HANS GRAUERT

Affinoide Überdeckungen eindimensionaler affinoider Räume

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 34 (1968), p. 5-35
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1968__34__5_0>

AFFINOIDE ÜBERDECKUNGEN EINDIMENSIONALER AFFINOIDER RÄUME

von HANS GRAUERT

in Göttingen

HEINRICH BEHNKE zum 70. Geburtstag gewidmet

Einleitung [1]

In der algebraischen Geometrie kommt den affinen Räumen eine zentrale Bedeutung zu. Aus ihnen setzen sich die allgemeinen algebraischen Räume zusammen. Für alle Untersuchungen ist wichtig, daß endliche Überdeckungen affiner Räume mit affinen Teilräumen azyklisch sind in bezug auf kohärente algebraische Garben. In der nichtarchimedischen Funktionentheorie entstehen die rigiden Räume analog zur algebraischen Geometrie als Vereinigung von affinoiden Räumen. Es ist hier ebenso wie dort notwendig nachzuweisen, daß endliche Überdeckungen der « Bausteine » mit den « Bausteinen » azyklisch sind. Diese Aufgabe soll in der vorliegenden Arbeit für den Fall einer Dimension gelöst werden. Das Ergebnis läßt sich dann bei der Lösung für beliebige Dimensionen verwenden. Diese Anwendung soll jedoch erst in einer späteren Arbeit geschehen.

Es seien X ein affinoider Raum, g_ν mit $\nu = 1, \ldots, n$ und f_μ mit $\mu = 1, \ldots, m$ affinoide Funktionen auf X. Die Menge $X' = \{x \in X : |g_\nu(x)| \geq 1, |f_\mu(x)| \leq 1\}$ ist dann ein affinoider Teilraum — man sagt besser, ein affinoider Teilbereich von X. Es lassen sich nicht alle affinoiden Teilbereiche von X auf diese Weise gewinnen. Wir nennen deshalb jede Menge X′ einen *Laurentbereich* in X. Schon JOHN TATE hat in seinen Aufzeichnungen [3] bewiesen, daß jede endliche Überdeckung von X mit Laurentbereichen azyklisch ist. Zeigt man, daß es zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\iota : \iota = 1, \ldots, \iota_*\}$ von X mit affinoiden Teilbereichen eine Überdeckung $\mathfrak{V} = \{V_\nu : \nu = 1, \ldots, \nu_*\}$ mit Laurentbereichen gibt, so daß stets $V_{\nu_0} \cap \ldots \cap V_{\nu_e} \cap U_\iota$ ein Laurentbereich in V_ν ist, so folgt daher aus dem bekannten Satz von LERAY, daß auch $\mathfrak{U}$ azyklisch ist. Der Durch-

[1] Die Arbeit entstand teilweise während eines Aufenthaltes an der University of Notre Dame und teilweise während eines Aufenthaltes am Institut des Hautes Etudes Scientifiques. In Notre Dame wurde meine Arbeit unterstützt durch NSF-Grant GP-3988.

schnitt von endlich vielen Laurentbereichen ist wieder ein Laurentbereich. Man braucht also nur zu zeigen :

Zu jedem affinoiden Teilbereich $X' \subset X$ *gibt es eine Überdeckung* $\mathfrak{V} = \{V_\nu : \nu = 1, \ldots, n\}$ *von* X *mit Laurentbereichen, so daß* $X' \cap V_\nu$ *stets ein Laurentbereich von* V_ν *ist.*

Wir zeigen statt dessen :

Es seien X *ein eindimensionaler affinoider Raum,* $X' \subset X$ *ein affinoider Teilbereich,* $A(X)$ *bzw.* $A(X')$ *die Algebra der affinoiden Funktionen auf* X *bzw.* X'. *Dann gibt es endlich viele meromorphe Funktionen (ohne Unbestimmtheitsstellen)* $f_\nu = \frac{h_\nu}{g}$, $\nu = 1, \ldots, n$ *mit* $h_\nu, g \in A(X)$ *und* g *ein komplettes Element und* $f_\nu | X' \in A(X')$, *so daß* $X' = \{x \in X : |f_\nu(x)| \leq 1\}$.

Es sei ε ein Element des Grundkörpers und $|\varepsilon|$ so klein, daß $\{|g(x)| \leq |\varepsilon|\}$ disjunkte Vereinigung von affinoiden Teilbereichen ist, die entweder ganz in X' oder ganz außerhalb von X' liegen (man vgl. § 2). Es sei dann $V_1 = \left\{\left|\frac{g}{\varepsilon}\right| \leq 1\right\}$, $V_2 = \left\{\left|\frac{g}{\varepsilon}\right| \geq 1\right\}$. Das Paar $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2\}$ ist eine Überdeckung von X mit endlich vielen Laurentbereichen. Ist $d(x) = 0$, falls $x \in V_1 \cap X'$ und $d(x) \equiv c$ mit $|c| > 1$ für $x \in V_1 \cap (X - X')$, so ist d eine affinoide Funktion auf V_1 und man hat $V_1 \cap X' = \{|d| \leq 1\}$. In V_2 sind die f_ν affinoid. Also ist $V_\nu \cap X'$ immer ein Laurentbereich (1). Aus unserem Ergebnis folgt daher die benötigte Aussage.

Für spätere Zwecke sei definiert :

Jede Teilmenge $\{x \in X : |f_\nu(x)| \leq 1 ;\ \nu = 1, \ldots, n\} \subset X$ mit $f_\nu \in A(X)$ heißt ein *Weierstraßbereich.*

Ein Weierstraßbereich ist also stets ein spezieller Laurentbereich.

Im § 1 der Arbeit werden wichtige Begriffe zusammengestellt. Der § 2 bringt das Hauptresultat und eine Zurückführung auf eine einfachere Aussage. Im § 3 wird die Theorie der eindimensionalen affinoiden Hüllen durchgeführt. Im § 4 wird schließlich das Hauptresultat bewiesen. Es wird eine weitere wichtige Folgerung gezogen. Der § 5 zeigt, daß irreduzible eindimensionale affinoide Teilbereiche der « Ebene » k durch Herausnahme von endlich vielen « offenen » Kreisen aus einem « abgeschlossenen » Kreis entstehen. Im § 6 wird der Funktor, der jedem affinoiden Raum einen affinen zuordnet, untersucht. Es wird vor allem der Fall betrachtet, wo der Grundkörper k nicht algebraisch abgeschlossen ist (2).

1. AFFINOIDE RÄUME

1. Es sei k ein Körper, der nichttrivial, nicht archimedisch, vollständig bewertet ist. Mit k' werde sein algebraischer Abschluß bezeichnet. Es gibt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung der Bewertung von k nach k'. In bezug auf diese Fortsetzung werde die

---

(1) Man beachte, daß die Strukturalgebra eines affinoiden Teilbereichs Y' eines jeden affinoiden Raumes Y durch die Menge Y' eindeutig bestimmt ist. Vgl. L. GERRITZEN, *Invent. math.*, 1968. Das Resultat wurde vor 1-2 Jahren von NASTOLD angekündigt. Vgl. *Math. Zeitschr.* (wo die Arbeit erscheinen soll).

(2) *Zusatz zur Korrektur.* Inzwischen konnte L. GERRITZEN einen Teil des Hauptresultates auch ohne affinoiden Hüllen beweisen.

Vervollständigung $\bar{k}$ von k' gebildet. Die Menge $\bar{k}$ ist ein vollständig bewerteter, algebraisch abgeschlossener Körper.

Wir setzen $E = \{a \in \bar{k} : |a| \leq 1\}$, $t(E) = \{a \in \bar{k} : |a| < 1\}$ und $\bar{\kappa} = E/t(E)$. Der Quotientenhomomorphismus $E \to \bar{\kappa}$ werde mit τ bezeichnet. Es sei $\mathring{k} = k \cap E$, $t(k) = k \cap t(E)$. Der Quotient $\kappa = \mathring{k}/t(k)$ ist ein Unterkörper von $\bar{\kappa}$, der Homomorphismus τ bildet $\mathring{k}$ auf κ ab.

Wir bezeichnen mit E^n den topologischen Raum

$$\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in E, \nu = 1, \dots, n\}$$

und entsprechend mit $\bar{\kappa}^n$ die Menge $\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in \bar{\kappa}, \nu = 1, \dots, n\}$. Durch τ erhalten wir eine Abbildung $E^n \to \bar{\kappa}^n$. Diese werde wie fortan alle durch $\tau : E \to \bar{\kappa}$ erzeugten Zuordnungen ebenfalls mit τ bezeichnet. Es sei T_n die k-Algebra der $\bar{k}$-wertigen Funktionen f über E^n, die durch eine konvergente Reihe $\sum\limits_{\nu_1, \dots, \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1 \dots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n}$ mit $a_{\nu_1 \dots \nu_n} \in k$ gegeben werden können. T_n heißt die *affinoide Algebra* von E^n, die Elemente aus T_n heißen *affinoide Funktionen*. Eine Reihe $\Sigma a_{\nu_1 \dots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n}$ ist übrigens genau dann über E^n konvergent, wenn ihre Koeffizienten gegen Null konvergieren. Solche Reihen werden *strikt konvergente Potenzreihen* genannt. T_n ist eine Banach algebra mit der Norm $||f|| = \sup |a_{\nu_1 \dots \nu_n}|$ für $f \in T_n$. Wir setzen $\mathring{T}_n = \{f \in T_n : ||f|| \leq 1\}$, $t(T_n) = \{f \in T_n : ||f|| < 1\}$. Durch $\tau : E \to \bar{\kappa}$ wird ein Homomorphismus

$$\tau : \mathring{T}_n \to \tilde{T}_n = \kappa[x_1, \dots, x_n]$$

erzeugt. Der Kern ist $t(T_n)$. Man zeigt, *daß* T_n *noethersch ist* (vgl. Tate [3]).

Unter dem *Keim einer analytischen Funktion* in einem Punkte $x \in E^n$ verstehen wir einen Funktionskeim, der durch eine in x konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten aus $\bar{k}$ gegeben werden kann. $\mathcal{O}$ sei die Garbe der Keime von analytischen Funktionen über E^n. Man sieht : $\mathcal{O}$ ist eine Garbe von lokalen $\bar{k}$-Algebren. Man hat $T_n \subset \Gamma = \Gamma(E^n, \mathcal{O})$, wenn Γ die Menge der stetigen Schnittflächen in $\mathcal{O}$ bezeichnet. Die Elemente aus Γ werden auch *analytische Funktionen* genannt. Jede affinoide Funktion ist also eine spezielle analytische Funktion.

2. Es sei $I \subset T_n$ ein Ideal, $\mathfrak{J} \subset \mathcal{O}$ die von den Elementen $f \in I$ über $\mathcal{O}$ erzeugte Untergarbe von $\mathcal{O}$. Die Garbe $\mathfrak{J}$ ist eine Garbe von Idealen, das Ideal I ist in der Schnittflächenmenge $\Gamma(E^n, \mathfrak{J})$ enthalten. Wir setzen $X = \{x \in E^n : \mathfrak{J}_x \neq \mathcal{O}_x\}$ und erhalten eine abgeschlossene Teilmenge von E^n. Wir definieren über X die Garbe von lokalen Algebren $H = (\mathcal{O}/\mathfrak{J}) | X$ und bezeichnen mit A die k-Algebra T_n/I. Man hat den durch $T_n \to \Gamma(E^n, \mathcal{O})$ induzierten Homomorphismus $A \to \Gamma(X, H)$. Man zeigt, daß dieser injektiv ist. A kann also als Unter-k-Algebra von $\Gamma(X, H)$ aufgefaßt werden.

Definition 1. — Ein affinoider Raum ist ein Tripel (X, H, A).

H heißt die *Strukturgarbe*, A die *Strukturalgebra* oder die *affinoide Algebra* von X.

Die Elemente von A werden wieder *affinoide Funktionen* genannt. Die Schnittflächen aus $\Gamma(X, H)$ heißen *analytische Funktionen.* Ist $x \in X$ und m_x das maximale Ideal von H_x, so gibt es eine natürliche Isomorphie $H_x/m_x \approx \bar{k}$. Bei gebegenem $f \in \Gamma(X, H)$ wird also jedem $x \in X$ der Wert $f(x) = f_x/m_x \in H_x/m_x = \bar{k}$ zugeordnet. Dabei bezeichnet f_x das Bildelement von x unter $f : X \rightarrow H$. Wir erhalten eine stetige $\bar{k}$-wertige Funktion $[f]$ über dem (topologischen) Raum X.

Im folgenden werden wir im allgemeinen die affinoiden Räume (X, H, A) einfach mit X bezeichnen.

Es sei $\mathring{A} = \{f \in A : |f(x)| \leq 1 \text{ für } x \in X\}$ und $t(A) = \{f \in A : |f(x)| < 1 \text{ für } x \in X\}$. Die Quotientenabbildung $\tau : \mathring{A} \rightarrow \widetilde{A} = \mathring{A}/t(A)$ ist wieder ein Homomorphismus. Als wichtiger Satz gilt : $\widetilde{A}$ *ist eine reduzierte affine Algebra über* κ. Dabei bedeutet reduziert : « $\widetilde{A}$ enthält keine nilpotenten Elemente » und affin über κ : « $\widetilde{A}$ ist die Algebra der regulären Funktionen eines affin algebraischen Raumes $\widetilde{X}$, der über κ definiert ist ». Der Raum $\widetilde{X}$ ist natürlich durch $\widetilde{A}$ eindeutig bestimmt (bis auf Isomorphie!). Da die Punkte von X bzw. $\widetilde{X}$ bijektiv den stetigen Charakteren $A \rightarrow \bar{k}$ bzw. den Charakteren $\widetilde{A} \rightarrow \bar{\kappa}$ entsprechen, hat man eine Abbildung $\tau : X \rightarrow \widetilde{X}$, die mit $\mathring{A} \rightarrow \widetilde{A}$ kommutiert (1). Aus einem schon von J. Tate bewiesenen Satz folgt : τ *ist surjektiv.* Nach Tate läßt sich nämlich über $\mathring{A}$ stets die 1 als Linearkombination von gegebenen Funktionen $f_1, \ldots, f_p \in \mathring{A}$ darstellen, wenn $\max_{\nu=1,\ldots,p} (|f_\nu(x)|) \equiv 1$ gilt. Wäre ein Punkt $x_0 \in \widetilde{X}$ nicht im τ-Bild, so könnte man ein Erzeugendensystem $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_p$ des Ideals von x_0 und Funktionen $f_\nu \in \mathring{A}$ mit $\tau(f_\nu) = \widetilde{f}_\nu$ wählen. Für $f_1, \ldots, f_p$ wäre dann die Bedingung des Tateschen Satzes erfüllt, die 1 durch $f_1, \ldots, f_p$ und damit auch durch $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_p$ darstellbar. Das ist jedoch nicht möglich!

3. Es seien $X \subset E^n$ ein affinoider Raum, $I \subset T_n$ ein Ideal und $A = T_n/I$ die affinoide Algebra von X. Mit $\mathfrak{J}$ werde wieder die von I erzeugte Idealgarbe bezeichnet. Dann ist $H = (\mathcal{O}/\mathfrak{J}) | X$ die Strukturgarbe von X. Der affinoide Raum X heißt *reduziert*, wenn der Ring A reduziert ist, d.h. keine nilpotenten Elemente enthält. Ist X nicht reduziert, so hat man das Ideal I_A der nilpotenten Elemente in A. Man kann dann das Ideal I^* derjenigen Elemente $f \in T_n$ bilden, die durch $T_n \rightarrow A$ in I_A abgebildet werden. Es sei $\operatorname{red} A = A/I_A = T_n/I^*$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}^*$ die durch I^* und mit $\mathfrak{J}_A$ die durch I_A erzeugte Garbe, so ist $\operatorname{red} H = H/\mathfrak{J}_A = (\mathcal{O}/\mathfrak{J}^*) | X$ eine Garbe von lokalen $\bar{k}$-Algebren auf X. Das Tripel (X, red H, red A) ist ein affinoider Raum und heißt die *Reduktion* von (X, H, A). Wie wir sehen, hängt die Reduktion nicht von der Einbettung von (X, H, A) in E^n ab.

Wir nennen (X, H, A) *separiert*, wenn auch die Halme H_x für $x \in X$ frei von

(1) Es gilt genauer $\widetilde{f} \circ \tau = f | t(E)$ für $f \in \mathring{A}$ und $\widetilde{f} = \tau f$. Vgl. Anhang.

nilpotenten Elementen sind. Man zeigt, daß dieses genau dann der Fall ist, wenn (X, H, A) reduziert ist und bei Erweiterung des Grundkörpers k auf $\overline{k}$ reduziert bleibt. Ist k vollkommen (d.h. hat es die Charakteristik 0 oder die Charakteristik p und enthält mit a auch $\sqrt[p]{a}$), so ist jeder reduzierte Raum auch separiert. — Eine analoge Definition kann man in der algebraischen Geometrie für *affine Räume* treffen. Ein solcher Raum heißt *separiert*, wenn er reduziert ist und es nach dem algebraischen Abschluß des Grundkörpers bleibt. — Wir nennen einen affinoiden (affinen) Raum X *in einem Punkte* $x_0 \in X$ *separiert*, wenn der Halm der Strukturgarbe in diesem Punkte ein reduzierter Ring ist. Aus dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt (man vgl. [1], p. 441) :

Gilt $[f]=0$, *so ist eine Potenz* $f^s=0$.

Für reduzierte Räume ist deshalb $[f]$ genau dann gleich 0, wenn f verschwindet.

4. Es seien X, Y affinoide Räume. Wir heißen eine *analytische Abbildung* $\varphi : X \to Y$ *affinoid*, wenn das Urbild $f \circ \varphi$ jeder Funktion $f \in A(Y)$ in A(X) liegt. Die Zuordnung $f \to f \circ \varphi$ definiert bei affinoiden Abbildungen also einen Homomorphismus $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$. Wird A(X) durch φ^* sogar zu einem endlichen Modul über A(Y), so heißt φ eine *endliche affinoide Abbildung*. Natürlich erzeugt jede affinoide Abbildung $\varphi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$. Diese Zuordnung ist ein kovarianter Funktor. Man zeigt mit Tate, daß φ genau dann endlich ist, wenn es $\widetilde{\varphi}$ ist (Man beachte auch, daß $\widetilde{X} = \widetilde{\mathrm{red}\, X}$ und daß $\widetilde{X}$ immer reduziert ist).

Es seien fortan X, Y *reduziert*. Dann heißt (X, φ, Y) eine *affinoide Überlagerung*, wenn

1) φ endlich ist,

2) durch $\varphi^* : A(Y) \to A(X)$ kein Nichtnullteiler aus A(Y) in einen Nullteiler aus A(X) abgebildet wird.

Ist Y irreduzibel, so gilt dieses genau dann, wenn φ endlich und surjektiv ist und auch X rein-dimensional ist und die gleiche Dimension wie Y hat.

Ist $\varphi : X \to Y$ eine endliche affinoide Abbildung und Y irreduzibel, so verstehen wir unter der Blätterzahl $b=(X:Y)$ die maximale Anzahl von linear unabhängigen Elementen in A(X) über A(Y). Ist $Y=E^d$, so gilt : $(X:Y) \geq (\widetilde{X}:\widetilde{Y})$. Diese Ungleichung ist im allgemeinen strikt. Darum ist $\widetilde{X}$ kein gutes affines Modell von X.

Anhang

Satz. — Die Punkte $x \in X$ *entsprechen bijektiv den stetigen Charakteren* $\chi : A(X) \to \overline{k}$.

Beweis. — Durch jeden Punkt $x \in X$ wird jeder Funktion $f \in A$ der Wert $f(x) \in \overline{k}$ zugeordnet. Er definiert also einen stetigen Charakter $\chi : A \to \overline{k}$. Es braucht daher nur noch gezeigt zu werden, daß jeder stetige Charakter $\chi : A \to \overline{k}$ von genau einem Punkt $x \in X$ kommt. Da $A = T_n/I$ ist und die Quotiententopologie trägt, wird durch die Einsetzung $T_n \to A \xrightarrow{\chi} k$ ein stetiger Charakter $\chi_1 : T_n \to \overline{k}$ definiert, der die Funktionen $f \in I$ auf Null abbildet. Ist gezeigt, daß χ_1 durch einen Punkt $x \in E^n$ gegeben wird, so muß deshalb $x \in X$ gelten. Man darf beim Beweis also $A = T_n$ voraussetzen. Das geschehe fortan.

Es seien $x_1, \ldots, x_n \in T_n$ die Koordinatenfunktionen. Wir zeigen, daß $|\chi(x_\nu)| \leq 1$ ist. Wäre etwa ein $|X(x_\nu)| = q > 1$, so wählen wir eine Nullfolge $c_\lambda \in k^\bullet$ und natürliche Zahlen l_λ, so daß $|c_\lambda| \cdot q^{l_\lambda}$ streng monoton gegen unendlich strebt. Der Wert des Charakters χ auf der Funktion $f = \sum_\lambda c_\lambda x_\nu^{l_\lambda} \in T_n$ müßte dann unendlich groß sein. Das ist ein Widerspruch!

Wir setzen $x_\nu^{(0)} = \chi(x_\nu)$ und $x_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Man hat $x_0 \in E^n$ und $x_\nu(x_0) = x_\nu^{(0)}$. Für alle Polynome f gilt deshalb $\chi(f) = f(x_0)$. Aus Stetigkeitsgründen folgt, daß dieses für jedes $f \in T_n$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. DAS HAUPTRESULTAT

1. Es sei $X = (X, H, A)$ ein affinoider Raum. Wir nennen eine Funktion $f \in A$ *komplett*, wenn ihr Bild in red A Nichtnullteiler in red A ist. Ebenso heißt ein Element $f_x \in H_x$ komplett, wenn sein Bild $\hat{f}_x$ in der Reduktion von H_x kein Nullteiler ist. Aus dem lokalen Hilbertschen Nullstellensatz folgt, daß dann $[f]_x \neq 0$ ist. Wir zeigen :

Satz 1. — Eine Funktion $f \in A$ ist genau dann komplett, wenn jeder Keim $f_x \in H_x$ komplett ist.

Beweis. — Die Reduktion von H_x ist stets gleich der Reduktion von $(\text{red } H)_x$. Wir brauchen den Satz deshalb nur in dem Fall zu zeigen, wo X reduziert ist. A sei also fortan reduziert. Es sei f_x immer komplett und $g \in A$ von Null verschieden. Das Bild $\hat{g}_x$ von g_x in der Reduktion von H_x kann nicht immer Null sein, sonst wäre ja $[g] = 0$. Wir wählen ein $x \in X$, so daß $\hat{g}_x \neq 0$. Es folgt dann $\hat{g}_x \cdot \hat{f}_x \neq 0$ und mithin $g \cdot f \neq 0$. Die Funktion f ist also komplett.

Ist umgekehrt $f \in A$ ein Nichtnullteiler, so sei $\sigma : H \to H$ der durch Multiplikation mit f definierte affinoide Garbenhomomorphismus. Der Kern von σ ist k-kohärent, andererseits gibt es kein nichttriviales Element $h \in A$, das durch σ auf 0 abgebildet wird. Der Kern ist also gleich 0 und σ injektiv. Das heißt aber, daß $f_x \in H_x$ immer Nichtnullteiler ist. Wäre $\hat{f}_x \cdot \hat{g}_x = 0$ und $\hat{g}_x \neq 0$, so gäbe es ein s mit $(f_x \cdot g_x)^s = 0$. Da $g_x^s \neq 0$, gäbe es ein minimales $\nu \leq s$ mit $f_x^\nu \cdot g_x^s = 0$. Dann wäre $f_x \cdot (f_x^{\nu-1} \cdot g_x^s) = 0$ und $f_x^{\nu-1} \cdot g_x^s \neq 0$. Das kann also nicht sein. Der Keim f_x ist daher erst recht stets komplett. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Wir notieren noch :

Corollar. — Ist f komplett, so verschwindet $[f]$ nirgendwo identisch.

Diese Aussage bedeutet natürlich nur, daß $[f]_x \neq 0$ für jedes $x \in X$ ist.

Es sei nun M das multiplikative System der kompletten Elemente in A. Wir bilden mit M die Quotientenalgebra $Q(A)$ und nennen jedes Element $f \in Q(A)$ eine *meromorphe Funktion* auf X. Es gibt einen natürlichen Homomorphismus $A \to Q(A)$, der im allgemeinen nicht injektiv ist.

Es sei $f=\frac{g}{h}\in Q(A)$ mit $g\in A$ und $h\in M$. Die Zuordnung $x\to\frac{g_x}{h_x}$ ist eine Schnittfläche $i(f)\in\Gamma(X, Q(H))$, wobei $Q(H)$ die entsprechend zu $Q(A)$ gebildete Garbe bezeichnet.

Es sei T(H) die Torsionsuntergarbe von H, d.h. die Garbe derjenigen Elemente von H, die nach Multiplikation mit einem kompletten Element Null ergeben. T(H) ist wieder eine kohärente Garbe ([1]). Ihr Träger liegt nirgends dicht in X, ihr Annullator enthält komplette Elemente.

Ist $g\in A\cap\Gamma(X, T(H))$, so gibt es daher eine komplette Funktion $\varphi\in A$, so daß $\varphi\cdot g$ verschwindet. Gilt $\frac{g_x}{h_x}=0$, so muß $g_x\in T_x(H)$ sein. Ist g_x immer in $T_x(H)$, so ist $\frac{g}{h}=0$. Es folgt, daß die Abbildung $i: Q(A)\to\Gamma(X, Q(H))$ injektiv ist. Wir fassen deshalb fortan $Q(A)$ als Teilmenge von $\Gamma(X, Q(H))$ auf. Man sieht auch : $A\to Q(A)$ *ist injektiv, wenn* T(H) *verschwindet.* Das ist sicher der Fall, wenn X reduziert ist.

2. Es sei $X^*\subset X$ eine offene Teilmenge. Wir nennen X^* einen *affinoiden Teilbereich* von X, wenn es eine k-Algebra $A^*\subset\Gamma(X^*, H^*)$ mit $H^*=H|X^*$ gibt, so daß :

1) (X^*, H^*, A^*) ein affinoider Raum über k ist,

2) $A|X^*\subset A^*$ gilt.

Die zweite Eigenschaft besagt genau, daß die Identität $X^*\to X$ eine affinoide Abbildung ist.

Wir werden zeigen :

Satz 2. — Ist X *rein* 1*-dimensional, so gibt es zu* X^* *meromorphe Funktionen* f_ν, $\nu=1,\ldots,q$, *so daß* $X^*=\{x\in X : |f_\nu(x)|\leq 1$ *für* $\nu=1,\ldots,q\}$.

Dabei wird $|f_\nu(x)|$ als kleiner 1 angenommen, wenn $f_{\nu x}$ nur eine Darstellung $\frac{h_{\nu x}}{g_{\nu x}}$ mit $h_{\nu x}(x)=g_{\nu x}(x)=0$ gestattet. Gibt es nur eine Darstellung mit $g_{\nu x}(x)=0$, so nennt man x einen Pol von f_ν.

Wir müssen beim Beweis dieses Satzes das algebraische Modell $\widetilde{X}$ von X heranziehen. Da dieses im allgemeinen Fall die Struktur von X nicht richtig wiedergibt, müssen wir den Umweg über $\bar{k}$ wählen. Wir erweitern also k zu $\bar{k}$. X wird dadurch zu einem affinoiden Raum über $\bar{k}$. Wir reduzieren und erhalten $(X, \bar{A})$. $(X, \bar{A})$ ist separiert. $X^*\subset X$ ist ein affinoider Teilbereich von $(X, \bar{A})$. Die Strukturgarbe $\bar{H}$ von $(X, \bar{A})$ entsteht einfach durch Reduktion der Halme von H. Das gleiche gilt für $\bar{H}^*$ in bezug auf H^*. Als Strukturalgebra $\bar{A}^*$ muß man $A'\hat{\otimes}\bar{k}$ nehmen, wobei A' das Bild von A^* in $\Gamma(X^*, \bar{H}^*)$ bezeichnet. Wir zeigen anstelle von Satz 2 (alles in bezug auf $\bar{k}$) :

Satz 3. — Es gibt eine endliche Menge $D\subset X-X^*$ *von algebraischen Punkten über* k *und (über* $\bar{k}$*) meromorphe Funktionen* $f_1,\ldots,f_q$ *auf* X, *die nur in* D *Pole haben, so daß*

$$X^*=\{x\in X : |f_\nu(x)|\leq 1 ; \nu=1,\ldots,q\}.$$

([1]) Genauer : Es gibt einen A-Modul $\Gamma_*\subset\Gamma(X, T(H))$, so daß $(T(H), \Gamma_*)$ k-kohärent im Sinne von [1] ist. Vgl. Anhang.

3. Um den Satz 2 aus Satz 3 herzuleiten, sind Vorbereitungen nötig. Es sei $\overline{\mathrm{G}}$ ein stetiger Automorphismus $\overline{\mathrm{G}} : \overline{k} \to \overline{k}$, der k identisch auf sich abbildet. Da die algebraischen Elemente in $\overline{k}$ dicht liegen, $\overline{\mathrm{G}}$ stets ein solches algebraisches Element auf ein konjugiertes abbildet und konjugierte Elemente den gleichen Betrag haben, folgt, daß immer $|\overline{\mathrm{G}}(x)| = |x|$ ist. — Es sei $k_* \subset \overline{k}$ eine endlich-algebraische Erweiterung von k. Ist dann $\mathrm{G} \in \mathrm{G}(k_*/k)$ eine Transformation aus der Galoisgruppe von k_* über k, so läßt sich G stets zu einem stetigen Automorphismus $\overline{\mathrm{G}} : \overline{k} \to \overline{k}$ fortsetzen.

Jeder Punkt $x \in \mathrm{X}$ entspricht (vgl. Anhang bei § 1) einem stetigen Charakter $\chi_x : \mathrm{A}(\mathrm{X}) \to \overline{k}$. Er liegt genau dann in X^*, wenn sich χ_x zu einem stetigen Charakter $\chi_x^* : \mathrm{A}(\mathrm{X}^*) \to \overline{k}$ fortsetzen läßt. Wir definieren nun als $\overline{\mathrm{G}}(x)$ den Punkt, der zu dem Charakter $\overline{\mathrm{G}} \circ \chi_x$ gehört. Offenbar liegt $\overline{\mathrm{G}}(x)$ genau dann in X^*, wenn $x \in \mathrm{X}^*$ gilt.

Ein Punkt $x \in \mathrm{X}$ heißt ein algebraischer Punkt, wenn für $f \in \mathrm{A}$ der Funktionswert $f(x)$ immer algebraisch über k ist. Es gibt dann eine kleinste algebraische Erweiterung k_* von k, in der alle $f(x)$ nebst ihren Konjugierten enthalten sind. Es sei $\mathrm{G} \in \mathrm{G}(k_*/k)$ und $\overline{\mathrm{G}}$ eine Fortsetzung. χ_x bildet dann A in k_* ab, das gleiche geschieht durch $\overline{\mathrm{G}} \circ \chi_x = \mathrm{G} \circ \chi_x$. Der Punkt $\overline{\mathrm{G}}(x)$ ist deshalb bereits durch G bestimmt und heißt ein zu x konjugierter Punkt. Wir schreiben $\overline{\mathrm{G}}(x) = \mathrm{G}(x)$.

Mit einem algebraischen Punkt sind also stets auch alle konjugierten Punkte in X^* enthalten.

Es sei $g \in \mathrm{A}(\mathrm{X})$ ein komplettes Element. Die Nullstellenmenge $\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{X} : g(x) = 0\}$ ist dann endlich ([1]). Jeder Punkt von N ist algebraisch über k. N zerfällt in Klassen N_ν mit $\nu = 1, \ldots, n$ zueinander konjugierter Punkte. Jedes N_ν liegt stets ganz in X^* oder in $\mathrm{X} - \mathrm{X}^*$. Mit $x \in \mathrm{N}_\nu$ sind stets auch alle zu x konjugierten Punkte von X in N_ν enthalten. Wir zeigen :

Satz 4. — Ist $\varepsilon \in |k^*|$ *hinreichend klein, so zerfällt* $\mathrm{V} = \{x \in \mathrm{X} : |g(x)| \leq \varepsilon\}$ *in affinoide Teilbereiche* $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ *mit* $\mathrm{V}_\nu \cap \mathrm{V}_\mu = \emptyset$ *für* $\nu \neq \mu$ *und* $\mathrm{N}_\nu \subset \mathrm{V}_\nu$ *und* $\mathrm{V}_\nu \subset \mathrm{X}^*$ *oder* $\mathrm{X}^* \cap \mathrm{V}_\nu = \emptyset$.

Beweis. — Es sei X in E^n eingebettet. Wir bezeichnen mit z_μ die Koordinatenfunktionen und mit f_μ die Beschränkungen $z_\mu | \mathrm{X}$ (für $\mu = 1, \ldots, n$). Ist $\delta' \in |k^*|$ hinreichend klein, so sind die affinoiden Teilbereiche

$$\mathrm{U}'_\lambda = \{x \in \mathrm{X} : |f_\mu(x) - f_\mu(x_\lambda)| \leq \delta' ;\ \mu = 1, \ldots, n\}$$

alle disjunkt und jeweils in X^* oder in $\mathrm{X} - \mathrm{X}^*$ enthalten (mit $x_\lambda \in \mathrm{N}$). Denn X^* und $\mathrm{X} - \mathrm{X}^*$ sind offene Teilmengen von X. Für X^* gilt das nach Definition. Wäre ein $x_0 \in \mathrm{X} - \mathrm{X}^*$ Häufungspunkt von X^*, so hätten die Funktionen $f_\mu - f_\mu(x_0)$ zwar keine gemeinsame Nullstelle auf X^*, das $\max\limits_\mu |f_\mu(x) - f_\mu(x_0)|$ würde aber auf X^* beliebig klein. Im Widerspruch dazu wäre (in bezug auf $\overline{k}$) über X^* die « Eins » als Linear-

(1) Zum Beweis vgl. Anhang, 2. Abschnitt.

kombination der $f_\mu - f_\mu(x_0)$ mit (beschränkten!) affinoiden Funktionen als Koeffizienten darstellbar.

Die Funktionen $h \in A$, die in N_ν verschwinden, bilden ein Ideal $m_\nu \subset A$. Wir zeigen, daß die Nullstellenmenge von m_ν gerade N_ν ist. Es sei $x_0 \in X - N_\nu$. Da $M = \{x_0\} \cup N_\nu$ endlich ist, gibt es eine Funktion $h^* \in A$, die auf je zwei verschiedenen Punkten von M verschiedene Werte hat. Wir bilden $h = \prod_{x_\lambda \in N_\nu} (h^* - h^*(x_\lambda))^\theta$ und wählen θ im Falle char $k = 0$ gleich 1 und im Falle char $k = p$ gleich p^α und so groß, daß $h \in A$ gilt. Man hat also stets $h \in A$ und $h(N_\nu) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$. Die Nullstellenmenge von m_ν enthält also nicht den Punkt x_0.

Es sei $\mathring{U}_\lambda = \{x \in X : |f_\mu(x) - f_\mu(x_\lambda)| < \delta'\}$. Die Menge $X - \bigcup_{x_\lambda \in N_\nu} \mathring{U}_\lambda$ ist dann Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen $K_{\nu\sigma}$.

Es sei nun $h_{\nu 1}, \ldots, h_{\nu q}$ ein Erzeugendensystem von m_ν. Die $h_{\nu\mu}$ mit $\mu = 1, \ldots, q$ haben keine gemeinsamen Nullstellen auf den $K_{\nu\sigma}$. Die Eins ist über $K_{\nu\sigma}$ darstellbar als Linearkombination der $h_{\nu\mu} | K_{\nu\sigma}$. Es gibt daher ein $\delta \in |k^*|$, so daß $\max_\mu |h_{\nu\mu}(x)| > \delta$ ist für $x \in \bigcup_\sigma K_{\nu\sigma}$. Die affinoiden Teilbereiche (über k) :

$$U_\nu = \{x \in X : |h_{\nu\mu}(x)| \leq \delta;\ \mu = 1, \ldots, q\}$$

sind also in $\bigcup_{x_\lambda \in N_\nu} U'_\lambda$ enthalten. Sie liegen also entweder ganz in X^* oder in $X - X^*$.

Wir setzen wieder $\mathring{U}_\nu = \{x \in X : |h_{\nu\mu}(x)| < \delta\}$. Die Menge $X - \bigcup_\nu \mathring{U}_\nu$ ist dann Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen W_σ. Die Funktionen $g^{-1} | W_\sigma$ sind affinoid und beschränkt. Ist $\varepsilon \in |k^*|$ hinreichend klein, so gilt also auf $\bigcup_\sigma W_\sigma \supset X - \bigcup_\nu U_\nu$ die Ungleichung $|g(x)| > \varepsilon$. Der affinoide Teilbereich $V = \{x \in X : |g(x)| \leq \varepsilon\}$ ist also in $\bigcup_\nu U_\nu$ enthalten. Wir setzen nun $V_\nu = U_\nu \cap V$. Die V_ν sind affinoide Teilbereiche von X (über k) und erfüllen alle Bedingungen.

Damit ist auch die in der Einleitung benötigte Aussage bewiesen.

4. Um nun den Satz 2 zu beweisen, wählen wir zu den meromorphen Funktionen f_ν aus Satz 3 eine komplette Funktion $g \in A(X)$, die in den Punkten von D verschwindet. Es sei $V = \{x \in X : |g(x)| \leq \varepsilon\} = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ im Sinne von Satz 4. Wir setzen $W = \{x \in X : |g(x)| \geq \varepsilon\}$. Das Paar $\{V, W\}$ stellt dann eine Laurentüberdeckung von X dar. Wir geben nun in V_ν die meromorphe Funktion 0 vor, falls $V_\nu \subset X^*$ und anderenfalls die Funktion g^{-1}. Wir erhalten dadurch eine meromorphe Funktion h_1 in V. In W nehmen wir die Funktion $h_2 \equiv 0$. Es ist $h_1 - h_2$ affinoid auf $V \cap W$. Da die Überdeckung $\{V, W\}$ nach Tate [3] azyklisch ist, lassen sich affinoide Funktionen h_1^*, h_2^* in V bzw. W bestimmen, so daß $h_1 - h_2 = h_1^* - h_2^*$ über $V \cap W$. Die Funktion $h = h_1 - h_1^* = h_2 - h_2^*$ ist dann auf X meromorph (denn $g.h$ ist affinoid). Sie hat die vorgegebenen Hauptteile und ist deshalb in X^* affinoid.

Wir wählen $r \in |k^*|$, $r > 1$ so groß, daß $\hat{X} = \{x \in X : |h| \leq r\} \supset X^*$. Die Menge $\hat{X}$ ist ein affinoider Teilbereich von X. Jede auf $\hat{X}$ affinoide Funktion kann in eine Reihe

$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu h^\nu$ mit $a_\nu \in A(X)$ entwickelt werden. (Man sieht das, indem man durch $w=h(x)$ die Einbettung von $\hat{X}$ in $X \times E_r$ vornimmt, wo $E_r=\{z \in \bar{k} : |z| \leq r\}$. Die Funktion h ist selbst über $\hat{X}$ affinoid). Das gleiche gilt, wenn man von k zu $\bar{k}$ übergeht. Die Koeffizienten a_ν sind dann aus $\bar{A}$ zu wählen. Die Funktionen f_ν, die über $\hat{X}$ affinoid sind, lassen sich in eine solche Reihe entwickeln. Sind $z_1, \ldots, z_n \in A(X)$ Funktionen, die X biaffinoid in einen E^n einbetten, so lassen sich die Koeffizienten durch Polynome in $z_1, \ldots, z_n$ approximieren, deren Koeffizienten algebraisch über k sind. Es gibt also eine endliche normale algebraische Erweiterung k_* von k und affinoide Funktionen $f_\nu^* = \sum_{\lambda=0}^{l} a_{\nu\lambda} h^\lambda$ mit $a_{\nu\lambda} \in \hat{A}_{k_*}$ über $\hat{X}$, so daß dort $|f_\nu(x) - f_\nu^*(x)| < 1$ gilt (¹). Wir setzen $f_0^* = h/a$ mit $|a| = r$ und erhalten

$$X^* = \{x \in X : |f_\nu^*(x)| \leq 1 \,;\, \nu = 0, \ldots, q\}.$$

Leider sind die f_ν^* noch nicht über k definiert. Es seien G_κ die Elemente der Galoisgruppe von k_* über k. Dann sind (²) $G_\kappa f_\nu^* = \sum_{\lambda=0}^{l} (G_\kappa a_{\nu\lambda}) h^\lambda$ die Konjugierten von f_ν^*. Wir bilden die elementar-symmetrischen Funktionen $b_{\nu\mu}$ von f_ν^*. Für diese ist in einem Punkt $x \in X$ (außerhalb der Polstellenmenge von h) genau dann $|b_{\nu\mu}(x)| \leq 1 \,;\, \mu = 1, 2, \ldots,$ wenn für alle λ die Werte $|(G_\lambda f_\nu^*)(x)| \leq 1$ sind. Nun gibt es zu jedem $x \in \hat{X}$ ein $x_\lambda = \bar{G}_\lambda(x) \in \hat{X}$, so daß $\bar{G}_\lambda(f_\nu^*(x)) = (G_\lambda f_\nu^*)(x_\lambda)$ und mithin $|f_\nu^*(x)| = |(G_\lambda f_\nu^*)(x_\lambda)|$. Da mit x auch $x_\lambda \in X^*$, folgt immer für $x \in X^*$ die Ungleichung $|G_\lambda f_\nu^*(x)| \leq 1$ und mithin $|b_{\nu\mu}(x)| \leq 1$. Ist $x \in X - X^*$, so ist dagegen wenigstens ein $|b_{\nu\mu}(x)| > 1$. Also hat man

$$X^* = \{|b_{\nu\mu}(x)| \leq 1,\ |h| \leq r\}.$$

Im Falle char $k=0$, sind die $b_{\nu\mu}$ meromorphe Funktionen über k, im Falle der Charakteristik p sind es sicher die $b_{\nu\mu}^{p^\alpha}$, wenn α hinreichend groß ist. Wir können die $h_{\nu\mu}$ durch die $b_{\nu\mu}^{p^\alpha}$ ersetzen. Man hat $|b_{\nu\mu}(x)| \leq 1$ genau dann, wenn $|b_{\nu\mu}^{p^\alpha}| \leq 1$. Es ist damit alles gezeigt. Satz 2 ist aus dem Satz 3 hergeleitet.

Anhang

1. Es seien X ein k-affinoider Raum, $\mathfrak{S} = (S, \Gamma_*(S))$ eine k-kohärente affinoide Garbe über X. Wir nennen ein Element $\sigma \in S_x$, das durch Multiplikation mit einem kompletten Funktionskeim $f_x \in H_x$ zu Null wird, ein Torsionselement in S_x. Die Gesamtheit der Torsionselemente bildet eine analytische Untergarbe $T(S) \subset S$. Setzt

(¹) $\hat{A}_{k_*}$ bezeichnet den affinoiden Ring von $\hat{X}$ nach Erweiterung des Grundkörpers zu k_*. Es gilt also $\hat{A}_{k_*} = \hat{A} \hat{\otimes} k_* = \hat{A} \otimes k_*$. Analoges gilt für das Folgende.

(²) Es wird $G\lambda(\Sigma c_{\nu_1 \ldots \nu_n} z_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\nu_n}) = \Sigma G\lambda(c_{\nu_1 \ldots \nu_n}) . z_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\nu_n}$ gesetzt.

man $\Gamma_* = \Gamma_*(\mathrm{T}(\mathrm{S})) = \Gamma_*(\mathrm{S}) \cap \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{T}(\mathrm{S}))$, so ist $(\mathrm{T}(\mathrm{S}), \Gamma_*)$ eine affinoide Untergarbe von $(\mathrm{S}, \Gamma_*(\mathrm{S}))$. Wir zeigen :

Satz 1. — T(S) *ist k-kohärent. Zu jedem* $s \in \Gamma_*(\mathrm{T}(\mathrm{S}))$ *gibt es eine komplette Funktion* $f \in \mathrm{A}$, *so daß* $f \cdot s = 0$ *ist.*

Zum Beweis werde zunächst angenommen, daß $\mathrm{X} = \mathrm{E}^n$ ist. Wegen der Kohärenz gibt es über E^n eine k-exakte Sequenz $(p\mathcal{O}, p\mathrm{T}_n) \to (q\mathcal{O}, q\mathrm{T}_n) \xrightarrow{\varepsilon} (\mathrm{S}, \Gamma_*(\mathrm{S})) \to 0$. Es sei $(\mathrm{K}, \Gamma_*(\mathrm{K}))$ das Bild von $(p\mathcal{O}, p\mathrm{T}_n)$. Ist $h = (h_1, \ldots, h_q) \in q\mathrm{T}_n$, so ist

$$h(x) = (h_1(x), \ldots, h_q(x)) \in \bar{k}^q.$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{K}(x)$ den Vektorraum, der von den $h(x)$ mit $h \in \Gamma_*(\mathrm{K})$ aufgespannt wird. Es sei $r = \max\limits_{x \in \mathrm{E}^n} \dim \mathrm{K}(x)$. Wir wählen $h_1, \ldots, h_r \in \Gamma_*(\mathrm{K})$, so daß

$$\max \operatorname{rg}(h_1(x), \ldots, h_r(x)) = r$$

und dann q-tupel $h_{r+1}, \ldots, h_q \in q\mathrm{T}_n$ mit $\max \operatorname{rg}(h_1(x), \ldots, h_q(x)) = q$. Es ist

$$h = \det(h_1, \ldots, h_q) \not\equiv 0$$

und $\mathrm{S}' = h \cdot \mathrm{S}$. Für jedes Element $f_x \in q\mathcal{O}_x$ läßt sich $h \cdot f_x$ eindeutig als Linearkombination von $h_1, \ldots, h_q$ darstellen. Die Teilmenge $\mathrm{S}' \subset \mathrm{S}$ ist daher torsionsfrei. Es sei etwa $\sigma' = h \,.\, \sigma = \varepsilon(h \cdot f_x) \in \mathrm{S}'_x$ von Null verschieden. Es gilt dann $h \cdot f_x = \sum\limits_{\nu=1}^{q} a_{\nu x} h_\nu$, wobei gewisse $a_{\nu x}$ mit $\nu > r$ nicht verschwinden. Ist $g_x \in \mathcal{O}_x$ nicht Null, so folgt $g_x \cdot \sigma' = \varepsilon(\sum\limits_{\nu=1}^{q} (g_x a_{\nu x}) h_\nu) \neq 0$, weil $\Sigma = \sum\limits_{\nu=1}^{q} (g_x a_{\nu x}) \cdot h_\nu$ nicht in K_x ist. In K_x ist nämlich jedes Element stets von $h_1, \ldots, h_r$ linear abhängig. Da wenigstens ein $g_x \cdot a_{\nu x} \neq 0$, $\nu > r$ ist, sind $\Sigma, h_1, \ldots, h_r$ linear unabhängig. Die Torsionsgarbe T(S) ist also gerade der Kern des durch die Multiplikation mit h definierten Homomorphismus $\mathrm{S} \to \mathrm{S}$ und ist deshalb k-kohärent.

Als nächstes betrachten wir den Fall, wo red X irreduzibel ist. X ist in diesem Fall reindimensional. Es gibt eine endliche surjektive Abbildung $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{E}^n$. Ist $h \in \mathrm{T}_n$ nicht Null, so ist $h \circ \varphi$ in X komplett. Es sei $h \neq 0$ aus T_n, so daß die Menge $\mathbf{S}' = h \cdot \varphi_*(\mathrm{S})$ torsionsfrei ist (¹). $\mathrm{S}' = (h \circ \varphi) \cdot \mathrm{S}$ ist dann ebenfalls torsionsfrei. Das gilt zunächst für die Multiplikation mit Funktionskeimen $f_x \circ \varphi$, $f_x \neq 0$. Andererseits teilt jeder komplette Funktionskeim auf X einen solchen. Also ist das Produkt eines Elementes $\sigma \neq 0$ aus S' mit einem kompletten Funktionskeim niemals Null. — T(S) ist also wieder der Kern des durch die Multiplikation mit $h \circ \varphi$ definierten Homomorphismus. T(S) ist wieder kohärent.

Es sei nun X beliebig. Wir zerlegen red X in irreduzible Komponenten : $\mathrm{red}\, \mathrm{X} = \mathrm{X}_1^* \cup \ldots \cup \mathrm{X}_l^*$ und stellen das Nullideal in A als Durchschnitt von Primäridealen dar : $0 = \mathfrak{g}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_l$. Die gemeinsame Nullstellenmenge der Funktionen aus jedem $\mathfrak{g}_\lambda$

(¹) $\varphi_*(\mathrm{S})$ bezeichnet die 0-te Bildgarbe von S. Analoges gilt für das Folgende.

ist stets vollständig in einer irreduziblen Komponente X_ν^* enthalten. Es sei $\mathfrak{q}_\nu$ der Durchschnitt aller Primärideale $\mathfrak{g}_\lambda$ deren Nullstellenmenge in X_ν^* enthalten ist. Die Funktionen aus $\mathfrak{q}_\nu$ verschwinden dann in den Punkten aus $X_\nu^* - \bigcup_{\mu \neq \nu} X_\mu^*$ (als Schnittflächen in H). Wir setzen nun $A_\nu = A/\mathfrak{q}_\nu$, $H_\nu = H/\mathfrak{q}_\nu \cdot H$ und $X_\nu = (X_\nu^*, H_\nu, A_\nu)$. Es gilt $\operatorname{red} X_\nu = X_\nu^*$. Die Reduktion ist also irreduzibel. Es sei weiter $S_\nu = S/\mathfrak{q}_\nu \cdot S$. Nach dem vorhergehenden können wir zu X_ν stets eine komplette Funktion h'_ν finden, so daß $S_\nu \cdot h'_\nu$ torsionsfrei ist. Man darf $h'_\nu = h_\nu/\mathfrak{q}_\nu$ mit $h_\nu \in \bigcap_{\mu \neq \nu} \mathfrak{q}_\mu$ annehmen. Die Funktion $h = \sum_{\nu=1}^{l} h_\nu$ ist dann auf ganz X komplett und $[h]$ verschwindet auf $D = \bigcup_{\nu \neq \mu} X_\nu \cap X_\mu$. In $X' = X - D$ ist $S' = S \cdot h$ torsionsfrei.

Der Trägerkeim eines jeden Torsionselementes $\sigma \in S'$ muß also in D enthalten sein. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es eine Potenz h^s, so daß $h^s . \sigma = 0$ ist. Es sei $\mathfrak{T}_s$ der Kern des durch die Multiplikation mit h^s definierten Homomorphismus $S \rightarrow S$. $\mathfrak{T}_s \subset S$ ist stets eine k-kohärente Untergarbe von S. Die Folge $\mathfrak{T}_s$ ist aufsteigend und die Vereinigung enthält alle Torsionselemente von S. Da wir im noetherschen Bereich sind, bricht $\mathfrak{T}_s$ an einer Stelle s_0 ab und man hat $T(S) = \mathfrak{T}_{s_0} = \bigcup_s \mathfrak{T}_s$. Die Torsionsgarbe $T(S)$ ist also kohärent. Damit ist alles gezeigt.

2. Es sei X ein rein eindimensionaler affinoider Raum, $f \in A = A(X)$ sei komplett. Wir zeigen :

Satz 2. — Die Menge $N = \{x \in X : f(x) = 0\}$ *ist endlich und besteht nur aus algebraischen Punkten über k.*

Beweis. — Wir dürfen X als reduziert annehmen. Es gibt eine endliche Abbildung $\psi : X \rightarrow E = E^1$. Durch die Zuordnung $f_1 \rightarrow f_1 \circ \psi$ ist T_1 in A eingebettet. Die Funktion f genügt einer ganz algebraischen Gleichung über T_1. Es sei $\omega = w^b + a_1 w^{b-1} + \ldots + a_b$ das Minimalpolynom von f. Da f Nichtnullteiler ist, folgt $a_b \neq 0$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ist die Menge $M = \{a_b = 0\}$ Nullstellenmenge eines Polynoms. Sie besteht also nur aus algebraischen Punkten und ist endlich. Über M liegen nur endlich viele Punkte. Also ist N endlich. Jede Funktion $g \in A$ genügt einer Gleichung $w^s + b_1 w^{s-1} + \ldots + b_s = 0$ mit $b_\nu \in T$. Ist $x \in N$, so gilt $\mathbf{x} = \psi(x) \in M$ und $(g(x))^s + b_1(\mathbf{x})(g(x))^{s-1} + \ldots + b_s(\mathbf{x}) = 0$. Die Werte $b_\nu(\mathbf{x})$ liegen in $k(\mathbf{x})$ und sind algebraisch. Also folgt, daß auch $g(x)$ immer algebraisch ist, d.h. x ist ein algebraischer Punkt, q.e.d.

3. AFFINOIDE HÜLLEN

1. Es sei X^* ein affinoider Raum über einem Grundkörper k. Wir nennen wieder einen Punkt $x_0 \in X^*$ einen algebraischen Punkt, wenn der zugehörige Charakter die Algebra $A^* = A(X^*)$ in eine endlich algebraische Erweiterung von k abbildet. Die Menge der algebraischen Punkte $\Lambda \subset X^*$ liegt dicht. Der Beweis dafür ist nahezu trivial (man vgl. auch [1]). Zunächst genügt es, die Aussage für den Fall zu beweisen, wo X^* irreduzibel ist. Man kann dann X^* als Überlagerung $\psi : X^* \to E^d$ darstellen. Die algebraischen Punkte in E^d liegen dicht, das Urbild eines jeden algebraischen Punktes $x \in E^d$ besteht nur aus algebraischen Punkten in X^* und ψ ist eine offene Abbildung. Daraus folgt alles.

Es sei *fortan* X^* über $\bar{k}$ definiert und *separiert*. Es sei stets eine dichte Teilmenge $\Lambda \subset X^*$ gegeben. Wir schreiben im folgenden für $\bar{k}$ einfach k. *Der Körper k ist also von nun an algebraisch abgeschlossen.* Es sei $X \subset X^*$ ein affinoider Teilbereich. Wir definieren die affinoide Hülle von X :

Definition 1. — Die affinoide Hülle von X *ist die Punktmenge*

$$\hat{X} = \{x \in X^* : |f(x)| \leq \sup |f(X)| \ \textit{für alle} \ f \in A^*\}.$$

Es ist klar, daß $X \subset \hat{X}$ gilt. $\hat{X}$ wird jedoch im allgemeinen keine offene Teilmenge von X^* sein.

2. Es sei fortan X^* als rein 1-dimensional vorausgesetzt. Wir schreiben

$$\hat{A} = \{f | X : f \in A^*\} \quad \text{und} \quad \widetilde{\hat{A}} = \mathring{\hat{A}}/t(\hat{A}).$$

Wegen $\dim X = 1$ folgt $\dim \widetilde{A} = 1$. $\widetilde{\hat{A}}$ ist eine κ-Unteralgebra von $\widetilde{A}$ und deshalb endlich erzeugt, d.h. eine affine Algebra (vgl. Anhang). Der zugehörige affine Raume sei mit $\widetilde{\hat{X}}$ bezeichnet.

Wir wählen Elemente $f_1, \dots, f_l \in A^*$, so daß $f_\nu | X \in \mathring{A}$ und $\tau(f_\nu | X)$ Erzeugende von $\widetilde{\hat{A}}$ sind. Wir setzen $Y = \{x \in X^* : |f_\nu(x)| \leq 1$ für $\nu = 1, \dots, l\}$. Es seien $x_1, \dots, x_n \in A^*$ (topologisch) Erzeugende. Jede Funktion $h \in A(Y)$ kann dann durch Polynome in $x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_l$ approximiert werden. Es folgt, daß für $h \in \mathring{A}(Y)$ stets gilt : $h | X = h_1 + h_2 | X$ mit $h_1 \in \mathring{\hat{A}}$ und $h_2 \in t(A(Y))$. Die durch die Identität $X \to Y$ definierte Abbildung $\widetilde{A}(Y) \to \widetilde{A}(X)$ bildet also $\widetilde{A}(Y)$ in $\widetilde{\hat{A}}$ ab. $\widetilde{A}(Y) \to \widetilde{\hat{A}}$ ist sogar surjektiv. Die Bilder von $\widetilde{f}_\nu = \tau(f_\nu | Y) \in \widetilde{A}(Y)$ in $\widetilde{\hat{A}}$ sind $\tau(f_\nu | X)$ und diese erzeugen $\widetilde{\hat{A}}$. Für die zugehörigen affinen Räume hat man reguläre Abbildungen : $\widetilde{X} \xrightarrow{p} \widetilde{\hat{X}} \xrightarrow{i} \widetilde{Y}$. Jede auf $\widetilde{\hat{X}}$ reguläre Funktion kommt von $\widetilde{Y}$. Man darf deshalb $\widetilde{\hat{X}}$ als Unterraum von $\widetilde{Y}$ auffassen. Keine in $\widetilde{\hat{X}}$ reguläre von Null verschiedene Funktion hat ein Urbild in $\widetilde{X}$, das Null ist. Es gibt deshalb eine endliche nirgends dichte Teilmenge $D \in \widetilde{\hat{X}}$, so daß $\widetilde{X}$ auf $\widetilde{\hat{X}} - D$ abgebildet wird.

3. Wir zeigen, daß $\widetilde{\hat{X}}$ rein eindimensional ist. Da $\widetilde{Y}$ (rein) eindimensional [1] ist, folgt $\dim \widetilde{\hat{X}} \leq 1$. Es werde nun angenommen, daß irgendwo $\dim_{\widetilde{x}} \widetilde{\hat{X}} = 0$ ist. Der Punkt $\widetilde{x} \in \widetilde{Y}$ ist dann ein isolierter Punkt von $\widetilde{\hat{X}}$ und es gibt eine Funktion $\widetilde{f} \in \widetilde{A}(Y)$ mit $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = 1$ und $\widetilde{f} \,|\, (\widetilde{\hat{X}} - \{\widetilde{x}\}) \equiv 0$. Wir wählen ein Urbild $f \in \mathring{A}(Y)$ und setzen $X_1 = \{x \in X : |f(x)| \geq 1\}$. Die Menge X_1 ist ein affinoider Teilbereich von X. Er ist nicht leer : Da $\widetilde{x}$ isoliert liegt, gilt $\widetilde{x} \notin D$. Also müssen über $\widetilde{x}$ Punkte von $\widetilde{X}$ liegen. Genau so folgt, daß $X_2 = X - X_1$ Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen ist. Man nimmt einfach ein $\widetilde{g} \in \widetilde{A}(Y)$ mit $\widetilde{g}(\widetilde{x}) = 0$ und $\widetilde{g}(\widetilde{\hat{X}} - \{\widetilde{x}\}) = 1$. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in X_1$ und eine affinoide Funktion $h \in A(Y)$ mit $h(x_0) = 0$, h Nichtnullteiler. Unsere Funktion h verschwindet in keiner Umgebung von x_0 identisch. Durch Multiplikation mit einer Potenz von f kann man ferner erreichen, daß $\sup |h(X_2)| < \sup |h(X_1)|$; denn es gilt $|f(x)| < 1$ für $x \in X_2$ und mithin $\sup |f(X_2)| < 1$. Andererseits ist aber $|f(x)| = 1$ für $x \in X_1$. Es folgt nach Multiplikation mit einer Konstanten $\sup |h(X_1)| = 1$, $\sup |h(X_2)| < 1$ und $h(x_0) = 0$. Also ist $\widetilde{h} \in \widetilde{\hat{A}}$ eine Funktion, die in dem Urbild $\widetilde{X}_1$ von $\widetilde{x}$ bez. $\widetilde{X} \to \widetilde{\hat{X}}$ nicht konstant ist. Das ist ein Widerspruch!

4. Das Bild der Entartungsmenge von $p : \widetilde{X} \to \widetilde{\hat{X}}$ ist endlich. Es gibt sogar eine endliche Menge $D_1 \subset \widetilde{\hat{X}}$, so daß $\widetilde{X}' = p^{-1}(\widetilde{\hat{X}} - D_1)$ endlich auf $\widetilde{\hat{X}}' = \widetilde{\hat{X}} - D_1$ abgebildet wird.

Es gilt darüber hinaus :

Satz 1. — Es gibt eine endliche Menge $D_1 \subset \widetilde{\hat{X}}$, *so daß* $\widetilde{X}' \to \widetilde{\hat{X}}'$ *biregulär ist.*

Beweis. — Wir können $D_1 = \{\widetilde{g} = 0\}$ mit $\widetilde{g} \in \widetilde{A}(Y)$ wählen. Da $\widetilde{\hat{X}}$ Vereinigung von irreduziblen Komponenten von $\widetilde{Y}$ ist, dürfen wir auch $\widetilde{g} \,|\, (\widetilde{Y} - \widetilde{\hat{X}}) \equiv 0$ annehmen. Wir bezeichnen mit g ein Urbild aus $\mathring{A}(Y)$ und betrachten den affinoiden Raum $Y_1 = \{x \in Y : |g(x)| = 1\}$. Es gilt $\widetilde{Y}_1 = \widetilde{\hat{X}}'$, da jedes $\widetilde{f} \in \widetilde{A}(Y_1)$ Bild einer Funktion $f = h/g^s$ mit $h \in \mathring{A}(Y)$ ist. Wir führen nun das, was wir für Y durchgeführt hatten, für X durch. Es sei $X_1 = \{x \in X : |g(x)| = 1\}$. Dann gilt $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X}'$. Der affinoide Raum X_1 ist also bez. der Identität endliche affinoide Überlagerung von Y_1. Die Menge X_1 ist

---

[1] Die Aussage kann auf etwa folgende Weise bewiesen werden (für beliebige Dimensionen d) : Man stellt Y als endliche Überlagerung $\gamma : Y \to E^d$ des E^d dar. Zu jeder Funktion $f \in A(Y)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Minimalpolynom $\omega = w^b + a_1 w^{b-1} + \ldots + a_b$ mit $a_\nu \in T_d$ und $\omega(f) = 0$. Es gilt $f \in \mathring{A}(Y)$ genau dann, wenn alle $||a_\nu|| \leq 1$ sind und $f \in t(A(Y))$ dann und nur dann, wenn für alle ν die Ungleichung $||a_\nu|| < 1$ gilt. Ist $f \in \mathring{A}(Y)$, aber nicht in $t(A)$ und ist $g \in \mathring{T}_d - t(T_d)$, so folgt $f \cdot g \in \mathring{A} - t(A)$. Also ist $\widetilde{A}$ ein torsionsfreier Modul über $\kappa[x_1, \ldots, x_d] = \widetilde{T}_d$. Alle irreduziblen Komponenten von $\widetilde{Y}$ haben deshalb die Dimension d.

deshalb Vereinigung von irreduziblen Komponenten von Y_1. Da aber $\widetilde{X}_1 \to \widetilde{Y}_1$ surjektiv ist, folgt $X_1 = Y_1$. Mithin ist $\widetilde{X}_1 \to \widetilde{Y}_1$ biregulär, w.z.b.w.

5. Es gibt ein $\psi \in \mathring{A}(Y)$, so daß die durch ψ definierte Abbildung $\psi : Y \to E$ den affinoiden Raum Y zu einer endlichen und separierten Überlagerung von E macht. Man kann ψ so wählen, daß auch $\widetilde{\psi} : \widetilde{Y} \to \kappa$ eine endliche separierte Überlagerung ist und daß $(Y : E) = (\widetilde{\psi} : \kappa)$ gilt (1). Der Raum $\widetilde{\hat{X}} \subset \widetilde{Y}$ ist dann ebenfalls endliche separierte Überlagerung von κ. Es sei $b = (\widetilde{\hat{X}} : \kappa)$ die Blätterzahl.

Wir wählen Elemente $\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_l \in \widetilde{A}(Y)$, derart, daß $\widetilde{h}_\nu | \widetilde{\hat{X}}$ den Modul $\widetilde{\hat{A}}$ über $\widetilde{T} = \kappa[x]$ erzeugen. Es seien $\widetilde{h}_1 | \widetilde{\hat{X}}, \dots, \widetilde{h}_b | \widetilde{\hat{X}}$ linear unabhängig (sie sind es bei geeigneter Numerierung!). Wir nehmen Urbilder $h_1, \dots, h_l \in \mathring{A}(Y)$.

Es sei $\widetilde{D} \subset \kappa$ eine endliche Menge, so daß folgendes gilt :

1) $\widetilde{Y}$ ist über $\kappa - \widetilde{D}$ unverzweigt,

2) $\widetilde{X}' = p^{-1}(\widetilde{\hat{X}}')$ mit $\widetilde{\hat{X}}' = \widetilde{\hat{X}} - \widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{D})$ ist triviale Überlagerung von $\widetilde{\hat{X}}'$.

Wir bezeichnen mit D das Urbild von $\widetilde{D}$ in E. Die Menge $E' = E - D$ ist ein affinoider Teilbereich von E. Wir setzen $X' = X \cap \psi^{-1}(E')$, $Y' = Y \cap \psi^{-1}(E')$. Da $\widetilde{X}' \to \kappa - \widetilde{D}$ endlich, ist X' endliche affinoide Überlagerung von E'. Ihre Blätterzahl ist b : In der Tat sind die Werte von $h_1, \dots, h_b$ über « fast jedem » Punkt von E' eine Basis des k^b.

Wir ordnen jedem $f \in A(X')$ das b-tupel $g = (g_1, \dots, g_b) = \sigma f \in b \cdot A(E')$ mit $g_\nu = \mathrm{Sp}(h_\nu \cdot f)$ zu. Ist $x \in E'$ und sind $x_1, \dots, x_b$ die Urbildpunkte von x in X', so ist also $g_\nu(x) = \sum_{\lambda=1}^{b} h_\nu(x_\lambda) \cdot f(x_\lambda)$. Es gilt $\sup|f(X')| = \max_\nu \sup|g_\nu(E')|$. Man sieht das sofort, wenn man von f und g_ν zu $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}_\nu$ übergeht. Die Determinante der Matrix

$$(\widetilde{h}_\nu(x_\mu))_{\substack{\nu=1,\dots,b \\ \mu=1,\dots,b}} \text{ mit } \{x_\mu\} = \widetilde{\psi}^{-1}(x)$$

ist für fast alle $x \in \kappa - \widetilde{D}$ von Null verschieden. Der Homomorphismus σ ist also auch injektiv. Wir setzen $g^{(\nu)} = \sigma(h_\nu | X')$ für $\nu = 1, \dots, l$ und bezeichnen mit M den $\mathring{T}$-Modul der $\sigma(f | X')$ mit $f \in A(Y)$ und $f | X \in \mathring{A}(X)$. Da ein solches f durch Funktionen aus $A(X^*)$ approximiert werden kann, folgt stets $\tau(f) = \widetilde{f} \in \widetilde{\hat{A}}$. Mithin ist $\widetilde{f}$ auf $\widetilde{\hat{X}}$ regulär. Man hat also stets $\widetilde{\sigma(f | X')} \in b \cdot \widetilde{T}$. Es sei $\widetilde{M} \subset b\widetilde{T}$ der $\widetilde{T}$-Modul der $\widetilde{\sigma(f | X')}$. — Für $f \in A(Y)$ gilt übrigens $\sup|f(X)| = \sup|f(X')|$.

Der Modul M ist saturiert : Gilt $g \in M$ und ist $\|g\| = \max \|g_\nu\| = |a|$ mit

(1) Man vgl. [2], p. 119 oben. Die dort angegebene Aussage gilt schon, wenn B reindimensional ist.

$a \in k$, so folgt $g/a \in \mathrm{M}$. Ist nämlich $g=\sigma(f)$ mit $f \in \mathrm{A}(\mathrm{Y})$, so folgt, daß $\|g\|=\sup|f(\mathrm{X}')|$ ist. Man hat $\sigma(f/a)=g/a$ und $f/a|\mathrm{X}' \in \mathring{\mathrm{A}}(\mathrm{X}')$ und $f/a|\mathrm{X} \in \mathring{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$.

Wir zeigen im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Methode der Bewertungsringe, daß jedes $g \in \mathrm{M}$ über $\mathring{\mathrm{T}}$ Linearkombination der $g^{(\nu)}$; $\nu=1, \ldots, l$ ist. Jede Funktion $f \in \mathrm{A}(\mathrm{Y})$ mit $f|\mathrm{X} \in \mathring{\mathrm{A}}$ läßt sich dann über $\mathring{\mathrm{T}}$ als Linearkombination der h_ν darstellen. Es sei Y^* die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten von Y, die Punkte mit X' gemeinsam haben. Für jede Funktion $f \in \mathrm{A}(\mathrm{Y})$ mit $f|\mathrm{X} \in \mathring{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ gilt dann $f=\sum_{\nu=1}^{l} a_\nu h_\nu$ mit $a_\nu \in \mathring{\mathrm{T}}$ über X' und damit über Y^* und mithin $f|\mathrm{Y}^* \in \mathring{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}^*)$. Also folgt $\hat{\mathrm{X}} \supset \mathrm{Y}^*$. Ist andererseits $x_0 \in \mathrm{Y}-\mathrm{Y}^*$, so gibt es ein $f \in \mathrm{A}(\mathrm{Y})$ mit $f(x_0) \neq 0$ und $f(\mathrm{Y}^*)=f(\mathrm{X})=0$. Da man f gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathrm{A}(\mathrm{X}^*)$ approximieren kann, folgt $x_0 \notin \hat{\mathrm{X}}$. Also ist $\hat{\mathrm{X}}=\mathrm{Y}^*$. Da $\widetilde{\mathrm{Y}^*}=\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}$ ist und die Gleichheit der Blätterzahlen besteht, muß übrigens $\mathrm{Y}^*|\mathrm{E}'=\mathrm{X}'$ sein. — Wir haben folgenden wichtigen Satz bewiesen :

Satz 2. — Die affinoide Hülle $\hat{\mathrm{X}}$ *von* X *ist Vereinigung von irreduziblen Komponenten von* $\mathrm{Y}=\{x \in \mathrm{X}^* : |f_\nu(x)| \leq 1$ *für* $\nu=1, \ldots, l\}$.

6. Wir müssen noch zeigen, daß jedes $g \in \mathrm{M}$ von den $g^{(\nu)}$, $\nu=1, \ldots, l$ erzeugt wird. Wir betrachten die Algebra T' der affinoiden Funktionen auf E'. Es sei $\tilde{\mathrm{D}}=\{\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_m\} \subset \kappa$ wie in Abschnitt 5. Es gilt dann $\mathrm{E}'=\mathrm{E}-\mathrm{D}$ und $\mathrm{D}=\bigcup_\nu \mathrm{D}_\nu$ mit $\mathrm{D}_\nu=\tau^{-1}(\tilde{d}_\nu)$. Wir wählen feste Punkte $d_\nu \in \mathrm{D}_\nu$ und zeigen :

Satz 3. — Jedes $f \in \mathrm{T}'$ *läßt sich eindeutig in eine Reihe* $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda+\sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\nu\lambda}(x-d_\nu)^{-\lambda}$ *entwickeln, wobei die* a_λ *und die* $a_{\nu\lambda}$ *Nullfolgen sind.*

Beweis. — Die Eindeutigkeit ist beinahe trivial. Es sei etwa

$$0=\sum_{\lambda=0} a_\lambda x^\lambda+\sum_{\nu, \lambda} a_{\nu\lambda}(x-d_\nu)^{-\lambda}.$$

Nach Multiplikation mit einer Konstanten hat der größte Koeffizient der Reihe den Betrag 1. Es gilt dann $0=\sum \tilde{a}_\lambda x^\lambda+\sum_{\nu, \mu} \tilde{a}_{\nu\lambda}(x-\tilde{d}_\nu)^{-\lambda}$. Diese neue Reihe ist endlich. Aus der Algebra folgt dann, daß sämtliche Koeffizienten verschwinden müssen. Das ist ein Widerspruch!

Um die Existenz zu zeigen, beachten wir, daß durch $w=x$, $w_\nu=(x-d_\nu)^{-1}$; $\nu=1, \ldots, m$ der Raum E' biaffinoid in E^{m+1} eingebettet wird. Jede affinoide Funktion $f \in \mathrm{T}'$ läßt sich deshalb in eine Reihe $f=\sum b_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_m} w^{\nu_0} \cdot w_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot w_m^{\nu_m}$ mit $b_{\nu_0\ldots\nu_m} \rightarrow 0$ entwickeln. Die Produkte $x^{\nu_0} \cdot (x-d_1)^{-\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x-d_m)^{-\nu_m}$ lassen sich nun nach der Partialbruchzerlegung schreiben als $\sum_{\lambda=0}^{\nu_0} c_\lambda x^\lambda+\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\nu_\mu} c_{\mu\lambda}(x-d_\nu)^{-\lambda}$ mit $|c_\lambda|, |c_{\mu\lambda}| \leq 1$. Das kann man einsetzen. Man erhält dann die verlangte Reihe.

Es sei $g \in M$ gegeben. Wir entwickeln g und $g^{(\nu)}$ in Reihen nach Satz 3. Die Koeffizienten sind natürlich nun b-tupel von Elementen aus k. Ihre Komponenten liegen ferner alle in E, da $\|g\|$, $\|g^{(\nu)}\| \leq 1$ ist. Es sei $B \subset E$ der kleinste Bewertungsring, der die Koeffizienten a_λ, $a_{\nu\lambda}$ aller Komponenten von g, $g^{(\nu)}$ enthält. Nach [2] ist B quasinoethersch.

Wir schreiben $g = \sum_{\kappa=1}^{\infty} g_\kappa$ und $g_\kappa = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\kappa\lambda} x^\lambda + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\kappa\nu\lambda}(x-d_\nu)^{-\lambda}$ und

$$g(\mu) = g - \sum_{\kappa=1}^{\mu-1} g_\kappa.$$

Wir definieren nun zunächst g_1. Es sei $g(1) = g$ und $r_1 = \|g(1)\|$. Wir wählen ein $c_1 \in B$, so daß $|c_1| = r_1$. Ein solches c_1 existiert, weil $\|g(1)\|$ das Maximum der Koeffizientenbeträge von $g(1)$ ist. Man kann $\widetilde{(g(1)/c_1)}$ in der Form $\sum_{\nu=1}^{l} \widetilde{c_{1\nu}} \widetilde{g}^{(\nu)}$ mit $\widetilde{c_{1\nu}} \in \widetilde{T}$ darstellen. Das Element $\widetilde{(g(1)/c_1)}$ liegt nämlich in $\widetilde{M}$ und ist ein b-tupel von Polynomen.

Es sei $\widetilde{B} = \tau(B)$ und $\widetilde{V}_1 = \tau(V_1)$ mit $V_1 = \{e \in E : c_1 \cdot e \in B\}$. $\widetilde{B}$ ist ein Körper und $\widetilde{V}_1$ ein (endlich-dimensionaler) Vektorraum über $\widetilde{B}$. Die Koeffizienten von den $\widetilde{g}^{(\nu)}$ liegen in $\widetilde{B}$, die von $\widetilde{(g(1)/c_1)}$ in $\widetilde{V}_1$. Man kann deshalb die $\widetilde{c_{1\nu}}$ so wählen, daß ihre Koeffizienten aus $\widetilde{V}_1$ sind. Es seien $c_{1\nu} \in \mathring{T}$ Urbilder der $\widetilde{c_{1\nu}}$ mit Koeffizienten in V_1. Wir setzen schließlich $g_1 = c_1 \cdot \sum c_{1\nu} g^{(\nu)}$. — Die Koeffizienten von $g(2)$ liegen wieder in B. Man kann das gleiche für $g(2)$ durchführen, dadurch g_2 und $g(3)$ definieren und so fortfahren. Da $|B|$ diskret ist, streben c_κ, $g(\mu)$, g_κ gegen Null. Man hat $g = \sum_{\kappa=1}^{\infty} g_\kappa = \sum_{\nu=1}^{l} (\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda \cdot c_{\lambda\nu}) \cdot g^{(\nu)}$. Die benötigte Aussage ist also bewiesen.

Anhang

Wir zeigen (κ braucht nicht algebraisch abgeschlossen zu sein) :

Satz. — *Jede Unter-κ-Algebra einer 1-dimensionalen, reduzierten affinen κ-Algebra $\widetilde{A}$ ist eine affine κ-Algebra.*

Beweis. — Es sei $\widetilde{X}$ das affine Model von $\widetilde{A}$ und $\widetilde{A}'$ die Unteralgebra von $\widetilde{A}$. Wir dürfen es als zusammenhängend voraussetzen. Es seien $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_p$ diejenigen irreduziblen Komponenten von $\widetilde{X}$, auf denen Funktionen $\widetilde{f} \in \widetilde{A}'$ nicht konstant sind. $\widetilde{A}'$ ist dann eine Algebra von regulären Funktionen auf $\widetilde{X}_1 \cup \ldots \cup \widetilde{X}_p$. Wir bilden die Normalisierung $\hat{X}_\nu$ von $\widetilde{X}_\nu$ und schließen $\hat{X}_\nu$ zu einem vollständigen normalen algebraischen Raum $\overline{X}_\nu$ ab $(\nu = 1, \ldots, p)$. $\widetilde{A}'$ ist nun eine Algebra von regulären Funktionen auf der disjunkten Vereinigung $\bigcup_{\nu=1}^{p} \hat{X}_\nu$. Es sei D die (endliche) Menge derjenigen Punkte $x \in \bigcup_\nu \overline{X}_\nu$, in denen wenigstens eine Funktion $\widetilde{f} \in \widetilde{A}'$ eine Polstelle hat. $\hat{X}' = \bigcup_{\nu=1}^{p} \overline{X}_\nu - D$ ist dann ein normaler affiner Raum. Es gibt Funktionen $\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m} \in \widetilde{A}'$, die eine eigentliche reguläre Abbildung $\psi^* : \hat{X}' \to \bar{\kappa}^m$ vermitteln. $\widetilde{A}'$ ist dann ein endlicher Modul über dem affinen Ring von $\bar{\kappa}^m$, er wird von Funktionen $\widetilde{f_{m+1}}, \ldots, \widetilde{f_n} \in \widetilde{A}'$ erzeugt. Die durch $\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_n}$ vermittelte reguläre Abbildung $\psi : \hat{X}' \to \bar{\kappa}^n$ ist wieder eigentlich und $\widetilde{A}'$ ist der affine Ring von $\widetilde{X}' = \psi(\hat{X}') \subset \bar{\kappa}^n$, w.z.b.w.

Anmerkung. — In höheren Dimensionen ist der gleiche Schluß wegen der Unbestimmtheitsstellen unmöglich.

4. DER BEWEIS DES HAUPTRESULTATES

1. Wir hatten im vorigen Paragraphen gezeigt, daß $\hat{X}$ Vereinigung von irreduziblen Komponenten von Y ist. Es sei Y_1 die Vereinigung der restlichen Komponenten. Ist $Y_1 \cap \hat{X} = \emptyset$, so gibt es affinoide Funktionen $f_1, \ldots, f_l \in A(Y)$, die auf $\hat{X}$ verschwinden, so daß $\max_\nu |f_\nu(x)|$ in jedem Punkte $x \in Y_1$ größer als Null ist. Da man die f_ν durch affinoide Funktionen aus $A(X^*)$ approximieren kann, läßt sich zeigen, daß dann $\hat{X}$ ein Weierstraßteilbereich von X^* ist. Ist nun $X = \hat{X}$, so ist alles bewiesen. Im Falle $Y_1 \cap \hat{X} \neq \emptyset$ gilt sicher auch $X \neq \hat{X}$. Anderenfalls enthielte ja X Punkte, die keine inneren Punkte von Y und damit von X^* wären. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei $X \neq \hat{X}$. Wir wählen dann einen Punkt $x_1 \in \hat{X} - X$. Da $\hat{X} - X$ offen in $\hat{X}$ liegt, können wir x_1 sogar aus Λ wählen. Das geschehe! Wir konstruieren nach dem in § 2 beschriebenen Verfahren eine in X^* meromorphe Funktion $\mathfrak{f}_1$, die genau in x_1 einen Pol hat und bei der $\mathfrak{f}_{1x_1}^{-1} \in H_{x_1}$ ist. $|\mathfrak{f}_1|$ strebt also für $x \to x_1$ gegen $+\infty$. Die Funktion $[\mathfrak{f}_1]$ ist auf X beschränkt. Wir können deshalb ein $r_1 \in |k^*|$ finden, so daß der affinoide Teilbereich $X_1^* = \{x \in X^* : |\mathfrak{f}_1(x)| \leq r_1\}$ unseren Teilbereich X umfaßt. Wir dürfen $\sup |\mathfrak{f}_1(X)| = 1$ annehmen. Wir führen nun sämtliche Schritte in bezug auf X_1^* anstatt in bezug auf X^* durch. Es gilt $\widetilde{\hat{A}} \subset \widetilde{\hat{A}_1} \subset \widetilde{\mathring{A}}(X)$. Ist $\widetilde{\hat{A}} = \widetilde{\hat{A}_1}$, so wählen wir für $f_1, \ldots, f_l$ die gleichen Funktionen wie in § 3. Es sei Y wie in § 3 die Menge $\{x \in X^* : |f_\nu(x)| \leq 1\}$. Wir wählen ψ und die Funktionen $h_1, \ldots, h_l$ auf Y ebenfalls wie in § 3, betrachten aber jetzt den Modul $M_1 \subset b T'$ der Elemente $\sigma(h|X')$ mit $h \in A(Y \cap X_1^*)$ und $h|X \in \mathring{A}(X)$. M_1 ist wieder saturiert. Für jedes $h \in A(Y \cap X_1^*)$ mit $h|X \in \mathring{A}(X)$ gilt jedoch $\widetilde{h} \in \widetilde{\hat{A}}$. Die affine Funktion $\widetilde{h}$ ist deshalb stets auf $\widetilde{\hat{X}}$ regulär und über $\kappa[x]$ als Linearkombination von $\widetilde{h_1}, \ldots, \widetilde{h_l}$ darstellbar. Daraus folgt wie in § 3, Abschnitt 6, daß $h|X'$ über $\mathring{T}$ Linearkombination von $h_1, \ldots, h_l$ ist. Die h_ν sind aber affinoide Funktionen auf Y. Die Darstellung von h gilt sicher über ganz $\hat{X}$, welches wie in § 3 in bezug auf X^* definiert sei. Also ist $\mathfrak{f}_1|\hat{X}$ im Gegensatz zur Voraussetzung eine affinoide Funktion.

2. Man hat also $\widetilde{\mathrm{A}} \neq \widetilde{\mathrm{A}}_1$. Ist nun noch $\mathrm{X} \neq \hat{\mathrm{X}}_1$, so wählt man einen Punkt $x_2 \in (\hat{\mathrm{X}}_1 - \mathrm{X}) \cap \Lambda$ und konstruiert eine meromorphe Funktion $\mathfrak{f}_2$ über X^*, die nur in x_2 einen Pol hat und die bei Annäherung an x_2 gegen unendlich strebt. Wir wählen ein $r_2 \in |k|$, so daß $\mathrm{X}_2^* = \{x \in \mathrm{X}^* : |\mathfrak{f}_1(x)| \leq r_1, |\mathfrak{f}_2(x)| \leq r_2\} \supset \mathrm{X}$. Man erhält $\widetilde{\mathrm{A}} \subset \widetilde{\mathrm{A}}_1 \subset \widetilde{\mathrm{A}}_2 \subset \widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ und $\widetilde{\mathrm{A}}_2 \neq \widetilde{\mathrm{A}}_1$. Wir werden zeigen, daß eine aufsteigende Folge von affinen Teilringen in $\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ abbrechen muß. Nach endlich vielen Schritten hat man also $\mathrm{X} = \hat{\mathrm{X}}_s \subset \mathrm{X}_s^*$.

X ist also Weierstraßbereich in X_s^*. Man kann die Funktionen $f \in \mathrm{A}(\mathrm{X}_s^*)$ in strikt konvergente Potenzreihen $f = \Sigma a_{\nu_1 \ldots \nu_s} \left(\frac{\mathfrak{f}_1}{a_1}\right)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\mathfrak{f}_s}{a_s}\right)^{\nu_s}$ entwickeln mit $|a_\nu| = r_\nu$ und $a_\nu \in k$. Es gibt deshalb meromorphe Funktionen $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_q$, die nur in $x_1, \ldots, x_s \in \Lambda$ Polstellen haben, so daß $\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{X}^* : |\mathfrak{g}_\nu(x)| \leq 1\}$. Damit ist das Hauptresultat bewiesen.

3. Wir haben noch zu zeigen, daß eine aufsteigende Folge von affinen Teilalgebren $\widetilde{\mathrm{A}} \subset \widetilde{\mathrm{A}}_1 \subset \widetilde{\mathrm{A}}_2 \subset \ldots \subset \widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ abbricht. Da $\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ eine eindimensionale affine κ-Algebra ist, wird jede Unteralgebra von $\widetilde{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ endlich erzeugt. Es sei $\widetilde{\mathrm{B}}$ die von $\widetilde{\mathrm{A}}$, $\widetilde{\mathrm{A}}_1$, $\widetilde{\mathrm{A}}_2$, ... erzeugte κ-Unteralgebra. Wir wählen erzeugende $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r \in \widetilde{\mathrm{B}}$. Es gibt dann ein s, do daß $\tilde{f}_\nu \in \widetilde{\mathrm{A}}_s$. Also folgt für $\nu \geq s$ die Gleichheit $\widetilde{\mathrm{A}}_\nu = \widetilde{\mathrm{A}}_s$. Die Kette bricht also bei $\widetilde{\mathrm{A}}_s$ ab.

4. Wir werden in diesem Abschnitt eine Folgerung aus dem Hauptresultat beweisen, die (wahrscheinlich) zur Lösung des Falles, wo $\dim \mathrm{X} > 1$ ist, herangezogen werden muß. Wir behalten die Bezeichnungen von § 3 bei. Es sei also $\mathrm{X} \subset \mathrm{X}^*$ ein affinoider Teilbereich. Es seien $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ meromorphe Funktionen über $\hat{\mathrm{X}}$, so daß $\mathrm{X} = \{x \in \hat{\mathrm{X}} : |\mathfrak{f}_\nu(x)| \leq 1; \nu = 1, \ldots, m\}$ gilt. Wir dürfen annehmen, daß die Polstellen von $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ reguläre Punkte von $\hat{\mathrm{X}}$ sind. In jedem Punkt $x \in \hat{\mathrm{X}}$ ist also entweder $\mathfrak{f}_\nu$ oder $\mathfrak{f}_\nu^{-1}$ analytisch. Wir schließen die Ebene k durch Hinzufügen eines unendlich fernen Punktes ab und erhalten P, die projektive Gerade über k. Durch das kartesische Produkt φ der Identität und der Abbildung $\psi : w_\nu = \mathfrak{f}_\nu(x)$ mit $\nu = 1, \ldots, m$ wird sodann $\hat{\mathrm{X}}$ in $\hat{\mathrm{X}} \times \underbrace{\mathrm{P} \times \ldots \times \mathrm{P}}_{m-\mathrm{mal}}$ eingebettet. X ist genau die Teilmenge, die in $\hat{\mathrm{X}} \times \mathrm{E}^m$ liegt.

Wir erhalten durch τ eine Abbildung $\tau : \hat{\mathrm{X}} \times \mathrm{P} \times \ldots \times \mathrm{P} \to \widetilde{\hat{\mathrm{X}}} \times \widetilde{\mathrm{P}} \times \ldots \times \widetilde{\mathrm{P}}$. Das Symbol $\widetilde{\mathrm{P}}$ bezeichnet dabei die projektive Gerade über κ. Die Abbildung τ ist über P so definiert, daß $\mathrm{P} - \mathrm{E}$ auf den Punkt $\widetilde{\mathrm{P}} - \kappa$ geworfen wird. Es sei $\hat{\mathrm{Z}} = \varphi(\hat{\mathrm{X}})$ und $\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}} = \tau(\hat{\mathrm{Z}})$. Wir setzen ferner $\mathrm{Z} = \varphi(\mathrm{X}) = \hat{\mathrm{Z}} \cap (\hat{\mathrm{X}} \times \mathrm{E}^m)$ und $\widetilde{\mathrm{Z}} = \tau(\mathrm{Z}) \subset \widetilde{\hat{\mathrm{X}}} \times \kappa^m$. Nach § 3, Abschnitt 4, gibt es eine affinoide Funktion $g \in \mathring{\mathrm{A}}(\hat{\mathrm{X}})$, bei der die Nullstellen von $\tilde{g} = \tau(g)$

eine endliche Menge $\tilde{\mathrm{D}}\subset\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}$ bilden, derart, daß $\mathrm{X}'=\{x\in\mathrm{X} : |g(x)|=1\}$ mit $\{x\in\hat{\mathrm{X}} : |g(x)|=1\}$ übereinstimmt. Auf X' gilt : $|\mathfrak{f}_\nu(x)|\leq 1$ und $\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}|\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}'=\tilde{\mathrm{Z}}|\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}'$ ist triviale Überlagerung von $\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}'=\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}-\tilde{\mathrm{D}}$. Die Entartungsmenge der Projektion $\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}\to\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}$ liegt also über den endlich vielen Punkten von $\tilde{\mathrm{D}}$. Es sei $\tilde{\mathrm{D}}=\{\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_l\}$. Die Vereinigung derjenigen irreduziblen Komponenten von $\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}$, die Punkte über $\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}'$ haben, sei mit $\tilde{\mathrm{W}}_0$ bezeichnet, die Vereinigung der (eindimensionalen) Komponenten über $\tilde{d}_\nu$ mit $\tilde{\mathrm{W}}_\nu$. Es seien $z_1, \ldots, z_m$ inhomogene Koordinaten in $\mathrm{P}\times\ldots\times\mathrm{P}$. Wir setzen $\mathrm{U}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}=\{(z_1, \ldots, z_m)\in\mathrm{P}\times\ldots\times\mathrm{P} : |z_\nu|^{\sigma_\nu}\leq 1\}$ mit $\sigma_\nu=\pm 1$ für $\nu=1, \ldots, m$. Die $\mathrm{U}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ sind alle isomorph zu E^m, also affinoide Räume. Entsprechend definieren wir in $\tilde{\mathrm{P}}\times\ldots\times\tilde{\mathrm{P}}$ die offenen Teilmengen $\tilde{\mathrm{U}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}=\{(z_1, \ldots, z_m) : z_\nu^{\sigma_\nu}\neq\infty\}\approx\kappa^m$. Durch $\tau : \mathrm{P}\times\ldots\times\mathrm{P}\to\tilde{\mathrm{P}}\times\ldots\times\tilde{\mathrm{P}}$ wird stets $\mathrm{U}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ auf $\tilde{\mathrm{U}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ abgebildet. Es sei nun $\mathrm{Z}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}=\hat{\mathrm{Z}}\cap(\hat{\mathrm{X}}\times\mathrm{U}_{\sigma_1\ldots\sigma_m})$ und $\tilde{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}=\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}\cap\{\widetilde{\hat{\mathrm{X}}}\times\tilde{\mathrm{U}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}\}$. Die $\mathrm{Z}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ sind affinoide Teilbereiche von $\hat{\mathrm{Z}}\approx\hat{\mathrm{X}}$. Es sei $\overset{\approx}{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ ihr affines Modell. Man zeigt leicht : $\overset{\approx}{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ ist stets eine endliche affine Überlagerung von $\tilde{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$. Die Beschränkungen von $\overset{\approx}{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}$ und $\overset{\approx}{\mathrm{Z}}_{\sigma'_1\ldots\sigma'_m}$ auf $\tilde{\mathrm{Z}}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}\cap\tilde{\mathrm{Z}}_{\sigma'_1\ldots\sigma'_m}$ stimmen stets überein ([1]). Man erhält also durch « Zusammenheften » einen algebraischen Raum $\overset{\approx}{\mathrm{Z}}$ über $\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}$, den wir als das affine Modell von $\hat{\mathrm{Z}}$ ansehen wollen. Es sei $\pi : \overset{\approx}{\mathrm{Z}}\to\widetilde{\hat{\mathrm{Z}}}$ die Projektion und $\overset{\approx}{\mathrm{W}}_\nu$ die Vereinigung der Komponenten, die über $\tilde{\mathrm{W}}_\nu$ liegen (mit $\nu=0, \ldots, l$). Wir zeigen :

Satz 1. — Jede Komponente von $\overset{\approx}{\mathrm{W}}_\nu$ für $\nu=1, \ldots, l$ ist mit $\overset{\approx}{\mathrm{W}}_0$ zusammenhängend.

Wäre das nicht der Fall, so gibt es eine Vereinigung $\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu$ von Komponenten von einem $\overset{\approx}{\mathrm{W}}_\nu$, so daß der Durchschnitt von $\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu$ und $\overline{(\overset{\approx}{\mathrm{Z}}-\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu)}$ leer ist. Das τ-Urbild W' von $\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu$ ist Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen. Wir wählen einen Punkt $x_0\in\mathrm{W}'$ und eine affinoide Funktion $f\in\mathrm{A}(\hat{\mathrm{X}})$, so daß $f(x_0)=0$ und $\sup|f(\mathrm{W}')|=1$. $\widetilde{(f|\mathrm{W}')}$ ist dann eine affine Funktion auf $\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu$, die in $\tilde{x}_0=\tau(x_0)$ verschwindet, aber nicht identisch Null ist. Da $\overset{\approx}{\mathrm{W}}'_\nu$ ein zusammenhängender vollständiger

---

([1]) Es sei $\mathfrak{X}$ ein affinoider Raum, $\mathfrak{X}'=\{x\in\mathfrak{X} : |g_1(x)|=\ldots=|g_r(x)|=1\}$ mit $g_\nu(x)\in\mathring{\mathrm{A}}(\mathfrak{X})$ für $\nu=1, \ldots, r$ ein affinoider Teilbereich. Es gilt dann stets $\tilde{\mathfrak{X}}'=\{x\in\tilde{\mathfrak{X}} : \tilde{g}_\nu(x)\neq 0; \nu=1, \ldots, r\}$. Denn jedes $f\in\mathring{\mathrm{A}}(\mathfrak{X}')$ läßt sich in eine Reihe $\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}^{\infty} c_{\nu_1\ldots\nu_r} g_1^{-\nu_1}\cdot\ldots\cdot g_r^{-\nu_r}$ mit $c_{\nu_1\ldots\nu_r}\in\mathrm{A}(\mathfrak{X})$ entwickeln. Also folgt $\tilde{f}=\dfrac{\tilde{f}_1}{\tilde{g}_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{g}_r^{s_r}}$ mit $f_1=\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r=0}^{\mu_1\ldots\mu_r} c_{\nu_1\ldots\nu_r} g_1^{-\nu_1+s_1}\cdot\ldots\cdot g_r^{-\nu_1+s_r}\in\mathrm{A}(\mathfrak{X})$, falls die $\mu_\lambda<s_\lambda$ hinreichend groß sind. Sind die s_λ noch sehr groß, so hat man sogar $f_1\in\mathring{\mathrm{A}}(\mathfrak{X})$ und mithin $\tilde{f}\in\mathrm{A}(\tilde{\mathfrak{X}})/(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_r)$ und damit $\tilde{\mathfrak{X}}'=\{x\in\tilde{\mathfrak{X}} : \tilde{g}_\nu(x)\neq 0\}$.

algebraischer Raum ist, haben wir einen Widerspruch. Unsere Aussage ist damit bewiesen.

5. *Wir setzen fortan voraus, daß* $\widetilde{W}_0$ *über* $\widetilde{d}_\nu$ *nur endliche Punkte hat.* Die Zahl ν sei dabei fest gewählt. Wir setzen $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu = \widetilde{\widetilde{W}}_\nu - \widetilde{\widetilde{W}}_0$. Der algebraische Raum $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu$ enthält irreduzible Komponenten, die teilweise über $\{\widetilde{d}_\nu\}\times\kappa^m$ liegen, und kann auch Komponenten enthalten, die ganz über $\{\widetilde{d}_\nu\}\times(\widetilde{P}\times\ldots\times\widetilde{P}-\kappa^m)$ sind. Diese sind vollständige algebraische Räume. Eine affine Funktion, die auf $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu$ von Null verschieden ist, kann also nicht auf allen endlichen Komponenten von $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu$ verschwinden.

Es sei X_ν das τ-Urbild von $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu \cap \pi^{-1}(\widetilde{Z})$. X_ν ist Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen von X. Wir bezeichnen mit Y_ν das τ-Urbild von $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu$. Y_ν ist dann Vereinigung von endlich vielen affinoiden Teilbereichen von $\hat{X}$. Für jede Funktion $f\in A(\hat{X})$ gilt $\sup|f(Y_\nu)|\leq\sup|f(X_\nu)|$. Die affinoide Hülle von X_ν umfaßt also Y_ν. Für jedes $f\in A(\hat{X})$ mit $\sup|f(X_\nu)|\leq 1$ ist also $\widetilde{f}$ auf $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu$ regulär. Wir sagen auch, $\widetilde{f}$ ist in den unendlich fernen Punkten von $\widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu \cap \pi^{-1}(\widetilde{Z})$ beschränkt.

$\widetilde{X}$ liegt über $\widetilde{\hat{X}}$. Es gilt $\widetilde{X} = \widetilde{\widetilde{Z}} \cap \pi^{-1}(\widetilde{Z})$. Es sei $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\widetilde{W}}_0$ die Vereinigung der Komponenten von $\widetilde{X}$, die nicht auf isolierte Punkte von $\widetilde{\hat{X}}$ abgebildet werden. Es sei $\widetilde{X}_\nu = \widetilde{\widetilde{W}}{}^*_\nu \cap \pi^{-1}(\widetilde{Z})$ das Urbild von $\widetilde{d}_\nu$ minus $\widetilde{X}_0$. Für jede Funktion $f\in A(\hat{X})$ mit $\sup|f(X_\nu)|\leq 1$ ist dann $\widetilde{f}$ in den unendlich fernen Punkten von $\widetilde{X}_\nu$ endlich (d.h. auf der Normalisierung regulär). Wir haben also gezeigt :

Satz 2. — Es sei $X\subset\hat{X}$ *ein affinoider Teilbereich,* $\pi:\widetilde{X}\to\widetilde{\hat{X}}$ *die Projektion der affinen Modelle,* $\widetilde{D}=\{\widetilde{d}_1,\ldots,\widetilde{d}_l\}\subset\widetilde{\hat{X}}$ *die kleinste Menge, so daß* $\widetilde{X}|\widetilde{\hat{X}}'$ *triviale Überlagerung von* $\widetilde{\hat{X}}'=\widetilde{\hat{X}}-\widetilde{D}$ *ist. Es sei* $\widetilde{X}_\nu$ *die Vereinigung der Komponenten über* $\widetilde{d}_\nu$ *und* $\widetilde{X}_0$ *die Vereinigung der restlichen irreduziblen Komponenten von* $\widetilde{X}$. *Wir setzen voraus, daß* $\pi|\widetilde{X}_0$ *eine (eigentliche) endliche Abbildung über* $\widetilde{d}_\nu$ *ist. Dann ist für jede Funktion* $f\in A(\hat{X})$ *mit* $\sup|f(X_\nu)|\leq 1$, $X_\nu=\tau^{-1}(\widetilde{X}_\nu-\widetilde{X}_0)$ *die reguläre Funktion* $\widetilde{f}$ *in den unendlich fernen Punkten von* $\widetilde{X}_\nu$ *beschränkt.*

$\widetilde{\hat{X}}_\nu$ wird also diese unendlich fernen Punkte « enthalten ».

5. AFFINOIDE TEILBEREICHE DER GERADEN ÜBER k

1. Unter einem affinoiden Teilbereich der Geraden verstehen wir eine offene Teilmenge $X\subset\bar{k}$, die ganz in einem « Kreis » $K=\{x\in\bar{k}:|x|\leq r\}$ mit $r\in|k^{\bullet}|$ enthalten und affinoider Teilbereich von K ist. Es folgt dann natürlich, daß X affinoider

Teilbereich von jedem Kreis K' mit $X \subset K'$ ist. Es gelte fortan (der Einfachheit halber) wieder $k = \bar{k}$.

Es sei $p = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit $a_n \neq 0$ ein nicht konstantes Polynom und $K = k$ oder ein Kreis. Es sei $X = \{x \in K : |p(x)| \leq 1\}$.

Wir betrachten nur den Fall, wo X echt in K enthalten ist. Die offene Menge X ist natürlich ein affinoider Teilbereich von K. Wir zeigen, daß er Vereinigung von endlich vielen (abgeschlossenen) Kreisen ist. Es sei etwa $x_0 \in K$ eine Nullstelle von p. Wir schreiben $p(x) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (x - x_0)^\nu$ und setzen $r = \min_\nu |b_\nu|^{-\frac{1}{\nu}} \in |k^\bullet|$. In $X_{x_0} = \{x \in k : |x - x_0| \leq r\}$ gilt $|p(x)| \leq 1$. Es sei $r = |b_{\nu_0}|^{-\frac{1}{\nu_0}}$ und ν_0 dabei maximal gewählt. Man kann ein $r_1 \in |k^\bullet|$ finden, so daß $r_1 > r$ und in $Y_{x_0} = \{|x - x_0| \leq r_1\}$ noch $|\sum_{\nu=\nu_0+1}^{n} b_\nu (x - x_0)^\nu| < 1$ gilt. Man hat dann in $Y_{x_0} - X_{x_0}$ stets $|p(x)| > 1$. Der Kreis X_{x_0} hat also von $X - X_{x_0}$ eine positive « Entfernung ».

Gilt nun $X_{x_0} \supset K$, so folgt $X = K$. Diesen Fall hatten wir jedoch von der Betrachtung ausgeschlossen. Also ist X_{x_0} echt in K enthalten. Wir wählen deshalb auch Y_{x_0} so, daß es ebenfalls echt in K liegt (in dem « Inneren » des Kreises K, der in bezug auf den Punkt $x_0 \in X$ definiert ist). — Das gleiche kann man nun für die anderen Nullstellen von $p(x)$ durchführen.

Man erhält endlich viele Kreise $X_\nu = X_{x_\nu}$ und zugehörige Bereiche $Y_\nu = Y_{x_\nu}$. Es bezeichne $\mathring{Y}_\nu$ das Innere von Y_ν (in bezug auf x_ν). Es sei Y ein Kreis der X und die Y_ν in seinem Innern enthält, so daß in $(K \cup Y) - \mathring{Y}$ die Ungleichung $|p(x)| > 1$ gilt. Ist $K = k$, so wählen wir für Y einfach einen sehr großen Kreis, so daß auch $|p(x)| > 1$ in $k - \mathring{Y}$ gilt. Ist K endlich, so folgt durch Entwicklung von $p(x)$ um einen Punkt $x \in K$ die Existenz eines solchen Kreises Y. Wie bei der Konstruktion von Y_ν kann man $K \subset \mathring{Y}$ und $|p(x)| > 1$ für $x \in Y - K$ erreichen.

Es ist $Y' = Y - \bigcup_\nu \mathring{Y}_\nu$ ein affinoider Teilbereich. Auf seinem « Rande », d.i. $\partial Y \cup \bigcup_\nu \partial Y_\nu$, gilt $|p(x)| > 1$, in seinem Innern ist $p(x) \neq 0$. Also hat man $|p(x)| > 1$ in ganz Y'.

Es folgt, daß X Vereinigung der Kreise X_ν ist. Wir haben gezeigt :

Satz 1. — Es sei $p(x)$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann ist $X = \{x \in K : |p(x)| \leq 1\}$ *Vereinigung von endlich vielen Kreisen.*

2. Es sei $X \subset k$ ein irreduzibler affinoider Teilbereich. Jede meromorphe Funktion in einem Kreis Y mit $X \subset Y$ kann durch rationale Funktionen approximiert werden. Es gibt deshab endlich viele rationale Funktionen $f_1, \ldots, f_l$ in k, die in X keine Polstellen haben, so daß $X = \{x \in k : |f_\nu(x)| \leq 1 ; \nu = 1, \ldots, l\}$. Wir bezeichnen mit D die Vereinigung der Polstellenmengen der f_ν. Es gilt $D=\{d_\nu : \nu=1, \ldots, q\}$.

Die affinoide Hülle $\hat{X}$ ist in einem Weierstraßteilbereich $Y \subset k$ als Vereinigung von irreduziblen Komponenten enthalten. Es sei Y^* die Vereinigung der anderen Komponenten von Y. Der Durschschnitt $\hat{X} \cap Y^*$ besteht aus höchstens endlich vielen Punkten.

Y ist eine offene Teilmenge von k, jede irreduzible Komponente von Y ist es auch, wie aus dem Identitätssatz für affinoide Funktionen sofort folgt. Also können sich irreduzible Komponenten niemals in isolierten Punkten schneiden. Der Durchschnitt $Y^* \cap \hat{X}$ muß leer sein. Es gibt nun endlich viele affinoide Funktionen g_ν auf Y, die auf $\hat{X}$ verschwinden, so daß $\max_\nu |g_\nu(x)|$ in jedem Punkte $x \in Y^*$ größer als 1 ist. Da man diese durch Polynome approximieren kann, folgt, daß $\hat{X}$ selbst Weierstraßteilbereich von k ist. $\hat{X}$ wird also durch Polynomungleichungen $|p_\nu(x)| \leq 1$; $\nu=1, \ldots, q$ gegeben und ist deshalb Vereinigung von endlich vielen disjunkten Kreisen. Andererseits ist mit X auch $\hat{X}$ irreduzibel. Wie gezeigt, enthält jede irreduzible Komponente von $\hat{X}$ auch Punkte von X. Also besteht $\hat{X}$ nur aus einem einzigen Kreis. Wir schreiben fortan $\hat{X}=\hat{X}_0$.

3. Durch die Transformation $\psi_\nu : x^* = \dfrac{1}{x-d_\nu} : P \to P$ wird der Punkt $d_\nu \in D$ auf den unendlich ferner Punkt abgebildet. X geht dabei wieder in einen affinoiden Teilbereich $X'_\nu \subset k$ über. Durch $\psi_\nu^{-1} : x = d_\nu + \dfrac{1}{x^*}$ werden Kreise um den Nullpunkt auf das Äußere von offenen Kreisen um d_ν abgebildet.

Der Kreis $\hat{X}_0=\{x : |x-d_\nu| \leq s_\nu\}$ geht durch ψ_ν in $S_\nu^+ = \{x^* : |x^*| \geq s_\nu^{-1}\}$ über. Es sei $S_\nu = \{x^* : |x^*| = s_\nu^{-1}\}$. Da die natürliche Projektion $\widetilde{X} \to \widetilde{S}_\nu^+ = \widetilde{\hat{X}}$ den affinen Raum $\widetilde{X}$ auf fast ganz $\widetilde{S}_\nu \subset \widetilde{S}_\nu^+$ abbildet, folgt, daß jedes Polynom p das $\sup |p(S_\nu)|$ schon auf $X'_\nu \cap S_\nu$ annimmt. Die affinoide Hülle $\hat{X}'_\nu$ umfaßt also $\hat{S}_\nu = \{x^* : |x^*| \leq s_\nu^{-1}\}$ und enthält damit den Nullpunkt. Es sei $\hat{X}_\nu$ das Urbild von $\hat{X}'_\nu$ bez. unserer Transformation ψ_ν. Es gilt $\hat{X}_\nu = P - H_\nu$. Dabei ist H_ν ein offener Kreis um d_ν. Bezeichnet $\partial H_\nu = \partial \hat{X}_\nu \subset \hat{X}_\nu$ den « Rand » von H_ν, so ist ∂H_ν ein affinoider Teilbereich von $\hat{X}_\nu$. Die natürliche Projektion bildet $\widetilde{X}$ auf fast ganz $\partial \widetilde{H}_\nu$ ab. Der Kreis $\overline{H}_\nu = H_\nu \cup \partial H_\nu$ ist deshalb auch sicher in $\hat{X}_0$ enthalten. Die H_ν sind paarweise disjunkt oder identisch. $W = \hat{X}_0 - \bigcup_\nu H_\nu = \bigcap_\nu \hat{X}_\nu$ ist ein affinoider Teilbereich von $\hat{X}_0$ (und sogar ein Laurentbereich in k). Es sei $a_\nu \in k$ und $|a_\nu|$ der Radius von $\hat{X}_0$ für $\nu=0$ bzw. H_ν für $\nu>0$. Durch $w_0 = \dfrac{1}{a_0}(x-d_0)$ mit $d_0 \in \hat{X}_0$ und $w_\nu = \dfrac{a_\nu}{x-d_\nu}$ für $\nu=1, \ldots, q$ wird dann W biaffinoid in E^{q+1} eingebettet. Die Einbettung ist sogar *weit*. Denn jedes $f \in \mathring{A}(W)$ läßt sich in eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} w_\nu^\mu + a_{00}$ mit $|a_{\nu\mu}| \leq 1$ entwickeln (1). Die irreduziblen Komponenten von $\widetilde{W} = \tau(W) \subset \kappa^{q+1}$ sind gleich $\widetilde{\hat{X}}_\nu$ minus endlich vielen Punkten. Es gilt $X \subset W$. Durch die natürliche Projektion $\widetilde{X} \to \widetilde{W}$ wird $\widetilde{X}$ auf fast ganz $\widetilde{W}$ abgebildet.

Es sei nun $X \neq W$ und $w \in W - X$ ein Punkt. Da die f_ν aus Abschnitt 2 in W affinoide Funktionen sind, gibt es sicher ein f_ν mit $|f_\nu(w)| > 1$. Durch Multiplikation mit einer Konstanten kann man eine affinoide Funktion $h \in A(W)$ mit $\sup|h(W)| = 1$ und $\sup|h(X)| < 1$ finden. $\widetilde{h}$ verschwindet dann auf $\widetilde{W}$ nicht identisch. Da das Bild von $\widetilde{X}$ fast ganz $\widetilde{W}$ umfaßt, muß auch $\widetilde{(h|X)} \in \widetilde{A}(X)$ von Null verschieden sein. Das ist ein Widerspruch zu $|h(x)| < 1$ für $x \in X$. Es muß also $X = W$ sein. Wir haben gezeigt :

Satz 2. — Jeder irreduzible affinoide Teilbereich $X \subset k$ *entsteht, indem man aus einem abgeschlossenen Kreis endlich viele offene Kreise herausnimmt.*

Ist X nicht irreduzibel, so kann man X in irreduzible Komponenten X_ν zerlegen, die disjunkte offene Teilmengen von k darstellen. Jedes X_ν ist dann auch ein affinoider Teilbereich von k. Ein allgemeiner affinoider Teilbereich $X \subset k$ ist also Vereinigung von endlich vielen disjunkten Teilbereichen von der Art, die in Satz 2 beschrieben wurde.

Ist schließlich k nicht algebraisch abgeschlossen, so kann man k auf $\bar{k}$ erweitern. X ist dann auch affinoider Teilbereich in bezug auf $\bar{k}$. Unser Ergebnis gilt dann also auch.

6. DER FUNKTOR $X \to \widetilde{X}$, FALLS k NICHT ALGEBRAISCH ABGESCHLOSSEN IST

1. Es sei $X \subset E^n$ irreduzibel. Die Dimension von X sei d. X sei wenigstens in einem Punkte $x \in X$ separiert. Wir zeigen :

Satz 1. — Es gibt eine biaffinoide Abbildung $\varphi : E^n \to E^n$, *so daß* $\varphi(X)$ *bez. der Projektion* $\pi : (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_d)$ *endlich und separiert über* E^d *liegt.*

---

(1) Zum Begriff « weit » vgl. § 6. Abschnitt 3. Man beweist diese Aussage durch vollständige Induktion über q, Für $q = 0$ gilt $W = E^1$. Die Aussage ist also trivialer Weise richtig. Ist sie bereits für den Fall $q-1$ bewiesen. so wird $W_1 = \hat{X}_0 - \bigcup_{\nu=1}^{q-1} H_\nu$ durch die Funktionen $w_0, \ldots, w_{q-1}$ biaffinoid und weit in E^q eingebettet. Jedes $f_1 \in \mathring{A}(W_1)$ läßt sich daher in eine Reihe $a_{00} + \sum_{\nu=0}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} w_\nu^\mu$ mit $|a_{\nu\mu}| \leq 1$ entwickeln. Andererseits kann man für jedes $f \in \mathring{A}(W)$ die Beschränkung $f\,|\,\partial H_q$ durch eine Reihe $\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_{q\mu} w_q^\mu$ mit $a_{q\mu} \in E$ angeben. Wir setzen $f_2 = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{q\mu} w_q^\mu$. Es ist $\{W, H_q \cup \partial H\}$ eine Laurentüberdeckung von W_1. Diese ist nach TATE azyklisch. Da $f_2 \in \mathring{A}(W)$ und $f_1 = f - f_2 \in \mathring{A}(W)$ und $f_1\,|\,\partial H = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{q\mu}\left(\frac{x - d_q}{a_q}\right)^\mu$ nach $H \cup \partial H$ durch die Reihe fortgesetzt wird, hat man $f_1 \in \mathring{A}(W_1)$ und die Reihe $f = a_{00} + \sum_{\nu=0}^{q}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} w_\nu^\mu$.

Wir führen zum Beweise vollständige Induktion nach n. Im Falle $n = 0$ ist die Aussage des Satzes trivial und richtig. Es sei also fortan vorausgesetzt, daß der Satz für den Fall $n-1$ schon bewiesen ist. Wir dürfen $X \neq E^n$ annehmen. Es gibt sicher einen regulären Punkt $x_0 \in X$ und eine Funktion f aus dem Ideal I von X, so daß $df \neq 0$ in x_0 gilt. Über X ist $df = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu dx_\nu$ mit $a_\nu \in A$. Man hat also $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Wir führen nun eine Scherung $x_\nu = y_\nu + y_n^{c_\nu}$; $\nu = 1, \ldots, n-1$ und $x_n = y_n$ durch. Nach [1] gibt es zahlentheoretische Funktionen $\sigma_{n-1}, \sigma_{n-2}(c_{n-1}), \ldots, \sigma_1(c_2, \ldots, c_{n-1})$, so daß nach der Scherung $\{f=0\}$ endlich über $E^{n-1} \subset \{(y_1, \ldots, y_{n-1})\}$ bez. $\psi : (y_1, \ldots, y_n) \to (y_1, \ldots, y_{n-1})$ liegt, falls $c_\nu \geq \sigma_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$ ist. Es gilt jetzt $df = \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu dy_\nu + (a_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu c_\nu x_n^{c_\nu - 1}) dy_n$. Man darf voraussetzen, daß $x_n | X = y_n | X$ nicht algebraisch über dem Primkörper von k ist. Es sei ν_0 die kleinste Zahl, so daß $a_{\nu_0} \neq 0$. Man sieht, daß es bei festem $c_{n-1}, \ldots, c_{\nu_0+1}$ höchstens ein $c_{\nu_0} \neq 0 (\operatorname{char} k)$ gibt, so daß der Koeffizient bei dy_n verschwindet. Man kann also die $c_1, \ldots, c_{n-1}$ so wählen, daß $\{f=0\}$ endlich über E^{n-1} liegt und daß f_{y_n} auf X nicht identisch verschwindet. Es gilt $X \subset \{f=0\}$. Das Bild Y von X unter der Projektion $E^n \to E^{n-1}$ ist eine irreduzible affinoide Teilmenge von E^{n-1}. Es sei N die Menge der nicht regulären Punkte von X. Dann ist $\psi(N) = M$ eine niederdimensionale affinoide Menge in Y. Der Raum $Y - M$ besteht nun nur aus reduzierten Punkten. Die Struktur auf Y ist dabei so definiert, daß das Ideal von Y das Annullatorideal von $\psi_*(H(X))$ ist. Die natürliche Abbildung $H(Y) \to \psi_*(H(X))$ ist deshalb injektiv. Sie ist ferner ein Homomorphismus von Ringen. Also folgt, daß $H_y(Y)$ für $y \in Y - M$ frei von nilpotenten Elementen ist. Y ist d-dimensional und irreduzibel.

Nach einer Transformation $E^{n-1} \to E^{n-1}$ liegt Y separiert über E^d. Da irgendwo auf X die Ableitung f_{y_n} von Null verschieden ist, liegt X separiert über Y. Es folgt, daß (nach den beiden biaffinoiden Transformationen) X separiert über E^d ist.

Es ergibt sich unmittelbar :

Corollar. — Ist X *in einem Punkte* $x_0 \in X$ *separiert, so ist* X *(überall) separiert.*

Beweis. — Es sei $\pi : X \to E^d$ eine endliche Abbildung. X liege bez. dieser Abbildung separiert über E^d. Es sei $h \neq 0$ aus T_d. Die Menge $\{h=0\}$ enhalte die Diskriminantenmannigfaltigkeit von X. Jeder Punkt von $X' = X - \{h \circ \pi = 0\}$ ist dann regulär und mithin separiert. Ist $f_x \in H_x(X)$ ein nilpotentes Element, so ist der Träger in $\{h \circ \pi = 0\}$ enthalten. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist $f_x \cdot (h \circ \pi)^\nu = 0$. Das bedeutet aber, daß $\pi_*(H(X))$ Torsionselemente enthält. Da die Torsionsuntergarbe von $\pi_*(H(X))$ kohärent ist, muß auch der Modul A(X) über $T_d \subset A(X)$ Torsionselemente enthalten. Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß X irreduzibel ist! (1).

Man kann den Beweis von Satz 1 auf affine Räume übertragen. Ferner kann man

(1) Der Beweis braucht nicht undedingt über Überlagerungen geführt zu werden. Man kann ihn auch direkt mit der Kohärenz der Torsionsgarbe T(H) erhalten.

stets eine Transformation finden, die gleichzeitig für endlich viele gegebene affinoide Räume geeignet ist. X braucht deshalb nicht irreduzibel, sondern nur rein-dimensional zu sein und in jeder irreduziblen Komponente wenigstens einen separierten Punkt enthalten. Ist X rein d-dimensional, so gilt gleiches auch für $\widetilde{X}$. Es folgt :

Satz 2. — Es sei $X \in E^n$ *ein reindimensionaler separierter affinoider Raum der Dimension d.* $\widetilde{X}$ *sei ebenfalls separiert. Dann gibt es eine biaffinoide Transformation* $\varphi : E^n \to E^n$, *so daß danach* X *endlich, separiert über* E^d *und* $\widetilde{X}$ *endlich, separiert über* $\overline{\kappa}^d$ *liegt.*

2. Wir setzen $k_\alpha = \{a \in \overline{k} : a^{p^\alpha} \in k\}$. Der Körper k_α heißt eine Frobeniuserweiterung von k. Es sei $X \subset E^n$ ein irreduzibler affinoider Raume über k der Dimension d. Nach einer biaffinoiden Transformation $E^n \to E^n$ liegt X endlich über E^d. Es gibt irreduzible Polynome $\omega_\nu = x_\nu^{q_\nu} + \ldots + a_{\nu q_\nu}$ für $\nu = d+1, \ldots, n$ mit $a_{\nu\mu} \in T_d$, so daß $X \subset \{\omega_\nu = 0 : \nu = d+1, \ldots, n\}$ (nach dem Einbettungssatz von Remmert und Stein). Es ist $X_\nu = \{\omega_\nu = 0\}$ das Bild von X in $E^d \times E^1(x_\nu)$ bez. der natürlichen Projektion $E^n \to E^d \times E^1$. Es gibt nicht negative ganze Zahlen α_ν, so daß $\omega_\nu = \overline{\omega}_\nu^{p^{\alpha_\nu}}$ über k_{α_ν} und $\overline{\omega}_\nu$ nicht mehr p-te Potenz eines Pseudopolynoms über $k_{\alpha_{\nu+1}}$ ist. Das Polynom $\overline{\omega}_\nu$ ist wie ω_ν irreduzibel, $d\overline{\omega}_\nu$ verschwindet auf X_ν nicht identisch, also sind fast alle Punkte von $\{\overline{\omega}_\nu = 0\}$ reguläre Punkte (über k_{α_ν}). Das ändert sich nicht, wenn wir von k_{α_ν} zu k_α mit $\alpha \geq \max(\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n)$ übergehen.

Es gibt eine affinoide Menge $M \subset E^d$, so daß $((E^d - M) \times E^1(x_\nu)) \cap X_\nu$ nur reguläre Punkte enthält. $X \cap ((E^d - M) \times E^{n-d})$ besteht dann auch nur aus regulären Punkten (über k_α). Durch Zerlegung in irreduzible Komponenten folgt schließlich :

Satz 3. — Zu jedem (reduzierten) affinoiden Raum X *gibt es eine Frobeniuserweiterung* k_α, *so daß nach Erweiterung auf* k_α *der Raum* X *separiert ist (nach Reduktion).*

Beweis. — Es sei $X = X_1 \cup \ldots \cup X_l$ die Zerlegung in die irreduziblen Komponenten. Wir wählen α so groß, daß jedes X_ν separiert ist. Es sei $h \in A(X)$ ein komplettes Element, so daß $[h](x)$ für alle $x \in D = \bigcup_{\nu \neq \mu} X_\nu \cap X_\mu$ verschwindet. X ist sicher in allen Punkten von $X - D$ separiert. Da X reduziert ist, verschwindet T(H). Enthält etwa H_x, $x \in D$ nilpotente Elemente f_x, so ist der Trägerkeim von f_x in D enthalten. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz wäre $h^s \cdot f_x = 0$, also $f_x \in T_x(H)$. Das ist ein Widerspruch zu $T_x(H) = 0$. Satz 3 ist damit bewiesen.

Man zeigt leicht, daß das Analogon von Satz 3 für affine Räume auch richtig ist.

3. Es sei $X \subset E^n$ ein affinoider Raum. X heißt *weit* in E^n eingebettet, wenn es zu jeder Funktion $f \in \mathring{A}$ eine Funktion $\hat{f} \in \mathring{T}_n$ gibt, so daß $f - \hat{f} | X \in t(A)$. Diese Eigenschaft bedeutet genau, daß die Bildmenge $\tau(X)$ bez. der Restklassenabbildung

$\tau : E^n \to \bar{\kappa}^n$ isomorph zu dem affinen Modell $\widetilde{X}$ ist. Jeder affinoide Raum läßt sich weit einbetten. Man erhält eine solche Einbettung zu einem $X \subset E^m$, indem man Erzeugende $\widetilde{f}_{m+1}, \ldots, \widetilde{f}_n \in \widetilde{A}$, Urbilder $f_{m+1}, \ldots, f_n \in \mathring{A}$ und affinoide Fortsetzungen $\hat{f}_{m+1}, \ldots, \hat{f}_n \in T_m$ wählt. Sind $g_1, \ldots, g_l$ Erzeugende des Ideals von $X \subset E^m$, so wird durch das von $g_1, \ldots, g_l$, $x_{m+1} - \hat{f}_{m+1}, \ldots, x_n - \hat{f}_n$ erzeugte Ideal $X \subset E^n$ gegeben. X liegt in E^n weit, weil $\widetilde{f}_{m+1}, \ldots, \widetilde{f}_n$ die affine Algebra $\widetilde{A}$ erzeugen.

Es sei fortan $X \in E^n$ separiert und rein d-dimensional. Nach einer biaffinoiden Transformation $E^n \to E^n$ liegt X dann endlich und separiert über E^d. Daran ändert sich nichts, wenn man von k zu einer endlich algebraischen Erweiterung k_* von k übergeht. Für affinoide Überlagerungen $X \to E^d$ ist der Begriff der Blätterzahl $(X : E^d)$ erklärt. Das ist die maximale Zahl der linear unabhängigen Elemente von $A = A(X)$ über T_d. In analoger Weise wird die entsprechende Definition für affine Überlagerungen durchgeführt. Wir denken uns diese jedoch stets als über $\bar{\kappa}$ definiert (Unsere affinen Räume werden deswegen immer separiert sein). Die Blätterzahl $(X : E^d)$ ist (bei separiertem X) von dem Grundkörper unabhängig, sie ändert sich also bei einer algebraischen Erweiterung von k sowie beim Übergang von k zu $\bar{k}$ nicht. Das affine Modell $\widetilde{X}$ denken wir uns also als reduzierten algebraischen Raum über $\bar{\kappa}$. Es hängt allerdings wesentlich vom Grundkörper k ab. Wir schreiben $\widetilde{X} = \widetilde{X}_k$, $\widetilde{X} = \widetilde{X}_{k_*}$, jenachdem welchen Körper wir zu Grunde legen. $\widetilde{X}_{k_*}$ liegt stets über $\widetilde{X}_k$. Die Funktionen von $\widetilde{A}_k$, $\widetilde{A}_{k_*}$ sind spezielle affine Funktionen über $\widetilde{X}_k$, $\widetilde{X}_{k_*}$. Ist k_* eine endlich algebraische Erweiterung von k, so ist jede Funktion aus $\mathring{A}_{k_*}$ ganz über $\mathring{T}_d$. Der Raum $\widetilde{X}_{k_*}$ ist deshalb auch eine endliche ganz algebraische Erweiterung von $\widetilde{X}_k$. Immer gilt nämlich $(X : E^d) \geq (\widetilde{X}_{k_*} : \bar{\kappa}^d) \geq (\widetilde{X}_k : \bar{\kappa}^d)$ (Man vgl. [2]. Die Zuordnung $X \to \widetilde{X}$ ist ein kovarianter Funktor der Kategorie der affinoiden Räume in die Kategorie der affinen Räume. Überlagerungen gehen in Überlagerungen über). — Wir wählen fortan k_* so, daß $(\widetilde{X}_{k_*} : \bar{\kappa}^d)$ maximal ist und schreiben $\widetilde{X}_{k_*} = \widetilde{X}$. Ist k_{**} eine endlich algebraische Erweiterung von k_*, so ist $\widetilde{X}_{k_{**}}$ stets ganz rational über $\widetilde{X}$, d.h. jede affine Funktion aus $\widetilde{A}_{k_{**}}$ ist eine ganz rationale Funktion auf $\widetilde{X}$. — Wir dürfen nun annehmen, daß X (in bezug auf k_* und κ_*) weit in E^n eingebettet ist. Das Modell $\widetilde{X} = \tau(X) \subset \bar{\kappa}^n$ wird dann durch Polynome über κ_* definiert. Wir führen eine affinoide Transformation $E^n \to E^n$ durch, so daß danach X endlich separiert über E^d und $\widetilde{X}$ endlich separiert über $\bar{\kappa}^d$ liegt. Der Grad $(\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$ kann durch endliche algebraische Erweiterung von k_* nicht mehr vergrößert werden. Wir gehen von k_* zu $\bar{k}$ über und betrachten X als über $\bar{k}$ definiert. Es bei $b = (X : E^d)$. Nach [2] ([1]) gibt es

([1]) Man vergleiche Fußnote (1), p. 19.

eine affinoide Funktion $\hat{f} \in T_n \hat{\otimes} \bar{k}$, so daß $f = \hat{f} | X \subset \mathring{A}_{\bar{k}}$ und $(\widetilde{f} : \bar{\kappa}^d) = b$. Da man $\hat{f}$ durch Polynome approximieren kann, darf man annehmen, daß $\hat{f}$ ein Polynom ist. Ferner kann man voraussetzen, daß die Koeffizienten von $\hat{f}$ algebraisch über k_* sind. Sie liegen also in einer endlich algebraischen Erweiterung k_{**} von k_*. Die Funktion f ist also Element von $\mathring{A}_{k_{**}}$ und mithin $\widetilde{f}$ ganz rational über $\widetilde{X}$. Man hat $b = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$.

Da die Blätterzahl des affinen Modells über $\bar{\kappa}^d$ nie größer als $(X : E^d)$ sein kann, folgt nun auch, daß $\widetilde{X}$ schon über κ_* separiert ist. — Wir haben gezeigt :

Satz 4. — Es sei X *ein rein dimensionaler separierter affinoider Raum über k. Dann gibt es nach einer endlichen algebraischen Körpererweiterung von k auf k_* eine separierte endliche Überlagerung* $\pi : X \to E^d$ *so daß* $(X : E^d) = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$ *ist und daß* $\widetilde{X}$ *über* $\bar{\kappa}^d$ *separiert liegt. Hierbei wird* $\widetilde{X}$ *als über* $\kappa_* = \mathring{k}_* / t(k_*)$ *definiert betrachtet.*

Man kann jetzt wie [2] (man vgl. p. 116, Satz 1) zeigen, daß $\mathring{A}$ ein endlicher $\mathring{T}_d$-Modul ist und daß das nicht nur für unsere spezielle, sondern sogar für jede endliche Überlagerung $\varphi : X \to E^d$ gilt. Es folgt dann auch, daß immer $(X : E^d) = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$ ist. Wir verzichten auf die Durchführung.

4. Ist X nicht separiert, so muß man zunächst k durch eine Frobeniuserweiterung $k_\alpha = k^{p^{-\alpha}}$ ersetzen, so daß danach X (mit nachfolgender Reduktion) separiert geworden ist. Dadurch wird sich im allgemeinen der Grad $(X : E^d)$ geändert haben (alle Operationen werden so durchgeführt, daß dabei X reduziert bleibt). Von dem separierten X kann man schließlich durch endliche Körpererweiterung zu k_* übergehen. Danach gilt dann die Aussage des Satzes 4.

Ist X nicht separiert, so wird man durch endlich algebraische Erweiterung von k i.a. nicht erreichen können, daß $(X : E^d) = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$. Es sei κ algebraisch abgeschlossen, also $\kappa = \bar{\kappa}$. Wir führen eine endlich algebraische Erweiterung k_* von k durch, so daß danach $(\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$ maximal ist. Es gibt nun eine endliche Überlagerung $\pi : X \to E^d$, so daß $\widetilde{X}$ über $\bar{\kappa}^d$ separiert liegt. Durch Erweiterung von k_* zu $\bar{k}$ ändert sich die Blätterzahl von $\widetilde{X}$ über $\bar{\kappa}^d$ nicht. Ist aber X über k_* nicht separiert, so ist über k_* die Blätterzahl von X über E^d größer als über $\bar{k}$. Man hat also $(X : E^d) > (\widetilde{X} : \kappa^d)$, weil nach Übergang zu $\bar{k}$ gilt : $(X : E^d) = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$. Kann man einen solchen affinoiden Raum durch endliche algebraische Erweiterung von k nicht reduziert machen, so kann man also dadurch auch nicht erreichen, daß $(X : E^d) = (\widetilde{X} : \bar{\kappa}^d)$ wird.

Wir geben das Beispiel eines solchen affinoiden Raums. Es sei κ ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p. Wir wählen eine unendliche Folge von Unbestimmten δ_ν; $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ und adjungieren die δ_ν zu κ. Wir ordnen den δ_ν beliebige Werte $|\delta_\nu| \in \mathbf{R}^+$ mit $0 < |\delta_\nu| < 1$ zu. Die Folge $|\delta_\nu|$ konvergiere gegen o und jeweils endlich viele der Zahlen $-\log|\delta_\nu|$ sei über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen linear unabhängig. Unser neuer Körper k' ist in natürlicher Weise nichtarchimedisch bewertet : Ist etwa $f=\Sigma a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\delta_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\delta_\mu^{\nu_\mu}$ mit $a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\in\kappa$ eine endliche Reihe, so ist $|f|$ einfach das Maximum der $|\delta_1|^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot|\delta_\mu|^{\nu_\mu}$ mit $a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\neq 0$. Das Maximum wird von genau einem Glied der Reihe angenommen. Die Vervollständigung k von k' besteht deshalb aus den unendlichen Reihen $\Sigma a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\delta_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\delta_\mu^{\nu_\mu}$ über positive und (nach unten beschränkte) negative Indizes mit $|a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\delta_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\delta_\mu^{\nu_\mu}|\to 0$. Es folgt, daß der Restklassenkörper von k der alte Körper κ ist. Die Wertegruppe von k ist die von $|\delta_\nu|$ erzeugte (multiplikative) Gruppe.

Wir setzen $f=\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu x^{p\nu}\in T_{1k}$ (1) und $X=\{(w,x) : w^p-f\}=0$. Jedes Element von A(X) läßt sich eindeutig schreiben in der Form $h=\sum_{\nu=0}^{p-1}h_\nu.f^{\nu/p}$ mit $h_\nu\in T_{1k}$. Es ist deshalb $h=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ mit $a_\nu\in k(\delta_1^{\frac{1}{p}},\ldots,\delta_\nu^{\frac{1}{p}})$. Es gilt $||h||=\max|h(X)|=\sup|a_\nu|$. Jedes Element $a=a_\nu$ läßt sich aber wieder eindeutig durch eine Reihe $\Sigma a_{\nu_1\ldots\nu_\mu}\delta_1^{\frac{\nu_1}{p}}\cdot\ldots\cdot\delta_\mu^{\frac{\nu_\mu}{p}}$ angeben. Alle Glieder der Reihe haben verschiedenen Betrag. Es gilt also $|a|\leqq 1$ genau dann, wenn in a alle Glieder mit negativem Exponenten verschwinden, und $|a|<1$, wenn die Reihe von a nur Glieder mit positivem Exponenten enthält. Man hat also $\widetilde{A}=\widetilde{T}_{1k}=\kappa[x]$ und mithin $\widetilde{X}=\widetilde{E}^1=\bar{\kappa}$ und $(\widetilde{X}:\bar{\kappa})=1$, aber $(X:E^1)=p$.

Ist k_* eine endlich algebraische Erweiterung von k, so ist der Restklassenkörper von k_* wieder κ; denn κ wurde als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt. Nach Übergang zu k_* bleibt w^p-f irreduzibel : Die $\delta_\nu^{\frac{1}{p}}$ liegen nicht gemeinsam in einer endlichen Erweiterung von k^*. Denn die additive Wertegruppe $-\log|k_*|$ wird von $-\log|\delta_\nu|$ und endlich vielen Brüchen dieser Zahlen erzeugt. Die von $-\log|\delta_\nu^{\frac{1}{p}}|$ erzeugte Gruppe ist viel größer. Die Elemente aus A_{k_*} lassen sich nun in der Form $\sum_{\nu=0}^{p-1}h_\nu f^{\frac{\nu}{p}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$ mit $h_\nu\in T_{1k^*}$, $a_\nu\in k_*(\delta_1^{\frac{1}{p}},\ldots,\delta_\nu^{\frac{1}{p}})$ geben. Es folgt wieder $\widetilde{A}_{k_*}=\widetilde{T}_{1k^*}=\bar{\kappa}(x)$. Also hat man $(X:E^1)=p$, $(\widetilde{X}:\bar{\kappa})=1$. Damit ist alles gezeigt.

5. Die Gleichheit der Grade $(X:E^d)=(\widetilde{X}:\kappa^d)$ gilt also über dem Grundkörper k im allgemeinen nicht, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Eine notwendig und hinreichende Bedingung ist bislang noch unbekannt. Wir betrachten hier das Beispiel eines affinoiden Raumes X, der eine irreduzible separierte Überlagerung von E^d ist, so daß folgendes gilt :

1) Die Wertegruppe $|k|$ ist divisibel;
2) $\widetilde{X}$ liegt separiert über $\bar{\kappa}^d$;
3) $(X:E^d)>(\widetilde{X}:\bar{\kappa}^d)$.

(1) T_{1k} ist T_1 definiert über k.

Wir zeigen, daß es in jeder Charakteristik ein solches Beispiel mit $d=0$ gibt :

Satz 5. — In jeder Charakteristik gibt es einen vollständig, nicht trivial, nicht-archimedisch bewerteten Körper k, so daß folgendes gilt :

1) *Der Restklassenkörper* κ *ist algebraisch abgeschlossen.*

2) k *ist nicht algebraisch abgeschlossen.*

3) $|k|$ *ist eine Divisionsgruppe.*

Um den affinoiden Raum X zu erhalten, wählen wir ein irreduzibles normiertes Polynom ω über k, das nicht linear ist. Es sei $||\omega||=1$. X werde durch das von ω erzeugte Ideal gegeben. Es gilt dann $(\mathrm{X}:\mathrm{T}_0)>1$. Andererseits gilt für jedes irreduzible normierte Polynom ω mit $||\omega||=1$ die Gleichung $\widetilde{\omega}=(x-a)^n$. Wie man durch Anwendung der Transformationen der Galoisgruppe sieht, werden nämlich stets konjugierte Elemente durch τ auf das gleiche Element von $\kappa=\bar{\kappa}$ abgebildet (κ bleibt bei den Transformationen fest). Daher ist $\widetilde{\mathrm{A}}=\kappa$. Also folgt : $(\widetilde{\mathrm{X}}:\bar{\kappa})=1$.

Beim Beweis von Satz 5 beginnen wir mit einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper κ und wählen eine Unbestimmte δ. Es sei k' der Körper der formalen Reihen $f=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \delta^{r_\nu}$ mit $a_\nu \in \kappa$ und $r_\nu \in \mathbf{Q}$. Die Folge r_ν konvergiere streng monoton gegen unendlich. Der Körper k' trägt eine natürliche nicht archimedische Bewertung (additiv geschrieben) : $|f|=\min\limits_{a_\nu \neq 0} r_\nu$. k' ist vollständig. Es gilt $|k'|=\mathbf{Q}$. Die Wertegruppe ist also divisibel. Im Falle der Charakteristik p ist k' nicht algebraisch abgeschlossen (wegen der « Wilder ramification »). Das Polynom $w^p-\delta^{p-1}w+\delta$ zerfällt z. B. über k' nicht in Linearfaktoren [1]. In diesem Falle kann man also $k=k'$ setzen. Im allgemeinen wählen wir eine Folge von positiven rationalen Zahlen ε_ν, die streng monoton wachsend gegen eine Zahl $\varepsilon \in \mathbf{R}$ konvergiert. Wir setzen $\eta=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \delta^{\varepsilon_\nu}$. Das Element η ist nicht im Körper k' enthalten. Wir adjungieren es in bezug auf die natürlichen Operationen formaler Potenzreihen und vervollständigen. Der so erhaltene, vollständig bewertete nicht-archimedische Körper sei mit k bezeichnet. Die Elemente $a \in k$ werden formal durch Potenzreihen $\sum\limits_{\iota \in \mathfrak{J}} a_\iota \delta^{\nu_\iota}$ gegeben. Dabei ist die Indexmenge $\mathfrak{J}$ wohlgeordnet. r_ι ist mit ι streng monoton wachsend. Häufungspunkte von $\mathrm{M}=\mathrm{M}(a)=\{r_\iota : a_\iota \neq 0\}$ sind also niemals « Häufungspunkte von oben ». Es gilt deshalb $|k|=|k'|=\mathbf{Q}$. Der Einfachheit halber nehmen wir fortan an, daß die Charakteristik von k von 2 verschieden ist. Es folgt : Ist $a=b^2$ mit $b \in k-k'$, so enthält M Häufungspunkte von Häufungspunkten. Wir dürfen beim Beweis $|a|=0$ voraussetzen. Wir setzen $b=\sum\limits_{\iota} b_\iota \delta^{l_\iota}$. Es sei l_0 der kleinste Häufungspunkt der l_ι (mit $b_\iota \neq 0$) und l_ν; $\nu=1, 2, 3, \ldots$ die Folge der $l_\iota < l_0$. Wir schreiben formal $b_*=\sum\limits_{\nu} b_\nu \delta^{l_\nu}$ und $b_{**}=b-b_*$. Wir werden zeigen,

---

[1] Dieser Sachverhalt wurde mir von O. Zariski mitgeteilt.

daß $2l_0$ in $M(a)$ Häufungspunkt von Häufungspunkten ist. Die Produkte $2b_* \cdot b_{**}$, b_{**}^2 haben im Bereich unterhalb $2l_0$ keine Häufungspunkte. Die Elemente b^2 und b_*^2 haben deshalb in diesem Bereich die gleichen Häufungspunkte. Wir dürfen deshalb $b = b_*$ voraussetzen. Der Punkt l_0 ist sodann sicher Häufungspunkt von $M(b^2)$, da sich gegen ihn $M(2\Sigma b_0 b_\nu \delta^{l_\nu})$ häuft und nur endlich viele andere Glieder der Potenz $\left(\sum_\mu b_\mu \delta^{l_\mu}\right) \cdot \left(\sum_\nu b_\nu \delta^{l_\nu}\right)$ mit ν, $\mu \neq 0$ einen Wert $\leq l_0$ haben. Es sei $b_* = b - b_0$. Da $b^2 = b_*^2 + 2b_0 \cdot b_* + b_0^2$ und $M(2b_0 b_*)$ höchstens in l_0 einen Häufungspunkt hat, sind die weiteren Häufungspunkte von b^2 und b_*^2 gleich. Andererseits hat b_*^2 einen Häufungspunkt in $l_0 + l_1$, was man sofort durch Übergang von b_* zu b_*/δ^{l_1} sieht. Wir wenden das Verfahren für b einfach auf b_*/δ^{l_1} an. Wir fahren nun so fort. Es ergibt sich, daß $M(b)$ Häufungspunkte in $l_0 + l_\nu$ hat. Damit ist $2l_0$ als Häufungspunkt von Häufungspunkten erkannt. Das Element η ist also kein Quadrat und k nicht algebraisch abgeschlossen.

LITERATUR

[1] Grauert, H. u. Remmert R., Nichtarchimedische Funktionentheorie, *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westf.*, Bd. *33*, 393-478, Opladen Westdeutscher Verlag, 1966.

[2] —, Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, *Invent. math.*, *2*, 87-133 (1966).

[3] Tate, J. *Rigid analytic spaces.* Private notes reproduced by Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette.

Manuscrit reçu le 19 mai 1967.