REINHARDT KIEHL

Die de Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 33 (1967), p. 5-20
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1967__33__5_0>

DIE DE RHAM KOHOMOLOGIE ALGEBRAISCHER MANNIGFALTIGKEITEN ÜBER EINEM BEWERTETEN KÖRPER

EINLEITUNG

Grothendieck hat in [8] bewiesen, daß die De Rham Kohomologie einer glatten algebraischen Mannigfaltigkeit über dem Körper der komplexen Zahlen, d.h. die Hyperkohomologie des Garbenkomplexes der äußeren Differentialformen, übereinstimmt mit der De Rham Kohomologie des assozierten komplexanalytischen Raumes, die identisch ist mit der singulären Kohomologie dieses Raumes mit komplexen Koeffizienten.

Da die Arbeit von Monsky und Washnitzer [16] zeigt, daß die De Rham Kohomologie der rigidanalytischen Räume im Sinne von Tate [18] über einem nichtarchimedisch bewerteten Körper der Charakteristik Null eine Rolle spielt für die Kohomologietheorie der algebraischen Schemata über Körpern positiver Charakteristik, ist es von Interesse, die Grothendieckschen Ergebnisse auf den rigidanalytischen Fall zu übertragen. Dazu hat man die Kohomologie des Komplexes der Differentialformen einer affinoiden Algebra in der Umgebung eines Divisors mit nur transversalen Schnitten lokal im Sinne der Grothendiecktopologie zu untersuchen.

In § 1 zeigen wir, daß ein glatter abgeschlossener Unterraum eines affinoiden Raumes immer eine im Sinne der Grothendiecktopologie zulässige Überdeckung durch tubulare Umgebungen besitzt. In § 2 berechnen wir dann die De Rham Kohomologie in solchen tubularen Umgebungen. Daraus ergibt sich dann auch im nichtarchimedischen Fall der Grothendiecksche Satz.

§ 1. Tubulare Umgebungen glatter Unterräume.

Im folgenden sei k ein vollständiger, nicht trivial nichtarchimedisch bewerteter Körper mit der Bewertungsfunktion $|\ |: k \to \mathbf{R}$, V sein Bewertungsring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal dieses Bewertungsringes und $\kappa = V/\mathfrak{m}$ Restklassenkörper von V.

Wir bezeichnen mit $T_n = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ die freie affinoide Algebra in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ über k, d.h. den Ring der Potenzreihen

$$f(X) = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} a_{i_1 \cdots i_n} X^{i_1} \cdots X^{i_n} = \sum_i a_i X^i$$

deren Koeffizienten eine Nullfolge in k bilden. T_n ist normiert : $|f(X)| = \sup_i |a_i|$.

Die Faktorringe $A=T_n/\mathfrak{a}$ dieser freien affinoiden Algebren heißen affinoide Algebren. A wird mit der Faktornorm $\|\ \|$ versehen.

$$A_0=\{a\in A,\ \|a\|\leq 1\}$$

ist eine vollständige V-Unteralgebra von A. Die Topologie von A hängt nicht von der speziellen Darstellung als Faktorring einer freien affinoiden Algebra ab. Sei x ein Element aus Sp(A), der Menge aller maximalen Ideale, dem maximalen Spektrum von A. Wir schreiben $f(x)$ für die Restklasse eines Elements f aus A in dem Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}=k(x)$; mit $|f(x)|$ bezeichnen wir den Wert von $f(x)$ bei der eindeutig bestimmten Fortsetzung der Bewertung $|\ |$ des Grundkörpers k auf den endlichen Erweiterungskörper $k(x)$. Für ein Element f aus A erklären wir die Spektralnorm

$$|f|=\sup_{x\in \mathrm{Sp}(A)}|f(x)|.$$

Im Falle $A=T_n$ stimmt diese Spektralnorm mit der Koeffizientennorm überein. Enthält A keine nilpotenten Elemente, so ist die Spektralnorm $|\ |$ wenigstens noch zur Faktornorm $\|\ \|$ äquivalent [4].

Wir schreiben :

$$\mathring{A}=\{f\in A;\ |f|\leq 1\}$$
$$\mathfrak{k}(A)=\{f\in A;\ |f|<1\}$$
$$\widetilde{A}=\mathring{A}/\mathfrak{k}(\mathring{A}).$$

Die κ-Algebra $\widetilde{A}$ ist endlicherzeugt über κ ([6], [17]).

Einzelheiten über diese Dinge findet man in [5], [6], [17], [18].

In [13] wird jeder affinoiden Algebra A ein G-geringter Raum X im Sinne von [12] zugeordnet, d.i. ein Tripel, bestehend aus der Menge Sp(A) versehen mit einer Topologie, einer Grothendiecktopologie auf einer Kategorie zulässiger offener Teilmengen von Sp(A) und einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen bzgl. dieser Grothendiecktopologie. Wir schreiben für diesen zu A assozierten affinoiden Raum wieder Sp(A). Jeder k-Homomorphismus $h: A\to B$ induziert einen Morphismus G-geringter Räume $\mathrm{Sp}(h): \mathrm{Sp}(B)\to \mathrm{Sp}(A)$, und man erhält so alle Morphismen.

Sind $f_1,\ldots,f_r,\ g_1,\ldots,g_s$ Elemente aus A, so ist die spezielle offene Teilmenge

$$\begin{aligned}U=U(f_1,\ldots,f_r,g_1^{-1},\ldots,g_s^{-1})\\ =\{x\in \mathrm{Sp}(A);\ |f_1(x)|\leq 1,\ldots,|f_r(x)|\leq 1,|g_1(x)|\geq 1,\ldots,|g_s(x)|\geq 1\}\end{aligned}$$

zulässig; U versehen mit der induzierten Struktur ist wieder ein affinoider Raum, ein spezieller affinoider Teilbereich :

$$U(f_1,\ldots,f_r;\ g_1^{-1},\ldots,g_1^{-1})=\mathrm{Sp}(A\langle\langle f_1,\ldots,f_r;\ g_1^{-1},\ldots,g_s^{-1}\rangle\rangle)$$

(siehe [18]).

Ein offener affinoider Unterraum $\mathrm{Sp}(B)\hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ des affinoiden Raumes Sp(A) heißt geschachtelter spezieller Teilbereich, wenn es eine Kette von Unterräumen

$$\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(A_n)\hookrightarrow \mathrm{Sp}(A_{n-1})\hookrightarrow\ldots\hookrightarrow \mathrm{Sp}(A_0)=\mathrm{Sp}(A)$$

gibt, so daß $\mathrm{Sp}(A_{i+1})$ spezieller affinoider Teilbereich von $\mathrm{Sp}(A_i)$ ist; die unterliegende Menge heißt geschachtelte spezielle offene Teilmenge von Sp(A). Wir wollen noch die wichtigsten zulässigen Überdeckungen eines affinoiden Raumes Sp(A) angeben.

Eine zulässige Überdeckung $\mathscr{L}(f_1, \ldots, f_r)$ von Sp(A) durch die speziellen offenen Teilmengen

$$U(f_1^{\pm 1}, \ldots, f_r^{\pm 1})$$

heißt Laurentüberdeckung, definiert durch die Elemente $f_1, \ldots, f_r$.

Bilden die Elemente $f_1, \ldots, f_r$ aus $\mathring{A}$ eine Teilung der Eins von A, d.h. gibt es Elemente $g_1, \ldots, g_r$ in $\mathring{A}$ mit

$$f_1 g_1 + \ldots + f_r g_r = 1,$$

so heißt die zulässige Überdeckung von Sp(A) durch die speziellen offenen Teilmengen $U(f_1^{-1}), \ldots, U(f_r^{-1})$ formelle Überdeckung [13].

Trivial ist folgender Hilfssatz :

Hilfssatz 1.1. — Eine Überdeckung von Sp(A) *durch endlich viele geschachtelte spezielle offene Teilmengen ist zulässig, d.h. kann verfeinert werden durch eine spezielle Überdeckung im Sinne von Tate* [18].

Wir müssen uns jetzt mit einer anderen Art von zulässigen Überdeckungen, den Zariskiüberdeckungen beschäftigen.

Eine Teilmenge U des Spektrums Sp(A) einer affinoiden Algebra A heißt *Zariski-offene* Teilmenge, wenn sie Komplement der Nullstellenmenge $V(\mathfrak{J})$ eines Ideals $\mathfrak{J}$ von A ist. Für ein Element f aus A ist $\delta(f) = \{x \in \mathrm{Sp}(A);\ f(x) \neq 0\}$ Zariskioffen. Eine Teilmenge U von Sp(A) ist genau dann Zariskioffen, wenn sie sich darstellen läßt als

$$U = \delta(f_1) \cup \ldots \cup \delta(f_r).$$

Hilfssatz 1.2. — Seien $f_1, \ldots, f_r$ Elemente aus A *mit*
$(*)$: $\delta(f_1) \cup \ldots \cup \delta(f_r) = \mathrm{Sp}(A)$.
Dann gibt es ein von Null verschiedenes Element a aus k, so daß bereits

$$\mathrm{Sp}(A) = U((f_1/a)^{-1}) \cup \ldots \cup U((f_r/a)^{-1}) \textit{ ist.}$$

Aus $(*)$ folgt, daß es Elemente $g_1, \ldots, g_r$ in A gibt mit
$(**)$: $f_1 g_1 + \ldots + f_r g_r = 1$.
Sei $h_i = f_i g_i$ und a ein Element aus k mit $0 < |a| < 1$. Da wir 1.2 nur für die Einschränkungen der gegebenen Zariskiüberdeckung auf die einzelnen affinoiden Teilbereiche der Laurentüberdeckung $\mathscr{L}(h_1/a, \ldots, h_r/a)$ zeigen müssen, können wir annehmen, daß

$$\mathrm{Sp}(A) = U((h_1/a)^{\pm 1}, \ldots, (h_r/a)^{\pm 1}) \text{ ist.}$$

Wenn Sp(A) nicht leer ist, gibt es wegen $(**)$ wenigstens einen Index, etwa $i_0 = 1$, so daß $|h_1(x)| \geq |a|$ ist für alle x aus Sp(A). Dann ist aber auch f_1 auf ganz Sp(A) von Null verschieden. Nach dem Maximumsprinzip [4] ist dann $|f_1(x)| \geq |b| > 0$ für ein geeignetes Element b aus k und alle x aus Sp(A).

Folgerung 1.3. — *Jede Zariskioffene Teilmenge* $U = \delta(f_1) \cup \ldots \cup \delta(f_r)$ *von* Sp(A) *ist ein zulässiger offener Unterraum von* Sp(A). *Ist a ein Element aus k mit* $0 < |a| < 1$, *so bilden die affinoiden Teilbereiche* $U_{ij} = U((f_i/a^j)^{-1})$ $i = 1, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots$ *eine zulässige Überdeckung* $\mathfrak{U}$ *von* U.

Beweis. — Sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus affinoider Algebren mit $Sp(\varphi)(Sp(B)) \subseteq U$. Wir müssen zeigen, daß das Urbild $Sp(\varphi)^{-1}(\mathfrak{U})$ der Überdeckung $\mathfrak{U}$ zu einer speziellen verfeinert werden kann. Nach Voraussetzung über φ ist $\delta(\varphi(f_1)) \cup \ldots \cup \delta(\varphi(f_r)) = Sp(B)$. Aus Hilfssatz 1.2 folgt also, daß es einen Index j_0 gibt, mit

$$Sp(B) = U((\varphi(f_1)/a^{j_0})^{-1}) \cup \ldots \cup U((\varphi(f_r)/a^{j_0})^{-1}) = Sp(\varphi)^{-1}(U_{1j_0}) \cup \ldots \cup Sp(\varphi)^{-1}(U_{rj_0})$$

Folgerung 1.4. — *Eine Überdeckung* $\mathfrak{U}$ *von* Sp(A) *durch Zariskioffene Teilmengen ist zulässig.*

Beweis. — Da Sp(A) bei der Zariskitopologie quasikompakt ist, kann $\mathfrak{U}$ zu einer Überdeckung durch endlich viele Zariskioffene Teilmengen und diese durch eine Überdeckung

$$(\delta(f_1), \ldots, \delta(f_r))$$

verfeinert werden. Also folgt 1.4 aus 1.2.

Sei $\mathfrak{J}$ ein Ideal der affinoiden Algebra $A : \mathfrak{J} = Af_1 + \ldots + Af_r$. Wir wollen die affinoiden Umgebungen der Nullstellenmenge $V(\mathfrak{J})$ von $\mathfrak{J}$ in Sp(A) studieren. Wir nennen eine Teilmenge U von Sp(A) Schlauchumgebung von $V(\mathfrak{J})$, wenn sie von der Form

$$U = U((f_1/\varepsilon), \ldots, (f_r/\varepsilon)) = Sp(A\langle\langle (f_1/\varepsilon), \ldots, (f_r/\varepsilon)\rangle\rangle)$$

ist, mit einem von Null verschiedenen Element ε aus k.

Hilfssatz 1.5. — *Sei* $\mathfrak{J} = Af_1 + \ldots + Af_r$ *ein Ideal der affinoiden Algebra* A, *a ein Element aus* A, $\bar{a}$ *die Restklasse in* $B = A/\mathfrak{J}$. *Dann gibt es eine Schlauchumgebung* $U = Sp(C)$ *von* $V(\mathfrak{J})$, *mit folgenden Eigenschaften :*

(1.5.1) *Wenn* $\bar{a}$ *Einheit ist, ist auch* $a|U$ (das Bild von a in C) *Einheit.*

(1.5.2) *Wenn* $|\bar{a}| \neq 0$ *ist gilt :* $|a|U| = |\bar{a}|$.

(1.5.3) *Ist* $\bar{a} = 0$, *so ist eine Potenz von a in* $\mathfrak{J}$ *enthalten :*

$$a^s = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r.$$

Insbesondere kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ U *so wählen, daß* $|a|U| \leq \varepsilon$ *ist.*

Beweis 1.5.3. — $\bar{a}$ ist nilpotent, also eine Potenz a^s in $\mathfrak{J}$ enthalten. In einer genügend kleinen Schlauchumgebung ist $|a_1.f_1|U| \leq \varepsilon, \ldots, |a_r.f_r|U| \leq \varepsilon$.

Für den Beweis von 1.5.1 und 1.5.2 können wir annehmen, daß $r = 1, f_1 = f$ ist.

Sei $\bar{a}$ Einheit. Dann gibt es ein Element b aus A mit der Restklasse $\bar{b}$ in B, so daß $\bar{a}.\bar{b} = 1$ ist, also auch ein Element u in A, so daß $a.b = 1 + u.f$ ist. In einer genügend kleinen Schlauchumgebung U ist $|u.f|U| < 1$, damit $1 + u.f|U$ Einheit :

$$(1 + u.f|U)^{-1} = 1 - u.f|U + (u.f|U)^2 \pm \ldots$$

Zu 1.5.2. — Nach geeigneter endlicher Grundkörpererweiterung und teilen durch ein Element ρ aus k mit $|\rho| = |\bar{a}|$ können wir annehmen, daß $|\bar{a}| = 1$ ist.

Wir müssen zeigen, daß es eine Schlauchumgebung U gibt, in der $|a| \leq 1$ ist. Zum Beweis können wir ferner annehmen, daß A Integritätsbereich und $f \neq 0$ ist. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz [18] gibt es in A eine freie affinoide Unteralgebra

$$\mathrm{T}_n = k\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n \rangle\rangle,$$

über der A endlich ist, so daß

$$(\mathrm{A}.f) \cap \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n.\mathrm{X}_n \text{ ist.}$$

Für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ über $\mathrm{A}f$ ist dann ebenfalls $\mathfrak{p}_i \cap \mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n.\mathrm{X}_n$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{H}_i(\mathrm{Y})$ das Hauptpolynom der Restklasse $\bar{a}_i$ von a in $\mathrm{A}/\mathfrak{p}_i$ über $\mathrm{T}_n/\mathrm{T}_n.\mathrm{X}_n = \mathrm{T}_{n-1} = k\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1} \rangle\rangle$, mit H(Y) das Produkt dieser Polynome $\mathrm{H}_i(\mathrm{Y})$. Da $|\bar{a}| \leq 1$ ist, ist auch $|\bar{a}_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, s$; also haben die Polynome H_i, damit auch H potenzbeschränkte Koeffizienten. Für eine geeignete Potenz

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H}^e \quad \text{gilt dann} \quad \mathrm{H}'(\bar{a}) = 0$$
$$\mathrm{H}'(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}^r + c_1 \mathrm{Y}^{r-1} + c_2 \mathrm{Y}^{r-2} + \ldots + c_r$$

mit $r \geq 1$ und $|c_i| \leq 1, i = 1, \ldots, r$.

Wegen $\mathrm{T}_{n-1} \hookrightarrow \mathrm{T}_n$ ist $\mathrm{H}'(\mathrm{Y})$ auch Polynom über T_n

$$\mathrm{H}'(a) = u.f = b, \quad u \in \mathrm{A}.$$

Ersetzt man Sp(A) durch eine geeignete Schlauchumgebung von $\mathrm{V}(f)$, so kann man annehmen, daß

$$|\mathrm{H}'(a)| = |b| = |u.f| \leq |u|.|f| \leq 1 \text{ ist.}$$

Wäre $|a| > 1$, so gäbe es einen Punkt $x \in \mathrm{Sp(A)}$ mit $|a(x)| > 1$.

Aus $a(x)^r + c_1(x)a(x)^{r-1} + \ldots + c_r(x) = b(x)$ und $|c_i(x)| \leq 1$, $|b(x)| \leq 1$ folgt :

$$1 \leq \sup\left(\frac{|c_1(x)|}{|a(x)|}, \ldots \frac{|c_r(x)|}{|a(x)|^r}, \frac{|b(x)|}{|a(x)|^r}\right)$$
$$< 1.$$

Widerspruch!

Wir wollen einige wichtige Folgerungen aus diesem Hilfssatz ziehen.

Satz 1.6. — Gegeben sei ein Ideal $\mathfrak{J} = \mathrm{A}f_1 + \ldots + \mathrm{A}f_r$ *der affinoiden Algebra* A; $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_s$ *seien geschachtelte spezielle, offene Teilmengen von* Sp(A), *so daß* $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ *in* $\mathrm{U}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{U}_s$ *enthalten ist. Dann gibt es eine ganze Schlauchumgebung von* $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$, *die in* $\mathrm{U}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{U}_s$ *enthalten ist.*

Beweis. — Man kann annehmen, daß die offenen Teilmengen U_i speziell sind. Genau wie den Hilfssatz 1.3, [13] von Tate (Beweis siehe [18]) beweist man : Es gibt eine Laurentüberdeckung $(\mathrm{V}_j = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_j))_{j=1,\ldots,n}$ von Sp(A), so daß für jeden Index j, $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V}_j$ von der Form $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V}_j = \mathrm{U}(g_i^{-1})$, $i = 1, \ldots, s$ mit potenzbeschränkten Elementen $g_1, \ldots, g_s$ aus A_j ist. Wir können annehmen, daß $\mathrm{A} = \mathrm{A}_j$ ist für einen Index j. $\mathrm{U}_i = \mathrm{U}(g_i^{-1}).|g_i| \leq 1$. Da $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ in $\mathrm{U}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{U}_s$ enthalten ist, gibt es

Elemente $h_1, \ldots, h_s$ in A, ein Element f in $\mathfrak{J}$, mit $g_1 h_1 + \ldots + g_s h_s = 1 + f$ und $|h_i(x)| \leq 1$ für x aus $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ und $i = 1, \ldots, s$.

Nach Hilfssatz 1.5 kann man Sp(A) durch eine geeignete Schlauchumgebung ersetzen, so daß $|h_1| \leq 1, \ldots, |h_s| \leq 1, |f| < 1$ wird. Dann bilden aber die offenen Mengen $\mathrm{U}(g_1^{-1}) = \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}(g_s^{-1}) = \mathrm{U}_s$ eine formelle Überdeckung.

Da jeder geschachtelte spezielle Teilbereich von $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ Durchschnitt eines geschachtelten speziellen Teilbereiches von Sp(A) mit $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ ist, erhält man aus 1.6

Folgerung 1.7. — Gegeben sei eine Überdeckung von $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ *durch geschachtelte spezielle offene Teilmengen* $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_s$ *von* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$. *Dann gibt es eine Schlauchumgebung* U *von* $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ *und eine Überdeckung von* U *durch geschachtelte spezielle offene Teilmengen* $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_s$ *von* U, *so daß*

$$\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}(\mathfrak{J}) = \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{V}_s \cap \mathrm{V}(\mathfrak{J}) = \mathrm{U}_s \textit{ ist.}$$

Gegeben sei ein Homomorphismus $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ affinoider Algebren und ein Ideal $\mathfrak{J} = \mathrm{A}f_1 + \ldots + \mathrm{A}f_r$ von A. Wichtig ist folgendes Endlichkeitskriterium :

Satz 1.8. — Unter den angegebenen Voraussetzungen sei $\mathrm{B}/\mathfrak{J}\mathrm{B}$ *endlich über* $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$. *Dann gibt es in k ein Element* $\varepsilon \neq 0$, *so daß* $\mathrm{B}\langle\langle(\varepsilon/f_1)^{-1}, \ldots, (\varepsilon/f_r)^{-1}\rangle\rangle$ *endlich über* $\mathrm{A}\langle\langle(\varepsilon/f_1)^{-1}, \ldots, (\varepsilon/f_r)^{-1}\rangle\rangle$ *ist. Mit anderen Worten : Über einer Schlauchumgebung von* $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ *ist der affinoide Raum* Sp(B) *endlich.*

Folgerung 1.9. — Ist $\mathrm{A}/\mathfrak{J} \to \mathrm{B}/\mathfrak{J}\mathrm{B}$ *surjektiv, so ist für passendes* $\varepsilon \neq 0$ *aus k auch* $\mathrm{A}\langle\langle(\varepsilon/f_1)^{-1}, \ldots, (\varepsilon/f_r)^{-1}\rangle\rangle \to \mathrm{B}\langle\langle(\varepsilon/f_1)^{-1}, \ldots, (\varepsilon/f_r)^{-1}\rangle\rangle$ *surjektiv.*

Beweis von 1.8. — Wir können annehmen, daß $r = 1$, $f_1 = f$ ist. Bei passender Auswahl der $\mathring{k} = \mathrm{V}$-Unteralgebren A_0 von A bzw. B_0 von B bildet φ A_0 in B_0 ab. Sei $\mathrm{B} = k\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\rangle\rangle/\mathfrak{a}$ Faktor der freien affinoiden Algebra $k\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\rangle\rangle$, so daß $\mathrm{B}_0 = \mathrm{V}\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\rangle\rangle/(\mathfrak{a} \cap \mathrm{V}\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\rangle\rangle)$ ist. Die Bilder von $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ in B bezeichnen wir mit $x_1, \ldots, x_n$. Da $\mathrm{B}/\mathfrak{J}\mathrm{B}$ endlich über $\mathrm{A}/\mathfrak{J}$ ist, ist auch $\mathrm{B}_0/\mathfrak{J}\mathrm{B} \cap \mathrm{B}_0$ endlich über $\mathrm{A}_0/\mathfrak{J} \cap \mathrm{A}_0$ ([17], [18]). Es gibt also Polynome $\mathrm{P}_1(\mathrm{Y}), \ldots, \mathrm{P}_n(\mathrm{Y})$ in $\mathrm{A}_0[\mathrm{Y}]$ mit höchsten Koeffizienten Eins und Elemente $u_1, \ldots, u_n$ in B mit : $\mathrm{P}_1(x_1) = u_1 . f, \ldots, \mathrm{P}_n(x_n) = u_n . f$. Sei ε ein von Null verschiedenes Element aus k mit $|u_i \varepsilon| < 1$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die Restklassen von $x_1, \ldots, x_n$ in $\widetilde{\mathrm{B}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle}$ ganz über $\widetilde{\mathrm{A}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle}$. Da $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{A}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle}}$ ganz über $\mathrm{A}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle_0 = \mathrm{A}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$ und $\sqrt{\mathfrak{m} . \mathrm{B}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle} = \mathfrak{t}(\mathrm{B}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle) \cap \mathrm{B}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$ ist, gilt : Auch die Restklassen $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ im Restklassenring $\dot{\mathrm{B}} = \mathrm{B}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle/\mathfrak{m}\mathrm{B}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$ sind ganz über $\dot{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle/\mathfrak{m}\mathrm{A}_0\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$. Da $\dot{\mathrm{B}}$ durch $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ und die Restklasse $(\dot{f/\varepsilon})$ von f/ε über $\dot{\mathrm{A}}$ erzeugt wird, aber $(\dot{f/\varepsilon})$ bereits in $\dot{\mathrm{A}}$ liegt ist $\dot{\mathrm{B}}$ über $\dot{\mathrm{A}}$ sogar endlich. Daraus folgt, daß auch $\mathrm{B}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$ über $\mathrm{A}\langle\langle f/\varepsilon\rangle\rangle$ endlich ist ([17], [18]).

Beweis von 1.9. — Aus 1.8 und dem Lemma von Nakayama folgt, daß es endlich viele Zariskioffene Teilmengen $\delta(h_1), \ldots, \delta(h_r)$ gibt, so daß $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ in $\delta(h_1) \cup \ldots \cup \delta(h_r)$ enthalten ist und die induzierten Homomorphismen

$$\mathrm{A}_{h_i} \to \mathrm{B}_{h_i} \qquad i = 1, \ldots, r$$

surjektiv sind. Wegen 1.2 und 1.6 erhält man daraus 1.9.

Bemerkung 1.10. — Diese und ähnliche Sätze folgen auch aus den Eigenschaften des Ringes $A_{\mathfrak{J}} = \varinjlim_{0 \neq \varepsilon \in k,\ \varepsilon \to 0} A\langle\langle f_1/\varepsilon, \ldots, f_r/\varepsilon\rangle\rangle$ der « Keime holomorpher Funktionen in einer Umgebung von $V(\mathfrak{J})$ ». Z.B. gilt : $A_{\mathfrak{J}}$ ist Noethersch, das Paar $(A_{\mathfrak{J}}, A_{\mathfrak{J}}.\mathfrak{J})$ Henselsch; die $\mathfrak{J}$-adische Komplettierung von A ist treuflach über $A_{\mathfrak{J}}$. Satz 1.8 ist äquivalent zu einem Endlichkeitskriterium für Homomorphismen solcher Ringe.

Wir wollen jetzt einige Eigenschaften glatter affinoider Räume studieren.

Wir übernehmen aus [3] folgende Definition :

Definition 1.11. — *Gegeben sei ein maximales Ideal x einer affinoiden Algebra* A. *Dann heißt x absolut regulär, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist :*

(1.11.1) *Für alle vollständig bewerteten Erweiterungskörper* K *von k und für alle maximalen Ideale y aus* $A\hat{\otimes}_k K$ *über x ist* $(A\hat{\otimes}_k K)_y$ *regulär.*

(1.11.2) *Für ein maximales Ideal y von* $A\hat{\otimes}_k k^{\frac{1}{p}}$ *über x ist* $(A\hat{\otimes}_k k^{\frac{1}{p}})_y$ *regulär.* ($p = \mathrm{Char.}(k)$).

(1.11.3) *Für den stetigen Differentialmodul* $M(A/k)$ *ist der Rang*

$$\rho(M(A/k)_x) \leq \dim A_x.$$

(1.11.4) $M(A/k)_x$ *ist frei vom Rang* $\dim A_x$.

(1.11.5) *Es gibt in* A *eine freie affinoide Algebra* T, *so daß* A *über* T *endlich und* A_x *über* $T_{x\cap T}$ *etal, d.h. flach und unverzweigt ist.*

Den Beweis für diese Äquivalenzen findet man in [3].

Sind alle maximalen Ideale von A absolut regulär, so nennt man A absolut regulär und in Analogie zur algebraischen Geometrie Sp(A) einen *glatten* affinoiden Raum.

Für die Anwendungen ist es notwendig, (1.11.5) zu verschärfen.

Satz 1.12. — *Sei* Sp(A) *glatt. Dann gibt es eine Überdeckung von* Sp(A) *durch endlich viele offene spezielle affinoide Teilbereiche* $(\mathrm{Sp}(A_i) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A))$, $i = 1, 2, \ldots, r$, *so, daß es zu jedem Punkt x eines Teilbereiches* $\mathrm{Sp}(A_i)$ *der Überdeckung eine freie affinoide Unteralgebra* T *von* A_i *und in* T *ein Element t gibt, mit folgenden Eigenschaften* : A_i *ist endlich über* T, *t nicht in x enthalten und* A_{it} *etal über* T_t.

Folgerung 1.13. — *Man kann t sogar so wählen, daß es ein Element d in* A_i *und ein unitäres Polynom* P(Y) *in* T[Y] *gibt mit* :

$P(d) = 0$; $P'(d)$ $\left(\text{wo } P'(Y) = \dfrac{dP(Y)}{dY}\right)$ *ist Einheit in* $T_t[d]$; A_{it} *ist kanonisch isomorph zu*

$$T_t[Y]/(T_t[Y].P(Y))$$

Beweis der Folgerung. — Sei $\mathfrak{n} = T \cap x$. Da der Restklassenkörper $T/\mathfrak{n} = k(\mathfrak{n})$ unendlich, die $k(\mathfrak{n})$-Algebra $A_i/\mathfrak{n}A_i$ nach Voraussetzung endlich separabel ist, gibt es in A_i ein Element d, dessen Restklasse in $A_i/\mathfrak{n}A_i$ diese Algebra über $k(\mathfrak{n})$ erzeugt. Das Minimalpolynom P(Y) von d über dem Quotientenkörper von T liegt dann bereits in $T[Y]$ und aus dem Lemma von Nakayama folgt, daß $A_{\mathfrak{n}}$ kanonisch isomorph zu $T_{\mathfrak{n}}[Y]/P(Y).T_{\mathfrak{n}}$ ist. Da $A_i/\mathfrak{n}A_i$ separabel über $k(\mathfrak{n})$ ist, ist die Restklasse von $P'(d)$ in $A_i/\mathfrak{n}A_i$ also $P'(d)$ in $A_{i\mathfrak{n}}$ Einheit (siehe [9]; I, Theorem 7.6).

Es gibt deshalb ein Element t aus T, das nicht in $\mathfrak{n}$ enthalten ist, so daß $P'(d)$ bereits Einheit in A_{it} und A_{it} kanonisch isomorph zu $T_t[Y]/P(Y).T_t[Y]$ ist.

Da die Zariskitopologie quasikompakt ist, erhält man wegen Hilfssatz 1.2 :

Folgerung 1.14. — Sei Sp(A) *glatt. Dann besitzt* Sp(A) *eine spezielle Überdeckung* $(\mathrm{Sp}(A_i) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A))$, $i=1, \ldots, s$, *mit Algebren* A_i *folgender Form* :

$$T_{n_i}\langle\langle t_i^{-1}\rangle\rangle[Y]/(P_i(Y)) \xrightarrow{\cong} A_i = T_{n_i}\langle\langle t_i^{-1}\rangle\rangle[d_i]$$
$$Y \longrightarrow d_i.$$

Dabei ist T_{n_i} *freie affinoide Algebra,* $t_i \neq 0$ *ein Element aus* T_{n_i}, $P_i(Y)$ *ein unitäres Polynom mit Koeffizienten in* T_{n_i} *und* $P'(d_i)$ *Einheit in* A_i.

Beweis von Satz 1.12. — a) Die Charakteristik p des Grundkörpers sei positiv. Der stetige Differentialmodul $M(A/k)$ von A über k ist lokal frei (1.11.4); also überdecken endlich viele Zariskioffene Teilmengen $\mathfrak{d}(f_1), \ldots, \mathfrak{d}(f_r)$ den Raum Sp(A), so daß $M(A/k)_{fi}$ freier A_{fi}-Modul wird und sogar eine Basis aus totalen Differentialen $d(a)$ besitzt. Wegen Hilfssatz 1.2 gibt es daher eine Überdeckung von Sp(A) durch endlich viele spezielle affinoide Teilbereiche $(\mathrm{Sp}(A_i))$, $i=1, \ldots, r$, so daß $M(A_i/k) = M(A/k) \otimes A_i$ freier A_i-Modul ist und sogar eine Basis von totalen Differentialen besitzt. Wir nehmen deshalb an, daß $M(A/k)$ selbst frei ist und eine Basis aus totalen Differentialen besitzt :

$$M(A/k) = A dy_i \oplus \ldots \oplus A dy_n.$$

Dann hat Sp(A) in allen Punkten die Dimension n. Nach Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Element aus k können wir annehmen, daß

$$|y_1| < 1, \ \ldots, \ |y_n| < 1$$

ist. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz enthält A eine freie affinoide Algebra $T' = k\langle\langle z_1, \ldots, z_n\rangle\rangle$ in den Variablen $z_1, \ldots, z_n$, so daß A über T' endlich ist.

Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi : T = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle \to A$$

der freien affinoiden Algebra T in A, der X_i in $z_i^p + y_i$ abbildet. Dann ist das Bild von $\widetilde{T}$ in $\widetilde{A}$ in $\widetilde{T}'$ enthalten und $\widetilde{T}'$ endlich über $\widetilde{T}$. Da A über T' endlich ist, ist auch $\widetilde{A}$ endlich über $\widetilde{T}'$; also ist $\widetilde{A}$ endlich über $\widetilde{T}$ und nach bekannten Schlußweisen [6] deshalb auch A endlich über T. Aus Dimensionsgründen ist φ eine Injektion. Da die Differentiale

$$d(\varphi(X_1)) = d(y_1 + z_1^p) = dy_1, \ \ldots, \ d(\varphi(X_n)) = dy_n$$

den A-Modul $M(A/k)$ erzeugen verschwindet der Differentialmodul

$$M(A/T) = M(A/k)/A d\varphi(T)$$

von A über T. Daher ist A unverzweigt über T und sogar etal über T, da T regulär ist ([9]; I, Prop. 3.1, Theorem 9.5).

b) Der Grundkörper k habe die Charakteristik Null. Wir können annehmen, daß A Integritätsbereich ist. (Sonst zerfällt A als regulärer Ring in ein direktes Produkt von Integritätsbereichen). Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz gibt es eine Injektion $\varphi : T \hookrightarrow A$ einer freien affinoiden Algebra $T = T_n = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ in A, so daß A über T endlich ist.

Wir nennen einen Homomorphismus $\psi : T \to A$ unwesentliche Abänderung von φ, wenn die induzierte Abbildung

$$\widetilde{\psi} : \widetilde{T} \to \widetilde{A}$$

mit der induzierten Abbildung

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{T} \to \widetilde{A}$$

übereinstimmt.

Insbesondere ist für eine unwesentliche Abänderung ψ von φ die Abbildung $\widetilde{\psi}$ endlich; also ist jede unwesentliche Abänderung ψ selbst endlich und aus Dimensionsgründen wieder Injektion. Wir bezeichnen für ein maximales Ideal x aus Sp(T) mit $F(\psi, x)$ die Menge der Punkte in der Faser $Sp(\psi)^{-1}(x)$, mit $F_0(\psi, x)$ die Teilmenge der unverzweigten Punkte über x, mit $r(\psi, x)$ die Anzahl der Punkte in $F(\psi, x)$ und mit $r_0(\psi, x)$ die Anzahl der Punkte in $F_0(\psi, x)$. Wir schreiben $[\psi]$ für den Grad des Homomorphismus ψ, $[\widetilde{\psi}]$ für den Grad des Homomorphismus $\widetilde{\psi}$.

Hilfssatz 1.5. — Für alle unwesentlichen Abänderungen ψ von φ und alle Punkte x aus Sp(T) *gilt* :

$$r(\psi, x) \leq [\varphi].$$

Beweis. — Sei K ein algebraisch abgeschlossener, vollständiger Erweiterungskörper von k. Dann ist auch $A \hat{\otimes}_k K$ regulär und kein Element von $T \hat{\otimes}_k K = K\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ Nullteiler von $A \hat{\otimes}_k K$ bei $\psi \hat{\otimes} K$.

Es gilt jedenfalls :

$$r(\psi, x) \leq [\psi] = [\psi \hat{\otimes} K]$$
$$[\varphi] = [\varphi \hat{\otimes} K].$$

Andererseits ist nach [6]

$$[\psi \hat{\otimes} K] = [\widetilde{\psi \hat{\otimes} K}]$$
$$[\varphi \hat{\otimes} K] = [\widetilde{\varphi \hat{\otimes} K}].$$

Da auch $\psi \hat{\otimes} K$ unwesentliche Abänderung von $\varphi \hat{\otimes} K$ ist gilt aber $\widetilde{\psi \hat{\otimes} K} = \widetilde{\varphi \hat{\otimes} K}$.

Wir kehren zum Beweis von 1.12 zurück. Sei a ein Punkt von Sp(A) Wir können φ so wählen, daß $\varphi^{-1}(a) = TX_1 + \ldots + TX_n = b$ ist. Unter allen unwesentlichen Abänderungen ψ von φ mit $\psi^{-1}(a) = b$ gibt es eine, ψ_1, für die $r_0(\psi_1, b)$ maximal ist. Angenommen, es gibt einen Punkt a_1 in $F(\psi_1, b)$, der nicht in $F_0(\psi_1, b)$ liegt. Wir bezeichnen mit $\pi: a_1 \to \mathrm{M}$ die Projektion des Ideals a_1 auf den Vektorraum $\mathrm{M} = a_1/a_1^2$ über dem Restklassenkörper $k(a_1) = \mathrm{A}/a_1$. Unter allen unwesentlichen Abänderungen ψ von ψ_1 mit $\mathrm{F}_0(\psi_1, b) \subseteq \mathrm{F}_0(\psi, b)$

$$a, a_1 \in \mathrm{F}(\psi, b)$$

gibt es eine, ψ_2, für die die Dimension des von $\pi\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_2(\mathrm{X}_n)$ erzeugten Untervektorraumes maximal ist. Da die Dimension von M gleich n ist und nach Konstruktion die Elemente $\pi\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_2(\mathrm{X}_n)$ nicht den ganzen Raum M erzeugen können, ist, nach geeigneter Umnumerierung, $\pi\psi_2(\mathrm{X}_n)$ von $\pi\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_2(\mathrm{X}_{n-1})$ linear abhängig. Sei w ein Element von M, das nicht von $\pi\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_2(\mathrm{X}_n)$ linear abhängt. Seien $a_2, \ldots, a_r$ die Ideale aus $\mathrm{F}_0(\psi_2, b)$, y ein Element aus $a_2^2 \cap \ldots \cap a_r^2 \cap a_1 \cap a$ mit $\pi(y) = w$ und t ein von Null verschiedenes Element aus k mit $|t.y| < 1$.

Der Homomorphismus

$$\psi_3 : \mathrm{T} \to \mathrm{A},$$

der $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1}$ auf $\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \psi_2(\mathrm{X}_{n-1})$ und X_n auf $\psi_2(\mathrm{X}_n) + ty$ abbildet, ist eine unwesentliche Abänderung von ψ_2. Es gilt :

$$\mathrm{F}_0(\psi_2, b) \subseteq \mathrm{F}_0(\psi_3, b)$$
$$a, a_1 \subseteq \mathrm{F}(\psi_3, b).$$

Der von den Elementen $\pi\psi_3(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_3(\mathrm{X}_{n-1}), \pi\psi_3(\mathrm{X}_n) = \pi\psi_2(\mathrm{X}_n) + tw$ erzeugte Vektorraum ist echt größer als der von $\pi\psi_2(\mathrm{X}_1), \ldots, \pi\psi_2(\mathrm{X}_n)$ erzeugte. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximaleigenschaft von ψ_2!

Also ist ψ_2 doch in b unverzweigt. Da die Menge der Punkte aus Sp(T), in denen ψ_2 unverzweigt ist, Zariskioffen ist ([9], I), gibt es ein Element t in T, das nicht in b enthalten ist, so daß A_t über T_t unverzweigt, also sogar etal ist.

Satz 1.16. — Gegeben sei ein Homomorphismus $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}/\mathfrak{J}$ *einer affinoiden Algebra* A *in den Faktorring* $\mathrm{B}/\mathfrak{J}$ *einer affinoiden Algebra* B. *Die Algebra* A *habe folgende Form*

$$\mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle[\mathrm{Y}]/(\mathrm{P}(\mathrm{Y})) \xrightarrow{\cong} \mathrm{A} = \mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle[d]$$
$$\mathrm{Y} \longrightarrow d.$$

Dabei ist $\mathrm{T} = \mathrm{T}_n = k\langle\langle \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\rangle\rangle$ *freie affinoide Algebra,* t *ein Element aus* T, P(Y) *ein unitäres Polynom in der Variablen* Y *mit Koeffizienten in* T *und* $\mathrm{P}'(d)$ *Einheit in* A.

Dann gibt es eine Schlauchumgebung $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}') \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ *von* $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ *und einen Homomorphismus* $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}'$, *so daß folgendes Diagramm kommutativ wird* :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{B}' \arrow[d] \\ & \mathrm{B}/\mathfrak{J} = \mathrm{B}'/\mathfrak{J}\mathrm{B}' \end{tikzcd}$$

Zum Beweis können wir annehmen, daß $\mathfrak{J}$ durch ein Element f erzeugt wird.

Seien $a_1, \ldots, a_n$ bzw. t' und β Urbilder von $\varphi(\mathrm{X}_1), \ldots, \varphi(\mathrm{X}_n)$ bzw. $\varphi(t)$ und $\varphi(d)$

in B. Ersetzt man Sp(B) durch eine geeignete Schlauchumgebung, so kann man wegen Hilfssatz 1.5 annehmen, daß t' Einheit in B und

$$(*) \qquad |a_1|\leq 1, \ldots, |a_n|\leq 1, |t'^{-1}|\leq 1$$

ist. Wegen (*) gibt es dann einen Homomorphismus

$$\psi' : \mathrm{T}\rightarrow \mathrm{B}$$

mit $\psi'(\mathrm{X}_1)=a_1, \ldots, \psi'(\mathrm{X}_n)=a_n$. Wir wählen $t'=\psi'(t)$; ψ' läßt sich wegen (*) fortsetzen zu $\psi : \mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle\rightarrow \mathrm{B}$. B ist dann $\mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle$-Algebra. Wegen 1.5 können wir weiter annehmen, daß $\mathrm{P}'(\beta)$ Einheit in B ist. Nach Konstruktion gibt es in B ein Element b, so daß $\mathrm{P}(\beta)=b.f$ ist. Gesucht ist ein Element u in B — bzw. der Algebra B' einer geeigneten Schlauchumgeung von $\mathrm{V}(\mathfrak{I})$ — mit

$$(**) \qquad \mathrm{P}(\beta+((u-b)/\mathrm{P}'(\beta)).f)=0$$

Es gibt ein Polynom Q(Z) in B[Z] mit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\beta+((\mathrm{Z}-b)/\mathrm{P}'(\beta))f)&=\mathrm{P}(\beta)+((\mathrm{Z}-b)/\mathrm{P}'(\beta)).f.\mathrm{P}'(\beta)+f^2.\mathrm{Q}(\mathrm{Z})\\ &=f.\mathrm{Z}+f^2.\mathrm{Q}(\mathrm{Z}).\end{aligned}$$

Die Gleichung (**) folgt aus der Gleichung

$$(***) \qquad u=-f.\mathrm{Q}.(u).$$

Wir ersetzen Sp(B) durch eine geeignete Schlauchumgebung von $\mathrm{V}(\mathfrak{I})$ und können annehmen :

$$|f.d_i|\leq\frac{1}{2}, \qquad d_0+d_1\mathrm{Z}+\ldots+d_r\mathrm{Z}^r=\mathrm{Q}(\mathrm{Z}).$$

Die Abbildung

$$u\rightsquigarrow \mathrm{S}(u)=-f.\mathrm{Q}(u)$$

des Einheitskreises $\mathrm{E}=\{u\in\mathrm{B};\ |u|\leq 1\}$ in sich ist kontrahierend :

$$|\mathrm{S}(u_1)-\mathrm{S}(u_2)|\leq\frac{1}{2}|u_1-u_2|, \qquad u_1, u_2\in\mathrm{E}.$$

Sie besitzt deshalb nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt u.

Die Abbildung $\mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle\rightarrow\mathrm{B}$ läßt sich fortsetzen zu einen Homomorphismus

$$\psi : \mathrm{A}=\mathrm{T}\langle\langle t^{-1}\rangle\rangle[d]\rightarrow\mathrm{B}$$

mit

$$\psi(d)=\beta+((u-b)/\mathrm{P}'(\beta)).f.$$

Aus den Sätzen 1.16, 1.14 und 1.7 erhält man unmittelbar :

Satz 1.17. — Gegeben sei ein Morphismus f eines glatten affinoiden Raumes Sp(A) *in den abgeschlossenen affinoiden Unterraum* $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}/\mathfrak{I})$ *des affinoiden Raumes* $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}/\mathfrak{I})$.

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) & & \\ \big\uparrow{\scriptstyle j} & & \\ \mathrm{Sp}(\mathrm{B}/\mathfrak{I}) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Sp}(\mathrm{A})\end{array}$$

Dann gibt es eine Schlauchumgebung U *von* $V(\mathfrak{J})$, *eine zulässige Überdeckung von* U *durch geschachtelte spezielle affinoide Teilbereiche* $U_1, \ldots, U_r$, *eine spezielle Überdeckung* $(V_i)_{i=1,\ldots r}$ *von* Sp(A) *und Morphismen* $f_i: U_i \to V_i$ *für* $i=1, \ldots, r$ *mit folgenden Eigenschaften* :

$$j^{-1}(U_i) = f^{-1}(V_i)$$

$$f_i \circ j | j^{-1}(U_i) = f | j^{-1}(U_i).$$

Sei $\mathfrak{J}$ ein Ideal einer affinoiden Algebra A, so daß A in allen Punkten von $V(\mathfrak{J})$ absolut regulär und $Sp(A/\mathfrak{J})$ glatt ist. Dann gibt es endlich viele Zariskioffene Teilmengen $\delta(a_1), \ldots, \delta(a_r)$ von Sp(A), mit folgenden Eigenschaften :

$$V(\mathfrak{J}) \subseteq \delta(a_1) \cup \ldots \cup \delta(a_r),$$

A_{a_i} ist absolut regulär und hat in allen maximalen Idealen die gleiche Dimension n_i; $(A/\mathfrak{J})_{a_i}$ hat in allen maximalen Idealen die gleiche Dimension $n_i - t_i$; $\mathfrak{J}.A_{a_i}$ wird von t_i Elementen erzeugt; diese Elemente sind in einer geeigneten Schlauchumgebung von $V(\mathfrak{J})$ potenzbeschränkt.

Aus den Sätzen 1.2, 1.3, 1.17, 1.9 folgt deshalb :

Theorem 1.18. — (Existenz tubularer Umgebungen).

Sei der Faktorring $A/\mathfrak{J}$ *der affinoiden Algebra* A *absolut regulär,* A *selbst in allen maximalen Idealen von* $V(\mathfrak{J})$ *absolut regulär.*

Dann gibt es eine Schlauchumgebung $Sp(B) \to Sp(A)$ *von* $V(\mathfrak{J})$, *eine zulässige Überdeckung* $(Sp(B_i) \hookrightarrow Sp(B))$, $i=1, \ldots, r$ *durch geschachtelte spezielle affinoide Teilbereiche* $Sp(B_i)$ *von* Sp(B) *und Isomorphismen*

$$f_i : (B_i/\mathfrak{J}B_i)\langle\langle X_1, \ldots, X_{n_i}\rangle\rangle \xrightarrow{\cong} B_i$$

freier affinoider Algebren über $B_i/\mathfrak{J}B_i$ *in den Variablen* $X_1, \ldots, X_{n_i}$, *so daß die Bildelemente* $f_i(X_1), \ldots, f_i(X_{n_i})$ *das Ideal* $\mathfrak{J}.B_i$ *erzeugen.*

Bemerkung. — Angenommen, das Ideal werde durch die Elemente $h_1, \ldots, h_t$ erzeugt, A habe in allen Punkten die Dimension n, $A/\mathfrak{J}$ in allen Punkten die Dimension $n-t$. Dann kann man die Isomorphismen f_i sogar so wählen, daß für alle i das Element X_r durch f_i in das Bild von h_r/ε_i in B_i abgebildet wird für $r=1, \ldots, n_i = t$, $\varepsilon_i \neq 0$, $\varepsilon_i \in k$, $i=1, 2, \ldots, r$.

§ 2. De Rham Kohomologie.

Wir wollen von jetzt an voraussetzen, daß die Charakteristik des Grundkörpers k Null ist.

Sei A eine affinoide Algebra. Wir bezeichnen mit M(A) den — stetigen — Differentialmodul von A über k; M(A) ist endlicher A-Modul, sogar lokal frei, wenn A regulär ist [3]. Man bildet mit Hilfe der kanonischen Derivation $d: A \to M(A)$ den Komplex

$$\Omega_A^{\bullet} : 0 \to \Omega_A^0 \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \ldots$$

der äußeren Differentialformen von A über k; Ω_A^p ist die p-te äußere Potenz von M(A).

Für einen Homomorphismus $\varphi : A \to B$ affinoider Algebren hat man einen natürlichen Homomorphismus von Komplexen :

$$\Omega_A^\bullet \to \Omega_B^\bullet$$

und Ω_B^p ist sogar kanonisch isomorph zu $B \underset{A}{\otimes} \Omega_A^p$, wenn $\mathrm{Sp}(\varphi) : \mathrm{Sp}(B) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(A)$ offene Einbettung ist. Deshalb definiert der Funktor

$$\mathrm{Sp}(A) \rightsquigarrow \Omega_A^\bullet$$

auf der Kategorie der offenen affinoiden Unterräume $\mathrm{Sp}(A)$ eines analytischen Raumes X (im Sinne von [12]) einen Komplex :

$$\Omega_X^\bullet : 0 \to \Omega_X^0 \to \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \to \dots$$

von kohärenten Garben Ω_X^p ([12], [13]) auf X; die Differentiation ist natürlich nur k-linear. Für jeden Morphismus $X \to Y$ analytischer Räume hat man einen natürlichen Morphismus von Komplexen :

$$\Omega_X^\bullet \leftarrow \Omega_Y^\bullet$$

Sei $\mathfrak{J}$ ein Ideal einer affinoiden Algebra A, U das Komplement von $V(\mathfrak{J})$ in $\mathrm{Sp}(A)$. Man konstruiert auf natürliche Weise einen Komplex

$$\Omega_A^\bullet(*\mathfrak{J}) : 0 \to \Omega_A^0(*\mathfrak{J}) \xrightarrow{d} \Omega_A^1(*\mathfrak{J}) \xrightarrow{d} \dots,$$

den Komplex der Differentialformen mit « Polstellen in $V(\mathfrak{J})$ » und einen k-Homomorphimus von Komplexen :

$$\Omega_A^\bullet(*\mathfrak{J}) \to \Gamma(U, \Omega_{\mathrm{Sp}(A)})$$

mit

$$\Omega_A^p(*\mathfrak{J}) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{J}^n, \Omega_A^p)$$

(siehe auch [8]).

Ist $Y = V(\mathscr{J})$ ein abgeschlossener analytischer Unteraum des analytischen Raumes X, « Nullstellenmenge » der kohärenten Garbe von Idealen $\mathscr{J}$ [13], U das Komplement von Y in X, so definiert man ebenso den Garbenkomplex

$$\Omega_X^\bullet(*Y) : 0 \to \Omega_X^0(*Y) \to \Omega_X^1(*Y) \to \dots$$

auf X von Differentialformen mit « Polstellen in Y » und einen k-Homomorphismus von Komplexen :

$$\Omega_X^\bullet(*Y) \to \Omega_U^\bullet$$

Sei $B = A\langle\langle Z_1, \dots, Z_n\rangle\rangle = A \hat{\underset{k}{\otimes}} T_n$ die freie affinoide Algebra in den Variablen $Z_1, \dots, Z_n$ über der affinoiden Algebra A; wir setzen $f = Z_1 \dots Z_n$, $\mathfrak{J} = Bf$, $U = \delta(f)$ und $X = \mathrm{Sp}(B)$; $X_0 = \{x \in X;\ |Z_1(X)| < 1, \dots, |Z_n(X)| < 1\}$, $U_0 = U \cap X_0$, $Y = V(\mathfrak{J})$. Wir wollen den Ring $R = \Gamma(U_0, \mathcal{O}_X)$ der holomorphen Funktionen auf U_0 beschreiben.

Sei $s = (s_1, \dots, s_n)$ ein n-Tupel von ganzen Zahlen. Wir schreiben

$$Z^s = Z_1^{s_1} \dots Z_n^{s_n}$$

$$t(s) = \frac{1}{2}(|s_1| - s_1 + \dots + |s_n| - s_n), \qquad t^+(s) = |s| - t(s), \qquad |s| = |s_1| + \dots + |s_n|.$$

Dann ist R der Ring aller Laurentreihen $h = \sum_{s=(s_1,\ldots,s_n)} a_s Z^s$ mit Koeffizienten a_s aus A, für die gilt : $\lim_{|s|\to\infty} ||a_s||/|\varepsilon|^{t(s)}\cdot(1+|\varepsilon|)^{t^+(s)}$ für alle von Null verschiedenen ε aus k. Die Topologie der gleichläßigen Konvergenz auf allen offenen affinoiden Unterräumen von U wird durch das System $(||\ ||_\varepsilon)_{\varepsilon \neq 0,\, \varepsilon \in k}$ von Normen $||\ ||_\varepsilon$ auf R beschrieben :

$$||h||_\varepsilon = \sup_s ||a_s||/|\varepsilon|^{t(s)}\cdot(1+|\varepsilon|)^{t^+(s)}.$$

Ebenso beschreibt man den Komplex $K^\bullet = \Gamma(U_0, \Omega^\bullet_X)$:

$$K^p = \{g = \sum_{s,1\leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} \omega_s^{i_1,\ldots,i_q}\cdot Z^s \cdot dZ_{i_1}\cdots dZ_{i_q};\ \omega_s^{i_1,\ldots,i_q} \in \Omega_A^{p-q},$$
$$\lim_{|s|\to\infty} ||\omega_s^{i_1,\ldots,i_q}||/|\varepsilon|^{t(s)}\cdot(1+|\varepsilon|)^{t^+(s)} = 0 \text{ für } \varepsilon \neq 0 \text{ aus } k\}.$$

Auch auf K^p ist eine Topologie durch ein System von Normen $(||\ ||_\varepsilon)_{\varepsilon \neq 0,\, \varepsilon \in k}$ erklärt.

Es bezeichne r die natürliche Abbildung :

$$\Omega^\bullet_X(*Y)(X_0) \to K^\bullet.$$

Wir bezeichnen mit $C^\bullet$ folgenden Unterkomplex von $K^\bullet$: C^p wird durch die Differentialformen

$$\omega\cdot(Z_{i_1}\cdots Z_{i_q})^{-1} dZ_{i_1}\cdots dZ_{i_q}, \quad \omega \in \Omega_A^{p-q}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$$

erzeugt.

$$j : C^\bullet \hookrightarrow K^\bullet$$

bezeichnet die Einbettung.

Wir konstruieren stetige A-lineare Abbildungen vom Grad -1, $\partial_1, \ldots, \partial_n : K^\bullet \to K^\bullet$ und einen Homomorphismus von Komplexen :

$$\mathrm{Res} : K^\bullet \to C^\bullet.$$

Es genügt, diese Abbildungen auf den topologischen Erzeugenden

$$g = \omega\cdot Z^s \cdot dZ_{i_1}\cdots dZ_{i_q}, \quad \omega \in \Omega_A^p, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n$$

vorzugeben :
$$\mathrm{Res}(g) = \begin{cases} g & \text{für } Z^s = (Z_{i_1}\cdots Z_{i_q})^{-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\partial_\nu(g) = \begin{cases} -(-1)^{p+l}(\omega/s_\nu + 1)\cdot Z_\nu . Z^s dZ_{i_1}\cdots dZ_{i_{l-1}} dZ_{i_{l+1}}\cdots dZ_{i_q} \\ \quad \text{für } \nu = i_l,\ s_{i_1} = \cdots = s_{i_{l-1}} = -1,\ s_{i_l} \neq -1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Wir setzen : $\partial = \partial_1 + \ldots + \partial_n$. Man rechnet leicht nach, daß ∂ das Bild $r(C^\bullet)$ von r in sich, j den Komplex $C^\bullet$ in $r(C^\bullet)$ abbildet und daß folgendes gilt :

$$\mathrm{Res}\circ j = \mathrm{id} \qquad d\circ\partial + \partial\circ d = \mathrm{id} - j\circ\mathrm{Res}.$$

Daraus folgt, daß die beiden Homomorphismen H(Res) und $H(\mathrm{Res}\circ r) = H(\mathrm{Res})\circ H(r)$ Isomorphismen sind; also ist auch $H(r)$ ein Isomorphismus.

Hilfssatz 2.1. — Unter den angegebenen Voraussetzungen induziert die natürliche Abbildung

$$\Omega^{\bullet}_{X}(*Y)(X_0) \to \Omega^{\bullet}_{X}(U_0)$$

einen Isomorphismus in der Homologie.

Sei Sp(A) ein glatter affinoider Raum. Ein Ideal $\mathfrak{J}$ von A heißt Divisorenideal mit nur transversalen Schnitten, wenn es zu jedem maximalen Ideal x aus $V(\mathfrak{J})$ ein reguläres Parametersystem $z_1, \ldots, z_n$ in A_x und eine natürliche Zahl s gibt mit $\mathfrak{J}.A_x = A_x.z_1 \ldots z_s$. Aus Theorem 1.18 folgt, daß es zu einem solchen Ideal immer eine spezielle Überdeckung $((\mathrm{Sp}(A_i) \to \mathrm{Sp}(A)))$, $i = 1, \ldots, r$ gibt, so daß A_i isomorph zu einer freien affinoiden Algebra $B_i\langle\langle Z_1^{(i)} \ldots Z_{ni}^{(i)}\rangle\rangle$ in den Variablen $Z_\nu^{(i)}$ über einer affinoiden Algebra B_i und $(\mathrm{Sp}(A) - V(\mathfrak{J})) \cap \mathrm{Sp}(A_i) = \delta(Z_1^{(i)} \ldots Z_{ni}^{(i)})$ ist. Da dasselbe auch für jeden offenen affinoiden Unterraum gilt, erhält man aus 2.1 (siehe auch [1])

Hilfssatz 2.2. — Sei $X = \mathrm{Sp}(A)$ *ein glatter affinoider Raum,* $\mathfrak{J}$ *ein Divisorenideal mit nur transversalen Schnitten,* $Y = \mathrm{Sp}(A/\mathfrak{J})$, U *das Komplement von* $V(\mathfrak{J}) = Y$ *in* X *und* $j : U \hookrightarrow X$ *die Einbettung von* U *in* X. *Dann ist* $\mathscr{H}^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_{X}(*Y))$ *kanonisch isomorph zu* $\mathscr{H}^{\bullet}(j_*(\Omega^{\bullet}_{U}))$.

Mit Hilfe von Hironakas Theorie der Auflösung von Singularitäten [11], die auch für affinoide Räume über einem Grundkörper der Charakteristik Null ihre Gültigkeit hat, mit Hilfe der Endlichkeitssätze aus [12] und der daraus folgenden Sätze vom GAGA-Typ [15] erhält man aus Hilfssatz 2.2 genau wie in [8] (Theorem 2)

Theorem 2.3. — Sei X *ein reduzierter analytischer Raum,* $\mathscr{J}$ *eine kohärente Garbe von Idealen, die lokal durch eine Gleichung definiert ist,* $Y = V(\mathscr{J})$ *der durch* $\mathscr{J}$ *definierte analytische Unterraum; das Komplement* U *von* Y *in* X *sei glatt*

$$j : U \hookrightarrow X.$$

Dann ist $\mathscr{H}^{\bullet}(\Omega^{\bullet}_{X}(*Y))$ *kanonisch isomorph zu* $\mathscr{H}^{\bullet}(j_*\Omega^{\bullet}_{U})$. *Verschwindet zusätzlich* $H^p(X, \Omega^q_X(*Y))$ *für* $p > 0$ *und jedes* q, *so ist auch* $H^{\bullet}\Gamma(X, \Omega^{\bullet}_{X}(*Y))$ *kanonisch isomorph zu* $H^{\bullet}\Gamma(U, \Omega^{\bullet}_{X})$. *Diese letzte Bedingung ist insbesondere erfüllt in folgenden beiden Fällen*

a) X *ist affinoid;*

b) X *ist vollständig, algebraisch und* U *affin.*

Sei X eine algebraische Mannigfaltigkeit über dem Grundkörper k. Man kann X auf natürliche Weise einen analytischen Raum X_a über k zuordnen. Man hat einen natürlichen Morphismus

$$a(X) : X_a \to X$$

lokal G-geringter Räume [15]. Auch auf X ist ein Komplex $\Omega^{\bullet}_{X}$ von Differentialformen erklärt, und es gibt einen Homomorphismus

$$(*) : \Omega^{\bullet}_{X} \to \Omega^{\bullet}_{X_a}$$

von Garbenkomplexen.

Ist $\mathscr{G}^{\bullet}$ ein positiver Komplex von Garben abelscher Gruppen auf X bzw. X_a, so bezeichnet man mit $R\Gamma(\mathscr{G}^{\bullet})$ den abgeleiteten Schnittkomplex im Sinne der derivierten

Kategorien [10]. Wir nennen De Rham Kohomologie $H^{\bullet}(X)$ bzw. $H^{\bullet}(X_a)$ von X bzw. X_a die Kohomologie des Komplexes $R\Gamma(\Omega^{\bullet}_X)$ bzw. $R\Gamma(\Omega^{\bullet}_{X_a})$ Die Abbildung (*) induziert einen Homomorphismus $$H^{\bullet}(X) \to H^{\bullet}(X_a)$$
der De Rham Kohomologie.

Wie bei Grothendieck erhält man aus Theorem 2.3

Theorem 2.4. — Wenn X *glatt ist, ist der Homomorphismus*

$$H^{\bullet}(X) \to H^{\bullet}(X_a)$$

ein Isomorphismus.

LITERATUR

[1] M. ARTIN et A. GROTHENDIECK, *Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1963-64, fasc. 1.

[2] M. F. ATIYAH and W. V. D. HODGE, Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Annals of Mathematics*. vol. 62 (1955), p. 56-91.

[3] R. BERGER, R. KIEHL, E. KUNZ, H. J. NASTOLD, Differentialrechnung in der analytischen Geometrie *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 38 (1967).

[4] L. GERRITZEN, Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. Erscheint voraussichtlich in *Crelle, Journ. f.d.r.u.a. Math.*

[5] H. GRAUERT und R. REMMERT, Nichtarchimedische Funktionentheorie. *Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Wissenschaftliche Abhandlung*, Bd. 33, Opladen : Westdeutscher Verlag, 1966.

[6] —, Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Analysis, *Invent. Math.*, 2, 87-133 (1966).

[7] J. DIEUDONNÉ, A. GROTHENDIECK, Éléments de Géométrie Algébrique, I, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 4 (1960).

[8] A. GROTHENDIECK, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 29 (1966).

[9] —, *Séminaire de géométrie algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* (1960).

[10] R. HARTSHORNE, Residues and Duality, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 20 (1966).

[11] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Math.*, vol. 79 (1964), p. 109-326.

[12] R. KIEHL, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, 2, 191-214 (1967).

[13] —, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, 2, 256-273 (1967).

[14] —, Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. Erscheint voraussichtlich in *Crelle, Journ. f.d.r.u.a. Math.*

[15] —, Schemata über nichtarchimedisch analytischen Räumen, in Vorbereitung.

[16] MONSKY, WASHNITZER, The construction of formal cohomology sheaves, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 (1964), 1511-1514.

[17] H. J. NASTOLD, Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst in *Math. Z.*

[18] J. TATE, *Rigid analytic spaces*, Private notes of J. Tate, reproduced with(out) his permission by I.H.E.S

Reçu le 1er mars 1967.