \Psi$ et que $h(c) = rk + s\ell$ si $c^\natural = ra + sb$. Vu (6.4.9), la restriction de θ à

$$\Big(\prod_{d \in \Psi^{\natural\,\text{réd}}} U_{d, h(d)}\Big) \times \prod_{c \in \Psi^{\text{réd}},\, c^\natural \notin \mathbf{R}_+^*.\Psi^\natural} U_{c, h(c)}$$

(on a posé $h(ra + sb) = rk + s\ell$) est une bijection sur U_h. Or, d'après (DR 2), on a $(U_a^\natural, U_b^\natural) \subset Y^\natural$. Par suite, $(U_{a,k}^\natural, U_{b,\ell}^\natural) \subset Y^\natural \cap U_h$ et on en déduit la condition (V 3) pour les racines a et b en prenant l'image réciproque de $Y^\natural \cap U_h$ par θ.

Si a et b sont proportionnelles, mais $a + b \notin \Phi^\natural$, il n'y a rien à démontrer puisque $U_a^\natural$ et $U_b^\natural$ commutent.

Reste à examiner le cas où $b = a$, avec $2a \in \Phi^\natural$, en supposant que $\operatorname{Card}\{c^\natural \mid c \in \Psi\} \leqslant 2$. On voit alors que U_a est commutatif, et qu'il n'y a rien à démontrer, sauf lorsqu'il existe $s \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\{c^\natural \mid c \in \Psi\} = \{sa, 2sa\}$. Mais dans ce dernier cas, on vérifie aisément que la fonction h donnée par (1) est infinie sauf sur les racines $c \in \Psi$ de la forme $c = c_1 + c_2$ avec $c_1, c_2 \in \Psi$ et $c_1^\natural = c_2^\natural = sa$, auquel cas $h(c) = s(k + \ell)$. On en déduit que $(U_{a,k}, U_{a,\ell}) \subset U_{a,(1/2)(k+\ell)}$, d'où

$$(U_{a,k}, U_{a,\ell}) \subset U_{a,(1/2)(k+\ell)} \cap U_{2a} = U_{2a, k+\ell}$$

ce qui achève la démonstration.

Définition **(9.1.11)**. — *Si la famille* $\varphi^\natural$ *est une valuation de la donnée radicielle* $(T^\natural, (U_b^\natural))$ *de* $G^\natural$, *on dit que* φ se descend *à* $G^\natural$ *et que* $\varphi^\natural$ *est la valuation* induite *par* φ.

Si φ se descend à $G^\natural$, on étend aux objets associés à la donnée radicielle valuée de $G^\natural$ les conventions de notation de (9.1.9).

Remarques **(9.1.12)**. — *a)* Sous les hypothèses de (9.1.10) (y compris (DDR 2)), la valuation φ se descend si et seulement si la famille $\varphi^\natural$ satisfait aux conditions (V 0), (V 2) et (V 5) de (6.2.1). On remarquera que celles-ci sont toutes relatives « au rang 1 », en ce sens qu'elles ne font intervenir simultanément que les multiples entiers d'une même racine. Nous donnerons plus loin (9.2) des conditions pour qu'elles soient satisfaites.

b) Soit $V^\#$ un sous-espace vectoriel de $V^\natural$ et soit $G^\#$ un sous-groupe de $G^\natural$, muni d'une donnée radicielle compatible avec celle de $G^\natural$. Alors la donnée radicielle de $G^\#$ est compatible avec celle de G. Si φ se descend à $G^\natural$, on vérifie aisément que la valuation $\varphi^\natural$ se descend à $G^\#$ si et seulement si φ se descend à $G^\#$.

(9.1.13) Pour $b \in (V^\natural)^*$, $b \neq 0$, et $k \in \mathbf{R}$, notons U_b^e le sous-groupe de G engendré par les U_a pour $a \in \Phi$ et $a^\natural \in \mathbf{N}^*.b$, et $U_{b,k}^e$ celui engendré par les $U_{a,nk}$ pour $a \in \Phi$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $a^\natural = nb$. En utilisant (6.1.6) et (6.4.9), on voit aisément que

$$U_{b,k}^e = U_{b,k} \cap U_b^e.$$

Dans la pratique, la donnée radicielle de $G^\natural$ satisfera la plupart du temps à la condition suivante, plus forte que (DDR 1) :

(DDR 1 *bis*) $$U_b^\natural \subset U_b^e \quad \textit{pour tout} \quad b \in \Phi^\natural.$$

(9.1.14) Supposons φ prolongeable et soit $\varphi_0 : H \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ un prolongement de φ (6.4.38). Pour $u \in Z$ (9.1.1), soit $\varphi_Z(u)$ la borne supérieure, finie ou $+\infty$, de l'ensemble des $k \in \mathbf{R}$ tels que u appartienne au sous-groupe engendré par $U_{0,k} = \varphi_0^{-1}([k, +\infty])$ et les $U_{a,k}$ pour $a \in \Phi_0$.

Supposons aussi que φ se descend à $G^\natural$. On peut alors considérer le sous-groupe $H^\natural = \nu^{\natural -1}(1)$ et poser, pour $u \in H^\natural$:

$$\varphi_0^\natural(u) = \sup\{0, \varphi_Z(u)\}.$$

Proposition **(9.1.15)**. — *Gardons les hypothèses et notations de* (9.1.14). *Supposons de plus que* $\Phi^\natural = \{a^\natural \mid a \in \Phi\}$ *et qu'il existe une constante* $t \geqslant 0$ *telle que, si b et 2b appartiennent à* $\Phi^\natural$, *on ait*

(DP) $$(U_{b,k+t} . U_{2b,2k-h}^e) \cap U_b^\natural = U_{b,k}^\natural . U_{2b,2k-h}^\natural$$

quels que soient $k \in \mathbf{R}$ *et* $h \in \mathbf{R}_+$. *Alors* $\varphi_0^\natural$ *est un prolongement de* $\varphi^\natural$.

Pour $\ell \geqslant 0$, posons $U_{0,\ell}^\natural = \varphi_0^{\natural -1}([\ell, +\infty])$. Il nous faut montrer (6.4.38) les assertions suivantes :

a) *On a* $(U_{0,k}^\natural, U_{0,\ell}^\natural) \subset U_{0,k+\ell}^\natural$ *pour* $k, \ell \geqslant 0$. Pour cela, il suffit d'appliquer (6.4.44) aux fonctions $f, g : \Phi \cup \{0\} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ telles que $f(a) = k$ et $g(a) = \ell$ si $a \in \Phi_0 \cup \{0\}$ et $f(a) = g(a) = \infty$ sinon.

b) *Pour* $b \in \Phi^\natural$ *et* $k, \ell \in \mathbf{R}$ *tels que* $k + \ell > 0$, *les* $H^\natural$*-composantes* (6.3.8) *des commutateurs* (u, u') *avec* $u \in U_{b,k}^\natural$ *et* $u' \in U_{-b,\ell}^\natural$, *appartiennent à* $U_{0,k+\ell}^\natural$. Pour cela, on applique (6.4.44) aux fonctions $f, g : \Phi \cup \{0\} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ définies par $f(a) = k$ si $a^\natural = b$, $f(a) = 2k$ si $a^\natural = 2b$, $f(a) = \infty$ sinon, et $g(a) = \ell$ si $a^\natural = -b$, $g(a) = 2\ell$ si $a^\natural = -2b$, $g(a) = \infty$ sinon. On en tire que

$$(U_{b,k}, U_{-b,\ell}) \subset U_{2b,3k+\ell}^e . U_{b,2k+\ell} . Y . U_{-b,2\ell+k} . U_{-2b,3\ell+k}^e$$

où Y est le sous-groupe engendré par $U_{0,k+\ell}$ et les $U_{a,k+\ell}$ pour $a\in\Phi_0$, d'où le résultat. On voit de même que *les* $H^\natural$-*composantes des commutateurs* (u,u') *et* (u',u) *avec* $u\in U^\natural_{b,k/2}$ *et* $u'\in U^\natural_{-2b,\ell}$ *appartiennent à* $U^\natural_{0,k+\ell}$. Ceci montre que $H^\natural_{[k+\ell]}\subset U^\natural_{0,k+\ell}$.

c) *Pour* $b\in\Phi$, $k\in\mathbf{R}$ *et* $\ell\in\mathbf{R}^*_+$, *on a* $(U^\natural_{b,k}, U^\natural_{0,\ell})\subset U^\natural_{b,k+\ell}.U^\natural_{2b,2k+\ell}$; *autrement dit* $U^\natural_{0,\ell}\subset H^\natural_{(\ell)}$. Un raisonnement du même type que les précédents montre que

$$(U_{b,k}, U^\natural_{0,\ell})\subset U_{b,k+\ell}.U^e_{2b,2k+\ell}\qquad\text{pour tout } k\in\mathbf{R}$$

d'où le résultat si $2b\notin\Phi^\natural$. Si $2b\in\Phi^\natural$, on utilise (DP) et ce qui précède pour montrer, compte tenu de ce que $(U_b, U^e_{2b})=\{1\}$, que

$$\begin{aligned}(U^\natural_{b,k}, U^\natural_{0,\ell})&\subset(U_{b,k+t}, U^\natural_{0,\ell}).U^e_{2b,2k+\ell}\cap U^\natural_b\\ &\subset(U_{b,k+\ell+t}.U^e_{2b,2k+\ell})\cap U^\natural_b=U^\natural_{b,k+\ell}.U^\natural_{2b,2k+\ell}\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque **(9.1.16)**. — On ne peut pas toujours prendre $t=0$ dans (DP). Soit par exemple K un corps commutatif, muni d'une involution σ et d'une valuation non impropre ω invariante par σ. Supposons K de caractéristique résiduelle 2 et soit $\lambda\in K$ tel que $\lambda+\lambda^\sigma=1$. Avec les notations que nous emploierons au § 10 (cf. (10.1.1)), considérons la forme hermitienne sur K^3 définie par $q(xe_1+ze_0+ye_{-1})=\lambda z^\sigma z+x^\sigma y+K_{\sigma,1}$ et munissons $G^\natural=SU_3(q)$ de la donnée radicielle définie en (10.1.6). Munissons $G=SL_3(K)$ de la donnée radicielle définie en (10.2.2) et de la valuation φ définie en (10.2.3) (relativement à la base (e_1,e_0,e_{-1}) de K^3). On vérifie aisément que ces données radicielles sont compatibles et que φ se descend à $G^\natural$ et y induit la valuation définie en (10.1.13). De plus, nous verrons que φ et $\varphi^\natural$ sont prolongeables ((10.1.24) et (10.2.4)). Mais, il est aisé de voir que la condition (DP) est satisfaite si et seulement si on a $t=-(1/2)\sup\{\omega(\mu)\mid\mu\in K,\ \mu+\mu^\sigma=1\}$. Si K et le corps des invariants de σ ont même corps résiduel, ou si l'extension résiduelle est inséparable, on a $t>0$.

Proposition **(9.1.17)**. — *Supposons que* φ *se descende à* $G^\natural$ *et qu'il existe un sous-groupe* $S^\natural$ *de* $T^\natural$, *distingué dans* $N^\natural$, *tel que* $G^\natural$ *soit engendré par* $S^\natural$ *et les* $U^\natural_a$ *pour* $a\in\Phi^\natural$, *que* $\nu^\natural(S^\natural)$ *engendre l'espace vectoriel* $V^\natural$ *et que* $S^\natural.A_\natural=A_\natural$. *Alors, le produit scalaire induit sur* $V^\natural$ *par celui de* V *est invariant par le groupe de Weyl de* $\Phi^\natural$. *Si on munit* $\mathscr{I}^\natural$ *de la distance correspondante, il existe une application isométrique* $j:\mathscr{I}^\natural\to\mathscr{I}$ *et une seule telle que* $j(\varphi^\natural)=\varphi$ *et que* $j(g.x)=g.j(x)$ *pour tout* $g\in G^\natural$ *et tout* $x\in\mathscr{I}^\natural$. *De plus,* $j(\mathscr{I}^\natural)$ *est convexe,* $j(A^\natural)=A_\natural$ *et* $A^\natural=j^{-1}(A)$.

Notons j la bijection de $A^\natural=\varphi^\natural+V^\natural$ sur $A_\natural$ définie par $j(\varphi^\natural+v)=\varphi+v$. Soient $s\in S^\natural$, $\psi\in A_\natural$ et $v\in V^\natural$ tels que $s.\psi=\psi+v$. Il résulte aussitôt des définitions que $(\psi+v)^\natural=\psi^\natural+v$. D'autre part, l'automorphisme intérieur défini par s conserve la donnée radicielle $(T^\natural, (U^\natural_b))$ et transforme la donnée radicielle $(T, (U_a))$ et l'appartement A en $(sTs^{-1}, (sU_as^{-1}))$ et $s.A$. Comme $s.A_\natural=A_\natural$, on déduit de (9.1.8) que la valuation $\psi^\natural+v$ de $(T^\natural, (U^\natural_b))$ est égale à la valuation obtenue par descente à partir de la valuation $s.\psi$ de $(sTs^{-1}, (sU_as^{-1}))$, laquelle n'est autre que $s.\psi^\natural$ (transport de structure !). On a donc :

(1) $$j(s.x)=s.j(x)\qquad\text{pour}\quad x\in A^\natural\quad\text{et}\quad s\in S^\natural.$$

Soient $b \in \Phi^\natural$, $k \in \mathbf{R}$, $m \in M^\natural_{b,k}$ (6.2.2) et $y \in A^\natural$ tels que $m.y=y$. On a :

$$b(j(y)-\varphi)+k=b(y-\varphi^\natural)+k=0.$$

Comme m appartient au groupe engendré par $U_{b,k}$ et $U_{-b,-k}$, cela implique que $m.j(y)=j(y)$. Pour $s \in S^\natural$, on a alors, vu (1) :

$$j(ms.y)=j(msm^{-1}.y)=msm^{-1}.j(y)=ms.j(y)=m.j(s.y)$$

d'où l'on déduit aussitôt que $j(m.x)=m.j(x)$ pour tout $x \in A^\natural$. Le groupe $N^\natural$ étant engendré par $S^\natural$ et les $M^\natural_{b,k}$, on en conclut que $j(n.x)=n.j(x)$ pour $n \in N^\natural$ et $x \in A^\natural$. Ceci entraîne que le produit scalaire induit sur $V^\natural$ par celui de V est invariant par ${}^vW^\natural$. Si l'on munit $A^\natural$ de la distance correspondante, j est isométrique.

Soit toujours $x \in A^\natural$. On sait que le stabilisateur de x dans $G^\natural$ est engendré par son stabilisateur $\hat{N}^\natural_x$ dans $N^\natural$ et les $U_{a,-a(x-\varphi^\natural)}$ pour $a \in \Phi^\natural$. Mais la définition même de $\varphi^\natural$ montre que ces derniers sont contenus dans le stabilisateur de $j(x)$, et ce qui précède montre que $\hat{N}^\natural_x$ aussi. On a donc $\hat{P}^\natural_x \subset \hat{P}_{j(x)}$ et j se prolonge d'une manière et d'une seule en une application, encore notée j, de $\mathscr{I}^\natural$ dans $\mathscr{I}$ telle que $j(g.x)=g.j(x)$ pour $g \in G^\natural$ et $x \in \mathscr{I}^\natural$. Comme la restriction de j à $A^\natural$ est isométrique et que deux points quelconques de $\mathscr{I}^\natural$ sont transformés en deux points de $A^\natural$ par une opération de $G^\natural$, on voit que j est isométrique et que $j(\mathscr{I}^\natural)$ est convexe. D'autre part, l'unicité de j est immédiate.

Reste enfin à montrer que $j^{-1}(A)=A^\natural$. Soit $x \in \mathscr{I}^\natural$, $x \notin A^\natural$ tel que $j(x) \in A$. Soit C une chambre de $A^\natural$ et soit A′ un appartement de $\mathscr{I}^\natural$ contenant C et x. Puisque $j(C) \subset A_\natural$, il existe une partie ouverte non vide Ω de A′ telle que $j(\Omega)$ soit une partie ouverte non vide de $A_\natural$. La restriction de j à l'enveloppe convexe Ω' de $\Omega \cup \{x\}$ est alors une isométrie sur une partie d'intérieur non vide du sous-espace affine L de A engendré par $A_\natural \cup \{j(x)\}$, d'où l'on tire $\dim A' \geqslant \dim \Omega' = \dim L > \dim A^\natural$, ce qui est absurde.

Remarque **(9.1.18)**. — Réciproquement, si φ_1 est une valuation de la donnée radicielle de $G^\natural$ et j une isométrie de l'immeuble $\mathscr{I}_1$ correspondant dans $\mathscr{I}$, telle que $j(g.x)=g.j(x)$ pour $x \in \mathscr{I}_1$ et $g \in G^\natural$, que $j(\varphi_1)=\varphi$ et que $j(A_1) \subset A$ (où $A_1=\varphi_1+V^\natural$), alors on peut démontrer que φ se descend, que $\varphi^\natural=\varphi_1$ et que les hypothèses de (9.1.17) sont satisfaites avec $S^\natural=T^\natural$.

Exemples **(9.1.19)**. — *a)* Si $V^\natural=V$, $T^\natural \subset T$ et $N^\natural \subset N$, on vérifie aisément que (DDR 2) est satisfaite et que $\varphi^\natural$ satisfait aux conditions (V 2) et (V 5) de (6.2.1). Supposons de plus que $\operatorname{Card} \varphi^\natural_b(U^\natural_b) \geqslant 3$ pour tout $b \in \Phi^\natural$: alors φ *se descend à* $G^\natural$ *et les conditions de* (9.1.17) *sont satisfaites* (avec $S^\natural=T^\natural$).

Par exemple, soit K un corps commutatif, muni d'une valuation ω, et soit L un sous-corps de K tel que la restriction de ω à L soit non impropre. Prenons pour G (resp. $G^\natural$) le groupe des points rationnels sur K (resp. L) d'un groupe algébrique semi-simple connexe $\mathscr{G}$ défini et déployé sur L, muni de la donnée radicielle définie en (6.1.3) *b)*. Alors, (DDR 1 *bis*) et (DDR 2) sont satisfaites. Si φ (resp. φ_1) est la valuation de G (resp. $G^\natural$) définie en (6.2.3) *b)*, on voit que φ se descend à $G^\natural$ et que $\varphi^\natural = \varphi_1$.

Un autre exemple est celui où K est un corps commutatif complet pour une valuation discrète non impropre, de corps résiduel parfait, où G est le groupe des points rationnels sur K d'un groupe algébrique semi-simple connexe $\mathscr{G}$ défini sur K, muni de la donnée radicielle définie en (6.1.3) *c)* et de la valuation φ que nous construirons plus tard et où $G^\natural$ est le groupe des points rationnels sur K d'un sous-groupe semi-simple $\mathscr{G}^\natural$ de $\mathscr{G}$, défini sur K et de rang relatif sur K égal à celui de $\mathscr{G}$ (par exemple l'un des sous-groupes déployés maximaux construits dans [3], § 7). Alors (DDR 1 *bis*) et (DDR 2) sont satisfaites ([3], 3.12) et $\mathrm{Card}\,\varphi_b^\natural(U_b^\natural) = \infty$ pour tout $b \in \Phi^\natural$. Donc, φ se descend à $G^\natural$ et on peut appliquer (9.1.17).

b) Sous les conditions du premier alinéa de *a)*, et avec les notations de (9.1.17), on a $A_\natural = A$ et on peut identifier $A^\natural$ avec A grâce à l'isométrie j. L'ensemble des murs (resp. racines affines) de $A^\natural$ est alors contenu dans celui de A (9.1.8), mais ne lui est pas nécessairement égal. Par exemple, sous les hypothèses du deuxième alinéa de *a)*, les racines affines de A sont les demi-espaces fermés $\alpha_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \omega(K^*)$ tandis que celles de $A^\natural$ sont les $\alpha_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \omega(L^*)$.

On peut aussi donner des exemples où *aucun point spécial de* A *n'est un point spécial de* $A^\natural$.

c) Soient $\mathscr{G}$ un schéma de Chevalley (sur $\mathbf{Z}$), $\mathscr{T}$ un tore déployé maximal de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^\natural$ un sous-schéma en groupes fermé de $\mathscr{G}$ qui soit aussi un schéma de Chevalley et tel que $\mathscr{T}^\natural = \mathscr{T} \cap \mathscr{G}^\natural$ soit un tore déployé maximal de $\mathscr{G}^\natural$. Posons $V = \mathrm{Hom}(\mathrm{Mult}, \mathscr{T}) \otimes \mathbf{R}$, $V^\natural = \mathrm{Hom}(\mathrm{Mult}, \mathscr{T}^\natural) \otimes \mathbf{R}$ et soient $\Phi \subset V^*$ et $\Phi^\natural \subset (V^\natural)^*$ les systèmes de racines de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^\natural$. Soit K un corps muni d'une valuation ω non impropre. Soient $G = \mathscr{G}(K)$ et $G^\natural = \mathscr{G}^\natural(K)$ munis des données radicielles de types Φ et $\Phi^\natural$ définies comme en (6.1.3) *b)* (avec $T = \mathscr{T}(K)$ et $T^\natural = \mathscr{T}^\natural(K)$); il est facile de voir que la condition de compatibilité (DDR 1) de (9.1.9) est satisfaite. Enfin, soient φ et φ_1 les valuations des données radicielles en question définies comme en (6.2.3) *b)*. Notons $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}_1$) l'immeuble de G (resp. $G^\natural$) relatif à φ (resp. φ_1). Alors :

La valuation φ *se descend à* $G^\natural$ *et y induit une valuation* $\varphi^\natural$ *équivalente à* φ_1 (6.2.5). *De plus, les hypothèses de* (9.1.17) *sont satisfaites et il existe* (7.4.3) *une application* $\gamma : \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}$ *et une seule, compatible avec les actions de* $G^\natural$ *sur* $\mathscr{I}_1$ *et* $\mathscr{I}$, *et telle que* $\gamma(\varphi_1) = \varphi$ *et que la restriction de* γ *à* $A_1 = \varphi_1 + V^\natural$ *soit une injection affine de* A_1 *dans* A. *Si* G *est presque simple*, γ *multiplie les distances par une constante.*

Nous ne ferons qu'esquisser la démonstration de ces assertions.

Il est tout d'abord facile de se ramener au cas où $G^\natural$ est presque simple, ce que nous supposerons désormais.

Soit $\overline{K}$ un corps contenant K, muni d'une valuation $\overline{\omega}$ prolongeant ω et dont le groupe des valeurs est $\mathbf{R}$. Appliquant la remarque (9.1.12) *b)* aux inclusions

$$\mathscr{G}(\overline{K}) \supset \mathscr{G}(K) \supset \mathscr{G}^\natural(K)$$
$$\mathscr{G}(\overline{K}) \supset \mathscr{G}^\natural(\overline{K}) \supset \mathscr{G}^\natural(K)$$

et tenant compte de l'exemple *a)* ci-dessus, on voit qu'on peut, sans nuire à la généralité, substituer $\overline{\mathrm{K}}$ à K. Nous supposerons donc dorénavant que $\omega(\mathrm{K}^*)=\mathbf{R}$.

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K. Le stabilisateur $\hat{\mathrm{P}}_\varphi$ de φ (considéré comme un point de $\mathscr{I}$) dans G n'est autre que $\mathscr{G}(\mathcal{O})$. De même, $\hat{\mathrm{P}}_{\varphi_1}=\mathscr{G}^\natural(\mathcal{O})$. Par conséquent $\hat{\mathrm{P}}_{\varphi_1}=\hat{\mathrm{P}}_\varphi\cap \mathrm{G}^\natural$ et, comme $\mathrm{G}^\natural$ est transitif sur $\mathscr{I}_1$, il existe une application $\gamma:\mathscr{I}_1\to\mathscr{I}$ et une seule compatible avec l'action de $\mathrm{G}^\natural$, c'est-à-dire telle que

$$(1)\qquad \gamma(gx)=g.\gamma(x)\qquad (x\in\mathscr{I}_1\,;\, g\in\mathrm{G}^\natural).$$

Prenons g dans $\mathrm{T}^\natural$. Vu (6.1.3) *b)*, on a $\nu(g)=\nu^\natural(g)\in\mathrm{V}^\natural$ et $\nu^\natural(\mathrm{T}^\natural)=\mathrm{V}^\natural$, d'où

$$\gamma(\varphi_1+v)=\varphi+v\qquad (v\in\mathrm{V}^\natural).$$

En particulier, γ induit une injection affine de A_1 dans A. Soit $\mathrm{N}^\natural$ le normalisateur de $\mathrm{T}^\natural$ dans $\mathrm{G}^\natural$. La métrique induite sur A_1 (resp. $\gamma(\mathrm{A}_1)$) par la métrique de $\mathscr{I}_1$ (resp. de $\mathscr{I}$) est, à un facteur près, la seule métrique euclidienne invariante par $\mathrm{N}^\natural$. Vu (1), il s'ensuit que $\gamma|_{\mathrm{A}_1}$ multiplie les distances par une constante. Toujours en vertu de (1), et compte tenu de (7.4.18), il en est de même de γ. Une référence à la remarque (9.1.18) complète la démonstration.

9.2. Un théorème de descente.

(9.2.1) Reprenons pour un instant les hypothèses et notations de (9.1.17). Posons $\mathscr{I}_\natural=j(\mathscr{I}^\natural)$, $\mathrm{A}_\natural=j(\mathrm{A}^\natural)$ et soit F une facette de $\mathscr{I}$ rencontrant $\mathscr{I}_\natural$ de dimension la plus grande possible. Comme $\mathscr{I}_\natural=\mathrm{G}_\natural.\mathrm{A}_\natural$, on peut supposer que F rencontre $\mathrm{A}_\natural$, donc est contenue dans A. On voit alors immédiatement que les conditions suivantes sont satisfaites :

(DI 1) *$\mathscr{I}_\natural$ est une partie convexe de $\mathscr{I}$ stable par* $\mathrm{G}^\natural$;

(DI 2) $\mathrm{A}_\natural=\mathscr{I}_\natural\cap\mathrm{A}$ *est un sous-espace affine de* A;

(DI 3) *il existe une facette* F *de $\mathscr{I}$ rencontrant* $\mathrm{A}_\natural$ (*donc contenue dans* A) *qui n'est contenue dans l'adhérence d'aucune autre facette* $\mathrm{F}'\neq\mathrm{F}$ *de $\mathscr{I}$ rencontrant* $\mathscr{I}_\natural$.

(DV 1) $\varphi\in\mathrm{A}_\natural$.

(9.2.2) *Dans tout* 9.2, *nous nous donnons un sous-groupe* $\mathrm{G}^\natural$ *de* G *et une partie* $\mathscr{I}_\natural$ *de l'immeuble $\mathscr{I}$ de* G *satisfaisant aux conditions* (DI 1), (DI 2) *et* (DI 3) *ci-dessus.* Le but de ce numéro est de montrer que ces conditions, jointes aux conditions (DDR 1) (9.1.9), (DDR 2) (9.1.10), (DV 1) (9.2.1) et à deux autres conditions (DDR 3) (9.2.8) et (DV 2) (9.2.8) entraînent que la valuation φ se descend à $\mathrm{G}^\natural$ et que les hypothèses de (9.1.17) sont satisfaites.

Exemple **(9.2.3)**. — Soit Γ un groupe d'automorphismes de G, conservant la donnée radicielle et la bornologie de G. On a vu (8.1.11) que Γ opère alors sur l'immeuble $\mathscr{I}$ de G de telle sorte que $\gamma(g.x)=\gamma(g).\gamma(x)$ quels que soient $\gamma\in\Gamma$, $g\in\mathrm{G}$

et $x \in \mathscr{I}$; de plus, Γ conserve A et y opère par automorphismes affines. Plus généralement, l'image par un élément $\gamma \in \Gamma$ d'un appartement A' de $\mathscr{I}$ est un appartement A'' et $\gamma : A' \to A''$ est un isomorphisme affine. Il en résulte que, si l'on prend pour $\mathscr{I}_\natural$ (resp. $G^\natural$) l'ensemble des points de $\mathscr{I}$ (resp. G) invariants par Γ, les conditions (DI 1) et (DI 2) sont satisfaites.

Si de plus Γ conserve une chambre C de A, alors $A_\natural$ contient le centre (7.2.5) de C et il est évident que (DI 3) est satisfaite avec $F = C$: ce sera le cas lorsque nous étudierons les groupes algébriques quasi-déployés sur un corps valué.

(9.2.4) Rappelons qu'on a défini en (7.2.4) la notion de dimension d'une facette. Plus généralement, si $\mathscr{F}$ est une base de filtre dans un espace affine de dimension finie, les sous-espaces affines engendrés par les éléments de $\mathscr{F}$ forment une base de filtre $\mathscr{A}\mathscr{F}$; on appellera *sous-espace affine engendré par* $\mathscr{F}$ l'intersection L des éléments de $\mathscr{A}\mathscr{F}$, qui est encore le plus petit élément de $\mathscr{A}\mathscr{F}$, et on posera $\dim \mathscr{F} = \dim L$. Il est clair que $\mathscr{F}$ est contenu dans L au sens de (7.2.1).

Proposition **(9.2.5)**. — *Soit* M *une partie convexe de* $\mathscr{I}$ *et soit* F (resp. F') *une facette de* $\mathscr{I}$ *rencontrant* M *et qui n'est contenue dans l'adhérence d'aucune autre facette de* $\mathscr{I}$ *rencontrant* M. *Alors* :

(i) $\dim F = \dim F'$;

(ii) $\dim F \cap M = \dim F' \cap M$;

(iii) *si* M *est contenu dans un appartement* A' *de* $\mathscr{I}$, *alors* $\dim F \cap M = \dim M$, M *est contenu dans le sous-espace affine* L *de* A' *engendré par* $F \cap M$ *et l'intérieur de* $F \cap M$ *relativement à* L *n'est pas vide* (cf. (7.2.1));

(iv) *soit* A' *un appartement de* $\mathscr{I}$ *contenant* F *et soit* F'' *une facette de* A' *rencontrant* M. *On suppose que ou bien* $\dim F'' = \dim F$, *ou bien* $\dim F'' \cap M = \dim F \cap M$, *ou bien l'intérieur de* $F'' \cap M$ *relativement au sous-espace affine* L *engendré par* $F \cap M$ *dans* A' *n'est pas vide. Alors* F'' *n'est contenue dans l'adhérence d'aucune autre facette de* $\mathscr{I}$ *rencontrant* M.

Démontrons (iii). On peut supposer $A' = A$. Puisque $F \cap M \neq \emptyset$, il existe un point $x \in \overline{M}$ tel que $F = F_{x,E}$, où E est la direction de F en x (7.2.4). Soit $\widetilde{E}$ le sous-espace vectoriel engendré par le cône convexe E et soit X une partie convexe de A, appartenant à $F_{x,E}$, contenue dans $x + E$ et telle que $X \cap M \subset L$; notons que si φ est discrète, on peut prendre pour X la facette au sens du § 2 correspondant à F. On a $x \in \overline{X \cap M}$ et l'intérieur de $X \cap M$ relativement à L n'est pas vide; si y en est un point, alors $]xy[\subset X \cap M \subset M \cap (x+E)$ et tous les points de $]xy[$ sont des points internes de l'ensemble convexe $X \cap M$.

Soit $z \in M$, $z \notin L$. Tous les points internes du triangle de sommets x, y, z appartiennent à M. Supposons $z \in x + \widetilde{E}$. Comme $x + E$ est un voisinage de y dans $x + \widetilde{E}$, l'intersection $]yz[\cap (x+E)$ n'est pas vide et si u en est un point, on a $]xu[\subset M \cap (x+E)$. D'autre part, X contient l'intersection de $x + E$ avec un voisinage de x; par suite,

$]xu[\cap X \cap M$ contient un segment ouvert $]xv[$ non vide, d'où l'on déduit que $u \in L$ et $z \in L$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Par suite, $z \notin x + \widetilde{E}$ et $[yz] \cap (x + \widetilde{E}) = \{y\}$. Il existe donc une direction de facette en x, soit E', telle que $E \subset \overline{E}'$ et $]yz[\cap (x + E') \neq \emptyset$. Pour tout $t \in]yz[\cap (x + E')$, on a $]xt[\in M$, d'où $F_{x, E'} \cap M \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur F puisque $F \subset \overline{F}_{x, E'}$.

Par suite, on a bien $M \subset L$, d'où l'on déduit aussitôt (iii).

Démontrons (i) et (ii). Quitte à transformer la situation par un élément de G, on peut supposer $F, F' \subset A$; quitte à remplacer M par $M \cap A$, on peut supposer $M \subset A$. Alors (ii) est une conséquence immédiate de (iii). Pour démontrer (i), écrivons $F' = F_{x', E'}$ où $x' \in \overline{M}$ et où E' est la direction de F' en x'. Vu (iii), on a $M \subset L \subset x + \widetilde{E} = x' + \widetilde{E}$. Comme E est une direction de facette en x, le sous-espace affine $x + \widetilde{E}$ est intersection de murs de A et toute direction de facette en x' rencontrant $\widetilde{E}$ est contenue dans $\widetilde{E}$. Si $\dim E' > \dim E$, on a $E' \cap \widetilde{E} = \emptyset$ et $M \cap F_{x', E'} \subset L \cap F_{x', E'} = \emptyset$, ce qui est inexact. Par suite, on a $\dim E' \leqslant \dim E$, d'où (i).

Démontrons (iv). Il existe une facette F''' rencontrant M, qui n'est contenue dans l'adhérence d'aucune autre facette de $\mathscr{I}$ rencontrant M et telle que $F'' \subset \overline{F}'''$. On peut supposer que $F''' = F'$, que $A' = A$ et que $M \subset A$, d'où $M \subset L$ vu (iii). Si

$$\dim F'' \cap M = \dim F \cap M,$$

l'intérieur de $F'' \cap M$ relativement à L n'est pas vide. Si l'intérieur de $F'' \cap M$ relativement à L n'est pas vide, on a $\dim F'' = \dim F$: en effet les facettes rencontrant L suivant un germe d'intérieur non vide ont toutes la même dimension, à savoir la dimension du sous-espace affine intersection des racines affines contenant L. Enfin, si $\dim F'' = \dim F$, on a $\dim F'' = \dim F'$, d'où $F'' = F'$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(9.2.6)**. — (i) *Soient* F *une facette satisfaisant à* (DI 3), A' *un appartement de* $\mathscr{I}$ *contenant* F *et* L *le sous-espace affine de* A' *engendré par* $F \cap A_{\natural}$. *On a* $A' \cap \mathscr{I}_{\natural} \subset L$.

(ii) *Si* A' *est un appartement de* $\mathscr{I}$ *contenant* $A_{\natural}$, *on a* $A' \cap \mathscr{I}_{\natural} = A_{\natural}$.

En effet, (ii) résulte de (i) et (i) résulte de (9.2.5) (iii) (où l'on prend $M = A' \cap \mathscr{I}_{\natural}$).

Proposition **(9.2.7)**. — *Soient* F *une facette satisfaisant à* (DI 3) *et* C *une chambre de* A *telle que* $F \subset \overline{C}$. *L'image de* $\mathscr{I}_{\natural}$ *par la rétraction* $\rho_{A;C}$ *de* $\mathscr{I}$ *sur* A *est* $A_{\natural}$. *De plus, la restriction de* $\rho_{A;C}$ *à* $\mathscr{I}_{\natural}$ *est indépendante du choix de la chambre* $C \subset A$ *telle que* $F \subset \overline{C}$.

Soit $x \in \mathscr{I}_{\natural}$ et soit A' un appartement contenant x et F. Alors, $F \cap \mathscr{I}_{\natural} = F \cap \mathscr{I}_{\natural} \cap A \cap A'$ est contenu dans l'ensemble des points fixes de $\rho_{A;C}$ (7.2.1). Par suite, $\rho_{A;C}$ applique le sous-espace affine L de A' engendré par $F \cap \mathscr{I}_{\natural}$ sur le sous-espace affine de A engendré par $F \cap \mathscr{I}_{\natural}$, c'est-à-dire sur $A_{\natural}$ ((9.2.5) (iii)); vu (9.2.6), on a donc $\rho_{A;C}(x) \in A_{\natural}$, d'où la première assertion. De plus, l'intérieur de $F \cap \mathscr{I}_{\natural}$ relativement à L (ou à $A_{\natural}$) n'est pas vide ((9.2.5) (iii)) et la restriction de $\rho_{A;C}$ à L est l'unique application affine de L sur $A_{\natural}$ qui soit l'identité sur $F \cap \mathscr{I}_{\natural}$, ce qui achève la démonstration.

(9.2.8) Soit $V^\natural$ le sous-espace vectoriel de V direction de $A_\natural$. Reprenons les notations de (9.1.1).

Lemme. — $Z.A \cap \mathscr{I}_\natural = A_\natural$.

Appliquons les résultats de 7.6 en prenant pour Φ_1 le sous-système de racines clos Φ_0 et $T_1 = T$. Le groupe G_1 est alors égal à Z. Soit π la projection canonique de Z.A sur l'immeuble $\mathscr{I}_1$ de Z ((7.6.4) (i)). Comme la restriction de π à A n'est autre que la projection canonique de A sur son quotient par le sous-espace vectoriel L_1 de V intersection des noyaux des $a \in \Phi_0$ et que $V^\natural \subset L_1$, *l'image* $\pi(A_\natural)$ *est réduite à un point.*

Soit alors $x \in A$ et $z \in Z$. Il existe un appartement A_1 de $\mathscr{I}_1$ contenant $\pi(A_\natural)$ et $\pi(z.x)$. L'image réciproque $\pi^{-1}(A_1)$ est un appartement A′ de $\mathscr{I}$ ((7.6.4) (ii)), contenant $A_\natural$ et $z.x$. Par suite, si $z.x \in \mathscr{I}_\natural$, on a $z.x \in A_\natural$ d'après (9.2.6).

(9.2.9) *Dans la suite de* 9.2, *nous nous donnons, en plus de* $G^\natural$ *et* $\mathscr{I}_\natural$ *satisfaisant à* (DI 1), (DI 2) *et* (DI 3), *un système de racines* $\Phi^\natural$ *dans* $(V^\natural)^*$ *et une donnée radicielle* $(T^\natural, (U^\natural_b, M^\natural_b)_{b \in \Phi^\natural})$ *génératrice dans* $G^\natural$ *satisfaisant aux conditions* (DDR 1) (9.1.9) *et* (DDR 2) (9.1.10). *On reprend les notations de* (9.1.9) *et on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(DDR 3) $\qquad T^\natural \subset Z$ *et* $M^\natural_b \subset M_b$ *pour tout* $b \in \Phi^\natural$;

(DV 1) $\qquad \varphi \in A_\natural$;

(DV 2) $\qquad \mathrm{Card}(\varphi^\natural_b(U^\natural_b)) \geqslant 3$ *pour tout* $b \in \Phi^\natural$.

Théorème **(9.2.10)**. — *Sous les hypothèses de* (9.2.9), *la valuation* φ *se descend à* $G^\natural$, *autrement dit la famille* $\varphi^\natural$ *est une valuation de la donnée radicielle de* $G^\natural$. *Si* φ *est discrète, il en est de même de* $\varphi^\natural$.

Il nous faut montrer que $\varphi^\natural$ satisfait aux conditions (V 0) à (V 5) de (6.2.1). Or, (V 0) n'est autre que (DV 2) et nous savons déjà que $\varphi^\natural$ satisfait à (V 1), (V 3) et (V 4) (9.1.10). D'autre part, la dernière assertion du théorème est immédiate car, par définition même de $\varphi^\natural_b$ (9.1.6), on a

$$\varphi^\natural_b(U^\natural_b) \subset \bigcup_{a \in \Phi,\, r \in \mathbf{R}^*_+,\, a^\natural = rb} r^{-1} \varphi_a(U_a)$$

pour tout $b \in \Phi^\natural$.

Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\varphi^\natural$ satisfait à (V 2) et (V 5), ce qui sera fait en (9.2.12) et (9.2.13).

Lemme **(9.2.11)**. — *Soit* $N^\natural$ *le groupe engendré par* $T^\natural$ *et les* $M^\natural_b$ *pour* $b \in \Phi^\natural$ (cf. (6.1.2) (10)). *Pour tout* $n \in N^\natural$, *on a*

(1) $$n.A_\natural = A_\natural.$$

Si $\nu^\natural(n) \in \mathrm{Aut}\, A_\natural$ *désigne la restriction de* n *à* $A_\natural$, *on a*

(2) $$\lambda \circ \nu^\natural(n) = {}^v\nu^\natural(n)$$

où λ *désigne l'homomorphisme canonique de* $\mathrm{Aut}\, A_\natural$ *sur* $\mathrm{Aut}\, V^\natural$ *et où* ${}^v\nu^\natural$ *est l'homomorphisme de* $N^\natural$ *sur* ${}^vW^\natural$ *défini par la donnée radicielle de* $G^\natural$ ((6.1.2) (10)).

Il suffit de démontrer (1) lorsque $n \in T^\natural$ ou $n \in M_b^\natural$. Dans les deux cas, il existe $n' \in N$ et $z \in Z$ tels que $n = zn'$ ((DDR 3) et (9.1.3)). Vu (9.2.8), on a alors

$$n.A_\natural \subset (n.A) \cap \mathscr{I}_\natural = (z.A) \cap \mathscr{I}_\natural \subset A_\natural$$

d'où (1).

Si $\Phi^\natural = \emptyset$, on a $V^\natural = \{0\}$ et (2) est évident. Si $\Phi^\natural \neq \emptyset$, $N^\natural$ est engendré par les $M_b^\natural$ ((6.1.2) (10)) et il suffit de montrer que, lorsque $b \in \Phi^\natural$ et $m \in M_b^\natural$, le composé $\lambda \circ \nu^\natural(m)$ est la réflexion r_b associée à la racine b. Or, pour $c \in \Phi^\natural$, on a $mU_c^\natural m^{-1} = U_{r_b(c)}^\natural$ d'après (DR 5). Utilisant (9.1.8), on voit que $\nu^\natural(m)$ transforme un demi-espace fermé de $A_\natural$ de la forme $\{x \in A_\natural \mid c(x-\varphi)+k \geqslant 0\}$ $(k \in \Gamma_c^\natural)$ en un demi-espace fermé de la forme $\{x \in A_\natural \mid r_b(c)(x-\varphi)+h \geqslant 0\}$ $(h \in \mathbf{R})$. Comme $\Phi^\natural$ engendre $(V^\natural)^*$ et que $\Gamma_c^\natural \neq \emptyset$, ceci entraîne que $\lambda \circ \nu^\natural(m) = r_b$.

(9.2.12) Démontrons maintenant (V 2). Soient $b \in \Phi^\natural$ et $m \in M_b^\natural$. D'après (9.2.11) (2), $\nu^\natural(m)$ est le composé d'une translation $t \in V^\natural$ et de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{x \in A_\natural \mid b(x-\varphi)=0\}$; il transforme donc le demi-espace fermé $\{x \in A_\natural \mid b(x-\varphi)+k \geqslant 0\}$ $(k \in \mathbf{R})$ en le demi-espace fermé $\{x \in A_\natural \mid -b(x-\varphi)-b(t)+k \geqslant 0\}$. Vu (9.1.8), on en déduit que

$$\varphi_{-b}^\natural(mum^{-1}) = \varphi_b^\natural(u) - b(t) \qquad \text{pour tout } u \in U_b^\natural$$

ce qui démontre (V 2).

(9.2.13) Démontrons enfin (V 5). Soient $b \in \Phi^\natural$, $u \in U_b^\natural$, $u \neq 1$, et posons $k = \varphi_b^\natural(u)$. Soient $u', u'' \in U_{-b}^\natural$ et $m \in M_b^\natural$ tels que $u = u'mu''$. Posons $k' = \varphi_{-b}^\natural(u')$, $k'' = \varphi_{-b}^\natural(u'')$ et soit α (resp. α', α'') l'ensemble des points fixes de u (resp. u', u'') dans $A_\natural$. Nous avons vu (9.1.8) que

$$\begin{aligned} \alpha\ \ &= \{x \in A_\natural \mid b(x-\varphi)+k \geqslant 0\} \\ \alpha'\ &= \{x \in A_\natural \mid -b(x-\varphi)+k' \geqslant 0\} \\ \alpha'' &= \{x \in A_\natural \mid -b(x-\varphi)+k'' \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (V 5), il suffit donc de montrer que les bords $\partial\alpha$ et $\partial\alpha'$ coïncident, ou encore que l'intersection $\alpha \cap \alpha'$ ne peut être ni vide ni d'intérieur non vide.

Supposons tout d'abord que $\alpha \cap \alpha'$ soit d'intérieur non vide et soit x un point intérieur à $\alpha \cap \alpha'$. On a

$$u''.x = m^{-1}u'^{-1}u.x = m^{-1}.x \in A_\natural.$$

De plus, pour tout $y \in \alpha''$, on a

$$d(u''.x, y) = d(u''.x, u''.y) = d(x, y).$$

Comme α'' contient un demi-espace ouvert de $A_\natural$, il en résulte que $u''.x = x$. Par suite, m laisse fixes tous les points de l'ouvert non vide $\overset{\circ}{\widehat{\alpha \cap \alpha'}}$ et induit sur $A_\natural$ la transformation identique, ce qui contredit (9.2.11).

Supposons maintenant $\alpha \cap \alpha' = \emptyset$. Soit $x \in \alpha''$ et posons $x' = u.x = u'm.x$. On a

$x' \in u(A_\natural) \cap u'(A_\natural) \subset \mathscr{I}_\natural$. D'autre part, comme $X = A_\natural - (\alpha \cup \alpha')$ est un ouvert non vide de $A_\natural$, il existe une facette F de A telle que l'intérieur de $F \cap X$ relativement à $A_\natural$ soit non vide. D'après (9.2.5) (iv), cette facette F satisfait à (DI 3). Soit alors C une chambre de A contenant F dans son adhérence et soit ρ la rétraction de $\mathscr{I}$ sur A de centre C. La proposition (9.2.7) montre que $x'' = \rho(x')$ appartient à $A_\natural$. Soit A' un appartement contenant C et x'. Comme $F \subset A'$ et que l'intérieur de $F \cap X$ est non vide, l'intersection $A' \cap X$ est d'intérieur non vide dans $A_\natural$ et on peut choisir un point $y \in A' \cap X$ tel que $y \neq x''$ et que le segment $[yx'']$ ne soit pas parallèle aux hyperplans $\partial\alpha$ et $\partial\alpha'$. La droite de $A_\natural$ qui porte ce segment rencontre alors α et α', qui découpent sur elle deux demi-droites de directions opposées. Par suite, ou bien il existe $z \in \alpha$ tel que $y \in [zx'']$, ou bien il existe $z' \in \alpha'$ tel que $y \in [z'x'']$.

Dans le premier cas, on a

$$d(z, x') \geqslant d(z, x'') = d(z, y) + d(y, x'') = d(z, y) + d(y, x') \geqslant d(z, x')$$

puisque la rétraction ρ diminue les distances et que sa restriction à A' est une isométrie de A' sur A (7.4.19). On a donc $d(z, x') = d(z, y) + d(y, x')$ et $y \in [zx']$ (7.4.20). Comme z et x' appartiennent à $u(A_\natural)$, qui est convexe, on a $y \in u(A_\natural)$. Mais $d(u.y, t) = d(u.y, u.t) = d(y, t)$ pour tout t appartenant au demi-espace fermé $\alpha = u(\alpha)$ de l'espace affine $u(A_\natural)$, ce qui entraîne que $u.y = y$. Autrement dit, y appartient à l'ensemble α des points fixes de u dans A, ce qui est faux puisque $y \notin \alpha \cup \alpha'$.

On montre de même dans le second cas que $y \in u'(A_\natural)$ et que $y = u'.y$, ce qui contredit également l'hypothèse $y \notin \alpha \cup \alpha'$. Par suite $\alpha \cap \alpha'$ ne peut être vide.

La démonstration de (V 5) et du théorème (9.2.10) est achevée.

(9.2.14) Remarquons que les hypothèses de (9.1.17) sont satisfaites (en prenant $S^\natural = T^\natural$) : on a bien $T^\natural.\varphi \subset A_\natural = \varphi + V^\natural$ d'après (9.2.11) (1). Par suite, *il existe une isométrie j et une seule de l'immeuble $\mathscr{I}^\natural$ de* $G^\natural$ *(pour $\varphi^\natural$) dans $\mathscr{I}$ telle que $j(g.x) = g.j(x)$ pour $x \in \mathscr{I}^\natural$ et $g \in G^\natural$ et que $j(\varphi^\natural) = \varphi$.* Si $A^\natural = \varphi^\natural + V^\natural$ est l'appartement type de $\mathscr{I}^\natural$, on a $j(A^\natural) = A_\natural$ et $A_\natural = A \cap j(\mathscr{I}^\natural)$. De plus, on a $j(\mathscr{I}^\natural) \subset \mathscr{I}_\natural$, mais *il n'est pas vrai en général que $j(\mathscr{I}^\natural) = \mathscr{I}_\natural$.*

D'autre part, *l'immeuble $\mathscr{I}^\natural$ de $G^\natural$ ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de $\mathscr{I}_\natural$ ni du choix de φ dans sa classe d'équivalence* (satisfaisant aux conditions de (9.2.9)) : cela résulte de (8.1.10), puisque la bornologie de $G^\natural$ définie par $\varphi^\natural$ est, vu (8.1.7), celle induite par la bornologie de G. En fait, on peut même montrer que $\mathscr{I}^\natural$ ne dépend que de $\mathscr{I}$ et de $G^\natural$ (cf. (8.1.12)). Nous allons voir que j ne dépend que de $\mathscr{I}_\natural$.

Proposition **(9.2.15)**. — (i) $A_\natural$ *est la plus petite partie convexe non vide de $\mathscr{I}_\natural$ stable par* $T^\natural$.

(ii) $j(\mathscr{I}^\natural)$ *est la plus petite partie convexe non vide de $\mathscr{I}_\natural$ stable par* $G^\natural$.

(iii) *Soit i une isométrie de $\mathscr{I}^\natural$ dans $\mathscr{I}_\natural$ telle que $i(g.x) = g.i(x)$ pour $g \in G^\natural$ et $x \in \mathscr{I}^\natural$. Alors, $i = j$.*

Pour démontrer (i), il suffit de raisonner comme en (2.8.11), en prenant pour g un élément de $T^\natural$ tel que $v = \nu^\natural(g)$ n'appartienne au noyau d'aucune racine vectorielle n'appartenant pas à Φ_0 et en appliquant (7.4.30) au lieu de (2.8.10), après avoir remarqué que, d'après (9.2.7), on a $\mathscr{I}_\natural \subset \hat{P}_x . A_\natural$ pour tout $x \in A_\natural$.

L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de (i).

Démontrons (iii). Comme $i(\mathscr{I}^\natural)$ est une partie convexe non vide de $\mathscr{I}_\natural$, on a $A_\natural \subset i(\mathscr{I}^\natural)$. Mais les stabilisateurs dans $G^\natural$ de deux chambres distinctes de $\mathscr{I}^\natural$ sont distincts. On en déduit que $i(A^\natural) = A_\natural$ et que $i \mid A^\natural = j \mid A^\natural$, d'où (iii).

10. VALUATIONS DES GROUPES CLASSIQUES

Dans ce paragraphe, nous montrons que la donnée radicielle « naturelle » des groupes classiques sur un corps valué complet, éventuellement de rang infini sur son centre, peut être munie d'une valuation et nous explicitons au passage quelques-unes des notions introduites dans les paragraphes antérieurs. Contrairement à l'usage, nous commençons par le cas des groupes orthogonaux, unitaires ou symplectiques. Celui du groupe linéaire, nettement plus facile, sera traité plus rapidement en 10.2.

10.1. Groupes orthogonaux, unitaires et symplectiques.

(10.1.1) *Formes sesquilinéaires et pseudo-quadratiques.* — (Pour les notions et propriétés utilisées dans ce numéro, cf. [38], [39].)

Soient K un corps, non nécessairement commutatif, σ une involution de K et ε un élément de K égal à ± 1. Posons $K_{\sigma,\varepsilon}=\{t-\varepsilon t^\sigma \mid t\in K\}$. Soient X un espace vectoriel à droite sur K, $f: X\times X \to K$ une forme sesquilinéaire (relative à σ) telle que

(1) $$f(y,x)=\varepsilon f(x,y)^\sigma \qquad (x,y\in X)$$

(2) $$f(x,x)=0 \quad \text{si} \quad (\sigma,\varepsilon)=(\mathrm{id.},-1) \qquad (x\in X),$$

et $q: X\to K/K_{\sigma,\varepsilon}$ une *forme pseudo-quadratique* associée à f, c'est-à-dire une fonction telle que

(3) $$q(xk)=k^\sigma q(x)k \qquad (k\in K;\ x\in X)$$

(4) $$q(x+y)=q(x)+q(y)+(f(x,y)+K_{\sigma,\varepsilon}) \qquad (x,y\in X).$$

Si $(\sigma,\varepsilon)=(\mathrm{id.},1)$, q est une forme quadratique au sens usuel et f est la forme bilinéaire symétrique associée.

Comme une forme sesquilinéaire non nulle a pour image K tout entier, on voit que q détermine f, sauf si $K_{\sigma,\varepsilon}=K$, ce qui équivaut à $\sigma=\mathrm{id.}$ et $\varepsilon\neq 1$; dans ce dernier cas, q est nulle et f est une forme alternée. Dans tous les cas, la forme f est *tracique* : on a

(5) $$f(x,x)=k+\varepsilon k^\sigma \quad \text{pour} \quad k\in q(x).$$

En effet, il résulte de (4) que

(6) $$q(x(1+t))=q(x)+q(xt)+f(x,xt)+K_{\sigma,\varepsilon}$$

d'où

$$(f(x,x)-k-\varepsilon k^\sigma)t\in K_{\sigma,\varepsilon} \quad \text{pour tout} \quad t\in K.$$

Si $\operatorname{car} K \neq 2$, la forme f détermine q. Il en est de même si $\operatorname{car} K = 2$ et si l'ensemble des éléments de K invariants par σ est égal à $K_{\sigma,\varepsilon}$: si $f = 0$, on a alors $k = k^\sigma$ pour tout $k \in q(x)$, d'après (5), d'où $q = 0$.

En particulier, supposons qu'il existe un élément λ du centre de K tel que $\lambda + \lambda^\sigma = 1$. C'est le cas si $\operatorname{car} K \neq 2$ $(\lambda = 1/2)$ ou si $\operatorname{car} K = 2$ et si la restriction de σ au centre de K n'est pas l'identité. En prenant $t = -\lambda$ dans (6), on voit que

$$q(x) = \lambda f(x, x) + K_{\sigma,\varepsilon}. \tag{7}$$

De plus,

$$K_{\sigma,\varepsilon} = \{t \in K \mid t^\sigma = -\varepsilon t\} \tag{8}$$

car si $t^\sigma = -\varepsilon t$, on a $t = (\lambda t) - \varepsilon(\lambda t)^\sigma$.

Supposons donnés un corps K′ contenant K et une involution σ' de K′ prolongeant σ. Alors, les formes f et q se prolongent de façon naturelle à $X \otimes_K K'$. Pour f, il s'agit d'une opération bien connue ; quant au prolongement q' de q, il est obtenu comme suit : on définit $K'_{\sigma',\varepsilon}$ de la même façon que $K_{\sigma,\varepsilon}$ et pour

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes k_i \qquad (x_i \in X ;\ k_i \in K'), \tag{9}$$

on pose

$$q'(x) = \sum_{i=1}^{m} k_i^{\sigma'}(q(x_i) + K'_{\sigma',\varepsilon})k_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} k_i^{\sigma'}(f(x_i, x_j) + K'_{\sigma',\varepsilon})k_j, \tag{10}$$

définition qui a un sens, car on vérifie aisément que le second membre de (10) ne dépend pas de la décomposition (9) choisie pour x. Notons que lorsque $K'_{\sigma',\varepsilon} \cap K \neq K_{\sigma,\varepsilon}$, ce qui peut se passer si (8) n'est pas satisfaite, le prolongement q' de q ne détermine pas q.

Dorénavant, *nous supposerons le couple* (f, q) *non dégénéré*, c'est-à-dire satisfaisant à la condition suivante :

(11) *pour* $x \in X$, *les relations* $f(x, X) = \{0\}$ *et* $q(x) = 0$ *impliquent* $x = 0$.

Nous supposerons aussi que (f, q) *est d'indice de Witt* r *fini* (rappelons que l'indice de Witt est le maximum de la dimension d'un sous-espace X′ totalement singulier de X, c'est-à-dire d'un sous-espace X′ de X tel que $f(X', X') = \{0\}$ et $q(X') = \{0\}$).

Posons $I = \{\pm 1, \ldots, \pm r\}$ et posons $\varepsilon(i) = 1$ (resp. $\varepsilon(i) = \varepsilon$) pour $i \in I$ et $i > 0$ (resp. $i < 0$). Alors, X possède une décomposition

$$X = \coprod_{i \in I} e_i . K + X_0$$

où les e_i sont des éléments de X et X_0 un sous-espace vectoriel de X tels que, pour $i, j \in I$, on ait

$$\begin{cases} f(e_i, e_j) = q(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq -j, \\ f(e_i, e_{-i}) = \varepsilon(i), \\ f(e_i, X_0) = \{0\}, \\ 0 \notin q(X_0 - \{0\}). \end{cases} \tag{12}$$

Une telle décomposition de X étant choisie une fois pour toutes, nous posons $X_i = e_i.K$ et, pour tout endomorphisme g de X, nous désignons par $c_{ij}(g)$ $(i, j \in I \cup \{0\})$ l'élément de $\mathrm{Hom}(X_j, X_i)$ composé de l'injection canonique $X_j \to X$, de g et de la projection canonique $X \to X_i$, c'est-à-dire le coefficient d'indices i, j de la matrice représentant g pour la décomposition de X en question. Comme nous avons distingué un élément de base e_i dans X_i, pour $i \neq 0$, nous pourrons, le cas échéant, identifier $\mathrm{Hom}(X_j, X_i)$ avec K lorsque $i \neq 0 \neq j$, avec X_0 lorsque $i = 0 \neq j$, et avec le dual X_0^* de X_0 lorsque $i \neq 0 = j$.

Dans la suite de 10.1, Z *désigne l'ensemble* $\{(z, k) \mid z \in X_0,\ k \in K,\ q(z) = k + K_{\sigma, \varepsilon}\}$. *Sauf mention explicite du contraire, r est toujours supposé non nul, et* $\neq 1$ *si* $(\sigma, X_0) = (\mathrm{id.}, \{0\})$.

(10.1.2) Pour $i \in I$ et $(z, k) \in Z$ (resp. $Z - \{(0, 0)\}$), soit $u_i(z, k)$ (resp. $m_i(z, k)$) la transformation linéaire de X définie par

$$u_i(z, k) : \begin{cases} x \mapsto x - e_{-i}.f(z, x).\varepsilon(i) & (x \in X_0) \\ e_i \mapsto e_i + z - e_{-i}.k.\varepsilon(i) & \\ e_j \mapsto e_j & (j \in I;\ j \neq i) \end{cases}$$

(resp.

$$m_i(z, k) : \begin{cases} x \mapsto x - z.k^{-1}.f(z, x) & (x \in X_0) \\ e_i \mapsto -e_{-i}.k.\varepsilon(i) & \\ e_{-i} \mapsto -e_i.(k^\sigma)^{-1}.\varepsilon(-i) & \\ e_j \mapsto e_j & (j \in I;\ j \neq \pm i)). \end{cases}$$

Pour $i, j \in I$ tels que $j \neq \pm i$, et $k \in K$ (resp. $K - \{0\}$), soit $u_{ij}(k)$ (resp. $m_{ij}(k)$) la transformation linéaire de X définie par

$$u_{ij}(k) : \begin{cases} x \mapsto x & (x \in X_0) \\ e_i \mapsto e_i + e_{-j}.k^\sigma.\varepsilon(-j) & \\ e_j \mapsto e_j - e_{-i}.k.\varepsilon(i) & \\ e_h \mapsto e_h & (h \in I - \{i, j\}) \end{cases}$$

(resp.

$$m_{ij}(k) : \begin{cases} x \mapsto x & (x \in X_0) \\ e_i \mapsto e_{-j}.k^\sigma.\varepsilon(-j) & \\ e_j \mapsto -e_{-i}.k.\varepsilon(i) & \\ e_{-i} \mapsto e_j.k^{-1}.\varepsilon(i) & \\ e_{-j} \mapsto -e_i.(k^\sigma)^{-1}.\varepsilon(-j) & \\ e_h \mapsto e_h & (h \in I - \{\pm i, \pm j\})). \end{cases}$$

Considérons l'espace $V^* = \mathbf{R}^r$ muni de la norme euclidienne usuelle, notons $(a_h)_{h=1,\ldots,r}$ la base canonique de cet espace et posons $a_{-h} = -a_h$ et $a_{ij} = a_i + a_j$ pour $i, j \in I$, $j \neq \pm i$. Pour $i \in I$, posons

$$\begin{aligned} U_{a_i} &= \{u_i(z, k) \mid (z, k) \in Z\}, \\ U_{2a_i} &= \{u_i(0, k) \mid k \in K_{\sigma,\varepsilon}\}, \\ M^0_{a_i} &= \{m_i(z, k) \mid (z, k) \in Z - \{(0, 0)\}\}, \\ M^0_{2a_i} &= \{m_i(0, k) \mid k \in K_{\sigma,\varepsilon} - \{0\}\}, \end{aligned}$$

pour $i, j \in I$ tels que $j \neq \pm i$, posons

$$U_{a_{ij}} = \{u_{ij}(k) \mid k \in K\} \quad \text{et} \quad M^0_{a_{ij}} = \{m_{ij}(k) \mid k \in K - \{0\}\},$$

et pour $a \in V^* - \{a_i, 2a_i, a_{ij} \mid i \in I, j \in I - \{\pm i\}\}$, posons $U_a = \{1\}$.

L'ensemble Φ des $a \in V^*$ tels que $U_a - U_{2a} \neq \emptyset$ est un système de racines. De façon précise, on a les relations suivantes, où i, j parcourt I et $j \neq \pm i$:

(B) $\Phi = \{a_i, a_{ij}\}$ lorsque $X_0 \neq \{0\}$ et $(\sigma, \varepsilon) = (\mathrm{id.}, 1)$;

(BC) $\Phi = \{a_i, 2a_i, a_{ij}\}$ lorsque $X_0 \neq \{0\}$ et $\sigma \neq \mathrm{id.}$;

(C) $\Phi = \{2a_i, a_{ij}\}$ lorsque $X_0 = \{0\}$ et $(\sigma, \varepsilon) \neq (\mathrm{id.}, 1)$;

(D) $\Phi = \{a_{ij}\}$ lorsque $X_0 = \{0\}$ et $(\sigma, \varepsilon) = (\mathrm{id.}, 1)$.

Remarque **(10.1.3).** — « *Changement de coordonnées* ». — Soit η un élément de K égal à 1 si $\sigma = \mathrm{id.}$ et à ± 1 si $\sigma \neq \mathrm{id.}$, et soit k un élément inversible de K tel que $k^\sigma = \eta k$. Les conditions imposées à ε, σ, f, q sont respectées et les groupes U_{a_i}, $U_{a_{ij}}$ ne changent pas si on remplace σ, ε, f, q, e_i, X_0 respectivement par σ', ε', f', etc., où

$$\begin{gathered} \varepsilon' = \varepsilon\eta, \\ t^{\sigma'} = k t^\sigma k^{-1} \quad \text{pour } t \in K \ (\text{d'où } K_{\sigma',\varepsilon'} = k . K_{\sigma,\varepsilon}), \\ f' = kf, \qquad q' = kq, \\ e_i = e_i . k^{-1} \ \text{ou} \ e_i \quad \text{selon que } i < 0 \text{ ou } > 0, \\ X'_0 = X_0. \end{gathered}$$

Si $\sigma \neq \mathrm{id.}$ et $\varepsilon \neq 1$, on peut prendre pour k un élément anti-invariant non nul, par exemple de la forme $h - h^\sigma$. On a alors $\varepsilon' = 1$.

Si $(\sigma, \varepsilon) \neq (\mathrm{id.}, 1)$ et si on prend pour k un élément inversible de $K_{\sigma,\varepsilon}$ (dont l'inverse appartient alors aussi à $K_{\sigma,\varepsilon}$), on a $\varepsilon' = -1$ et $1 \in K_{\sigma',\varepsilon'}$. D'autre part, si $(\sigma, \varepsilon) = (\mathrm{id.}, 1)$ et si $X_0 \neq \{0\}$, il est possible de choisir k de telle façon que q' prenne la valeur 1 en un point donné, arbitrairement choisi, de X_0. On voit donc que, pour l'étude du système de groupes $(U_a)_{a \in \Phi}$, on peut toujours se ramener à l'un des cas suivants :

(1) $\varepsilon = -1$ et $1 \in K_{\sigma,\varepsilon}$ (d'où $\Phi = C_r$ ou BC_r);

(2) $(\sigma, \varepsilon) = (\mathrm{id.}, 1)$ et $1 \in q(X_0)$ (d'où $\Phi = B_r$);

(3) $(\sigma, \varepsilon, X_0) = (\mathrm{id.}, 1, \{0\})$ (d'où $\Phi = D_r$).

(10.1.4) Soit $g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$. On dit que g est une *similitude* s'il existe un élément c du centre de K, invariant par σ, tel que, pour $x, y \in \mathrm{K}$, on ait

$$f(gx, gy) = cf(x, y) \qquad q(gx) = cq(x).$$

Cet élément c est alors unique; on l'appelle *rapport* de la similitude g et on le note $c(g)$.

Une *isométrie* est, par définition, une similitude de rapport 1.

Nous notons G^0 le groupe engendré par les U_a $(a \in \Phi)$, $\mathrm{Is}(f, q)$ le groupe des isométries, $\mathrm{Sim}(f, q)$ le groupe des similitudes et T^0 (resp. $\mathrm{T}(f, q)$; resp. $\widetilde{\mathrm{T}}(f, q)$) le groupe des éléments t de G^0 (resp. $\mathrm{Is}(f, q)$; resp. $\mathrm{Sim}(f, q)$) stabilisant chacun des X_i $(i \in [-r, +r])$, c'est-à-dire représentés par une matrice $((c_{ij}(t)))$ diagonale. Si Φ est de type D, on sait que les sous-espaces linéaires de X de dimension r sur lesquels q s'annule (espaces totalement singuliers maximaux) peuvent se répartir en deux familles, deux tels sous-espaces appartenant à la même famille si et seulement si leur intersection est de codimension paire dans chacun d'eux; nous désignons alors par $\mathrm{Is}^+(f, q)$ (resp. $\mathrm{Sim}^+(f, q)$) le sous-groupe d'indice 2 du groupe $\mathrm{Is}(f, q)$ (resp. $\mathrm{Sim}(f, q)$) formé par les éléments de celui-ci qui conservent chacune de ces deux familles.

Proposition **(10.1.5)**. — (i) *Pour qu'une transformation linéaire t de* X *stabilisant chacun des* X_i $(i \in \mathrm{I} \cup \{0\})$ *soit une similitude de rapport c, il faut et il suffit que*

$$(1) \qquad c_{ii}(t)^\sigma . c_{-i,-i}(t) = c \quad \textit{pour } i \in \mathrm{I}$$

et

$$(2) \qquad q(c_{00}(t)(z)) = c . q(z) \quad \textit{pour } z \in \mathrm{X}_0.$$

(ii) *Le groupe* $\widetilde{\mathrm{T}}(f, q)$ *normalise chacun des groupes* U_a $(a \in \Phi)$ *et* G^0.

(iii) *Si Φ n'est pas de type* D, *on a* $\mathrm{Is}(f, q) = \mathrm{T}(f, q) . \mathrm{G}^0$ *et* $\mathrm{Sim}(f, q) = \widetilde{\mathrm{T}}(f, q) . \mathrm{G}^0$. *Si Φ est de type* D, *on a* $\mathrm{Is}^+(f, q) = \mathrm{T}(f, q) . \mathrm{G}^0$ *et* $\mathrm{Sim}^+(f, q) = \widetilde{\mathrm{T}}(f, q) . \mathrm{G}^0$.

Proposition **(10.1.6)**. — *Soient* T *un sous-groupe de* $\widetilde{\mathrm{T}}(f, q)$ *contenant* T^0, G *le groupe* $\mathrm{T} . \mathrm{G}^0$ *et, pour* $a \in \Phi$, $\mathrm{M}_a = \mathrm{T} . \mathrm{M}_a^0$. *Alors, le couple* $(\mathrm{T}, (\mathrm{U}_a, \mathrm{M}_a)_{a \in \Phi})$ *est une donnée radicielle génératrice de type* Φ *dans* G. *Avec les notations de* (6.1.2) (2), *on a, pour cette donnée,* $m(u_i(z, k)) = m_i(z, k)$ *et* $m(u_{ij}(k)) = m_{ij}(k)$; *en particulier, l'ensemble* M_a^0 $(a \in \Phi)$ *coïncide avec l'ensemble noté ainsi en* (6.1.2) (2).

Ces propositions seront démontrées respectivement en (10.1.10) et (10.1.12).

Proposition **(10.1.7)**. — (i) *Le groupe* N^0 *engendré par les* M_a^0 $(a \in \Phi)$ *stabilise* X_0 *et permute entre eux les* X_i $(i \in \mathrm{I})$. *Le groupe* ${}^v\mathrm{W}$ *de permutations de l'ensemble d'indices* I *qu'il induit est le groupe* W_C *de toutes les permutations commutant avec la multiplication par* -1 *ou le groupe* W_D *de toutes les permutations paires ayant cette propriété selon que le système de racines* Φ *n'est pas ou est de type* D.

(ii) *Le groupe* N_1' *engendré par les* $m_{ij}(1)$ $(i, j \in \mathrm{I}; j \neq \pm i)$ *est un sous-groupe fini de* N^0 *conservant l'ensemble* $\{\pm e_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, *fixant* X_0, *et dont l'image dans* ${}^v\mathrm{W}$ *est le groupe* W_D.

(iii) *Supposons remplie l'une des conditions* (1), (2), (3) *du n°* (10.1.3), *et soit* e_0 *un élément de* X_0 *égal à* 0 *dans le cas* (1) *et tel que* $q(e_0)=1$ *dans le cas* (2). *Alors, le groupe* N' *engendré par* N'_1 *et, si* Φ *n'est pas de type* D, *par les* $m_i(e_0, 1)$ $(i\in I)$, *est un groupe fini conservant l'ensemble* $\{\pm e_i \mid i\in I\}$, *dont l'image dans* ${}^vW$ *est* ${}^vW$ *tout entier.*

Il est clair que N'_1 conserve l'ensemble $\{\pm e_i \mid i\in I\}$ et fixe X_0; c'est donc un groupe fini. La finitude de N' résulte de ce que tout élément du système générateur donné pour ce groupe, donc aussi tout élément du groupe lui-même, conserve $\{\pm e_i \mid i\in I\}$ et induit sur X_0, soit la transformation identique, soit la transformation $x\mapsto x-e_0.f(e_0, x)$, qui est d'ordre 1 ou 2. Les autres assertions sont évidentes.

Lemme **(10.1.8)**. — (i) *Pour* $i\in I$, U_{a_i} (resp. U_{2a_i}) *est le groupe de toutes les isométries* $1+n$ *de* X *telles qu'on ait*

$$n(X_i)\subset X_0+X_{-i} \qquad \text{(resp. } X_{-i}\text{)},$$
$$n(X_0)\subset X_{-i} \qquad \text{(resp. } =\{0\}\text{)}$$

et

$$n(X_j)=\{0\} \quad \textit{pour } j\neq i,\ 0.$$

Ce groupe est simplement transitif sur l'ensemble des droites singulières de q *(c'est-à-dire des sous-espaces à une dimension sur lesquels* q *s'annule) contenues dans* $X_{-i}+X_0+X_i$ (resp. $X_{-i}+X_i$) *et distinctes de* X_{-i}.

(ii) *Pour* $i, j\in I$ *tels que* $j\neq \pm i$, $U_{a_{ij}}$ *est le groupe de toutes les isométries* $1+n$ *de* X *telles qu'on ait*

$$n(X_i)\subset X_{-j},$$
$$n(X_j)\subset X_{-i}$$

et

$$n(X_h)=\{0\} \quad \textit{pour } h\in[-r, r]-\{i, j\}.$$

Ce groupe est simplement transitif sur l'ensemble des droites de X_i+X_{-j} *distinctes de* X_{-j}. *Il est contenu dans* $\mathrm{Is}^+(f, q)$ *si* Φ *est de type* D.

La vérification est facile.

Lemme **(10.1.9)**. — (i) *Pour tout* $i\in I$ *le stabilisateur de* e_i *dans* G^0 *permute transitivement les droites* Y *de* X *telles que* $f(e_i, Y)\neq\{0\}$ *et* $q(Y)=\{0\}$.

(ii) *Le groupe* G^0 *permute transitivement les droites singulières de* q.

Prouvons (i) par récurrence sur r. On peut supposer $i=1$. Pour $r=1$, l'assertion résulte de (10.1.8) (i). Soit donc $r\geqslant 2$ et soit x un point de X tel que $f(e_1, x)\neq 0$ et $q(x)=0$. Il nous suffira de montrer qu'il existe $g\in G^0$ tel que $g(e_1)=e_1$ et $g(x)\in X_{-1}$. L'ensemble des points y de X_1+X_r tels que $f(y, x)=0$ est une droite distincte de X_1. En vertu de (10.1.8) (ii), nous pouvons, quitte à transformer x par un élément convenablement choisi de $U_{a_{r,-1}}$, supposer que cette droite est X_r, c'est-à-dire que $f(e_r, x)=0$. Alors, $x\in \sum_{i=-r+1}^{r} X_i$. Posons $x=x'+e_r.k$, avec $x'\in X'=\sum_{i=-r+1}^{r-1} X_i$ et $k\in K$. Vu l'hypothèse de récurrence appliquée à X' et aux restrictions de f et q à $X'\times X'$ et à X', il existe un élément de G^0 fixant e_1, e_r et e_{-r} et transformant x' en un point de X_{-1}. Nous pouvons donc directement supposer que x appartient à $X_{-1}+X_r$. Mais alors, $U_{a_{-1,-r}}$ possède un élément g ayant les propriétés voulues, en vertu de (10.1.8) (ii).

Pour établir (ii), il suffit de montrer que si $x \in q^{-1}(0)$, il existe $g \in G^0$ tel que $g(x) \in X_{-1}$. Si $x \neq 0$, ce que nous supposerons, il existe $i \in I$ tel que $f(e_i, x) \neq 0$. Si $i \neq -1$, posons $y = e_{-1}+e_{-i}$; si $i=-1$ et $r \geqslant 2$, posons $y = e_1 - e_2 + e_{-2} - e_{-1}$; enfin, si $i=-1$ et $r=1$, auquel cas on a par hypothèse $\dim X_0 > 0$, prenons $y = u_1(k, z)(e_1) = e_1 + z - e_{-1} k \varepsilon(1)$, avec $(z, k) \in Z - \{(0, 0)\}$. On a alors $q(y)=0$, $f(e_1, y) \neq 0$ et $f(e_i, y) \neq 0$. Vu (i), il existe un élément g_1 (resp. g_i) du stabilisateur de e_1 (resp. e_i) dans G^0 tel que $g_1(y) \in X_{-1}$ (resp. $g_i(y) \in xK$), d'où notre assertion.

(10.1.10) Démontrons maintenant la proposition (10.1.5). L'assertion (i) résulte d'un simple calcul et (ii) est conséquence immédiate de (10.1.8).

Pour la démonstration de (iii), nous nous bornerons à considérer le cas où Φ n'est pas de type D, le cas où $\Phi = D_r$ se traitant de façon analogue. En vertu de (10.1.8), on a $G^0 \subset \mathrm{Is}(f, q) \subset \mathrm{Sim}(f, q)$. Pour établir les relations annoncées, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Sim}(f, q) \subset \tilde{T}(f, q).G^0$. La démonstration se fera par récurrence sur r, l'assertion étant évidente pour $r=0$ (lorsque $\Phi = D_r$ on fait démarrer la récurrence au cas $r=1$). Soit g un élément quelconque de $\mathrm{Sim}(f, q)$. Appliquant successivement les assertions (ii) et (i) de (10.1.9), on voit qu'il existe $g^0 \in G^0$ tel que $g^0(g(e_1)) = e_1$ et $g^0(g(e_{-1})) = e_{-1}$, d'où $g^0(g(X')) = X'$, en posant

$$X' = \{x \mid x \in X, f(e_1, x) = f(e_{-1}, x) = 0\} = \sum_{i \neq \pm 1} X_i.$$

Vu l'hypothèse de récurrence appliquée à la restriction de $g^0 g$ à X', on a $g^0 g \in G^0.\tilde{T}(f, q)$, d'où $g \in G^0.\tilde{T}(f, q)$, c.q.f.d.

(10.1.11) *Relations.* — Dans les relations suivantes, h, i, j, i', j' désignent des éléments de I, k, k' des éléments de K et z, z' des éléments de X_0. Ces éléments sont chaque fois supposés satisfaire les conditions nécessaires pour que les relations écrites aient un sens (on doit avoir par exemple, dans la relation (3), $(z, k) \in Z - \{(0, 0)\}$; dans la relation (15), $j \neq \pm i$ et $j' \neq \pm i'$, etc.).

(1) $$u_i(z, k).u_i(z', k') = u_i(z+z', k+k'+f(z, z')),$$

(2) $$u_i(z, k)^{-1} = u_i(-z, \varepsilon k^\sigma),$$

(3) $$u_i(z, k) = u_{-i}(-z.k^{-1}.\varepsilon(i), k^{-1}.\varepsilon).m_i(z, k).u_{-i}(-z.(k^\sigma)^{-1}.\varepsilon(-i), k^{-1}.\varepsilon),$$

(4) $$u_{ij}(k).u_{ij}(k') = u_{ij}(k+k'),$$

(5) $$u_{ij}(k)^{-1} = u_{ij}(-k),$$

(6) $$u_{ij}(k) = u_{-i,-j}(-(k^\sigma)^{-1}.\varepsilon(i).\varepsilon(j)).m_{ij}(k).u_{-i,-j}(-(k^\sigma)^{-1}.\varepsilon(i).\varepsilon(j)),$$

(7) $$u_{ji}(k) = u_{ij}(-\varepsilon k^\sigma),$$

(8) $$(u_i(z, k), u_i(z', k')) = u_i(0, f(z, z') - f(z', z)),$$

(9) $$(u_i(z,k),\, u_{i'}(z',k')) = u_{ii'}(f(z,z')) \qquad \text{pour } i' \neq \pm i,$$

(10) $$(u_{-i}(z,k),\, u_{ij}(k')) = u_j(-z.k'.\varepsilon(i),\, \varepsilon k'^{\sigma}.k^{\sigma}.k').u_{-i,j}(-k.k'.\varepsilon(i)),$$

(11) $$(u_i(z,k),\, u_{i',j'}(k')) = 1 \quad \text{pour } i \notin \{-i', -j'\},$$

(12) $$(u_{ih}(k),\, u_{-h,j}(k')) = u_{ij}(-k.k'.\varepsilon(-h)) \qquad \text{pour } j \neq \pm i,$$

(13) $$(u_{ih}(k),\, u_{-h,i}(k')) = u_i(0,\, (k'^{\sigma}.k^{\sigma} - k.k'.\varepsilon).\varepsilon(h)),$$

(14) $$(u_{ij}(k),\, u_{ij'}(k')) = 1 \qquad \text{pour } j' \neq -j,$$

(15) $$(u_{ij}(k),\, u_{i',j'}(k')) = 1 \qquad \text{pour } i', j' \notin \{\pm i, \pm j\}.$$

Les vérifications sont faciles.

(10.1.12) *Démonstration de la proposition* (10.1.6). — Pour $a \in \Phi$, le quotient de deux éléments de M_a^0 stabilise chacun des X_i. Il est donc contenu dans T^0 et $M_a = T.M_a^0$ est une classe à droite de T. Cela étant, le fait que le système $(T, (U_a, M_a)_{a\in\Phi})$ satisfait aux axiomes (DR 1), (DR 2) et (DR 4) des données radicielles (6.1.1) résulte des relations du n° (10.1.11). L'axiome (DR 3) est évident. Pour vérifier (DR 5), il suffit évidemment de considérer le cas où n_a appartient à M_a^0; la relation à établir résulte alors de la forme des m_i et m_{ij}, du fait qu'ils appartiennent à $\mathrm{Is}(f, q)$ (cf. (10.1.5)) et du lemme (10.1.8). L'axiome (DR 6) résulte de ce que la matrice $((c_{ij}(g)))$ (cf. (10.1.1)) représentant un élément g de TU^+ (resp. de U^-) est triangulaire inférieure (resp. est triangulaire supérieure et n'a que des 1 sur la diagonale). Enfin, l'assertion de l'énoncé concernant les $m(u_i)$ et $m(u_{ij})$ est une conséquence des relations (3) et (6) de (10.1.11).

(10.1.13) Pour toute fonction $\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, nous notons $\varphi^{\omega} = (\varphi_a^{\omega})_{a\in\Phi}$ le système de fonctions $\varphi_a^{\omega} : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ défini comme suit :

(1) $$\varphi_{a_i}^{\omega}(u_i(z,k)) = \frac{1}{2}\omega(k) \qquad \text{si} \quad a_i \in \Phi$$

(2) $$\varphi_{2a_i}^{\omega}(u_i(0,k)) = \omega(k) \qquad \text{si} \quad 2a_i \in \Phi$$

(3) $$\varphi_{a_{ij}}^{\omega}(u_{ij}(k)) = \omega(k).$$

(10.1.14) Soient $\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ une valuation non impropre de K, invariante par σ, et $\hat{K}$ le complété de K pour ω. Les prolongements par continuité de ω et σ à $\hat{K}$ sont encore notés ω et σ. Posons $\hat{X} = X \otimes_K \hat{K}$, $\hat{X}_i = X_i \otimes_K \hat{K}$, désignons par $\hat{f} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{K}$ et $\hat{q} : \hat{X} \to \hat{K}/\hat{K}_{\sigma,\varepsilon}$ les prolongements naturels de f et q (10.1.1), et soit

$$\hat{Z} = \{(z,k) \mid z \in \hat{X}_0,\, k \in \hat{K},\, \hat{q}(z) = k + \hat{K}_{\sigma,\varepsilon}\}.$$

Nous munissons K et $\hat{K}$ de la topologie définie par ω, et tout espace vectoriel de dimension finie sur K ou $\hat{K}$ de la topologie naturellement associée à celle-là (topologie déduite par transport de structure de la topologie produit sur K^m ou $\hat{K}^m$). L'adhérence pour ces topologies est notée par une barre. On a

(1) $$\hat{K}_{\sigma,\varepsilon} \subset \overline{K_{\sigma,\varepsilon}}.$$

Posons $$X^\perp = \{x \in X \mid f(x, X) = \{0\}\}$$

et $$\hat{X}^\perp = \{x \in \hat{X} \mid f(x, \hat{X}) = \{0\}\}.$$

On a aussi

$$X^\perp = \{z \in X_0 \mid f(z, X_0) = \{0\}\}$$

et

(2) $$\hat{X}^\perp = \{z \in \hat{X}_0 \mid f(z, X_0) = \{0\}\} = X^\perp \otimes_K \hat{K}.$$

Notons encore que, pour $(z, k) \in Z$,

(3) $$\omega(f(z, z)) = \omega(k + \varepsilon k^\sigma) \geqslant \omega(k).$$

Théorème **(10.1.15)**. — *Avec les notations et conventions introduites en* (10.1.14), *les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Pour* $(z, k), (z', k') \in Z$, *on a*

$$\omega(f(z, z')) \geqslant \frac{1}{2}(\omega(k) + \omega(k')).$$

(ii) *Pour* $(z, k), (z', k') \in Z$, *on a*

$$\omega(f(z, z')) \geqslant \inf\{\omega(k), \omega(k')\}.$$

(iii) $\hat{q}(\hat{X}_0 - \hat{X}^\perp) \cap \overline{K_{\sigma,\varepsilon}} = \emptyset$.

(iv) φ^ω *est une valuation de la donnée radicielle* $(T, (U_a))$.

Remarques **(10.1.16)**. — *a)* Si $\hat{K}_{\sigma,\varepsilon}$ est fermé dans $\hat{K}$ (par exemple si K est de dimension finie sur son centre, ou si $\varepsilon = 1$ et s'il existe un élément central λ tel que $\lambda + \lambda^\sigma = 1$ (cf. (10.1.1) (8))), la condition (iii) signifie que la restriction de q à $\hat{X}_0$ ne s'annule pas en dehors de $\hat{X}^\perp$.

b) Si $\operatorname{car} K = 2$, il se peut que q ait des zéros non triviaux dans $\hat{X}^\perp$. Par exemple, supposons que K soit un corps commutatif non parfait dont le complété est parfait, et soient σ l'identité, X_0 le corps $K^{1/2}$ considéré comme espace vectoriel sur K, $q|_{X_0}$ la forme quadratique $z \mapsto z^2$ et $f|_{X_0 \times X_0}$ la forme bilinéaire nulle. Alors $\hat{q}$ est le carré d'une forme linéaire et a donc un noyau de codimension 1 dans $\hat{X}_0$.

Lemme **(10.1.17)**. — *Soient* Y *un sous-espace de dimension finie de* X_0 *et* $\hat{Y} = Y \otimes_K \hat{K}$. *Identifions* Y *avec* $Y \otimes 1$. *Alors :*

(i) *Il existe une fonction continue* $\bar{q} : \hat{Y} \to \hat{K}$ *telle que* $\bar{q}(Y) \subset K$ *et qu'on ait*

$$q(z) = \bar{q}(z) + K_{\sigma,\varepsilon} \quad \textit{pour } z \in Y,$$

$$\hat{q}(z) = \bar{q}(z) + \hat{K}_{\sigma,\varepsilon} \quad \textit{pour } z \in \hat{Y}.$$

(ii) *Soient* $(z, k) \in \hat{\mathrm{Y}}$ *et* $z_n \in \mathrm{Y}$ $(n \in \mathbf{N})$ *tels que* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. *Alors, il existe des* $k_n \in \mathrm{K}$ *tels que* $\lim_{n\to\infty} k_n = k$ *et* $q(z_n) = k_n + \mathrm{K}_{\sigma,\varepsilon}$ *pour tout* n.

Dans la démonstration qui suit, s et s' désignent toujours des entiers parcourant l'intervalle $[1, \dim \mathrm{Y}]$. Soit (x_s) une base de Y et, pour tout s, soit d_s un représentant de $q(x_s)$ dans K. Alors, la fonction $\overline{q}$ définie par

$$\overline{q}(\sum_s x_s \xi_s) = \sum_s \xi_s^\sigma d_s \xi_s + \sum_{s<s'} \xi_s^\sigma f(x_s, x_{s'}) \xi_{s'}$$

satisfait aux conditions de (i).

Soient (z, k) et z_n comme dans l'énoncé de (ii). Vu (10.1.14) (1), il existe des $k'_n \in \mathrm{K}_{\sigma,\varepsilon}$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} k'_n = k - \overline{q}(z).$$

Cela étant, la suite des $k_n = \overline{q}(z_n) + k'_n$ possède la propriété requise.

Lemme **(10.1.18)**. — *Soient* $(z, k), (z_0, k_0) \in \mathrm{Z} - \{(0, 0)\}$ *et*

$$\eta = \omega(k) + \omega(k_0) - 2\omega(f(z, z_0)).$$

Supposons η *strictement positif. Pour* $n \in \mathbf{N}^*$, *soient* $z_n \in \mathrm{X}_0$, $k_n \in \mathrm{K}$ *et* $\lambda_n \in \mathrm{K}^*$ *définis inductivement par*

$$\lambda_n = -f(z_{n-1}, z)^{-1} . k_{n-1},$$

$$z_n = z_{n-1} + z . \lambda_n$$

et

$$k_n = \lambda_n^\sigma . k . \lambda_n.$$

Alors :

(i) *On a, pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$(z_n, k_n) \in \mathrm{Z} \tag{1}$$

$$\omega(\lambda_{n+1}) = (2^n - 1)\eta + \omega(k_0) - \omega(f(z_0, z)); \tag{2}$$

$$\omega(f(z_n, z)) = \omega(f(z_0, z)); \tag{3}$$

$$\omega(k_n) = (2^n - 1)\eta + \omega(k_0). \tag{4}$$

(ii) *La suite* (z_n) *converge dans* $z . \hat{\mathrm{K}} + z_0 . \hat{\mathrm{K}}$ *vers un point* $\hat{z}$ *tel que*

$$\omega(f(\hat{z}, z)) = \omega(f(z_0, z)) \quad \textit{et} \quad \hat{q}(\hat{z}) \subset \overline{\mathrm{K}_{\sigma,\varepsilon}}/\hat{\mathrm{K}}_{\sigma,\varepsilon}.$$

(iii) *Pour tout nombre réel* A, *il existe* $(z', k'), (z'_0, k'_0) \in \mathrm{Z}$ *tels que* $z', z'_0 \in z . \mathrm{K} + z_0 . \mathrm{K}$, $\omega(f(z'_0, z')) = \omega(f(z_0, z))$, $\omega(k') \geq \mathrm{A}$ *et* $\omega(k_0) \geq \mathrm{A}$.

La vérification de (i) par récurrence sur n est immédiate, compte tenu de (10.1.14) (3). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (i). Pour établir (iii), on remarque d'abord que, vu (i), il existe un entier n tel que $\omega(k_n) \geq \mathrm{A}$; on pose alors $(z', k') = (z_n, k_n)$ et on applique à nouveau (i) en substituant (z', k') et (z, k) respectivement à (z, k) et (z_0, k_0).

(10.1.19) *Démonstration du théorème* (10.1.15). — Il est clair que (i) implique (ii). Les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (i) sont conséquences immédiates de (10.1.18) (iii) et (10.1.18) (ii) respectivement.

Supposons qu'il existe $\hat{z} \in \hat{X}_0 - \hat{X}^{\perp}$ tel que $\hat{q}(\hat{z}) \in \overline{K_{\sigma,\varepsilon}}/K_{\sigma,\varepsilon}$ et soient $z' \in X_0$ et $\hat{k} \in \overline{K_{\sigma,\varepsilon}}$ tels que $f(\hat{z}, z') \neq 0$ et $\hat{q}(\hat{z}) = \hat{k} + \hat{K}_{\sigma,\varepsilon}$. Vu (10.1.17) (ii), $(\hat{z}, \hat{k})$ est limite d'une suite $((z_n, k_n))_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de Z. Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $K_{\sigma,\varepsilon}$ tendant vers $\hat{k}$ et posons $k'_n = k_n - \ell_n$. On a alors $(z_n, k'_n) \in Z$, $\lim\limits_{n \to \infty} k'_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n, z') = f(\hat{z}, z') \neq 0$, de sorte que $\omega(f(z_n, z')) < \frac{1}{2}(\omega(k) + \omega(k'_n))$ pour n suffisamment grand. Ceci montre que (i) $\Rightarrow$ (iii).

L'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) résulte de (10.1.11) (1) et de l'axiome (V 1) des valuations (6.2.1).

Il reste à montrer que si les conditions (i), (ii), (iii) sont remplies, ce que nous supposerons désormais, φ^{ω} est une valuation de $(T, (U_a))$.

L'axiome (V 0) est conséquence du fait qu'on a supposé la valuation ω non impropre (lorsque $a = a_i$, on remarque que $(z, k) \in Z$ implique $(z\ell, \ell^{\sigma} k \ell) \in Z$ pour tout $\ell \in K$).

L'axiome (V 1) est satisfait en vertu de (ii) et des relations (1) et (4) de (10.1.11).

L'axiome (V 2) résulte des observations suivantes : si $a = a_{ij}$ et $m \in M_a$, on a

$$m . u_{ij}(k) . m^{-1} = u_{-i,\,-j}(c_{i,\,-i}(m) . k . c_{j,\,-j}(m^{-1}) . \varepsilon)\,;$$

si $a = a_i$ ou $2a_i$ et $m \in M_a$, on a

$$m . u_i(z, k) . m^{-1} = u_i(m(z), c_{i,\,-i}(m) . k . c_{i,\,-i}(m^{-1})).$$

L'axiome (V 3) découle des relations (8) à (15) de (10.1.11), de (i) et du fait que ω est une valuation.

Enfin, la validité de (V 4) est évidente et celle de (V 5) résulte de (10.1.11) (3) et (6).

(10.1.20) Soit $X_0^* = \mathrm{Hom}(X_0, K)$ le dual de X_0. Pour toute fonction

$$\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

et toute fonction

$$\omega_1 : X_0 \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

soient $\omega_q : X_0 \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et $\omega_1^* : X_0^* \to \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ les fonctions définies par les relations suivantes, où l'on convient que $\infty - \infty = \infty$:

$$\omega_q(z) = \frac{1}{2}\sup\{\omega(k) \mid k \in q(z)\} \qquad (z \in X_0)$$

$$\omega_1^*(x) = \inf\{\omega(x(z)) - \omega_1(z) \mid z \in X_0\} \qquad (x \in X_0^*).$$

Une fonction $\alpha : Y \to \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ définie sur un K-espace vectoriel Y est appelée une (ω-)*semi-norme additive* si, pour $\lambda \in K$ et $y, y' \in Y$, on a

(1) $$\alpha(y\lambda) = \alpha(y) + \omega(\lambda),$$

(2) $$\alpha(y + y') \geqslant \inf\{\alpha(y), \alpha(y')\}.$$

Pour $z \in X_0$, nous désignons par z^* l'élément de X_0^* défini par $z^*(z') = f(z, z')$.

Proposition **(10.1.21).** — *Les conditions* (i) *à* (iv) *du théorème* (10.1.15) *sont encore équivalentes aux suivantes* :

(v) *pour* $(z, k)\in Z$, *on a* $\omega_q^*(z^*)\geqslant \frac{1}{2}\omega(k)$;

(vi) *il existe une fonction* $\omega_1 : X_0\to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ *telle que, pour* $(z, k)\in Z$, *on ait* $\omega_1(z)\geqslant \frac{1}{2}\omega(k)$ *et* $\omega_1^*(z^*)\geqslant \frac{1}{2}\omega(k)$;

(vii) $\omega_q : X_0\to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ *est une semi-norme additive.*

Ces conditions entraînent que l'ensemble des $x\in X_0$ *tels que* $\omega_q(x)=\infty$ *est un sous-espace vectoriel de* $X^\perp$ (10.1.14).

La condition (v) n'est qu'une reformulation de (10.1.15) (i). Si (v) est satisfaite, il en est de même de (vi) (poser $\omega_1=\omega_q$). Réciproquement, si ω_1 est une fonction possédant les propriétés de (vi), on a $\omega_1\geqslant\omega_q$, d'où $\omega_1^*\leqslant\omega_q^*$ et, pour tout $(z, k)\in Z$,

$$\frac{1}{2}\omega(k)\leqslant\omega_1^*(z^*)\leqslant\omega_q^*(z^*).$$

Montrons que (ii) implique (vii). La fonction ω_q satisfaisant évidemment à la relation (1) de (10.1.20), il suffit d'établir (10.1.20) (2). Soient (z, k), $(z', k')\in Z$. Vu (ii), on a, quels que soient $x, x'\in K_{\sigma,\varepsilon}$,

$$\omega(f(z, z'))\geqslant \inf\{\omega(k+x), \omega(k'+x')\},$$

d'où

$$\begin{aligned}2\omega_q(z+z') &= \sup\{\omega(k+k'+f(z, z')+x) \mid x\in K_{\sigma,\varepsilon}\}\\ &\geqslant \sup\{\inf\{\omega(k+x), \omega(k'+x')\} \mid x, x'\in K_{\sigma,\varepsilon}\} = \inf\{2\omega_q(z), 2\omega_q(z')\}.\end{aligned}$$

Pour terminer, nous allons montrer que si la condition (ii) n'est pas remplie, ω_q n'est pas une semi-norme additive. L'ensemble $K_{\sigma,\varepsilon}$ n'est pas dense dans K, sinon on aurait $x^\sigma=-\varepsilon x$ pour tout $x\in K$, d'où $\sigma=\mathrm{id.}$ et $\varepsilon\neq 1$, ce qui impliquerait que $X_0=\{0\}$, et la condition (ii) serait satisfaite par défaut. Soient $\lambda\in K-\overline{K_{\sigma,\varepsilon}}$ et $A=\sup\{\omega(\lambda+x) \mid x\in K_{\sigma,\varepsilon}\}$. Vu (10.1.18) (iii), il existe $(z, k), (z_1, k_1)\in Z$ tels que $\omega(k)>A$ et $\omega(k_1)>A+2\omega(f(z, z_1))-2\omega(\lambda)$. Posons $\lambda_1=f(z, z_1)^{-1}.\lambda$, $z'=z_1.\lambda_1$ et $k'=\lambda_1^\sigma.k_1.\lambda_1$. On a alors $(z', k')\in Z$, $f(z, z')=\lambda$ et $\omega(k')>A$, d'où

$$\begin{aligned}\omega_q(z+z') &= \frac{1}{2}\sup\{\omega(\lambda+k+k'+x) \mid x\in K_{\sigma,\varepsilon}\}\\ &= \frac{1}{2}A<\inf\left\{\frac{1}{2}\omega(k), \frac{1}{2}\omega(k')\right\}\leqslant\inf\{\omega_q(z), \omega_q(z')\},\end{aligned}$$

en contradiction avec (vii). Enfin, la dernière assertion résulte de (10.1.15) (i), compte tenu de ce que $f(X_0, X_i)=\{0\}$ pour $i\neq 0$.

Remarques **(10.1.22).** — *a)* Soit $\omega_f : X_0\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ définie par

$$\omega_f(z)=\frac{1}{2}\omega(f(z, z)) \qquad (z\in X_0).$$

Vu (10.1.14) (3), on a toujours

(1) $$\omega_f \geqslant \omega_q.$$

b) Désignons par $Z(K)$ le centre de K. Supposons qu'il existe $\lambda \in Z(K)$ tel que $\lambda + \lambda^\sigma = 1$. Alors $\lambda f(z, z) \in q(z)$ pour tout $z \in X_0$ et on a

(2) $$\omega_q \geqslant \omega_f + \frac{1}{2}\omega(\lambda).$$

Si λ est entier (ce qui signifie, soit que la caractéristique résiduelle de K est différente de 2, soit que $Z(K)$ est une extension non ramifiée du corps des points fixes de σ dans $Z(K)$ et que l'extension résiduelle correspondante est séparable), (1) et (2) impliquent que $\omega_q = \omega_f$.

c) Supposons remplie l'une des conditions suivantes :

(I) $\dim X_0 = 1$;

(II) K est commutatif et $(\sigma, \operatorname{car} K) \neq (\mathrm{id.}, 2)$;

(III) $\varepsilon = 1$, K est une algèbre de quaternions de caractéristique différente de 2 et $\sigma(k) = \bar{k}$ (conjugué de k) pour $k \in K$.

Alors, il existe $c \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *tel que* $\omega_f = \omega_q + c$, *et la fonction* ω_f *est une semi-norme additive si et seulement si* ω_q *en est une.*

Dans le cas (I), c'est évident. Dans les autres cas, on peut supposer $\varepsilon = 1$, en vertu de (10.1.3); on observe alors que

(4) $$K_{\sigma,1} = \{k \mid k \in K,\ k + k^\sigma = 0\}$$

(d'où il résulte que, pour $x \in X$, $f(x, x) = 0$ implique $q(x) = 0$), et que

(5) $$f(z, z) \in Z(K) \quad \text{pour tout } z \in X_0,$$

de sorte que, pour $(z, k) \in Z - \{(0, 0)\}$, on a

$$\begin{aligned}\omega_q(z) - \omega_f(z) &= \frac{1}{2}\sup\{\omega(k+h) \mid h \in K_{\sigma,1}\} - \frac{1}{2}\omega(f(z, z))\\ &= \frac{1}{2}\sup\{\omega(k.f(z, z)^{-1} + h) \mid h \in K_{\sigma,1}\} = \frac{1}{2}\sup\{\omega(\ell) \mid \ell \in K, \ell + \ell^\sigma = 1\}.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que si $\varepsilon = 1$ et $X_0 \neq 0$, les relations (4) et (5), nécessaires au raisonnement précédent, entraînent que l'une des conditions (II) et (III) soit remplie.

d) Supposons que la condition (10.1.15) (ii) ne soit pas remplie et qu'il existe $z \in X_0$ tel que $f(z, z) \neq 0$. Pour un tel z, soit $k \in q(z)$ (d'où $k + \varepsilon k^\sigma \neq 0$) et soient $z_1, z_2 \in X_0$ tels que $\omega_f(z_1) > \frac{1}{2}\omega(k + \varepsilon k^\sigma) - \omega(k) + \omega(f(z_1, z_2))$ et $\omega_f(z_2) > \frac{1}{2}\omega(k + \varepsilon k^\sigma)$ (l'existence de tels z_i est assurée par (10.1.18) (iii)). Posons $z'_1 = z_1 . f(z_2, z_1)^{-1}.k$. Un simple calcul montre alors que $\omega_f(z'_1 + z_2) < \inf\{\omega_f(z'_1), \omega_f(z_2)\}$. On en conclut que :

Si la fonction $z \mapsto f(z, z)$ *ne s'annule pas identiquement sur* X_0 *et si* ω_f *est une semi-norme additive, les conditions équivalentes* (i) *à* (vii) *de* (10.1.15) *et* (10.1.21) *sont remplies.*

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant.

Soient C un corps local de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle 2, π une uniformisante de C, L une extension quadratique non ramifiée de C telle que l'extension résiduelle soit séparable, $\ell \mapsto \bar{\ell}$ le C-automorphisme d'ordre 2 de L, d un entier de L tel que $d+\bar{d}=1$ (il existe de tels entiers en vertu de l'hypothèse faite sur l'extension résiduelle de L/C), $K=L(j)$ l'algèbre de quaternions définie par les relations

$$j\ell j^{-1}=\bar{\ell} \quad \text{pour } \ell \in L,$$

et

$$j^2=\pi,$$

$\varepsilon=1$, $\sigma: K \to K$ l'involution $x+yj \mapsto \bar{x}+yj$ $(x, y \in L)$, X_0 l'espace vectoriel K^2 et f la forme hermitienne définie par les relations (10.1.1) (1) et

$$f(z, z)=\zeta_1^\sigma \zeta_1-\zeta_2^\sigma(1+\pi j)\zeta_2 \quad \text{pour } z=(\zeta_1, \zeta_2) \in X_0.$$

Posons $z_1=(\pi, 0)$ et $z_2=(d, d)$. On a

$$f(z_1, z_1)=\pi^2, \quad f(z_2, z_2)=-\bar{d}\pi jd, \quad f(z_1+z_2, z_1+z_2)=\pi+\pi^2-\bar{d}\pi jd,$$

d'où $\omega_f(z_1)=\omega(\pi)$, $\omega_f(z_2)=\frac{3}{4}\omega(\pi)$ et $\omega_f(z_1+z_2)=\frac{1}{2}\omega(\pi)$. Par conséquent, ω_f n'est pas une semi-norme additive. D'autre part, pour que la condition (iii) de (10.1.15) ne soit pas remplie, il faut que la fonction $z \mapsto f(z, z)$ possède un zéro non trivial dans X_0, c'est-à-dire qu'il existe $\zeta \in K$ tel que

$$1+\pi j=\zeta^\sigma \zeta. \tag{6}$$

Posons $\zeta=\xi+\eta j$ avec $\xi, \eta \in L$. La relation (6) est alors équivalente à l'ensemble des deux suivantes :

$$\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}\pi=1 \tag{7}$$

$$2\bar{\xi}\eta=\pi. \tag{8}$$

De (7), il résulte que ξ et η doivent être entiers. On déduit alors de (8) que si ζ existe, on doit avoir $\omega(\pi) \geqslant \omega(2)$. Choisissant C de telle façon que $\omega(\pi)<\omega(2)$, on obtient donc l'exemple annoncé.

(10.1.23) Nous verrons plus loin ((10.1.34), (10.1.36) et (10.1.37)) que, sous certaines conditions (par exemple lorsque $r \geqslant 2$), les valuations φ^ω décrites par le théorème (10.1.15) sont essentiellement (à équipollence près) les seules valuations de la donnée radicielle $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$. Entre temps, nous établirons quelques propriétés des valuations φ^ω en question.

Jusqu'au n° (10.1.33) inclus, ω désignera une valuation du corps K satisfaisant aux conditions (i) à (iv) du théorème (10.1.15), et $\varphi=\varphi^\omega$, la valuation correspondante de la donnée radicielle $(T, (U_a))$. Remarquons qu'un « changement de coordonnées » du type décrit en (10.1.3) a pour effet de remplacer φ par une valuation équipollente.

Proposition **(10.1.24).** — *La valuation* φ *est prolongeable.*

Si $r \neq 1$, cela résulte de (6.4.39) et (6.4.35). Supposons donc que $r = 1$. Soient $X_{\pm 2} = e_{\pm 2}.K$ deux espaces vectoriels à une dimension. Posons $X' = X_{-2} \oplus X \oplus X_2$ et soient f' et q' les formes obtenues en prolongeant f et q à $X' \times X'$ et X' de telle façon que les relations (10.1.1) (12) restent satisfaites. Soient Φ', $\widetilde{T}' = \widetilde{T}'(f', q')$, U'_a $(a \in \Phi')$ et φ'^{ω} définis de la même façon que Φ, $T(f, q)$, U_a, φ^{ω} mais en substituant X', f', q' à X, f, q. Alors, φ'^{ω} est, d'après ce qu'on vient de voir, une valuation prolongeable de la donnée radicielle $(T', (U'_a)_{a \in \Phi'})$; l'assertion de l'énoncé résulte de celle-ci par restriction.

(10.1.25) *Les* Γ_a. — Il résulte aisément des définitions de (6.2.2) que l'on a

$$\Gamma_{a_{ij}} = \Gamma'_{a_{ij}} = \omega(K^*)$$

$$\Gamma'_{a_i} = \frac{1}{2}\{\omega(k) \mid k \in \mathrm{pr}_2 Z,\ \omega(k) = \sup \omega(k + K_{\sigma,\varepsilon})\} \quad \text{si} \quad a_i \in \Phi$$

$$\Gamma_{2a_i} = \Gamma'_{2a_i} = \omega(K_{\sigma,\varepsilon} - \{0\}) \quad \text{si} \quad 2a_i \in \Phi.$$

En particulier, on voit que Γ'_{a_i} est vide lorsque $q|_{X_0}$ prend ses valeurs dans $\overline{K_{\sigma,\varepsilon}}/K_{\sigma,\varepsilon}$, et que si une des conditions (1), (2) ou (3) de (10.1.3) est remplie, la valuation φ est spéciale.

Si ω est *discrète* ou si $K_{\sigma,\varepsilon}$ est maximalement complet et si $a_i \in \Phi$, on a

$$\Gamma'_{a_i} = \omega_q(X_0) - \{\infty\}.$$

(10.1.26) *Échelonnage.* — Si ω est une valuation discrète, la discussion du n° (6.2.23) permet de déterminer l'échelonnage $\mathscr{E}$ associé à la valuation φ^{ω}. Nous allons voir, à l'aide d'exemples, que *chacun des échelonnages* B_r, C_r, D_r, $B\text{-}C_r$, $C\text{-}B_r$, $B\text{-}BC_r$ *et* $C\text{-}BC_r^J$ $(J = I, II, III, IV)$ *peut se présenter.*

Commençons par examiner le cas où K *est commutatif.* Nous supposons remplie l'une des conditions (1), (2), (3) de (10.1.3) et normalisons ω de telle façon que $\omega(K^*) = \mathbf{Z}$.

a) Considérons pour commencer le cas où $\sigma = \mathrm{id}$. Si Φ est de type C (resp. D), $\mathscr{E}$ est de type C_r (resp. D_r). Supposons Φ de type B; alors $\mathscr{E}$ est de type B_r si $\omega(q(X_0 - \{0\})) = 2\mathbf{Z}$ (par exemple si $\dim X_0 = 1$) et de type $C\text{-}B_r$ si $\omega(q(X_0 - \{0\})) = \mathbf{Z}$ (par exemple si $\dim X_0 = 2$ et si $q|_{X_0}$ est la forme quadratique $x^2 + \pi y^2$ où π est une uniformisante de K).

b) Supposons à présent que $\sigma \neq \mathrm{id}$. et soit L le corps des points fixes de σ. Comme on est dans le cas (1) de (10.1.3), on a $\varepsilon = -1$ et $1 \in K_{\sigma,\varepsilon}$, d'où $K_{\sigma,\varepsilon} = L$ ((10.1.1) (8)). Soit π une uniformisante de L.

b 1) Si $X_0 = \{0\}$, $\mathscr{E}$ est de type C_r ou $B\text{-}C_r$ selon que l'extension K/L est non ramifiée $(\omega(L^*) = \mathbf{Z})$ ou ramifiée $(\omega(L^*) = 2\mathbf{Z})$.

b 2) Supposons $X_0 \neq \{0\}$. Comme $K_{\sigma,\varepsilon} = L$ est fermé dans K, on a

$$\omega_q(X_0) - \{\infty\} = \mathbf{Z}, \quad (1/2)\mathbf{Z} \quad \text{ou} \quad (1/2) + \mathbf{Z}.$$

Si K/L est non ramifiée et si $\omega_q(X_0)-\{\infty\}=\mathbf{Z}$ ou $(1/2)+\mathbf{Z}$ (par exemple si $\dim X_0=1$), $\mathscr{E}$ est de type $C\text{-}BC_r^{IV}$.

Si K/L est non ramifiée et si $\omega_q(X_0)-\{\infty\}=(1/2)\mathbf{Z}$ (par exemple si $X_0=K^2$ et si $q((x,y))=t(xx^\sigma+\pi yy^\sigma)+L$, avec $t^\sigma=-t$ lorsque $\operatorname{car} K\neq 2$ et $t+t^\sigma=1$ lorsque $\operatorname{car} K=2$), $\mathscr{E}$ est de type $C\text{-}BC_r^{II}$.

Si K/L est ramifiée, on a nécessairement $\omega_q(X_0)-\{\infty\}=(1/2)+\mathbf{Z}$ et $\mathscr{E}$ est de type $C\text{-}BC_r^{III}$.

L'examen du cas commutatif est ainsi terminé et il nous reste à donner des exemples d'échelonnages des types $B\text{-}BC_r$ et $C\text{-}BC_r^{I}$. Soient K une algèbre de quaternions sur un corps local C(K) de caractéristique résiduelle différente de 2, σ l'involution $k\mapsto\bar{k}$, $\varepsilon=-1$, π une uniformisante de C(K) et $c, d\in K$ des quaternions purs (éléments anti-symétriques pour σ) tels que $\omega(c^2)=0$ et $d^2=\pi$ (de tels éléments existent par exemple toujours si C(K) est localement compact). Vu (10.1.22) *b)*, on a

$$\Gamma'_{a_i}=\omega_f(X_0)-\{\infty\}.$$

On voit donc que si $\dim X_0=2$ (resp. 1) et si $z\mapsto f(z,z)$ est la forme anti-hermitienne $\bar{x}cx+\bar{y}dy$ (resp. $\bar{x}cx$, resp. $\bar{x}dx$), l'échelonnage $\mathscr{E}$ est de type $C\text{-}BC_r^{I}$ (resp. $B\text{-}BC_r$, resp. $C\text{-}BC_r^{III}$).

(10.1.27) Pour $i,j\in[-r,+r]$, soient $\omega_i: X_i\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ et

$$\omega_{ij}:\operatorname{Hom}(X_j,X_i)\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$$

définies par

$$\omega_0=\omega_q,$$

$$\omega_i(e_ik)=\omega(k)\quad\text{pour}\quad i\in I\quad\text{et}\quad k\in K,$$

$$\omega_{ij}(\alpha)=\inf_{x\in X_j}(\omega_i(\alpha(x))-\omega_j(x))\qquad\text{pour}\qquad\alpha\in\operatorname{Hom}(X_j,X_i).$$

avec toujours la convention $\infty-\infty=\infty$.

Moyennant les identifications de certains $\operatorname{Hom}(X_i,X_j)$ avec K, X_0 ou X_0^* introduite au nº (10.1.1), on a pour $i,j\in I$, $\omega_{ij}=\omega$, $\omega_{0i}=\omega_q$ et $\omega_{i0}=\omega_q^*$. Il en résulte que seuls les ω_{i0} pour $i\in[-r,+r]$, peuvent prendre la valeur $-\infty$.

Si $h,i,j\in[-r,+r]$ et $\alpha\in\operatorname{Hom}(X_h,X_i)$, $\beta\in\operatorname{Hom}(X_i,X_j)$, et si $\omega_{ih}(\alpha),\omega_{ji}(\beta)\neq-\infty$, on a

$$\omega_{jh}(\beta\circ\alpha)\geqslant\omega_{ji}(\beta)+\omega_{ih}(\alpha).\tag{1}$$

Pour $g\in\operatorname{Hom}(X,X)$, nous posons encore

$$\bar{\omega}_{ij}(g)=\omega_{ij}(c_{ij}(g))$$

et

$$\bar{\omega}(g)=\inf_{i,j\in[-r,+r]}\{\bar{\omega}_{ij}(g)\}.$$

Il est clair que $\bar{\omega}:\operatorname{Hom}(X,X)\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}\cup\{-\infty\}$ est une semi-norme additive. Pour $g,g'\in\operatorname{Hom}(X,X)$, avec $\bar{\omega}(g),\bar{\omega}(g')\neq-\infty$, on a en vertu de (1),

$$\bar{\omega}(gg')\geqslant\bar{\omega}(g)+\bar{\omega}(g').\tag{2}$$

Dorénavant, et jusqu'au n° (10.1.33) inclus, nous *identifions l'espace affine* A *des valuations équipollentes à* φ *avec le dual* V *de* V^* (10.1.2) *de telle façon que la valuation* φ *coïncide avec le point* 0.

(10.1.28) *L'homomorphisme* ν.

Proposition. — Soient n un élément de $N = N^0.T$, $c = c(n)$ *son rapport de similitude et* ν *l'homomorphisme de* N *dans le groupe affine de* V *défini en* (6.2.10). *Alors* :

(i) *Pour tout* $i \in [-r, +r]$, *il existe un élément* $s(i)$ *de* $[-r, +r]$ *et un seul tel que* $c_{s(i),i}(n) \neq 0$. *On a* $s(0) = 0$ *et* $s(-i) = -s(i)$.

(ii) *On a*

$$\overline{\omega}_{s(i),i}(n) + \overline{\omega}_{s(-i),-i}(n) = \omega(c) \quad \textit{pour } i \in \mathrm{I}; \tag{1}$$

$$\overline{\omega}_{00}(n) = \frac{1}{2}\omega(c) \ \textit{si} \ \omega_q(X_0) \neq \{\infty\} \quad \textit{et} \quad \overline{\omega}_{00}(n) = \infty \ \textit{si} \ \omega_q(X_0) = \{\infty\}. \tag{2}$$

(iii) *Pour* $v \in V$ *et* $i \in I$, *on a* :

$$\begin{aligned} a_{s(i)}(\nu(n)(v)) &= a_i(v) + \overline{\omega}_{s(i),i}(n) - \frac{1}{2}\omega(c) \\ &= a_i(v) + \frac{1}{2}\omega(c) - \overline{\omega}_{s(-i),-i}(n). \end{aligned}$$

(i) est une conséquence immédiate de (10.1.7).

Si la relation (1) est vraie pour deux éléments de N, elle l'est aussi pour leur produit. Comme elle est manifestement vraie pour les $m_{ij}(k)$, les $m_i(z, k)$ et, en vertu de (10.1.5) (i), les éléments de T, elle l'est pour tout $n \in N$. La relation (2) est évidente.

Enfin, (iii) résulte d'un simple calcul, compte tenu de (ii).

(10.1.29) *Le groupe* H. — Notons $\mathrm{Is}_\omega(f, q)$ le groupe de toutes les (f, q)-similitudes de X dont le rapport c est une unité (i.e. tel que $\omega(c) = 0$).

Corollaire. — Pour $t \in T$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) $t \in H = \nu^{-1}(1)$;

(ii) $\overline{\omega}_{ii}(t)$ *ne dépend pas de* i, *pour* $i \in I$.

Si $G \subset \mathrm{Is}_\omega(f, q)$, *ces conditions sont encore équivalentes à :*

(iii) $\overline{\omega}_{ii}(t) = 0$ *pour tout* $i \in I$.

(10.1.30) *Les groupes* W *et* $\hat{W}$. — Supposons la valuation φ spéciale, ce qui n'est pas, on l'a vu (10.1.25), une restriction essentielle. D'après (6.2.19), chacun des groupes W et $\hat{W}$ est alors le produit semi-direct de son intersection avec V et du groupe de Weyl de Φ (considéré comme groupe de transformations linéaires de V). Soient v un élément de V et $v_i = a_i(v)$ ses coordonnées. Alors, il résulte encore de (6.2.19) que v (ou plus exactement la translation correspondante) appartient à W si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$v_i \in \omega(K^*) \quad \text{pour } i \in [1, r];$$

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \text{ appartient au groupe engendré par l'ensemble}$$

$$\{\omega(k) \mid (z, k) \in Z - \{(0, 0)\}\} \cup 2\omega(K^*).$$

D'autre part, $v \in \hat{\mathrm{W}}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathrm{T}$ tel que

$$v_i = a_i(\nu(t)) = \frac{1}{2}(\omega(c_{ii}(t)) - \omega(c_{-i,-i}(t))).$$

En particulier, on voit que

$$(1) \qquad 2(\hat{\mathrm{W}} \cap \mathrm{V}) \subset \mathrm{W} \cap \mathrm{V}.$$

(10.1.31) *Bornologie.*

Proposition. — Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties M *de* G *telles que* $\overline{\omega}(\mathrm{M})$ *et* $\{\omega(c(g)^{-1}) \mid g \in \mathrm{M}\}$ *soient bornés inférieurement. Alors $\mathscr{B}$ est une bornologie sur* G *compatible avec* φ (8.1.1). *En particulier,* $\overline{\omega}(g) \neq -\infty$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$. *La bornologie définie par* φ (8.1.7) *est la bornologie engendrée par* $\mathscr{B}.\mathrm{H}$. *Elle coïncide avec $\mathscr{B}$ si et seulement si* $\mathrm{G} \subset \mathrm{Is}_\omega(f, q)$ (10.1.29).

Il résulte de (10.1.27) (2) que $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \in \mathscr{B}$ entraîne $\mathrm{MM}' \in \mathscr{B}$. D'autre part, on vérifie aussitôt, compte tenu de (10.1.21) (v), que les $\mathrm{U}_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$ sont bornés pour $\mathscr{B}$. Vu (10.1.28), toute partie à un élément de N appartient à $\mathscr{B}$. Par conséquent, $\mathscr{B}$ induit sur N (resp. T) une bornologie $\mathscr{N}$ (resp. $\mathscr{C}$). Pour $t \in \mathrm{T}$ et $i \in \mathrm{I}$, on a $\overline{\omega}_{00}(t) \geqslant \frac{1}{2}\omega(c(t))$ ((10.1.28) (2)) et $c_{ii}(t^{-1}) = c(t)^{-1} c_{-i,-i}(t)^\sigma$ (10.1.5). On en déduit aisément que $\mathscr{C}$ est compatible avec la loi de groupe de T et, comme N/T est fini, $\mathscr{N}$ est compatible avec la loi de groupe de N. De plus, (10.1.28) (iii) montre que l'image par ν de toute partie bornée de N est bornée dans Isom A, c'est-à-dire que $\mathscr{N}$ satisfait à la condition (BNC 1) de (8.1.2). Par suite, $\mathscr{B}$ est faiblement compatible avec φ ((8.1.6) *a*)). Enfin, on a $\mathrm{H}_{[0]} \subset \mathrm{H} \cap \mathrm{G}^0 \in \mathscr{B}$ d'après (10.1.29). Ceci démontre la première assertion.

Supposons que $\mathrm{H} \in \mathscr{B}$; soient $t \in \mathrm{T}$ et $c = c(t)$. En vertu de (10.1.30) (1), il existe $t_0 \in \mathrm{T}^0$ (10.1.4) tel que $t^4 t_0^{-1} \in \mathrm{H}$. L'ensemble des puissances de $h = t^4 t_0^{-1}$ étant borné pour $\mathscr{B}$, on a, pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\overline{\omega}_{ii}(h) = 0$, d'où :

$$h \in \mathrm{Is}_\omega(f, q), \quad t \in \mathrm{Is}_\omega(f, q) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{T}.\mathrm{G}^0 \cap \mathrm{Is}_\omega(f, q).\mathrm{G}^0 = \mathrm{Is}_\omega(f, q).$$

Il résulte alors de la définition de $\mathscr{B}$ et de (10.1.28) que la bornologie induite par $\mathscr{B}$ sur N est l'image inverse par ν de la bornologie naturelle de Isom A; par conséquent, $\mathscr{B}$ est la bornologie $\mathscr{B}(\varphi)$ définie par φ.

Supposons à présent que $\mathrm{H} \in \mathscr{B}$. Vu (10.1.29), on a alors $\mathrm{G} \not\subset \mathrm{Is}_\omega(f, q)$. De plus, en vertu de (10.1.28), $\omega(c(\mathrm{H})) \neq \{0\}$ et il existe une partie bornée Y de $\mathbf{R}$ telle que $\mathrm{Y} + \omega(c(\mathrm{H})) = \mathbf{R}$. Soit L une partie quelconque de $\nu(\mathrm{T})$. Il existe $\mathrm{M} \subset \mathrm{T}$ tel que $\nu(\mathrm{M}) = \mathrm{L}$ et $\omega(c(\mathrm{M})) \subset \mathrm{Y}$. Si en outre L est bornée dans Isom A, il résulte de (10.1.28) que $\mathrm{M} \in \mathscr{B}$. Le corollaire (8.1.9) montre alors que $\mathscr{B}(\varphi)$ est engendrée par $\mathscr{B}.\mathrm{H}$, ce qui achève la démonstration.

(10.1.32) *Les groupes* $\hat{\mathrm{P}}_{x,\mathrm{E}}$.

Proposition. — Soient E *une facette vectorielle de* Φ *et* x *un point de* A. *Alors, un élément* g *de* G *appartient à* $\hat{\mathrm{P}}_{x,\mathrm{E}}$ ((7.1.8), (7.2.4)) *si et seulement si on a, pour* $i, j \in [-r, +r]$,

$$(1) \qquad \overline{\omega}_{ij}(g) - (1/2)\omega(c(g)) \geqslant a_i(x) - a_j(x)$$

et

(2) $\bar{\omega}_{ij}(g)-(1/2)\omega(c(g))>a_i(x)-a_j(x)$ *lorsque* $(a_i-a_j)(\mathrm{E})\subset\mathbf{R}_+^*$.

Il résulte immédiatement de (10.1.27) (1) que l'ensemble L des éléments $g\in\mathrm{G}$ qui satisfont aux relations (1) et (2) est stable par multiplication. D'autre part, il résulte de (10.1.28) (2), (10.1.29) et (10.1.5) (i) que $\mathrm{H}\subset\mathrm{L}$ et on vérifie aisément que, pour tout $a\in\Phi$, on a

$$\mathrm{U}_a\cap\mathrm{L}=\mathrm{U}_a\cap\mathrm{P}_{x,\mathrm{E}}.$$

Vu (7.2.6), on a donc $\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}\subset\mathrm{L}$ pour toute chambre vectorielle D dont l'adhérence contient E et, vu (7.3.4), on a

$$\mathrm{L}=\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.(\mathrm{L}\cap\mathrm{N}).\mathrm{B}_{x,\mathrm{D}}.$$

Il nous suffit donc de montrer que $\mathrm{L}\cap\mathrm{N}=\hat{\mathrm{N}}_{x,\mathrm{E}}$. Soit donc $n\in\mathrm{N}\cap\mathrm{L}$ et soit $i\in\mathrm{I}$. On a, avec les notations de (10.1.28)

(3) $\bar{\omega}_{s(i),i}(n)-(1/2)\omega(c(n))\geqslant a_{s(i)}(x)-a_i(x)$

(4) $\bar{\omega}_{s(-i),-i}(n)-(1/2)\omega(c(n))\geqslant a_{-s(i)}(x)-a_{-i}(x)$.

Puisque $s(-i)=-s(i)$ (10.1.28) et que $a_{-j}=-a_j$ pour tout j, on en déduit que

(5) $\bar{\omega}_{s(i),i}(n)-(1/2)\omega(c(n))=a_{s(i)}(x)-a_i(x)$

pour tout $i\in\mathrm{I}$, c'est-à-dire, d'après (10.1.28) (iii), que

$$\nu(n)(x)=x$$

ou encore $n\in\hat{\mathrm{N}}_x$. De plus, chacune des inégalités (3) et (4) est une égalité, et on a, d'après (2),

(6) $(a_{s(i)}-a_i)(\mathrm{E})=\{0\}$

d'où, d'après (10.2.28) (iii) et (5), $n\in\hat{\mathrm{N}}_{x,\mathrm{E}}$. Réciproquement, si $n\in\hat{\mathrm{N}}_{x,\mathrm{E}}$, les relations (3) à (6) sont satisfaites, ce qui montre que n satisfait à (1) et (2) lorsque $i=s(j)$, avec $j\in\mathrm{I}$. Lorsque $i\neq s(j)$, on a $\bar{\omega}_{ij}(n)=+\infty$ et lorsque $i=j=0$, on a $\bar{\omega}_{00}(n)=(1/2)\omega(c(n))$ ou ∞ ((10.1.28) (2)). Ainsi n appartient bien à L, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(10.1.33)**. — *Soit* Ω *une partie convexe de* A. *Alors, pour qu'un élément* g *de* G *appartienne à* $\hat{\mathrm{P}}_\Omega$, *il faut et il suffit qu'on ait, pour* $i,j\in[-r,+r]$,

$$\bar{\omega}_{ij}(g)\geqslant\sup\{a_i(x)-a_j(x)\mid x\in\Omega\}+(1/2)\omega(c(g)).$$

Proposition **(10.1.34)**. — *Supposons* $r\geqslant 2$ *et soit* A *une classe d'équipollence de valuations de la donnée radicielle* $(\mathrm{T},(\mathrm{U}_a)_{a\in\Phi})$. *Alors, il existe une fonction* $\omega:\mathrm{K}\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ *et une seule telle que* φ^ω (*défini comme en* (10.1.13)) *appartienne à* A. *Cette fonction est une valuation de* K, *invariante par* σ.

Le groupe N'_1 défini en (10.1.7) (ii) opère sur A par l'intermédiaire de la représentation ν (6.2.10). En vertu de (6.2.10) (ii),

(∗) un point φ de A est invariant par N'_1 si et seulement si $\varphi_{a_{ij}}(u_{ij}(1))=0$ pour $i, j\in \mathrm{I}$, $j\neq \pm i$.

Dorénavant, nous noterons φ le point fixe de N'_1 dans A : ce point existe parce que N'_1 est fini, et il est unique en vertu de (∗) (ou de (10.1.7) (ii), si l'on préfère). Si $\omega : \mathrm{K}\to \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ est une fonction telle que $\varphi^\omega\in \mathrm{A}$, on a $\omega(-k)=\omega(k)$, vu (6.2.1) (V 1) et (10.1.11) (5), donc $\omega(1)=0$, en vertu de (6.2.1) (V 5) et (10.1.11) (6); compte tenu de (∗), ceci implique que $\varphi^\omega=\varphi$. Comme la fonction ω est entièrement déterminée par φ^ω, vu (10.1.13) (3), son unicité est ainsi établie. Il nous reste donc seulement à montrer l'existence d'une valuation ω de K invariante par σ telle que $\varphi^\omega=\varphi$.

Pour $i, j\in\mathrm{I}$ tels que $j\neq\pm i$ et $k\in\mathrm{K}$, posons

$$\Psi_{ij}(k)=\varphi_{a_{ij}}(u_{ij}(k)).$$

Il résulte de (∗) que

$$(1) \qquad \Psi_{ij}(1)=0.$$

Considérons le groupe G_{ij} engendré par $U_{a_{ij}}$ et $U_{-a_{ij}}$. Faisant opérer ce groupe sur $X_{-i}+X_j$, on obtient un homomorphisme $G_{ij}\to SL_2(\mathrm{K})$ tel que

$$u_{ij}(k)\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\varepsilon(i)k & 1\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad u_{-j,-i}(k)\mapsto\begin{pmatrix}1 & -\varepsilon(-j)k\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

D'après l'application du n° (6.2.12) *b)*, il existe donc une valuation de K dont les fonctions Ψ_{ij} et $\Psi_{-i,-j}$ ne diffèrent que par une constante. Vu (1), ceci signifie que Ψ_{ij} *est une valuation* de K et que

$$(2) \qquad \Psi_{ij}=\Psi_{-j,-i}.$$

Si $r\geqslant 3$, et si $h, i, j\in\mathrm{I}$ ont des valeurs absolues distinctes, il résulte de (6.2.9) et de (10.1.11) (12) que

$$(3) \qquad \Psi_{ih}=\Psi_{-h,j}=\Psi_{ij}.$$

Si $r=2$, on a $\mathrm{Z}\neq\{(0,0)\}$ d'après la convention faite à la fin du n° (10.1.1), et il résulte de (6.2.9) et (10.1.11) (10) que les fonctions $\Psi_{-i,j}$ et Ψ_{ij} ne diffèrent que par une constante, donc, vu (1), que

$$(4) \qquad \Psi_{-i,j}=\Psi_{ij}.$$

Il résulte des relations (2), (3), (4) que la valuation Ψ_{ij} ne dépend pas du couple (i, j), et de (10.1.11) (7) qu'elle est invariante par σ. Posons $\omega=\Psi_{ij}$. En vertu de (6.2.9) et (10.1.11) (10), on a, pour $(z, k)\in\mathrm{Z}$,

$$\varphi_{-a_i}(u_{-i}(z,k))=\frac{1}{2}\omega(k) \quad \text{si} \quad a_i\in\Phi$$

et

$$\varphi_{-2a_i}(u_{-i}(0,k))=\omega(k) \quad \text{si} \quad 2a_i\in\Phi,$$

de sorte que $\varphi=\varphi^\omega$, ce qui achève la démonstration.

Lemme **(10.1.35).** — *Supposons* $r=1$ *et* $(\sigma, \varepsilon, \dim X_0) \neq (\text{id.}, 1, 2)$. *Soit* φ *une valuation de la donnée radicielle* $(T, (U_a))$ *et soit* $s \in \{1, 2\}$ *tel que* $sa_1 \in \Phi$. *Alors* $\frac{1}{s}\varphi_{sa_1}(u_1(z, k))$ *dépend seulement de* k.

Supposons d'abord que $(\sigma, \varepsilon) = (\text{id.}, 1)$ et soient $(z, k), (z', k) \in Z$. Si z et z' sont proportionnels, on a $z' = \pm z$, d'où $u_1(z', k) = u_1(z, k)^{\pm 1}$ et

$$\varphi_{a_1}(u_1(z', k)) = \varphi_{a_1}(u_1(z, k)), \tag{1}$$

vu (6.2.1) (V 1). Si z et z' ne sont pas proportionnels, on a $\dim X_0 > 2$ par hypothèse, et il existe $z'' \in X_0 - \{0\}$ tel que $f(z, z'') = f(z', z'') = 0$. Posons $k'' = q(z'')$. Un simple calcul montre alors que

$$m_1(z, k) . u_1(z'', k'') . m_1(z, k)^{-1} = u_{-1}(-z''.k^{-1}, k''.k^{-2}) = m_1(z', k) . u_1(z'', k'') . m_1(z', k)^{-1},$$

d'où $\nu(m_1(z, k)) = \nu(m_1(z', k))$. La relation (1) s'ensuit à nouveau, vu (6.2.10) (ii).

Soit à présent $(\sigma, \varepsilon) \neq (\text{id.}, 1)$. Pour $(z, k), (0, k') \in Z - \{(0, 0)\}$, on a alors

$$m_1(z, k) . u_1(0, k') . m_1(z, k)^{-1} = u_{-1}(0, (k^\sigma)^{-1} k' k^{-1}),$$

d'où, en vertu de (6.2.10) (ii), et supposant que $z = 0$ si $s = 2$,

$$\frac{1}{s}\varphi_{sa_1}(u_1(z, k)) = \frac{1}{4}(\varphi_{2a_1}(u_1(0, k')) - \varphi_{-2a_1}(u_{-1}(0, (k^\sigma)^{-1} k' k^{-1}))).$$

Notre assertion s'ensuit aussitôt.

Proposition **(10.1.36).** — *Soit* $r=1$. *Supposons remplie l'une des conditions* (1), (2) *de* (10.1.3). *Posons*

$$K_0 = \bigcup_{z \in X_0} q(z) = \{k \mid k \in K, (z, k) \in Z\},$$

$$K_1^* = c_{11}(T \cap \operatorname{Is}(f, q)) \quad et \quad K_1 = K_1^* \cup \{0\}.$$

(i) *On a* $K_0 \subset K_1$. *Si* $(\sigma, \varepsilon) \neq (\text{id.}, 1)$, K_1 *contient les éléments invariants du centre* $Z(K)$ *de* K. *Si* $(\sigma, \varepsilon) = (\text{id.}, 1)$, K_1 *contient les éléments de la forme* $x^\sigma x = x^2$, *pour* $x \in K$. *Si* $G \supset \operatorname{Is}(f, q)$, *alors* $K_1 = K$.

(ii) *Supposons* $(\sigma, \varepsilon, \dim X_0) \neq (\text{id.}, 1, 2)$ *et soit* A *une classe d'équipollence de valuations de la donnée radicielle* $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$. *Alors, il existe une fonction* $\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *et une seule telle que*

$$\omega(x^\sigma x) = 2\omega(x) \quad \textit{pour tout } x \in K \tag{1}$$

et telle que $\varphi^\omega \in A$. *La valuation* φ^ω *est spéciale.*

(iii) *Soit* $\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ *une fonction satisfaisant à la relation* (1). *Alors, pour que* φ^ω *soit une valuation de la donnée radicielle* $(T, (U_a))$, *il faut et il suffit qu'on ait, pour* $(z, k), (z', k') \in Z$ *et* $t \in T$,

$$\omega^{-1}(\infty) = \{0\}, \tag{2}$$

$$\omega(k + k' + f(z, z')) \geqslant \inf(\omega(k), \omega(k')), \tag{3}$$

$$\omega(f(z, z') - f(z', z)) \geqslant \omega(k) + \omega(k') \tag{4}$$

et

(5) $$\omega(c_{-1,-1}(t).k.c_{11}(t^{-1})) = \omega(k) + \omega(c_{-1,-1}(t).c_{11}(t^{-1})).$$

Sous ces conditions,

(5′) $$\omega|_{K_1^*} : K_1^* \to \mathbf{R} \quad \textit{est un homomorphisme.}$$

(iv) *Si* $G \subset Is(f, q)$ *ou* $G \supset Is(f, q)$, (5′) *implique* (5).

Soient e_0 et N′ comme en (10.1.7) (iii). La première assertion de (i) résulte du fait que K_1^* est un groupe et qu'on a, pour $(z, k) \in Z$

$$c_{11}(m_1(e_0, 1).m_1(z, k)) = \varepsilon k.$$

Si $(\sigma, \varepsilon) \neq (\mathrm{id.}, 1)$ et si λ est un élément invariant de Z(K), alors $1 \in K_{\sigma,\varepsilon}$, donc $\varepsilon\lambda \in \varepsilon\lambda K_{\sigma,\varepsilon} = K_{\sigma,\varepsilon}$ et on a

$$c_{11}(m_1(0, 1).m_1(0, \varepsilon\lambda)) = \lambda.$$

Si $(\sigma, \varepsilon) = (\mathrm{id.}, 1)$ et $x \in K$, on a

$$c_{11}(m_1(e_0, 1).m_1(e_0.x, x^2)) = x^2.$$

Enfin, la dernière assertion de (i) se déduit immédiatement de (10.1.5) (i).

Soient A une classe d'équipollence de valuations de (T, (U_a)), et φ le point fixe de $\nu(N')$ dans A. Supposons qu'il existe une fonction $\Psi : K_0 \to \mathbf{R}$ (alors évidemment unique) telle que

(6) $$\frac{1}{s}\varphi_{sa_1}(u_1(z, k)) = \Psi(k)$$

pour $(z, k) \in Z$, $s \in \{1, 2\}$, $sa_1 \in \Phi$ et $z = 0$ si $s = 2$. Vu le lemme précédent, cette hypothèse est certainement satisfaite si $(\sigma, \varepsilon, \dim X_0) \neq (\mathrm{id.}, 1, 2)$. En raison de l'invariance de φ par $\nu(N')$, la relation (6) reste vraie pour $s \in \{-1, -2\}$, et on a

(7) $$\Psi(1) = 0.$$

De (6.2.1) (V 1) et (10.1.11) (2), il résulte que

(8) $$\Psi(\varepsilon k^\sigma) = \Psi(k) \qquad (k \in K_0).$$

Pour $t \in T$, posons

$$\tau(t) = a_1(\nu(t)).$$

Pour $(z, k) \in Z$ et $t \in T$, on a

$$t^{-1}u_1(z, k)t = u_1(\ldots, c_{-1,-1}(t^{-1}).k.c_{11}(t))$$

d'où

(9) $$\Psi(c_{-1,-1}(t^{-1}).k.c_{11}(t)) = \Psi(k) + \tau(t)$$

et en particulier, faisant $k = 1$,

(10) $$\tau(t) = \Psi(c_{-1,-1}(t^{-1}).c_{11}(t)).$$

Pour $k' \in K_1$, on a, en vertu de (9) et (10),

$$\Psi(k'^{\sigma}.k.k') = \Psi(k) + \Psi(k'^{\sigma}.k'). \tag{11}$$

Définissons la fonction $\omega : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ par

$$\omega(k'') = \frac{1}{2}\Psi(k''^{\sigma}.k'') \qquad (k'' \in K).$$

Posant $k = k''^{\sigma}.k''$ dans (11), il vient

$$\omega(k''k') = \omega(k'') + \omega(k') \qquad (k' \in K_1;\ k'' \in K). \tag{12}$$

De (6.2.1) (V 5) et (10.1.11) (3), il résulte que, pour $k \in K_0$,

$$\Psi(\varepsilon k^{-1}) = -\Psi(k). \tag{13}$$

Pour $k' \in K_0$ et $k = \varepsilon k'^{-1}$, la relation (11) peut s'écrire

$$\Psi(\varepsilon k'^{\sigma}) = \Psi(\varepsilon k'^{-1}) + 2\omega(k'),$$

ou encore, compte tenu de (8) et (13), $\Psi(k') = \omega(k')$. On a donc $\Psi = \omega|_{K_0}$ et, vu (6), $\varphi = \varphi^{\omega}$. La fonction ω satisfait aux relations (3) et (4) en vertu des axiomes (V 1) et (V 3) des valuations de données radicielles, à la relation (5) en vertu de (9) et (10) et à (5') en vertu de (12). La valuation φ^{ω} est spéciale en vertu de (7). Si $\omega' : K \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ est une fonction telle que $\varphi^{\omega'} \in A$, on montre comme en (10.1.34) que $\varphi^{\omega'} = \varphi$; si de plus ω' satisfait à la relation (1), on doit avoir $\omega' = \omega$, puisque $\{k^{\sigma}k \mid k \in K\} \subset K_0$. Ainsi sont établies (ii) et l'assertion « il faut » de (iii). La réciproque « il suffit » résulte d'une simple vérification.

Comme T est normalisé par $m_1(e_0, 1)$, on a $c_{-1,-1}(T) = c_{11}(T)$. Si $\mathrm{Is}(f, q) \subset$ ou $\supset G$, on a $c_{11}(T) = K_1^*$, d'où l'implication $(5') \Rightarrow (5)$.

La proposition est démontrée.

Corollaire **(10.1.37)**. — *Gardons les hypothèses de* (10.1.36) (ii). *Alors* ω *est une valuation de* K *invariante par* σ *dans chacun des cas suivants* :

(i) K *est commutatif et* $X_0 \neq \{0\}$;

(ii) K *est un corps de quaternions,* $k^{\sigma} = \mathrm{Tr}\, k - k$ *pour tout* $k \in K$ *et* $X_0 \neq \{0\}$;

(iii) $K = K_0 . K_{\sigma,\varepsilon}$.

Supposons tout d'abord (iii) satisfaite. Pour $(z, k) \in Z$ avec $k \neq 0$ et pour $k' \in K_{\sigma,\varepsilon}$, on a

$$c_{11}(m_1(zk^{-1}, (k^{\sigma})^{-1}).m_1(0, \varepsilon k')) = kk'$$

d'où $K_1 = K$ et la restriction de ω à K^* est un homomorphisme. De plus, en prenant $z' = 0$ dans la relation (3) de (10.1.36), on voit que

$$\omega(k + k') \geqslant \inf(\omega(k), \omega(k'))$$

quels que soient $k, k' \in K$, et ω est une valuation de K.

Supposons maintenant K commutatif et $X_0 \neq \{0\}$. Si $(\sigma, \varepsilon) \neq (\mathrm{id.}, 1)$, on a $\sigma \neq \mathrm{id.}$ (sinon f serait alternée et $X_0 = \{0\}$). Vu nos conventions ((10.1.3) (1)), on a $\varepsilon = -1$

et $K_{\sigma,\varepsilon}=\{t\in K \mid t^{\sigma}=t\}$ ((10.1.1) (8)). Comme q n'est pas nulle sur X_0, on a $K_0\not\subset K_{\sigma,\varepsilon}$. Par suite, $K=K_0.K_{\sigma,\varepsilon}+K_{\sigma,\varepsilon}=K_0.K_{\sigma,\varepsilon}$ et ω est une valuation d'après ce qui précède. Si $(\sigma,\varepsilon)=(\mathrm{id.},1)$, on voit aussitôt que ω est une valuation en appliquant (1) et (3) avec $z=e_0.x$ et $z'=e_0.y$. Ceci achève de démontrer notre assertion dans le cas (i).

Enfin, dans le cas (ii), on peut supposer $\dim X_0=1$. On utilise alors l'isomorphisme bien connu entre un groupe antihermitien quaternionique à trois variables et un groupe hermitien à quatre variables sur un corps commutatif; on est ainsi ramené au cas (ii).

Remarques **(10.1.38).** — *a)* La conclusion de (10.1.36) (ii) n'est en général pas vraie lorsque $(\sigma,\varepsilon,\dim X_0)=(\mathrm{id.},1,2)$. Supposons en effet, pour fixer les idées, que $G=G^0$ (10.1.4) et que la forme bilinéaire f soit non dégénérée, et soit L l'extension quadratique de K déployant cette forme (c'est-à-dire sur laquelle $q|_{X_0}$ acquiert des zéros non triviaux). Alors, il existe un isomorphisme de G sur $PSL_2(L)$ qui applique la donnée radicielle $(T,(U_a))$ sur la donnée radicielle « naturelle » de $PSL_2(L)$. Par conséquent, les classes d'équipollence A de valuations de $(T,(U_a))$ sont en correspondance biunivoque naturelle avec les valuations non impropres ω_1 de L (d'après (6.2.12) *b)*) et A ne satisfait à la conclusion de (10.1.36) (ii) que si ω_1 est invariante par l'automorphisme d'ordre 2 de L fixant K.

b) Reprenons les hypothèses de (10.1.36) (ii). Supposons K commutatif et $X_0=\{0\}$. Si $\sigma=\mathrm{id.}$, on a $\varepsilon\neq 1$ d'après nos conventions (10.1.1) et le groupe G^0 muni de sa donnée radicielle est isomorphe à $SL_2(K)$. On déduit alors de (6.2.12) *b)* que ω est une valuation de K.

Par contre, si $\sigma\neq\mathrm{id.}$, le groupe G^0 muni de sa donnée radicielle est isomorphe à $SL_2(L)$, où L est le corps des invariants de σ. La restriction ω_1 de ω à L est une valuation de L, qui peut être choisie arbitrairement ((6.2.12) *b)*) et ω n'est une valuation de K que si ω_1 se prolonge de manière unique en une valuation de K ((10.1.36) (i)).

Nous ne connaissons pas d'exemple où $X_0\neq\{0\}$ et où ω ne soit pas une valuation de K.

10.2. Les groupes $GL_n(K)$ et $SL_n(K)$.

(10.2.1) Soit K un corps, non nécessairement commutatif, et soit X un espace vectoriel à droite de dimension finie $\geqslant 2$ sur K, muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r+1}$. Si g est un endomorphisme de X, nous désignerons par $(g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r+1}$ la matrice de g par rapport à cette base. Pour $1\leqslant i,j\leqslant r+1$ et $i\neq j$, soit ζ_{ij} l'application qui, à la matrice $m=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(K)$, fait correspondre l'endomorphisme $\zeta_{ij}(m)$ de X défini par

$$\begin{cases} \zeta_{ij}(m).e_i=e_i.a+e_j.c \\ \zeta_{ij}(m).e_j=e_i.b+e_j.d \\ \zeta_{ij}(m).e_h=e_h \quad \text{pour } h\neq i,j. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathrm{K}$, on pose

$$u_{ij}(k) = \zeta_{ij}\left(\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \zeta_{ji}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$$

et pour $k \in \mathrm{K}^*$, on pose

$$m_{ij}(k) = \zeta_{ij}\left(\begin{pmatrix} 0 & k \\ -k^{-1} & 0 \end{pmatrix}\right) = m_{ji}(-k^{-1}).$$

D'autre part, considérons l'espace $\mathbf{R}^{r+1}$ muni de la norme euclidienne usuelle, et notons $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant r+1}$ sa base canonique. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$ et $i \neq j$, posons $a_{ij} = a_j - a_i$. Il est bien connu que l'ensemble Φ des a_{ij} est un système de racines irréductible de type A_r dans l'espace vectoriel V^* qu'ils engendrent ([5], chap. VI, p. 251).

Pour $a_{ij} \in \Phi$, posons

$$\mathrm{U}_{a_{ij}} = \{u_{ij}(k) \mid k \in \mathrm{K}\}$$
$$\mathrm{M}^0_{a_{ij}} = \{m_{ij}(k) \mid k \in \mathrm{K}^*\}.$$

Il est évident que l'application $k \mapsto u_{ij}(k)$ est un homomorphisme injectif de K dans End(X) et que le sous-groupe $\mathrm{U}_{a_{ij}}$ de GL(X) est l'ensemble des éléments de End(X) de la forme $1 + n$, avec $n(e_h) = 0$ pour $h \neq j$ et $n(e_j) \in e_i.\mathrm{K}$.

Proposition (**10.2.2**). — *Soit* G *un sous-groupe de* GL(X) *contenant les sous-groupes* $\mathrm{U}_{a_{ij}}$ *pour* $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$ *et* $i \neq j$, *et soit* T *le sous-groupe formé des éléments de* G *dont la matrice par rapport à la base* (e_i) *est diagonale. Posons* $\mathrm{M}_{a_{ij}} = \mathrm{T}.\mathrm{M}^0_{a_{ij}}$. *Alors* $(\mathrm{T}, (\mathrm{U}_{a_{ij}}, \mathrm{M}_{a_{ij}})_{a_{ij} \in \Phi})$ *est une donnée radicielle de type* Φ *génératrice dans* G.

Que les conditions (DR 1) et (DR 3) de (6.1.1) soient satisfaites est évident. La condition (DR 2) résulte d'un simple calcul : pour $1 \leqslant i, j, h, \ell \leqslant r+1$, tels que $i \neq j$ et $h \neq \ell$, et $x, y \in \mathrm{K}$, on a

$$(1) \qquad (u_{ij}(x), u_{hl}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq \ell \text{ et } h \neq j \\ u_{il}(xy) & \text{si } i \neq \ell \text{ et } h = j \\ u_{hj}(-xy) & \text{si } i = \ell \text{ et } h \neq j \end{cases}$$

(rappelons que pour $i = \ell$ et $h = j$, la condition (DR 2) où l'on prend $a = a_{ij}$ et $b = a_{hl} = -a_{ij}$, est automatiquement satisfaite).

La condition (DR 4) résulte de (6.1.3) *a)*. D'autre part, pour tout $k \in \mathrm{K}$, l'opérateur $m_{ij}(k)$ échange les droites $e_i.\mathrm{K}$ et $e_j.\mathrm{K}$ et laisse fixes les droites $e_h.\mathrm{K}$ pour $h \neq i, j$. De la caractérisation donnée plus haut des sous-groupes $\mathrm{U}_{a_{hl}}$ résulte alors aussitôt que

$$m_{ij}(k)\mathrm{U}_{a_{hl}} m_{ij}(k)^{-1} = \mathrm{U}_{a_{\tau(h)\tau(l)}}$$

où τ est la transposition de i et j. Comme l'on a

$$r_{a_{ij}}(a_{hl}) = a_{\tau(h)\tau(l)}$$

et que l'automorphisme intérieur défini par un élément de T laisse invariants les $\mathrm{U}_{a_{hl}}$, on en déduit que (DR 5) est satisfaite.

Enfin, prenons comme système de racines positives Φ^+ l'ensemble des a_{ij} pour $i<j$; les matrices des éléments du groupe U^+ (resp. U^-) engendré par les U_a pour $a\in\Phi^+$ (resp. Φ^-) sont alors triangulaires supérieures (resp. inférieures) et leurs coefficients diagonaux sont égaux à 1, d'où (DR 6).

Par suite, $(T, (U_a, M_a)_{a\in\Phi})$ est bien une donnée radicielle dans G. Il s'ensuit que le sous-groupe G^0 engendré par les U_a pour $a\in\Phi$ est distingué dans G, et (faisant $G=GL(X)$) dans GL(X). *Ce sous-groupe n'est donc autre que le sous-groupe* SL(X) engendré par toutes les transvections de X (ou encore noyau du déterminant de Dieudonné) [21]. Comme $GL(X)=\widetilde{T}.SL(X)$, où $\widetilde{T}$ est le groupe des éléments de GL(X) dont la matrice par rapport à la base (e_i) est diagonale, on voit que la donnée radicielle $(T, (U_a))$ est bien génératrice. Notons que ceci montre également que G peut être n'importe quel sous-groupe de GL(X) contenant SL(X).

(10.2.3) Soit ω une valuation non impropre de K. Pour $1\leqslant i,j\leqslant r+1$ et $i\neq j$, et pour $k\in K$, posons

$$\varphi^\omega_{a_{ij}}(u_{ij}(k))=\omega(k).$$

Proposition. — La famille $\varphi^\omega=(\varphi^\omega_a)_{a\in\Phi}$ *est une valuation spéciale de la donnée radicielle* $(T, (U_a)_{a\in\Phi})$.

Les conditions (V 0), (V 1) et (V 4) sont immédiates à vérifier. La condition (V 3) résulte aussitôt des formules (1) de (10.2.2). La condition (V 5) et la condition (V 2) pour $m\in M^0_a$ résultent de (6.2.3) *a)*, en utilisant les homomorphismes $\zeta_{ij} : SL_2(K)\to G$. Il ne reste donc qu'à vérifier (V 2) pour $t\in T$. Or, on a

$$tu_{ij}(k)t^{-1}=u_{ij}(t_{ii}kt_{jj}^{-1}) \tag{1}$$

d'où $\varphi^\omega_{a_{ij}}(tut^{-1})=\varphi^\omega_{a_{ij}}(u)+\omega(t_{ii})-\omega(t_{jj})$ pour tout $u\in K$, ce qui achève la démonstration, compte tenu de ce que $\varphi^\omega_{a_{ij}}(u_{ij}(1))=0$.

(10.2.4) On démontre comme en (10.1.24) que la valuation φ^ω est *prolongeable.* D'autre part, on a $\Gamma_{a_{ij}}=\Gamma'_{a_{ij}}=\omega(K^*)$ pour tout $a_{ij}\in\Phi$ et lorsque ω est discrète, l'échelonnage $\mathscr{E}$ associé à φ^ω est de type A_r.

Proposition **(10.2.5)**. — (i) *Le groupe* N *est le sous-groupe de* G *formé des éléments dont la matrice* (n_{ij}) *est monomiale et il existe un homomorphisme surjectif* s *de* N *sur le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_{r+1}$ *tel que les seuls coefficients non nuls de la matrice d'un élément* $n\in N$ *soient les coefficients* $n_{s(n)(i),i}$.

(ii) *Soit* A *l'espace affine sous le dual* V *de* V* *des valuations équipollentes à* φ^ω *et soit* ν *l'homomorphisme de* N *dans le groupe affine de* A *défini en* (6.2.10). *Identifions* A *et* V *en prenant* φ^ω *comme origine. Soit* $n\in N$ *et* $\sigma=s(n)$. *Pour* $x\in A$ *et* $1\leqslant i,j\leqslant r+1$, *on a*

$$(a_{\sigma(i)\sigma(j)})(\nu(n).x)=(a_{ij})(x)+\omega(n_{\sigma(j),j})-\omega(n_{\sigma(i),i}).$$

(iii) *Le sous-groupe* $H=\operatorname{Ker}\nu$ *de* N *est le sous-groupe des* $t\in T$ *tels que* $\omega(t_{ii})$ *soit indépendant de* i *pour* $1\leqslant i\leqslant r+1$.

Comme N est engendré par T et les $m_{ij}(k)$, l'assertion (i) résulte aussitôt de la forme des $m_{ij}(k)$: la permutation $s(m_{ij}(k))$ est la transposition de i et j. L'assertion (ii) résulte d'un simple calcul, compte tenu de (10.2.3) (1), et (iii) en est une conséquence immédiate.

(10.2.6) Soit $\mathbf{W}$ le groupe de Weyl affine de Φ, opérant dans A identifié au dual V de V^* par le choix de φ^{ω} comme origine, et soit $\widetilde{\mathbf{W}}$ le normalisateur de $\mathbf{W}$ dans le groupe affine de A (cf. (1.3.18)). Compte tenu de (6.2.19), on vérifie aisément que le groupe $W \cap V$ des translations contenues dans $W = \nu(N \cap G^0)$ est $(\mathbf{W} \cap V) \otimes \omega(K^*)$. Si l'on identifie V et V^* grâce au produit scalaire induit par celui de $\mathbf{R}^{r+1}$, on voit alors que $W \cap V$ est la restriction à V^* du groupe des translations de la forme $\sum_i \gamma_i a_i$ avec $\gamma_i \in \omega(K^*)$ et $\sum_i \gamma_i = 0$.

Si $G = GL(X)$, on tire de (10.2.5) (ii) que le groupe des translations de $\hat{W} = \nu(N)$ s'identifie par la même méthode à $(\widetilde{\mathbf{W}} \cap V) \otimes \omega(K^*)$, ou encore aux restrictions à V^* des translations de la forme $\sum_i (\gamma_i - (r+1)^{-1} \sum_j \gamma_j) a_i$ avec $\gamma_i \in \omega(K^*)$. On en déduit que, quel que soit G (avec $SL(X) \subset G \subset GL(X)$), on a

(1) $$(r+1)(\hat{W} \cap V) \subset W \cap V.$$

(10.2.7) Soit C le groupe des commutateurs de K^* et soit

$$\det : GL(X) \to K^*/C$$

le déterminant de Dieudonné [21]. Comme $\omega(C) = \{0\}$, l'homomorphisme $\omega : K^* \to \mathbf{R}$ définit par passage au quotient un homomorphisme $\omega' : K^*/C \to \mathbf{R}$. On pose $\delta = \omega' \circ \det$.

Proposition. — Soit $\mathscr{B}$ *l'ensemble des parties* M *de* G *telles que l'ensemble des* $\omega(g_{ij})$ *pour* $g \in M$ *et* $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$, *et l'ensemble des* $-\delta(g)$ *pour* $g \in M$ *soient tous deux bornés inférieurement. Alors,* $\mathscr{B}$ *est une bornologie compatible avec* φ^{ω}. *La bornologie définie par* φ^{ω} *est engendrée par* $\mathscr{B}.H$. *Elle coïncide avec* $\mathscr{B}$ *si et seulement si* $G \subset \operatorname{Ker} \delta$.

Il est clair que $M, M' \in \mathscr{B}$ entraîne $MM' \in \mathscr{B}$ et que les sous-groupes $U_{a,k}$ pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R}$ appartiennent à $\mathscr{B}$ (rappelons que le déterminant de Dieudonné d'une matrice triangulaire est l'image du produit de ses coefficients diagonaux). Soit $M \in \mathscr{B}$, $M \subset T$ et posons

$$p = \inf\{\omega(t_{ii}) \mid t \in M,\ 1 \leqslant i \leqslant r+1\}, \qquad q = \sup\{\delta(t) \mid t \in M\}.$$

Pour $t \in M$, on a $-\delta(t^{-1}) = \sum_i \omega(t_{ii}) \geqslant (r+1)p$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant r+1$,

$$\omega((t^{-1})_{ii}) = -\omega(t_{ii}) \geqslant -q + rp.$$

On en déduit que $M^{-1} \in \mathscr{B}$ et que, pour $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$, et $t \in M$, on a

$$(a_i - a_j)(\nu(t)) = \omega(t_{ii}) - \omega(t_{jj}) \leqslant q - (r+1)p$$

((10.2.5) (ii)). Par suite, $\mathscr{B}$ induit sur T, donc sur N, une bornologie compatible avec la loi de groupe et telle que $\nu(M)$ soit borné dans Isom A pour toute partie bornée de N.

Vu (8.1.6) *a)*, ceci démontre que $\mathscr{B}$ est faiblement compatible avec φ^{ω}. Enfin, on a

$$H_{[0]} \subset H \cap SL(X) \subset H \cap \operatorname{Ker} \delta = \{t \in T \mid \omega(t_{ii}) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant r+1\} \in \mathscr{B}$$

ce qui achève la démonstration de la première assertion. On termine la démonstration comme en (10.1.31), en remplaçant $\operatorname{Is}(f, q)$ par $SL(X)$ et $\omega \circ c$ par δ.

Proposition **(10.2.8).** — *Soit* E *une facette vectorielle de* Φ *et soit* x *un point de* A. *Un élément* $g \in G$ *appartient à* $\hat{P}_{x,E}$ (7.2.4) *si et seulement si on a, pour* $1 \leqslant i, j \leqslant r+1$:

$$(1) \qquad \omega(g_{ij}) + a_j(x) - a_i(x) \geqslant (r+1)^{-1}\delta(g)$$

et

$$(2) \qquad \omega(g_{ij}) + a_j(x) - a_i(x) > (r+1)^{-1}\delta(g) \qquad \textit{lorsque } (a_i - a_j)(E) \subset \mathbf{R}_+^*.$$

En raisonnant comme en (10.1.32), on voit qu'il suffit de montrer que l'intersection de N avec l'ensemble L des $g \in G$ satisfaisant à (1) et (2) coïncide avec $\hat{N}_{x,E}$. Soit $n \in N \cap L$ et posons $\sigma = s(n)$ ((10.2.5) (i)). En additionnant les inégalités (1) ou (2) pour $i = \sigma(j)$, on trouve l'inégalité

$$\sum_j \omega(n_{\sigma(j),j}) \geqslant \delta(n)$$

qui est une égalité. Par suite, toutes les inégalités (1) ou (2) sont des égalités pour $i = \sigma(j)$ et $g = n \in N \cap L$. Vu (10.2.5) (ii), ceci entraîne $\nu(n).x = x$ et d'autre part, on doit avoir $(a_{\sigma(j)} - a_j)(E) \not\subset \mathbf{R}_+^*$ pour tout j, d'où $(a_{\sigma(j)} - a_j)(E) = \{0\}$ et $n \in \hat{N}_{x,E}$. Réciproquement, si $n \in \hat{N}_{x,E}$, les nombres $\omega(n_{\sigma(j),j}) + a_j(x) - a_{\sigma(j)}(x)$ sont tous égaux, d'où (1) pour $g = n$ et $i = \sigma(j)$. Pour $i \neq \sigma(j)$, et en particulier si $(a_i - a_j)(E) \subset \mathbf{R}_+^*$, on a $\omega(n_{ij}) = +\infty$, et ceci montre bien que $n \in L$.

Corollaire **(10.2.9).** — *Soit* Ω *une partie convexe de* A. *Pour qu'un élément* $g \in G$ *appartienne à* $\hat{P}_{\Omega}$, *il faut et il suffit que*

$$\omega(g_{ij}) \geqslant \sup\{a_i(x) - a_j(x) \mid x \in \Omega\} + (r+1)^{-1}\delta(g) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant r+1).$$

Proposition **(10.2.10).** — *Soit* ψ *une valuation de la donnée radicielle* $(T, (U_a)_{a \in \Phi})$ *de* G. *Il existe une valuation* ω *et une seule du corps* K *telle que* ψ *soit équipollente à* φ^{ω}.

La démonstration est tout à fait analogue, en plus simple, à celle de (10.1.34).

Note ajoutée sur épreuves

Lorsque K est un corps valué complet localement compact, l'immeuble du groupe $SL_{r+1}(K)$ pour la valuation φ^{ω} définie en (10.2.3) est étroitement lié à l'espace des normes considéré par O. Goldman et N. Iwahori [*Acta Math.*, 109 (1963), 137-177]. De façon générale, reprenons les notations de 10.2 — sans hypothèse supplémentaire sur K — et disons qu'une norme additive (c'est-à-dire le logarithme de l'inverse d'une norme au sens usuel) γ dans X est *décomposable* s'il existe une base $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant r+1}$ de X et des nombres réels c_i $(1 \leqslant i \leqslant r+1)$ tels que :

$$(1) \qquad \gamma\left(\sum_{i=1}^{r+1} u_i x_i\right) = \inf\{\omega(x_i) - c_i\} \qquad (x_i \in K)$$

(on sait que toute norme possède cette propriété si K est maximalement complet), et que deux normes sont *homothétiques* si elles ne diffèrent que par une constante. Alors, il existe une bijection et une seule de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G (pour la valuation φ^ω) sur l'ensemble des classes d'homothétie de normes additives dans X qui soit invariante par G et fasse correspondre la classe de la norme γ définie par (1) au point de $\mathscr{I}$ représentant la valuation $\varphi^\omega+v$, où $v\in V$ est défini par $a_i(v)=c_i$. En particulier, lorsque K est localement compact, l'immeuble $\mathscr{I}$ est le quotient de l'espace $\mathscr{N}(X)$ de O. Goldman et N. Iwahori par la relation d'homothétie. La topologie sur $\mathscr{I}$ associée à la métrique définie en (7.4.20) (ou (2.5.4)) est la topologie quotient de celle introduite par Goldman et Iwahori; par contre, la métrique qu'ils considèrent est sans rapport avec la nôtre. Plus tard, nous verrons qu'il est parfois utile d'associer à un groupe réductif sur un corps local un immeuble qui n'est pas un cas particulier des immeubles introduits dans ce chapitre I[er], mais qui est le produit direct d'un tel immeuble et d'un espace affine euclidien; pour le groupe GL_{r+1}, on verra alors que cet immeuble modifié est l'espace des normes elles-mêmes (et non son quotient par la relation d'homothétie).

Suivant une suggestion d'A. Weil, on peut donner une interprétation analogue de l'immeuble des autres groupes classiques. Reprenons cette fois les notations et conventions de (10.1.1) et (10.1.14); supposons satisfaites les conditions (i) à (iv) de (10.1.15) et soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des normes additives α dans X telles que :

$$\omega(q(x))\geqslant 2\alpha(x) \qquad (x\in X) \tag{2}$$

$$\omega(f(x,y))\geqslant\alpha(x)+\alpha(y) \qquad (x,y\in X) \tag{3}$$

où, pour $\bar{t}\in K/K_{\sigma,\varepsilon}$, on pose $\omega(\bar{t})=\sup\{\omega(t)\,|\,t\in\bar{t}\}$. Alors, il existe une injection ι et une seule de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G (pour la valuation φ^ω) dans $\mathscr{J}$ qui soit invariante par G et telle que, pour $v\in V$ défini par $a_i(v)=c_i$, $\iota(\varphi^\omega+v)$ soit la norme γ définie par :

$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^{r}e_ix_i+x_0\Big)=\inf\{\omega(x_i)-c_i,\tfrac{1}{2}\omega(q(x_0))\}. \tag{4}$$

Supposons en outre que X soit de dimension finie et que K et $K_{\sigma,\varepsilon}$ soient maximalement complets pour les normes ω et $\omega|_{K_{\sigma,\varepsilon}}$. *Alors, $\iota(\mathscr{I})$ est l'ensemble de tous les éléments maximaux de $\mathscr{J}$ et tout élément de $\mathscr{J}$ minore un élément de $\iota(\mathscr{I})$.* Pour le montrer, on procède comme suit. Soit α une norme appartenant à $\mathscr{J}$, dont nous voulons montrer qu'elle minore un élément de $\iota(\mathscr{I})$. Disons que deux sous-espaces Y et Y′ de X sont orthogonaux pour α si $\alpha(y+y')=\inf\{\alpha(y),\alpha(y')\}$ pour $y\in Y$ et $y'\in Y'$. Posons $X_+=\sum_{i=1}^{r}X_i$ et soit X'_- (resp. X'') un supplémentaire orthogonal pour α de X_0+X_+ (resp. X_+) dans X. Pour $x_+\in X_+$, posons :

$$\alpha^*(x_+)=\sup\{f(x_+,x')-\alpha(x')\,|\,x'\in X'_-\}.$$

On vérifie aisément que la norme

$$x_++x''\mapsto\inf\{\alpha^*(x_+),\alpha(x'')\} \qquad (x_+\in X_+,\ x''\in X'')$$

majore α et appartient à $\mathscr{J}$. Quitte à la substituer à α, on peut donc supposer $\alpha^*=\alpha|_{X_+}$. Soient $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une base de X_+ orthogonale pour α et $(u'_{-i})_{1\leqslant i\leqslant r}$ la base de X'_- (également orthogonale pour α) définie par $f(u_i,u'_{-j})=\delta_{ij}$. Pour $1\leqslant i\leqslant r$, soit $\lambda_i\in q(u'_{-i})$ tel que $\omega(\lambda_i)=\omega(q(u'_{-i}))$ (l'hypothèse faite sur $K_{\sigma,\varepsilon}$ assure l'existence d'un tel λ_i). Posons $u_{-i}=u'_{-i}-\varepsilon u_i\lambda_i$. Un simple calcul montre que l'espace $X_-=\sum_{i=1}^{r}u_{-i}K$ est aussi orthogonal à X_++X_0; si on le choisit comme espace X'_-, on a $u'_{-i}=u_i$. Quitte à transformer α et toutes les données par un élément convenable de G, on peut supposer que $e_i=u_i$ pour $i\in I$. Ecrivant la relation (2) pour $x=x_++x_-+x_0$ avec $x_+\in X_+$, $x_-\in X_-$ et $x_0\in X_0$ et la relation (3) pour le même x et pour $y\in Y_+$ ou Y_-, on trouve alors que α minore la norme γ définie par (4), avec $c_i=-\omega(e_i)$. Enfin, il est facile de voir que cette dernière est un élément maximal de $\mathscr{J}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, Groupes algébriques linéaires, *Ann. of Math.*, **2** (1956), 20-80.

[2] —, *Linear algebraic groups*, New York, Benjamin, 1969.

[2 *bis*] — et J.-P. Serre, Cohomologie à support compact des immeubles de Bruhat-Tits; applications à la cohomologie des groupes S-arithmétiques, *C. R. Acad. Sci.*, **272** (1971), 110-113.

[3] — et J. Tits, Groupes réductifs, *Publ. I.H.E.S.*, **27** (1965), 55-150.

[4] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I et II, Paris, Hermann, 1966.

[5] —, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres IV, V et VI, Paris, Hermann, 1968.

[6] —, *Algèbre commutative*, chapitres V et VI, Paris, Hermann, 1964.

[7] F. Bruhat, Sur les représentations des groupes classiques $\mathfrak{p}$-adiques, *Amer. J. of Math.*, **83** (1961), 321-338 et 343-368.

[8] —, Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}$-adique, *Publ. I.H.E.S.*, **23** (1964), 46-74.

[9] —, $\mathfrak{p}$-adic groups, *in* Algebraic groups and discontinuous subgroups, *Proc. Symp. in Pure Math.*, IX, A.M.S., 1966, 63-70.

[10] —, Groupes semi-simples sur un corps local, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Paris, Gauthier-Villars, 1971.

[11] — et J. Tits, Un théorème de point fixe, *Publ. I.H.E.S.*, 1966 (multigraphié).

[12] — et —, BN-paires de type affine et données radicielles affines, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 598-601.

[13] — et —, Groupes simples résiduellement déployés sur un corps local, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 766-768.

[14] — et —, Groupes algébriques simples sur un corps local, *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 822-825.

[15] — et —, Groupes algébriques simples sur un corps local, cohomologie galoisienne (décompositions d'Iwasawa et de Cartan), *C. R. Acad. Sci.*, **263** (1966), 867-869.

[16] — et —, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields* (Driebergen, 1966), Springer, 1967, 23-36.

[17] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.*, **7** (1955), 14-66.

[18] —, Classification des groupes de Lie algébriques, *Séminaire E.N.S.*, Paris, 1956-1958 (multigraphié).

[19] M. Demazure, Schémas en groupes réductifs, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **93** (1965), 369-414.

[20] — et A. Grothendieck, Schémas en groupes, *Sém. Géom. Alg. I.H.E.S.*, 1963-64.

[21] J. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques*, Springer, 1963.

[22] Euclide, *Œuvres*, Paris, Patris, 1814.

[23] Harish-Chandra, Harmonic analysis on p-adic reductive groups, *Lecture Notes*, **162**, Springer, 1970.

[24] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, New York, Academic Press, 1962.

[25] H. Hijikata, Maximal compact subgroups of $\mathfrak{p}$-adic classical groups (en japonais), *Sugaku no Ayumi*, **10-2** (1963), 12-23.

[26] —, *On the arithmetic of p-adic Steinberg groups*, Yale University, 1964 (miméographié).

[27] —, *Maximal compact subgroups of some p-adic classical groups*, Yale University, 1964 (miméographié).

[28] N. Iwahori et H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, *Publ. I.H.E.S.*, **25** (1965), 5-48.

[29] I. Macdonald, Harmonic analysis on semi-simple p-adic groups, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Paris, Gauthier-Villars, 1971.

[30] H. Matsumoto, Fonctions sphériques sur un groupe semi-simple p-adique, *C. R. Acad. Sci.*, **269** (1969), 829-832.

[31] Pappus d'Alexandrie, *Mathematicae collectiones*, Bologne, H. H. de Ducciis, 1660.

[32] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, *Publ. I.H.E.S.*, **18** (1963), 5-69.

[33] G. Schiffmann, Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **99** (1971), 3-72.
[34] O. Schilling, Theory of valuations, *Math. Surveys*, IV, New York, 1950.
[35] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, *C. R. Acad. Sci.*, **268** (1969), 268-271.
[36] J. Tits, Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.*, **80** (1964), 313-329.
[37] —, Structures et groupes de Weyl, *Séminaire Bourbaki*, **288** (fév. 1965).
[38] —, Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, *Inv. Math.*, **5** (1968), 19-41.
[39] —, Buildings of spherical type and finite BN-pairs, *Lecture Notes*, Springer (à paraître).

Manuscrit reçu le 7 juin 1971.

INDEX DES NOTATIONS

(6.2.6) $A = \varphi + V$.
$\alpha_{a,k}$, U_α, $U_{\alpha+}$.
Σ, $\mathscr{E}$.
(6.2.10) ν, $r_{a,k}$.
(6.2.11) H, $\widehat{W}$, W, N', T', G'.
(6.2.13) $\widetilde{\Gamma}_a$.
(6.3.3) $U_{a,k+}$.
(6.4.1) $\widetilde{\mathbf{R}}$, $r+$.
(6.4.2) f_Ω, U_f (cf. (6.4.42)), U_f^+, U_f^-, H_f, N_f, $U_{f,a}$, $U_f^{(a)}$, $N_f^{(a)}$, $H_f^{(a)}$, P_f.
(6.4.10) f', Φ_f, V_f^*.
(6.4.13) $H_{(k)}$.
(6.4.14) $H_{[k]}$.
(6.4.18) $H_{f,g}$.
(6.4.23) f^*.
(6.4.38) $U_{0,k}$.
(6.4.40) U_0.
(6.4.42) U_f (pour $f : \Phi \cup \{0\} \to \widetilde{\mathbf{R}}$).
$U_{0,k}$ (pour $k \in \widetilde{\mathbf{R}}$).
(6.4.45) (1) $\mathscr{C}^n$.

7. Introd. Φ_D^+, Φ_D^-, Π_D, U_D^+, U_D^-.
(7.1.1) U_Ω, P_Ω.
(7.1.2) $cl(\Omega)$ (cf. (2.4.2) et (7.4.11)).
(7.1.3) N_Ω, Φ_Ω.
U_x, P_x, N_x, etc.
(7.1.8) $\widehat{N}_\Omega$, $\widehat{P}_\Omega$.
(7.1.10) $\widehat{W}_x$.
(7.2.1) $\gamma \cap Y$, $\overline{\gamma}$ (γ base de filtre).
(7.2.2) U_γ, N_γ, P_γ, $\widehat{N}_\gamma$, $\widehat{P}_\gamma$, Φ_γ (γ base de filtre).
(7.2.3) $\gamma(D)$.
(7.2.4) $\gamma(x, E)$, $U_{x,E}$, $P_{x,E}$, $N_{x,E}$, $\ldots$, $F_{x,E}$, $C_{x,E}$.
(7.2.6) $B_{x,D}$, $f_{x,D}$.
f_F.
(7.2.7) $\overline{G}_x$, P_x^*, H_x^*.
(7.3.9) $N_F^\dagger$, $P_F^\dagger$.
(7.4.2) ${}^\varphi\mathscr{I}$, $\mathscr{I}$ (cf. (2.1.1)).
(7.4.23) $E(v)$, $\widetilde{E}(v)$, $c(v)$, $k(v)$, $\delta(v)$, $h(v)$.
(7.4.25) $\rho_{A'}$; γ.
(7.5.1) $\widehat{\mathscr{I}}$.
(8.1.3) $\mathscr{U}_D^+$.
(8.1.5) $\mathscr{B}(\mathscr{N})$.
(8.1.7) $\mathscr{B}(\varphi)$.
(9.1.1) $V^\natural$, $a^\natural$, Φ_b, Φ_b^+, Z, U_b, L_b, M_b.
(9.1.4) $U_{b,k}$, $f(b, k)$.
(9.1.6) φ_b.
(9.1.7) $A_\natural$.
(9.1.8) $\alpha_{b,k}$.
(9.1.9) $G^\natural$, $\Phi^\natural$, $T^\natural$, $U_b^\natural$, ${}^vW^\natural$, $D^\natural$, $M_b^\natural$, $N^\natural$, $\Phi^{\natural+}$, $U^{\natural+}$, $\varphi_b^\natural$, $\varphi^\natural$.
(9.1.11) $\nu^\natural$, $\mathscr{I}^\natural$, etc.
(9.1.13) U_b^e, $U_{b,k}^e$.
(9.1.14) $H^\natural$, $\varphi_0^\natural$.
(9.2.2) $\mathscr{I}_\natural$.
(10.1.1) K, σ, ε, $K_{\sigma,\varepsilon}$.
X, f, q.
I, $\varepsilon(i)$, e_i, X_0, X_i, $c_{ij}(g)$, Z.
(10.1.2) $u_i(z, k)$, $m_i(z, k)$, $u_{ij}(k)$, $m_{ij}(k)$, a_h, a_{ij}, U_{a_i}, $U_{a_{ij}}$, U_{2a_i}, $M_{a_i}^0$, $M_{2a_i}^0$, $M_{a_{ij}}^0$.
(10.1.4) $c(g)$, $Is(f, q)$, $Sim(f, q)$, $Is^+(f, q)$, $Sim^+(f, q)$, $T(f, q)$, $\widetilde{T}(f, q)$, T^0, G^0.
(10.1.6) G.
(10.1.13) φ^ω, φ_a^ω.
(10.1.14) $\widehat{K}$, $\widehat{X}$, $\widehat{X}_i$, $\widehat{f}$, $\widehat{q}$, $\widehat{Z}$, $X^\perp$, $\widehat{X}^\perp$.
(10.1.20) X_0^*, ω_q, ω_1^*, z^*.
(10.1.22) ω_f.
(10.1.27) ω_i, ω_{ij}, $\overline{\omega}_i$, $\overline{\omega}_{ij}$, $\overline{\omega}$.
(10.1.28) $s(i)$.
(10.1.29) $Is_\omega(f, q)$.
(10.2.1) X, e_i, g_{ij}, ζ_{ij}, $u_{ij}(k)$, $m_{ij}(k)$, a_i, a_{ij}, V^*, Φ, $U_{a_{ij}}$, $M_{a_{ij}}^0$.
(10.2.2) T, $M_{a_{ij}}$.
(10.2.3) φ^ω.
(10.2.7) det, δ.

INDEX DES CONDITIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE