ARMAND BOREL
JACQUES TITS

Groupes réductifs

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 27 (1965), p. 55-151
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1965__27__55_0>

GROUPES RÉDUCTIFS

par Armand BOREL et Jacques TITS (1)

Ce travail est consacré principalement à l'étude de propriétés d'un groupe algébrique linéaire connexe réductif G qui sont relatives à un corps de définition k de G. Il s'agit notamment d'introduire, à l'aide de k-sous-groupes (i.e. de sous-groupes fermés définis sur k) des notions qui généralisent naturellement celles de tore maximal, racines, groupe de Weyl, etc. de la théorie classique, de démontrer l'existence d'une décomposition de Bruhat pour le groupe G_k des points de G rationnels sur k, et des théorèmes de conjugaison « sur k », i.e. par des éléments de G_k. A cet effet, on utilisera essentiellement deux familles de sous-groupes de G : les tores déployés ou décomposés sur k (i.e. isomorphes sur k à un produit de groupes multiplicatifs $\mathbf{G}_m$) maximaux et les k-sous-groupes P paraboliques (i.e. tels que G/P soit une variété projective) minimaux. Ils jouent respectivement le rôle des tores maximaux et des sous-groupes résolubles connexes maximaux sur un corps algébriquement clos.

Ces résultats font l'objet des §§ 4 à 7 de I. La deuxième partie apporte divers compléments ou applications dans lesquels G n'est pas toujours réductif ou bien k est soumis à certaines restrictions.

Les §§ 0 à 2 sont de nature préliminaire. Le § 0 fixe des conventions et notations; le § 1 rassemble quelques résultats sur les tores; le § 2 rappelle les propriétés fondamentales d'un groupe réductif G, dont nous aurons besoin : structure de G lorsque G est déployé sur k (ce qui équivaut à l'existence d'un tore maximal déployé sur k), densité de G_k si k est infini, existence d'un tore maximal défini sur k et d'une extension séparable de k sur laquelle G est déployé (2.14). Le § 3 est consacré à l'étude de certains k-sous-groupes H normalisés par un tore maximal de G défini sur k. On établit en particulier l'existence et la conjugaison sur k de décompositions de Levi (3.13, 3.14), puis, dans certains cas, l'existence d'une suite de composition à quotients successifs vectoriels sur lesquels un tore donné opère par homothéties, lorsque H est unipotent (3.17, 3.18), et de k-sections locales de la fibration de G par H (3.24).

Dans le § 4, ces résultats sont appliqués à l'intersection de deux k-sous-groupes paraboliques P, P′. On montre en outre notamment que : la fibration de G par P possède des k-sections locales; si P et P′ sont conjugués sur une extension K de k, ils

(1) A certaines périodes durant l'élaboration de ce travail, nous avons bénéficié de l'aide financière de la N.S.F. : le premier auteur à l'Université de Chicago et à Paris (contract GP-2403), le second auteur à l'Institute for Advanced Study (contract GP-779) et à l'Université de Chicago (contract GP-574).

sont conjugués sur k ; si P et P′ sont minimaux, ils sont conjugués sur k (4.13). On établit également la conjugaison sur k des tores déployés sur k maximaux (4.21) et on relie ces sous-groupes aux k-sous-groupes paraboliques minimaux (4.16). Les démonstrations font jouer un rôle important à la notion de sous-groupes paraboliques P, P′ opposés ($P \cap R_u(P') = P' \cap R_u(P) = \{e\}$, cf. 4.8, 4.10).

Soit S un tore déployé sur k maximal. Par définition, le groupe de Weyl ${}_kW(G)$ de G relatif à k est le quotient $\mathscr{N}(S)/\mathscr{Z}(S)$ du normalisateur de S par le centralisateur de S, et les k-racines de G par rapport à S sont les caractères non triviaux de S dans la représentation adjointe de G. On montre (5.3) que ${}_kW(G)$, vu comme groupe d'automorphismes de $X^*(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, (où $X^*(S)$ est le groupe des caractères rationnels de S), muni d'un produit scalaire convenable (,), est le groupe engendré par les symétries par rapport aux hyperplans orthogonaux aux k-racines, et (5.8) que l'ensemble ${}_k\Phi(G)$ de ces dernières est un « système de racines » (i.e., outre l'invariance par le groupe de Weyl, vérifie la condition $2(a, b)(b, b)^{-1} \in \mathbf{Z}$ ($a, b \in {}_k\Phi(G)$)). De plus, on a $\mathscr{N}(S) = \mathscr{N}(S)_k . \mathscr{Z}(S)$ et les doubles classes de G_k suivant P_k (P un k-sous-groupe parabolique minimal) correspondent biunivoquement aux éléments de ${}_kW(G)$, « décomposition de Bruhat », (5.15).

Le § 6 met en relations les racines et groupes de Weyl relatifs à k et à une extension K de k, les sous-groupes paraboliques sur K et sur k, et les décompositions de Bruhat de G_K et G_k. On montre aussi que $G_K = R_u(P)_k . U^-_K . P_K$ où P est un k-sous-groupe parabolique minimal et U^- le radical unipotent d'un K-sous-groupe opposé à P (6.25).

L'ensemble Φ_0 des éléments de ${}_k\Phi(G)$ dont le double n'est pas une racine est aussi un système de racines. Dans le § 7, on construit un k-sous-groupe déployé de G dont S et Φ_0 sont respectivement un tore maximal et le système de racines.

Dans le § 10 on montre (10.2) que dans un groupe algébrique quelconque G, la classe de conjugaison d'un élément semi-simple est fermée (et réciproquement si G est semi-simple) et que le centralisateur d'un k-tore, k étant un corps de définition pour G, est aussi défini sur k (10.5). Dans le § 11, on retrouve des résultats de Grothendieck et Rosenlicht sur l'existence et la conjugaison sur k de k-sous-groupes de Cartan de G lorsque G est résoluble.

Dans les paragraphes restants, on fait des hypothèses restrictives sur le corps de base k. Le § 8 le suppose parfait et prouve, par un argument de points fixes, la conjugaison sur k des sous-groupes connexes trigonalisables sur k (i.e. isomorphes sur k à un groupe de matrices triangulaires) maximaux (8.2).

Si k est localement compact de caractéristique zéro, G_k est muni naturellement d'une structure de groupe topologique. Les §§ 9, 13, 14 sont consacrés à diverses questions mettant en jeu cette topologie; en particulier : condition nécessaire et suffisante pour que G_k/H_k ou $(G/H)_k$ soit compact (9.3) ou pour que G_k soit engendré par un voisinage compact de l'élément neutre (13.4), structure du groupe des composantes connexes de G_k lorsque $k = \mathbf{R}$ et G est irréductible (14.5). Dans le § 14, on fait également le lien entre le point de vue développé ici et la théorie transcendante (décomposition d'Iwasawa, groupe de Weyl et racines d'une « paire symétrique »).

Enfin, le § 12 suppose G semi-simple connexe, k de caractéristique zéro, et discute des questions de rationalité des représentations linéaires ou projectives irréductibles de G et des propriétés de leurs poids restreints à S. On caractérise, notamment, les poids dominants des représentations projectives définies sur k (12.6) et des représentations linéaires fortement rationnelles sur k, c'est-à-dire qui sont définies sur k, et dont l'espace de représentation contient une droite définie sur k stable par un sous-groupe parabolique de G (12.10).

Les résultats de ce travail ont été en partie annoncés antérieurement [2, 34, 35], souvent en supposant k parfait, restriction qui a pu être levée grâce aux résultats de Grothendieck [11] rappelés en 2.14. Remarquons à ce propos qu'un certain nombre de complications techniques ou de détours sont dus à la nécessité de montrer que certains sous-groupes k-fermés sont définis sur k, ou que certaines classes de sous-groupes contiennent un représentant défini sur k, résultats qui sont évidents ou bien connus si l'on suppose le corps de base parfait. Sous cette dernière hypothèse, une partie des résultats des §§ 4, 5, 8 est aussi démontrée par Satake [28].

§ 0. NOTATIONS ET RAPPELS

0.1. Les corps sont toujours commutatifs. Si k est un corps, k^*, k_s et $\bar{k}$ désignent respectivement le groupe multiplicatif des éléments non nuls de k, une clôture séparable de k et une clôture algébrique de k; si k' est une extension normale séparable de k, $\mathrm{Gal}(k'/k)$ désigne le groupe de Galois de k' sur k.

0.2. Soient G un groupe, H une partie de G. On notera souvent ${}^g\mathrm{H}$ le transformé de H par l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}\, g : x \mapsto g.x.g^{-1}$ $(g, x \in \mathrm{G})$. L'image d'un sous-groupe L de G dans le groupe Int G des automorphismes intérieurs de G sera notée $\mathrm{Int}_{\mathrm{G}}\mathrm{L}$.

$\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ ou $\mathscr{N}(\mathrm{H})$ est le normalisateur de H dans G, et $\mathscr{Z}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ ou $\mathscr{Z}(\mathrm{H})$ le centralisateur de H dans G. Le i-ième groupe dérivé (resp. le i-ième terme de la série centrale descendante) de G est noté $\mathscr{D}^i\mathrm{G}$ (resp. $\mathscr{C}^i\mathrm{G}$), et l'on pose $\mathscr{D}^\infty\mathrm{G} = \bigcap_i \mathscr{D}^i\mathrm{G}$, $\mathscr{C}^\infty\mathrm{G} = \bigcap_i \mathscr{C}^i\mathrm{G}$. On a donc

$$\mathscr{D}^i\mathrm{G} = (\mathscr{D}^{i-1}\mathrm{G}, \mathscr{D}^{i-1}\mathrm{G}), \qquad \mathscr{C}^i\mathrm{G} = (\mathrm{G}, \mathscr{C}^{i-1}\mathrm{G}) \qquad (i \geqq 1)$$

en convenant que $\mathrm{G} = \mathscr{D}^0\mathrm{G} = \mathscr{C}^0\mathrm{G}$, où (A, B) désigne le groupe engendré par les commutateurs $(a, b) = a.b.a^{-1}.b^{-1}$ $(a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B})$, A et B étant deux parties de G. L'élément neutre de G sera noté e ou 1. Soient A_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des sous-ensembles de G. L'application $(a_i) \mapsto a_1 \ldots a_m$ de $\mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_m$ dans G sera appelée *l'application produit.*

0.3. Par groupe algébrique sur k, ou défini sur k, ou k-groupe algébrique [1], on entend dans ce travail un groupe linéaire algébrique défini sur k, au sens de [1], ou, si l'on tient à éviter le recours au corps universel, un sous-groupe algébrique sur k

[1] Sur ce point, nous nous écartons donc de la terminologie de [1].

du groupe $\mathbf{GL}_n$ des matrices inversibles d'ordre n, au sens de [3]. Nous laissons au lecteur le soin de choisir le cadre dans lequel il veut se placer, ou d'envisager les k-groupes algébriques comme des schémas en groupes affines absolument réduits sur k [11] s'il désire être plus intrinsèque.

Soit G un k-groupe algébrique. G^0 désigne la composante connexe de e dans G. Elle est aussi définie sur k. Si H est un sous-ensemble fermé de G, défini sur k, alors $\mathscr{N}_G(H)$ et $\mathscr{Z}_G(H)$ sont algébriques, k-fermés (i.e. définis sur une extension purement inséparable de k). On notera $\mathscr{N}_G(H)^0$ (resp. $\mathscr{Z}_G(H)^0$) le normalisateur (resp. centralisateur) connexe de H dans G.

Pour toute extension K de k, G_K désigne l'ensemble des points de G qui sont rationnels sur K (et de même pour une variété algébrique définie sur k). En général, on identifiera G et $G_{\bar{k}}$. Deux parties M, M' de G sont *conjuguées* (resp. *conjuguées sur k*) s'il existe $g \in G$ (resp. $g \in G_k$) tel que $M' = {}^g M$.

On écrira souvent $\mathbf{G}_m$ pour $\mathbf{GL}_1$, et $\mathbf{G}_a$ désignera le groupe additif à une dimension. $GL(\mathfrak{v})$ est le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel $\mathfrak{v}$.

L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G, H, L, ... sera notée par la lettre gothique correspondante $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}$, ...

0.4. Soient G, G' des k-groupes algébriques. Un *morphisme* $f : G \to G'$ *de groupes algébriques* est un morphisme des variétés sous-jacentes qui est un homomorphisme de groupes. On omettra souvent « de groupes algébriques » lorsque cela ne prêtera pas à confusion, et on dira *k-morphisme* si f est défini sur k.

On dira que G *opère morphiquement* sur la k-variété algébrique V s'il opère sur V par l'intermédiaire d'un morphisme $\varphi : G \times V \to V$, et qu'il opère k-morphiquement si φ est défini sur k. Si V est un k-groupe, il sera entendu que G opère comme groupe d'automorphismes.

On note $\operatorname{Ad} g$ l'image de $g \in G$ par la représentation adjointe $G \to GL(\mathfrak{g})$. C'est donc la différentielle en e de $\operatorname{Int} g$.

0.5. Soit G un groupe algébrique. Un *caractère*, ou caractère rationnel, de G est un morphisme de G dans $\mathbf{G}_m$. L'ensemble des caractères, muni de la loi de composition définie par le produit des valeurs, est un groupe commutatif de type fini [23, § 1], libre si G est connexe, noté $X^*(G)$, et dont l'ensemble des éléments définis sur k est noté $X^*(G)_k$. Pour les caractères, on utilisera fréquemment la notation exponentielle, en désignant par g^a la valeur en g d'un caractère a; la loi de composition dans $X^*(G)$ sera alors notée additivement.

Un *groupe multiplicatif à un paramètre de* G est un morphisme $\mathbf{G}_m \to G$. Si G est commutatif, l'ensemble des groupes multiplicatifs à un paramètre, muni de la loi de composition définie par le produit des valeurs, est un groupe commutatif libre de type fini, noté $X_*(G)$, dont l'ensemble des éléments définis sur k est noté $X_*(G)_k$.

Un morphisme $f : G \to G'$ de groupes algébriques induit canoniquement des morphismes $f^* : X^*(G') \to X^*(G)$ et $f_* : X_*(G) \to X_*(G')$.

0.6. Un groupe algébrique G est le *produit direct* des sous-groupes invariants $G_1, \ldots, G_m$ fermés si l'application produit $G_1 \times \ldots \times G_m \to G$ est un isomorphisme de groupes algébriques; G est *produit presque direct* des G_i si cette application est une *isogénie* (i.e. surjective et de noyau fini).

G est le *produit semi-direct* du sous-groupe fermé H et du sous-groupe fermé distingué N si l'application produit induit un isomorphisme de variétés algébriques de $H \times N$ sur G. Il faut et il suffit pour cela que : (i) G soit le produit semi-direct de H et N en tant que groupe abstrait; (ii) les algèbres de Lie de H et N soient linéairement indépendantes. Rappelons que, en caractéristique non nulle, (ii) ne résulte pas de (i), même si G est commutatif.

0.7. Un k-groupe algébrique G est *semi-simple* (resp. *réductif*) si le radical $R(G^0)$ (resp. radical unipotent $R_u(G^0)$) de G^0 est réduit à l'élément neutre. Rappelons que le radical $R(H)$ (resp. radical unipotent $R_u(H)$) d'un k-groupe algébrique connexe H est le plus grand sous-groupe distingué fermé résoluble (resp. unipotent) connexe de H; il est k-fermé.

Un k-groupe algébrique connexe est *simple* (resp. *presque simple*) si tout sous-groupe invariant fermé propre est réduit à $\{e\}$ (resp. fini), *k-simple* (resp. *presque k-simple*) si cette condition est vérifiée par les k-sous-groupes invariants fermés. Un groupe $\neq \{e\}$ est semi-simple si et seulement s'il est produit presque direct de groupes presque simples non commutatifs [10, exp. 17, prop. 1, 2]. En particulier, si G est semi-simple, il est égal à son groupe des commutateurs.

0.8. Soit G un k-groupe algébrique. On appellera *sous-groupe de Levi* de G tout sous-groupe fermé réductif H tel que G soit le produit semi-direct de H et de son radical unipotent $U = R_u(G)$, et *décomposition de Levi* une telle présentation de G ([1]). Si k est de caractéristique zéro, G possède toujours un k-sous-groupe de Levi H, et tout k-sous-groupe réductif de G est conjugué à un sous-groupe de H par un élément de U_k (voir [20] et aussi [5, prop. 5.1]). Par contre, si k est de caractéristique non nulle, G ne possède pas nécessairement de sous-groupe de Levi, d'après Chevalley (non publié), deux sous-groupes de Levi ne sont pas nécessairement conjugués (3.15), et si L est un sous-groupe réductif tel que G soit ensemblistement le produit semi-direct de L et U, les algèbres de Lie de L et U ne sont pas nécessairement transverses (3.15).

0.9. Suivant l'usage, **Z**, **N**, $\mathbf{N}^+$, **Q**, **R**, **C** désignent respectivement les entiers, les entiers $\geqq 0$, les entiers >0, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes.

Dans toute la suite de ce travail, G *désigne un groupe algébrique, k un corps de définition de* G, *et p la caractéristique de k.*

([1]) Ceci pour abréger, et bien que cette terminologie ne soit pas en complet accord avec celle qui est usuelle en théorie des algèbres de Lie, où une sous-algèbre de Levi est une sous-algèbre semi-simple, supplémentaire du radical.

I. GROUPES RÉDUCTIFS

§ 1. TORES

1.1. Un groupe algébrique T est un tore s'il est connexe et vérifie les conditions équivalentes suivantes : (i) T est formé d'éléments semi-simples; (ii) T est diagonalisable; (iii) T est isomorphe au produit de n copies de $\mathbf{G}_m$ ($n=\dim \mathrm{T}$).

Un tore est *anisotrope sur le corps* K, ou K-*anisotrope*, s'il est défini sur K et si $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})_{\mathrm{K}}=1$. Il est *décomposé* ou *déployé sur* K s'il est défini sur K et K-isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{G}_m$. Un K-tore est toujours déployé sur $\overline{\mathrm{K}}$.

1.2. Soit T un tore. Les groupes $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$ et $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$ sont alors commutatifs libres, de rang égal à dim T. Si $a\in\mathrm{X}_*(\mathrm{T})$, $b\in\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$, alors $b\circ a\in\mathrm{X}^*(\mathbf{G}_m)$, donc $b\circ a$ est de la forme $x\mapsto x^q$ ($x\in\mathbf{G}_m$; $q\in\mathbf{Z}$). En associant q au couple (a, b), on définit sur $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})\times\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$ une forme bilinéaire à valeurs entières, notée $<, >$, qui met ces deux groupes en dualité [10, Exp. 9, § 5]. Si f est un morphisme de T dans un tore T', alors

$$<f_*a, b>=<a, f^*b> \qquad (a\in\mathrm{X}_*(\mathrm{T}),\ b\in\mathrm{X}^*(\mathrm{T}')).$$

Si f est surjectif, alors f^* est injectif. Comme un sous-tore d'un tore est toujours facteur direct [1, 7.4, 7.5], une suite exacte de morphismes

$$1\to\mathrm{T}''\xrightarrow{f}\mathrm{T}\xrightarrow{g}\mathrm{T}'\to 1$$

donne lieu à des suites *exactes*

$$1\to\mathrm{X}_*(\mathrm{T}'')\xrightarrow{f_*}\mathrm{X}_*(\mathrm{T})\xrightarrow{g_*}\mathrm{X}_*(\mathrm{T}')\to 1$$
$$1\to\mathrm{X}^*(\mathrm{T}')\xrightarrow{g^*}\mathrm{X}^*(\mathrm{T})\xrightarrow{f^*}\mathrm{X}^*(\mathrm{T}'')\to 1.$$

Si ψ est une partie de $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$, alors T_ψ dénotera la composante neutre de l'intersection des noyaux des caractères $a\in\psi$.

1.3. *Proposition.* — *Soit* T *un k-tore. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) *L'image de* T *par tout k-morphisme* $\mathrm{T}\to\mathbf{GL}_m$ ($m=1, 2, \ldots$) *est diagonalisable sur k.*
b) T *est diagonalisable sur k.*
c) T *est déployé sur k.*
d) *On a* $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})=\mathrm{X}^*(\mathrm{T})_k$.
e) *On a* $\mathrm{X}_*(\mathrm{T})=\mathrm{X}_*(\mathrm{T})_k$.

Il est clair que *a)* ⇒ *b)*. Pour *b)* ⇒ *c)*, voir [1, Prop. 7.4]. Les caractères de $\mathbf{G}_m$ étant de la forme $x\mapsto x^q$ ($q\in\mathbf{Z}$), il est clair que *c)* ⇒ *d)*, *e)*. Si f est un morphisme de T dans $\mathbf{GL}_m$, les valeurs propres de $f(t)$ ($t\in\mathrm{T}$) définissent des caractères de T, donc *d)* ⇒ *a)* résulte de la Prop. 5 de [23]. Enfin, si *e)* est vraie, T est l'image de $(\mathbf{G}_m)^n$ ($n=\dim \mathrm{T}$) par un k-morphisme, donc *e)* ⇒ *a)* en vertu de l'équivalence, déjà établie, des quatre premières conditions, appliquée à $(\mathbf{G}_m)^n$.

1.4. La proposition 1.3 implique que l'image d'un tore déployé sur k par un k-morphisme est un tore déployé sur k, et qu'un k-tore T possède un unique plus grand sous-tore déployé sur k, le groupe engendré par les images des k-sous-groupes à un paramètre, qui sera noté T_d. L'intersection des noyaux des éléments de $X^*(T)_k$ sera désignée par T_a. On verra ci-dessous que T_a est le plus grand sous-tore k-anisotrope de T et que ce dernier est produit presque direct de T_d et T_a.

1.5. *Proposition. — Soit* T *un k-tore. Alors il existe une extension galoisienne de degré fini de k sur laquelle* T *se décompose.*

Cette proposition est connue [21, Prop. 1.2.1]. Pour la commodité du lecteur, nous en indiquons une démonstration, communiquée par J. Tate.

Comme $X^*(T)$ est de type fini, il suffit, vu 1.3, de faire voir que tout élément $a \in X^*(T)$ est défini sur k_s. Or T est diagonalisable sur $\bar{k}$, donc a est en tout cas défini sur $\bar{k}$. Remplaçant k par k_s, on voit qu'il suffit de prouver que si a est défini sur une extension purement inséparable de k, alors il est défini sur k.

Il n'y a rien à démontrer si $p=0$. Sinon, soit $q=p^s$ $(s \in \mathbf{Z},\ s>0)$ une puissance de p assez grande pour que a soit défini sur $k^{1/q}$. On a $a(t^q)=a^q(t) \in k(t)$, donc

$$a(t^q) \subset k(t) \cap k^{1/q}(t^q) \qquad (t \in T).$$

Mais si t est générique sur k, le corps $k(t)$ est linéairement disjoint de $\bar{k}$, donc $k(t) \cap k^{1/q}(t^q)=k(t^q)$, et $a(t^q) \subset k(t^q)$. L'élément t^q est aussi générique sur k, puisque $x \mapsto x^q$ est un morphisme bijectif de T sur lui-même; l'inclusion $a(t^q) \subset k(t^q)$ montre alors que a est défini sur k.

1.6. *Corollaire. — Tout sous-groupe fermé de* T *est défini sur* k_s, *et est défini sur k si* T *est déployé sur k. Tout morphisme* $f: T \to T'$ *de* T *dans un k-tore est un* k_s*-morphisme, et un k-morphisme si* T *et* T′ *sont déployés sur k.*

La première assertion résulte du fait que T est diagonalisable sur k_s (resp. sur k) et que tout sous-groupe fermé d'un tore diagonal est défini sur le corps premier [1, Prop. 7.4]. La deuxième est conséquence de la première, appliquée au graphe de f dans $T \times T'$.

1.7. Le groupe de Galois $\Gamma=\mathrm{Gal}(k_s/k)$ opère de façon naturelle sur $X^*(T)$ et $X_*(T)$. On écrira souvent ${}^\gamma u$ pour le transformé par $\gamma \in \Gamma$ d'un élément u de $X^*(T)$ ou $X_*(T)$. On a en particulier

$$
\begin{aligned}
{}^\gamma u(t) &= \gamma(u(\gamma^{-1}(t))), && (u \in X^*(T),\ t \in T_{k_s}),\\
<{}^\gamma u, v> &= <u, {}^\gamma v>, && (u \in X_*(T),\ v \in X^*(T)).
\end{aligned}
$$

$X^*(T)_k$ (resp. $X_*(T)_k$) est l'ensemble des points fixes de Γ dans $X^*(T)$ (resp. $X_*(T)$). C'est donc un facteur direct, ce qui montre que le groupe T_a introduit en 1.4 est bien connexe. Une partie de $X^*(T)$ sera dite *définie sur k* si elle est invariante par Γ.

Les opérations de Γ sur $X^*(T)$ et $X_*(T)$ sont continues (ce qui, ici, équivaut au fait que les orbites de Γ sont finies). Comme $X^*(T)$ et $X_*(T)$ sont de type fini, il existe dans Γ un sous-groupe ouvert distingué Γ' d'indice fini agissant trivialement sur ces groupes. Alors $K=(k_s)^{\Gamma'}$ est une extension galoisienne finie de k sur laquelle T se décompose. L'action considérée est donc en fait celle d'un groupe fini $\Gamma/\Gamma' \cong \mathrm{Gal}(K/k)$.

1.8. *Proposition.* — *Soient* T *un k-tore et* S *un k-sous-tore. Alors* $X^*(T)_k$ *et* $X_*(T)_k$ *sont de même rang. Il existe un k-sous-tore* S′ *de* T *tel que* T *soit produit presque direct de* S *et* S′. *Si* $S=T_d$, *alors* S′ *est unique, égal à* T_a, *et* T_a *est k-anisotrope. Si f est un k-morphisme de* T *dans un k-tore* T′, *alors* $f(T_d)\subset T'_d$, $f(T_a)\subset T'_a$.

Pour la démonstration, voir [4, §§ 8, 13].

1.9. *Corollaire.* — a) *Soient* T, T′ *deux k-tores isogènes sur k. Alors* T *est déployé sur k si et seulement si* T′ *l'est.*

b) *Soit* $1\to T'\to T\to T''\to 1$ *une suite exacte de k-tores et k-morphismes. Alors* T *est déployé sur k si et seulement si* T′ *et* T″ *le sont.*

a) L'hypothèse signifie qu'il existe un k-tore T″ et des k-isogénies de T″ sur T et T′. Il suffit donc de démontrer *a)* lorsqu'il existe une k-isogénie $f: T\to T'$. Dans ce cas, f^* applique injectivement $X^*(T')$ (resp. $X^*(T')_k$) sur un sous-groupe d'indice fini de $X^*(T)$ (resp. $X^*(T)_k$). Comme $X^*(T)_k$ et $X^*(T')_k$ sont facteurs directs dans $X^*(T)$ et $X^*(T')$ d'après 1.7, il est alors clair que les égalités $X^*(T)_k=X^*(T)$ et $X^*(T')=X^*(T')_k$ sont équivalentes, et *a)* résulte de 1.3.

b) Si T est déployé sur k, les sous-tores et tores quotients de T le sont aussi (1.4, 1.6), donc T′ et T″ sont déployés sur k. Réciproquement, si T″ est déployé sur k, alors $T_a\subset T'$ vu 1.8; si de plus T′ est déployé sur k, alors $T_a=\{e\}$ et $T=T_d$ d'après 1.8.

1.10. *Proposition.* — *Supposons k infini, et* G *connexe et soit* T *un k-tore opérant k-morphiquement sur* G. *Alors il existe un élément* $t\in T_k$ *dont l'ensemble des points fixes dans* G *est égal à celui de* T. *En particulier, si* T *est contenu dans* G *et opère sur lui par automorphismes intérieurs,* $\mathscr{Z}_G(t)=\mathscr{Z}_G(T)$.

Quitte à remplacer G par son produit semi-direct avec T (relatif à l'action donnée de T sur G) on peut supposer que $T\subset G$, et que T opère sur G par automorphismes intérieurs. Alors, l'ensemble V des $t\in T$ tels que $\mathscr{Z}_G(t)\neq\mathscr{Z}_G(T)$ est contenu dans la réunion des noyaux d'un nombre fini de caractères non triviaux de T [1, Prop. 7.10]; c'est donc un sous-ensemble algébrique propre, et il suffit de savoir que T_k est Zariski-dense dans T, ce qui résulte du fait que T est unirationnel sur k [23, Prop. 10].

§ 2. GROUPES DÉPLOYÉS

2.1. *Systèmes de racines.* — Soient M un module libre de type fini, N un sous-module facteur direct, Φ un sous-ensemble fini de M et P le sous-module engendré par Φ. On dira que Φ est un système de racines dans (M, N) si Φ est un système de racines au sens usuel [6, § 7] dans $P\otimes\mathbf{Q}$, si $M\otimes\mathbf{Q}$ est somme directe de $P\otimes\mathbf{Q}$ et $N\otimes\mathbf{Q}$, et si le groupe de Weyl $W(\Phi)$ de Φ est la restriction d'un groupe d'automorphismes de $M\otimes\mathbf{Q}$

laissant M stable et opérant trivialement sur N[1]. Munissons $M\otimes\mathbf{R}$ d'un produit scalaire (,) positif non dégénéré et *admissible*, c'est-à-dire invariant par $W(\Phi)$. Si Φ est un système de racines dans (M, N), alors : $0\notin\Phi$, $\Phi=-\Phi$, Φ est invariant par $W(\Phi)$, les nombres $2(a, b).(b, b)^{-1}=n_{ab}$ sont entiers $(a, b\in\Phi)$, et $W(\Phi)$ est engendré par les symétries r_a par rapport aux hyperplans orthogonaux aux racines, hyperplans qui contiennent $N\otimes\mathbf{R}$. En particulier, $N\otimes\mathbf{R}$ et $P\otimes\mathbf{R}$ sont nécessairement orthogonaux.

Une partie de Φ est *connexe* si elle n'est pas réunion disjointe de deux parties non vides orthogonales l'une à l'autre.

Rappelons que si $a=\lambda.b$ $(a, b\in\Phi, \lambda\in\mathbf{R})$ alors $\lambda=\pm 1, \pm(1/2), \pm 2$ [6, § 7, n° 3, prop. 8]. Le système Φ est dit *réduit* si aucune racine n'est le double d'une autre racine. Une racine a est *indivisible* (resp. *non multipliable*) si $(1/2)a\notin\Phi$ (resp. $2a\notin\Phi$).

Les *chambres de Weyl* (composantes connexes du complémentaire de la réunion des hyperplans orthogonaux aux racines) sont ici les produits par $N\otimes\mathbf{R}$ des chambres de Weyl dans $P\otimes\mathbf{R}$. Elles sont permutées de manière simplement transitive par $W(\Phi)$. Chacune détermine un ensemble Φ^+ de racines positives. On note Φ^- (resp. Δ) l'ensemble des racines négatives (resp. simples). Rappelons qu'une racine est simple si elle est positive et non somme de deux racines positives, et que toute racine est de façon unique combinaison linéaire de racines simples à coefficients entiers tous de même signe. On a $r_a(b)=b-n_{ba}.a$ $(a, b\in\Phi)$. Le groupe $W(\Phi)$ est engendré par les réflexions r_a $(a\in\Delta)$, appelées *réflexions fondamentales*.

Le *diagramme* de Φ est la donnée pour tout $a\in\Delta$ du plus grand entier n_a tel que $n_a.a\in\Phi$ et pour toute paire a, b de racines simples des entiers n_{ab}, n_{ba}. Il existe un et un seul élément $w\in W(\Phi)$ qui applique Φ^+ sur Φ^-, donc aussi un et un seul automorphisme i de Φ vérifiant $w(i(a))=-a$ $(a\in\Phi)$. L'automorphisme i est involutif, laisse Φ^+ et Δ stables, et est appelé *l'involution d'opposition*. Deux parties de Φ^+ transformées l'une de l'autre par i sont dites *opposées*.

La proposition suivante est bien connue. Ne pouvant fournir de référence, nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur.

2.2. *Proposition. — Supposons* G *connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est réductif* (i.e. R(G) *est un tore*).

(ii) G *est produit presque direct d'un tore et de son groupe dérivé* $\mathscr{D}$G, *qui est semi-simple.*

(iii) G *possède une représentation linéaire de noyau fini complètement réductible.*

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Le groupe G est produit presque direct de groupes presque simples $G_1, \ldots, G_n$. Il suffit donc de prendre une somme directe de représentations irréductibles non triviales des quotients $G/(G_1 \ldots G_{i-1}.G_{i+1} \ldots G_n)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $\rho : G\rightarrow GL(V)$ une représentation complètement réductible et soit $U=R_u(G)$. L'espace V_0 des points fixes par U est $\neq 0$ d'après le théorème de Lie-

(1) Cette variante de la définition de [6] est adoptée ici pour pouvoir parler commodément du système de racines d'un groupe réductif non nécessairement semi-simple. Bien entendu, les propriétés générales des systèmes de racines démontrées dans [6] restent valables, et nous nous y référerons sans autre commentaire.

Kolchin, et est évidemment stable par G. Il existe donc un supplémentaire V_1 de V_0 invariant par G, dans lequel la représentation de G est encore complètement réductible. En raisonnant par récurrence sur dim V, on voit que U opère trivialement sur V, d'où l'implication annoncée.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $S = R(G)$. C'est un tore invariant dans G, donc central. Le groupe G/S est semi-simple, donc égal à son groupe des commutateurs, ce qui entraîne que $G = S.\mathscr{D}G$. Il reste à faire voir que $S \cap \mathscr{D}G$ est fini, ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme. — Soient H *un groupe algébrique connexe, et* S *un tore central de* H. *Alors* $S \cap \mathscr{D}H$ *est fini.*

Identifions H à un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V. Ce dernier est somme directe de sous-espaces V_i stables par G et sur lesquels S agit par homothéties. Le lemme résulte alors du fait que tout morphisme $H \rightarrow \mathbf{GL}_m$ applique $\mathscr{D}H$ dans $\mathbf{SL}_m$.

2.3. *Groupes réductifs.* — Nous rappelons ici quelques propriétés fondamentales des groupes réductifs. La référence générale pour ces résultats est [10].

Soient G réductif connexe, T un tore maximal de G, et Z le centre connexe de G. Le groupe G est donc produit presque direct de Z et de $\mathscr{D}G$; par conséquent, $\mathscr{D}G$ est le plus grand sous-groupe semi-simple de G et contient tout sous-groupe unipotent de G. L'ensemble des *racines* de G par rapport à T, i.e. des caractères non triviaux de T dans la représentation adjointe de G, est noté $\Phi(T, G)$ ou simplement $\Phi(G)$, ou Φ, si cela ne prête pas à confusion. On note U_b le groupe radiciel à un paramètre associé à $b \in \Phi$. Il est caractérisé par l'existence d'un isomorphisme $\theta_b : \mathbf{G}_a \rightarrow U_b$ tel que :

$$t.\theta_b(x).t^{-1} = \theta_b(t^b.x) \qquad (t \in T,\ x \in U_b).$$

Soient T_b la composante neutre de $\ker b$, $Z_b = \mathscr{Z}_G(T_b)$ et $Z'_b = \mathscr{D}Z_b$. On sait que Z_b est connexe, réductif, de centre connexe T_b, que Z'_b est presque simple, de dimension trois, engendré par U_b et U_{-b}, et que $H_b = Z'_b \cap T$ est un tore maximal de Z'_b. On notera aussi H_b le groupe multiplicatif à un paramètre de T dont l'image est $Z'_b \cap T$, et tel que $\langle H_b, b\rangle = 2$.

Soit $W = W(G) = \mathscr{N}(T)/\mathscr{Z}(T)$. C'est un groupe fini, qui opère fidèlement sur $X^*(T)$ et $X_*(T)$. L'ensemble des H_b $(b \in \Phi)$ (resp. l'ensemble Φ) est un système de racines dans $(X_*(T), X_*(Z))$ (resp. $(X^*(T), N)$, où N est l'ensemble des caractères nuls sur $(T \cap \mathscr{D}G)^0)$, de groupe de Weyl W. La réflexion r_b provient d'un élément de Z'_b. Elle applique U_b sur U_{-b}, H_b sur H_{-b} et opère trivialement sur T_b.

Fixons un ordre sur Φ; soient $U = U^+$ (resp. U^-) le sous-groupe engendré par les U_a $(a \in \Phi^+)$ (resp. $a \in \Phi^-$), et $B = B^+ = T.U$, $B^- = T.U^-$. Le groupe U est unipotent. Pour tout ordre sur Φ^+, l'application produit de $\prod U_a$ $(a \in \Phi^+)$ dans U est un isomorphisme de variétés algébriques. Le sous-groupe B est fermé résoluble connexe maximal, ou encore, est un sous-groupe de Borel de G [1]; il est égal à son normalisateur et au normalisateur de U, son groupe dérivé est U et tout sous-groupe de Borel lui est conjugué. De même pour B^- et U^-. Les sous-groupes de Borel de G contenant T correspondent biunivoquement aux ensembles d'éléments positifs pour les différents ordres possibles sur Φ, et sont permutés de manière simplement transitive par W(G). L'application produit induit un isomorphisme de variétés de $U^- \times B$ sur un ouvert de G. Le groupe G est engendré par $(\mathscr{Z}(G))^0$ et les groupes U_a, U_{-a} $(a \in \Delta)$. Tout sous-groupe de U normalisé par T est fermé, connexe, et produit semi-direct multiple des groupes U_a qu'il contient [10, Exp. 13, th. 1 *d*].

Remarque. — Soient H un groupe algébrique connexe et S un tore maximal de H. Alors il existe deux sous-groupes unipotents connexes fermés U, U′ normalisés par S tels que H soit engendré par S et U, U′, et que tout sous-groupe unipotent connexe de H fasse partie du sous-groupe engendré par U et U′. En effet, cela est vrai si H est réductif d'après ce qui précède, et on se ramène tout de suite à ce cas en considérant le quotient $H/R_u(H)$, qui est réductif, et en remarquant que l'image de S dans $H/R_u(H)$ en est un tore maximal.

Il s'ensuit en particulier que tout sous-groupe H connexe fermé de G normalisé par T est engendré par $(T \cap H)^0$ et les sous-groupes U_a qu'il contient, et est réductif si et seulement si $U_a \subset H$ entraîne $U_{-a} \subset H$ quel que soit $a \in \Phi$. Par exemple, le centralisateur d'une partie d'un tore de G est réductif.

2.4. *Décomposition de Bruhat.* — Pour tout élément $w \in W(G)$, choisissons un représentant n_w dans $\mathscr{N}(T)$. Soit d'autre part U'_w (resp. U''_w) le sous-groupe de U engendré par les U_a $(a \in \Phi^+, w^{-1}(a) \in \Phi^-)$ (resp. $a, w^{-1}(a) \in \Phi^+$). Alors l'application produit définit un isomorphisme de variétés de $U'_w \times U''_w$ sur U et de $U'_w \times n_w \times B$ sur $B.n_w.B = U.n_w.B = U'_w.n_w.B$. Le groupe G est réunion disjointe des doubles classes $B.n_w.B$ $(w \in W(G))$. Deux doubles classes $U.n.U$ et $U.n'.U$ $(n, n' \in \mathscr{N}(T))$ ne sont égales que si $n = n'$ [2].

Cela implique en particulier que *si* B′ *est un sous-groupe de Borel de* G, *alors* $B' \cap B$ *contient un tore maximal de* G. En effet, puisque $G = B.\mathscr{N}(T).B$ on peut trouver $x \in B$ et $n \in \mathscr{N}(T)$ tels que ${}^xB' = {}^nB$, d'où

$${}^x(B' \cap B) = {}^xB' \cap B = {}^nB \cap B \supset T,$$

et $B' \cap B \supset x^{-1}.T.x$.

La classe latérale $n_w.T$ de T dans $\mathscr{N}(T)$ ne dépend évidemment que de w. Dans la suite on conviendra souvent de la désigner par $w.T$. Plus généralement, si A est une partie de $\mathscr{N}(T)$, l'ensemble A.T ne dépend que de l'image C de A dans W et

(1) L'un des auteurs insistant pour que l'on adopte cette terminologie, aujourd'hui généralement admise, l'autre auteur s'y résigne.

(2) En fait, cette dernière propriété ne semble pas figurer explicitement dans [10]. Elle se démontre à partir des précédentes exactement comme l'assertion correspondante dans 5.15, dont elle est du reste un cas particulier.

sera souvent noté C.T. De même, si F est une partie de G normalisée par T, l'ensemble ${}^{n_w}\mathrm{F}$ sera aussi noté ${}^{w}\mathrm{F}$.

2.5. *Proposition. — On conserve les notations précédentes. Soient a, $b \in \Phi(\mathrm{G})$, non proportionnelles. Soit $\mathrm{U}_{(a,b)}$ le sous-groupe de* G *engendré les groupes U_c, où c parcourt l'ensemble (a, b) des racines de la forme $i.a+j.b$ $(i, j>0)$. Alors $\mathrm{U}_{(a,b)}$ est unipotent, ne contient aucun autre groupe radiciel à un paramètre, et l'on a $(\mathrm{U}_a, \mathrm{U}_b) \subset \mathrm{U}_{(a,b)}$.*

Cette proposition résulte de faits établis dans [9, 10], et nous nous bornons à en esquisser la démonstration. On peut tout d'abord fixer un ordre sur Φ tel que a, $b \in \Phi^+$ [9, lemme 1]. Supposons $a<b$. Il résulte de [10, Exp. 17, Cor. au Th. 1] que U_a, U_b normalisent $\mathrm{U}_{(a,b)}$ et que si l'on range les U_c $(c \in (a, b))$ par ordre croissant, l'application produit de $\mathrm{U}_a \times \mathrm{U}_b \times \prod_{c \in (a,b)} \mathrm{U}_c$ dans U est un isomorphisme de variétés de ce produit sur le groupe engendré par U_a, U_b et $\mathrm{U}_{(a,b)}$. De plus, le lemme 1 de [10, Exp. 17] montre que si $x \in \mathrm{U}_b$ et $y \in \mathrm{U}_a$,

$$x.y \in \mathrm{U}_a.\mathrm{U}_b.\mathrm{U}_{(a,b)},$$

et que les images des composantes de $x.y$ dans U_a et U_b par θ_a^{-1} et θ_b^{-1} sont de la forme $c_a.\theta_a^{-1}(x)$ et $c_b.\theta_b^{-1}(y)$ où c_a, c_b sont des constantes. Faisant $y=1$ ou $x=1$, on voit que $c_a=c_b=1$, d'où

$$x.y \in y.x.\mathrm{U}_{(a,b)},$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. — On trouvera dans [9, p. 27] une formule beaucoup plus précise, établie en caractéristique zéro, mais valable en général vu les théorèmes de classification de [10]. Si G est presque simple, cette formule montre que $(\mathrm{U}_a, \mathrm{U}_b)$ peut être un sous-groupe propre de $\mathrm{U}_{(a,b)}$ seulement dans les cas suivants :

$$p=2,\ \mathrm{G}=\mathbf{B}_n,\ \mathbf{C}_n,\ \mathbf{G}_2,\ \mathbf{F}_4; \qquad p=3,\ \mathrm{G}=\mathbf{G}_2.$$

Pour la commodité des références, nous insérons ici un lemme élémentaire connu.

2.6. *Lemme. — Supposons* G *connexe et soit* B *un k-sous-groupe fermé de* G, *tel que la fibration de* G *par* B *admette une section locale définie sur k. Si k est fini ou G_k Zariski dense dans* G, *alors la projection canonique $\mathrm{G}_k \to (\mathrm{G}/\mathrm{B})_k$ est surjective.*

(Rappelons qu'une section locale sur k de la fibration d'un k-groupe algébrique H par un k-sous-groupe B est un k-morphisme σ d'un ouvert V défini sur k de H/B dans H tel que $\pi \circ \sigma = 1$, où $\pi : \mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathrm{B}$ désigne la projection canonique. L'application produit définit alors un k-isomorphisme de $\sigma(\mathrm{V}) \times \mathrm{B}$ sur un ouvert de H. En particulier B et V sont irréductibles si H l'est.)

Si G_k est Zariski dense dans G, les translatés du domaine de définition V d'une section locale sur k par les éléments de G_k forment un recouvrement de G/B, d'où la surjectivité de $G_k \to (G/B)_k$. Si k est fini, cette dernière résulte de [16], puisque B est connexe.

2.7. *Groupes résolubles déployés.* — Un k-groupe algébrique résoluble H est dit *déployé sur* k ou k-*déployé* ou k-*résoluble* s'il est connexe et possède une suite de composition $H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_t = \{e\}$ formée de k-sous-groupes connexes dont les quotients successifs sont k-isomorphes à $\mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$ (c'est le « k-solvable » de [26]). Un k-groupe résoluble connexe est toujours déployé sur $\bar{k}$. Pour un tore, cette notion coïncide bien avec celle introduite en 1.1, vu 1.9 *b)*. Toute extension sur k d'un groupe k-résoluble par un groupe k-résoluble est k-résoluble. Toute image d'un groupe k-résoluble par un k-morphisme est k-résoluble [23, Prop. 6]. Rappelons encore deux propriétés fondamentales d'un groupe k-résoluble G :

(i) Si G opère k-morphiquement sur une variété complète V et si $V_k \neq \emptyset$, alors V_k contient un point fixe par G [23, p. 35].

(ii) Tout k-espace homogène de G possède un point rationnel sur k [22, p. 425]. En particulier, si G est un k-sous-groupe d'un k-groupe algébrique L, alors la projection $L_k \to (L/G)_k$ est surjective.

2.8. *Groupes réductifs déployés.* — Supposons G réductif, et soient T, θ_a, U_a comme en 2.3. Alors $\{T, \theta_a\}$ ou, par abus de langage, $\{T, U_a\}$ $(a \in \Phi)$ est une *donnée de déploiement sur* k si T est déployé sur k et si les θ_a sont définis sur k. Le groupe G est *déployé sur* k s'il possède une donnée de déploiement sur k; il est toujours déployé sur $\bar{k}$. D'après un résultat (non publié) de Cartier (qui ne sera pas utilisé ici), tout tore maximal déployé sur k de G fait partie d'une donnée de déploiement (voir aussi [11]). Il s'ensuit en particulier que G est déployé sur k si et seulement s'il possède un sous-groupe de Borel déployé sur k. On pourrait donc prendre cette dernière condition comme définition de la notion de groupe algébrique déployé sur k. Cependant, nous n'en aurons pas besoin en dehors des cas réductif et résoluble.

Dans les lemmes 2.9, 2.10, et 2.11, le groupe G est réductif, déployé sur k, et les notations de 2.3 se rapportent à une donnée de déploiement sur k.

2.9. *Lemme.* — *Soit* V *un sous-groupe de* U *normalisé par* T. *Soient* $t \in T_k$ *et* $v \in V$ *tels que* $v.t.v^{-1} \in B_k$. *Alors* $v.t.v^{-1}$ *est conjugué à* t *par un élément de* V_k.

Soient $a_1, \ldots, a_m$ les racines positives telles que $U_{a_i} \subset V$ rangées par ordre croissant, et V_i le sous-groupe engendré par les groupes U_{a_j} $(1 \leqq i \leqq j \leqq m)$. Le théorème 1 *d)* de [10, Exp. 13] montre que l'application produit est un k-isomorphisme de variétés du produit des U_{a_j} $(j \geqq i)$ sur V_i et, joint à 2.5, prouve que V_i est distingué dans V et est le produit semi-direct de U_{a_i} avec V_{i+1} $(i = 1, \ldots, m$; on pose $V_{m+1} = \{e\})$.

La démonstration procède par récurrence descendante sur le plus grand entier $r \leqq m+1$ tel que $v \in V_r$, notre assertion étant évidente si $r = m+1$. Posons

$$v = v_r . v' = v'' . v_r \qquad (v', v'' \in V_{r+1};\ v_r \in U_{a_r}),$$

et soit $x=\theta_{a_r}^{-1}(v_r)\in\mathbf{G}_a$. Si $t^{a_r}=1$, alors t centralise v_r, donc $v.t.v^{-1}=v''.t.v''^{-1}$ et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Soit donc $t^{a_r}=c^{-1}\neq 1$. On a

$$t^{-1}.v.t.v^{-1}\in\theta_{a_r}((c-1).x).\mathrm{V}_{r+1},$$

d'où $(c-1).x\in k$, donc $x\in k$, et $v_r\in\mathrm{U}_k$. Par conséquent,

$$v'.t.v'^{-1}=v_r^{-1}.(v.t.v^{-1}).v_r\in\mathrm{G}_k.$$

En vertu de l'hypothèse d'induction t et $v'.t.v'^{-1}$ sont conjugués par un élément de V_k; il en est alors de même pour t et $v.t.v^{-1}=v_r.(v'.t.v'^{-1}).v_r^{-1}$.

Les deux lemmes suivants sont des cas particuliers de propositions qui seront établies ultérieurement (n^os 4.21, 5.15, 11.4).

2.10. *Lemme. — Soient* V *comme en* 2.9 *et* $\mathrm{C}=\mathrm{T}.\mathrm{V}$. *Tout tore* S *défini sur k de* C (*resp. déployé sur k de* G) *est conjugué par un élément de* C_k (*resp.* G_k) *à un sous-tore de* T.

Le tore S admet un point fixe dans $(\mathrm{G}/\mathrm{B})_k$ d'après 2.7 (i). Vu 2.3, 2.6, S est donc conjugué sur k à un sous-tore de B, et il suffit de démontrer l'assertion relative à C. Supposons k infini. Il existe alors $s\in\mathrm{S}_k$ tel que $\mathscr{Z}_{\mathrm{C}}(s)=\mathscr{Z}_{\mathrm{C}}(\mathrm{S})$ (1.10). On a la décomposition $s=t.v$ ($t\in\mathrm{T}$, $v\in\mathrm{V}$) et, puisque $s\in\mathrm{C}_k$ et que C est produit semi-direct sur k de T et V, on a aussi $t, v\in\mathrm{C}_k$. Les éléments t et s sont conjugués dans $\mathrm{V}_{\bar{k}}$ [1, § 12] donc (2.9) aussi dans V_k, et l'on peut se ramener au cas où $s=t$; mais alors $\mathscr{Z}_{\mathrm{C}}(\mathrm{S})=\mathscr{Z}_{\mathrm{C}}(s)\supset\mathrm{T}$, donc $\mathrm{S}\subset\mathrm{T}$. Soit maintenant k fini. Le centralisateur de S est défini sur k, donc [23, footnote p. 45] contient un tore maximal T′ défini sur k. Comme $\mathrm{T}=\mathscr{Z}_{\mathrm{C}}(\mathrm{T})=\mathscr{N}_{\mathrm{C}}(\mathrm{T})$, l'ensemble des éléments $v\in\mathrm{V}$ tels que $v.\mathrm{T}.v^{-1}=\mathrm{T}'$ est un espace homogène de T, évidemment défini sur k, et non vide [1, § 12]. Il contient alors un point rationnel sur k (2.7 (ii) ou [16]).

2.11. *Lemme. — Posons* $\mathrm{N}=\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. *Alors* $\mathrm{N}=\mathrm{N}_k.\mathrm{T}$ *et* $\mathrm{G}_k=\mathrm{U}_k.\mathrm{N}_k.\mathrm{U}_k$; *deux doubles classes* $\mathrm{U}_k.n.\mathrm{U}_k$, $\mathrm{U}_k.n'.\mathrm{U}_k$ *correspondant à des éléments distincts* n, n' *de* N_k *sont distinctes.*

Ce lemme est connu lorsque k est algébriquement clos (2.4). Il suffit donc de démontrer les deux premières égalités.

Soit $n\in\mathrm{N}$. Le groupe ${}^n\mathrm{B}$ contient T, donc (2.3) est déployé sur k et (2.7 (i)) possède un point fixe dans $(\mathrm{G}/\mathrm{B})_k$. Vu 2.6, 2.10, il existe alors $g\in\mathrm{G}_k$ tel que ${}^{gn}\mathrm{B}=\mathrm{B}$ et ${}^g\mathrm{T}=\mathrm{T}$, d'où $g\in\mathrm{N}_k$ et $g.n\in\mathrm{B}\cap\mathrm{N}=\mathrm{T}$.

Soit $g\in\mathrm{G}$. D'après le lemme sur $\bar{k}$, il existe $n\in\mathrm{N}$ tel que $g\in\mathrm{U}.n.\mathrm{U}$. Soient w l'image de n dans W(G), n' un représentant de w dans N_k, et V (resp. V′) le produit des groupes U_a où $a\in\Phi^+$, $w(a)>0$, (resp. $w(a)<0$), pris dans un ordre quelconque et soit $\mathrm{Y}={}^n\mathrm{V}'\subset\mathrm{U}^-$. On a

$$g.n'^{-1}\in\mathrm{U}.\mathrm{T}.n'.\mathrm{U}.n'^{-1}=\mathrm{U}.\mathrm{T}.n'.\mathrm{V}.\mathrm{V}'.n'^{-1}=\mathrm{U}.\mathrm{T}.\mathrm{Y},$$

d'où, vu 2.3, et l'égalité $n.V'.n^{-1}=n'.V'.n'^{-1}$,

$$g.n'^{-1}\in(U.T.Y)_k=U_k.T_k.Y_k,$$
$$g\in U_k.T_k.n'.U_k\subset U_k.N_k.U_k.$$

2.12. *Lemme.* — *Soient* G, G' *deux groupes réductifs connexes isomorphes*, T, T' *des tores maximaux respectifs de* G *et* G', α *un isomorphisme de* T *sur* T' *qui applique* $\Phi(G)$ *sur* $\Phi(G')$. *Soient* ψ *un ensemble de racines de* G *linéairement indépendantes et* $\beta_b : U_b \to U_{b'}$ $(b\in\psi,\ b'={}^t\alpha^{-1}(b))$ *un isomorphisme. Alors il existe un isomorphisme* γ *de* G *sur* G' *dont les restrictions à* T *et à* U_b *sont respectivement* α *et* β_b $(b\in\psi)$.

Vu [10, Exp. 24, Cor. 1] on peut, sans nuire à la généralité, identifier G à G' et supposer que α est l'identité. Soit $K\supset k$ un corps algébriquement clos de définition pour G' et les groupes U_b. Un K-isomorphisme de U_b sur $\mathbf{G}_a$ transforme β_b en un automorphisme de $\mathbf{G}_a$, c'est-à-dire en la multiplication par un élément $s_b\in K^*$. Puisque les éléments de ψ sont indépendants, il existe $t\in T_K$ tel que $t^b=s_b$ $(b\in\psi)$. Il suffit alors de prendre $\gamma=\operatorname{Int} t$.

2.13. *Théorème.* — *Deux groupes* G, G' *réductifs connexes déployés sur* k *et isomorphes sont isomorphes sur* k.

Soient (T, U_a) et $(T', U'_{a'})$ des données de déploiement sur k de G et G', et K une extension algébriquement close de k sur laquelle G et G' sont isomorphes. Vu 2.3 et la conjugaison des tores maximaux, il existe un K-isomorphisme η de G sur G' qui applique (T, U_a) sur $(T, U'_{a'})$. Fixons dans $\Phi(G)$ et $\Phi(G')$ des ordres qui se correspondent par ${}^t\eta_{|T}$. Soient U et U' (resp. U^- et U'^-) les sous-groupes unipotents de G et G' engendrés par les groupes U_a et $U'_{a'}$ correspondant aux racines positives (resp. négatives). Pour toute racine simple $a\in\Delta$, soient $\beta_a : U_a\to U'_{a'}$ un k-isomorphisme $(a'={}^t\eta_{|T}^{-1}(a))$ et u_a un élément différent de 1 de $U_{a,k}$. D'après 2.11, il existe un unique élément $n_a\in\mathcal{N}(T)$ tel que $u_a\in U^-.n_a.U^-$, et cet élément fait partie de $\mathcal{N}(T)_k$. En appliquant ce même lemme et 2.4 au centralisateur Z_a de la composante neutre du noyau de a (cf. 2.3), on voit que l'image de n_a dans W(G) est la réflexion fondamentale r_a; par suite, le sous-groupe M engendré par les n_a est un sous-groupe de $\mathcal{N}(T)_k$ qui s'applique sur W(G) par la projection canonique.

D'après 2.12, il existe un K-isomorphisme $\gamma: G\to G'$ qui prolonge $\eta_{|T}$ et les β_a $(a\in\Delta)$. On a $\gamma(u_a)=\beta_a(u_a)\in U'^-.\gamma(n_a).U'^-$. Comme $\beta_a(u_a)\in G'_k$ par hypothèse, 2.11 implique que $\gamma(u_a)$ est aussi rationnel sur k, donc $\gamma(M)=M'\subset G'_k$. Soit maintenant $c\in\Phi(G)$. Puisque M contient au moins un représentant de chaque élément de W(G), il existe $m\in M$ et $a\in\Delta$ tels que $U_c=m.U_a.m^{-1}$. La restriction de γ à U_c est donc égale à $\operatorname{Int}\gamma(m).\beta_a.\operatorname{Int} m^{-1}$, donc est définie sur k puisque β_a l'est et que m, $\gamma(m)$ sont rationnels sur k. Comme la restriction de η à T est définie sur k (1.6), il s'ensuit que la restriction de γ à l'ouvert $U^-.T.U$ est définie sur k, d'où le théorème.

Remarque. — Le théorème 2.13 est un cas très particulier d'un résultat de Demazure [11].

2.14. *Théorème* (*Grothendieck* [11]). — *Supposons* G *connexe. Alors :*

a) G *possède un tore maximal défini sur* k [11, Exp. XIV, Théor. 1.1].

b) *Si* G *est réductif,* G_k *se déploie sur une extension séparable de degré fini de* k.

c) *Si* G *est réductif et* k *infini, alors* G_k *est Zariski-dense dans* G [11, Exp. XIV, 6.5, 6.7].

Lorsque k est parfait, *c)*, pour un groupe non nécessairement réductif, et *a)* sont dus à Rosenlicht [23]. Il en est de même pour *a)* si G est résoluble [26, Theorem 4] (*voir* aussi 11.4).

2.15. Nous indiquons ici quelques conséquences immédiates de 2.14.

a) *Si* G *est réductif, son centre est défini sur* k.

En effet, $\mathscr{Z}(G)$ est k-fermé, contenu dans tout tore maximal de G, donc dans un tore maximal T défini sur k vu 2.14 *a)*, et est par conséquent aussi défini sur k_s (1.6).

b) *Supposons* G *semi-simple et soit* N *un* k*-sous-groupe distingué connexe de* G. *Alors* N *est produit presque direct des* k*-sous-groupes distingués de* G *presque simples sur* k *qu'il contient, et* G *est produit presque direct de* N *et d'un* k*-sous-groupe distingué connexe* N'.

En effet, d'après 2.14 *b)*, les sous-groupes presque simples sur $\bar{k}$ de G sont définis sur k_s; ils sont donc permutés par le groupe de Galois Γ de k_s/k, et un sous-groupe distingué connexe de G est presque simple sur k si et seulement s'il est produit presque direct de facteurs presque simples sur $\bar{k}$ de G formant une orbite de Γ.

c) *Supposons* G *semi-simple. Il existe un* k*-groupe* G_1 *et une* k*-isogénie* $\nu : G_1 \rightarrow G$ *déterminés à un isomorphisme près par les conditions suivantes :* G_1 *est produit direct de ses sous-groupes distingués presque simples sur* $\bar{k}$ *et* ν *induit des* $\bar{k}$*-isomorphismes de ceux-ci sur les facteurs presque simples de* G.

Les facteurs presque simples de G étant définis sur k_s, vu 2.14 *b)*, notre assertion est immédiate sur k_s. Que G_1 et ν soient alors définis sur k résulte immédiatement de critères de descente du corps de base [37].

d) *Supposons* G *réductif. Soient* S *un* k*-tore de* G *et* A *une partie de* S_k. *Alors* $\mathscr{Z}(A)^0$ *et* $\mathscr{Z}(S)$ *sont réductifs, définis sur* k *et* S *est contenu dans un tore maximal de* G *défini sur* k (1).

$\mathscr{Z}(A)^0$ et $\mathscr{Z}(S)$ sont k-fermés. Il suffit donc de faire la démonstration lorsque k est séparablement clos. Vu 2.14 et 2.10 on peut alors supposer que $S \subset T$, où T fait partie d'une donnée de déploiement de G sur k. Comme $\mathscr{Z}(S)$ est connexe [1, prop. 18.4], il résulte alors de 2.3 que $\mathscr{Z}(S)$ et $\mathscr{Z}(A)^0$ sont engendrés par T et les groupes U_a, où a parcourt les racines de G relatives à T égales à 1 sur S et A respectivement. Ils sont définis sur k, et aussi réductifs (2.3, remarque).

e) *Si* G *possède une décomposition de Levi sur* k (0.8), *alors son radical est défini sur* k.

Soit $G = H . R_u(G)$ une décomposition de Levi sur k de G, et soit Z le centre connexe de H. Il est défini sur k vu *a)*, et est le radical de H, donc $R(G) = Z . R_u(H)$ est défini sur k.

---

(1) Pour une démonstration plus directe d'un résultat plus général, *voir* 10.3, 10.5.

§ 3. RACINES ET SOUS-GROUPES NORMALISÉS PAR UN TORE MAXIMAL

Dans tout ce paragraphe, G *désigne un groupe réductif connexe.*

3.0. Soient M un **Z**-module libre de type fini, Φ un ensemble fini d'éléments non nuls de M, et ψ, η des parties de Φ. On dit que ψ *normalise* η (dans Φ) si quels que soient $m, n \in \mathbf{N}^+$, $a_1, \ldots, a_m \in \psi$ et $b \in \eta$:

(*) $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + nb \in \Phi$ entraîne $a \in \eta$.

Si de plus $\psi \supset \eta$ (resp. $\psi = \eta$), on dit que η est un *idéal* de ψ (resp. est *clos* dans Φ). L'ensemble ψ est *symétrique* si $\psi = -\psi$; *convexe* s'il contient toute combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs de ses éléments qui fait partie de Φ. Une partie convexe de Φ est évidemment close dans Φ.

Rappelons que si Φ est un système de racines (2.1), la condition (*) équivaut à cette même condition où l'on fait $m = n = 1$. Cela résulte aisément du lemme 19 de [6, § 7, n° 6]. Supposons Φ symétrique. On posera $\psi_s = \psi \cap (-\psi)$, $\psi_u = \psi \cap \complement(-\psi)$. Ce sont des parties disjointes de ψ dont ψ est la réunion. Si $\Phi = -\Phi$ et si ψ est clos dans Φ, ψ_s et ψ_u sont clos et ψ_u est un idéal de ψ. C'est clair pour ψ_s. Si ψ_u n'était pas un idéal on pourrait trouver $n \in \mathbf{N}^+$, $a_1, \ldots, a_m \in \psi$ et $b \in \psi_u$ tels que $a = a_1 + \ldots + a_m + nb \in \psi_s$, mais alors $-b = -a + a_1 + \ldots + a_m + (n-1)\, b \in \psi$, d'où $b \in \psi_s$. Une intersection d'ensembles clos dans Φ est close dans Φ, ce qui permet de parler du plus petit ensemble clos dans Φ contenant η, que l'on appellera la *clôture* de η dans Φ.

3.1. *Proposition. — Soient* A *un sous-anneau de* **R** *et* $0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ *une suite exacte de* A*-modules libres de type fini. Alors :*

(i) *Il existe sur* M *un et un seul ordre total compatible avec un ordre total donné sur* M'' *et induisant un ordre total donné sur* M'.

(ii) *Étant donné un ensemble fini* Φ *d'éléments de* M *dont toutes les combinaisons* A*-linéaires à coefficients* > 0 *sont* $\neq 0$, *il existe un ordre total sur* M *par rapport auquel les éléments de* Φ *sont* > 0.

(i) On pose $a > b$ si, soit $\pi(a) > \pi(b)$, soit $\pi(a) = \pi(b)$ et $a - b > 0$ pour l'ordre donné sur M'.

(ii) Quitte à remplacer A par son corps des fractions, on peut supposer que A est un corps. On procède par récurrence sur la dimension de M. On peut se borner au cas où aucun élément de Φ n'est combinaison linéaire à coefficients > 0 d'autres éléments de Φ. Soient M' le sous-espace engendré par un élément $a \in \Phi$ et π la projection de M sur $M'' = M/M'$. Soit Φ'' l'ensemble des éléments non nuls de $\pi(\Phi)$. Vu les hypothèses sur Φ, il vérifie aussi la condition imposée à Φ dans (ii), d'où l'existence d'un ordre total sur M'' tel que Φ'' soit formé d'éléments positifs. On prend alors sur M l'ordre compatible avec l'ordre construit sur M'' et pour lequel $a > 0$.

3.2. *Racines par rapport à un tore.* — Soit S un tore opérant morphiquement sur G. Les *poids de* S *dans* G sont les caractères intervenant dans la représentation induite de S dans $\mathfrak{g}$. Si S est un sous-tore de G, opérant par automorphismes intérieurs, les *racines* de G relativement à S sont les poids non nuls de S dans G. Leur ensemble est noté $\Phi(S, G)$, ou simplement Φ. Si S' est un sous-tore de S, alors $\Phi(S', G)$ est l'ensemble des éléments non nuls de l'image de $\Phi(S, G)$ par restriction. Si S est un sous-tore de G, et H un sous-groupe fermé de G normalisé par S, les *poids de* S *dans* H sont les poids associés à l'action de S par automorphismes intérieurs. Les poids non nuls de S dans H sont donc les racines de G, relatives à S, dont l'espace propre a une intersection non nulle avec $\mathfrak{h}$.

Si S *est un tore maximal, les poids non nuls de* S *dans* H *sont aussi les racines* $a \in \Phi(S, G)$ *telles que* $U_a \subset H$. En effet, si $U_a \subset H$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_a$ de U_a fait partie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, donc a est un poids non nul de S dans H. La réciproque résulte de 2.3.

Dans le lemme suivant, qui généralise la Proposition 1, p. 13-02 de [10], on se place dans la catégorie des groupes à opérateurs avec domaine d'opérateurs P fixé. En particulier, tous les sous-groupes considérés sont stables par P, et les homomorphismes commutent à P. Rappelons que l'on appelle sous-quotient d'un groupe, toute image homomorphe d'un sous-groupe de celui-ci.

3.3. *Lemme. — Soit* H *un groupe nilpotent (à opérateurs); soient* $H_1, \ldots, H_m$ *des sous-groupes de* H *sans sous-quotients isomorphes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout sous-groupe* $A \subset H$, *l'application produit est une bijection de* $(A \cap H_1) \times \ldots \times (A \cap H_m)$ *sur* A.

(ii) H *possède une suite de composition à quotients commutatifs dont chaque terme est engendré par ses intersections avec les groupes* H_i.

(iii) H *possède une suite de composition* $H = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = \{e\}$ *ayant la propriété :*
a) *pour tout* $i \leqq n$, *il existe* $j(i) \leqq m$ *tel que* $L_{i-1} = L_i . (L_{i-1} \cap H_{j(i)})$.

(iv) H *possède une suite distinguée* (L_i) *centrale* (i.e. H/L_{i-1} *est dans le centre de* H/L_i *pour* $i = 1, \ldots, n$) *ayant la propriété* a).

Avant de passer à la démonstration remarquons tout d'abord que :

b) Toute suite de composition (L_i) à quotients commutatifs, dont les termes sont engendrés par leurs intersections avec les H_i, possède un raffinement vérifiant *a)*.

Pour obtenir un tel raffinement, il suffit en effet d'intercaler entre L_{i-1} et L_i les sous-groupes $L_i . (L_{i-1} \cap H_1) \ldots (L_{i-1} \cap H_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. (Ce sont bien des sous-groupes invariants dans L_{i-1} puisque L_{i-1}/L_i est commutatif, et ils vérifient *a)* puisque, vu l'hypothèse, L_{i-1}/L_i est le produit des images canoniques des groupes $L_{i-1} \cap H_j$).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Posons $L_{n-1} = L$. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Si $n = 2$, on peut évidemment se borner au cas où H_1 et H_2 sont non triviaux. Alors *a)* implique que $H = H_1 \times H_2$ et que H_1, H_2 sont commutatifs. Quitte à diviser H par $(H_1 \cap A) \times (H_2 \cap A)$, on peut supposer que $H_1 \cap A = H_2 \cap A = \{e\}$. Mais alors les projections de A sur H_1 et H_2 sont isomorphes, donc réduites à l'élément neutre.

Dans le cas général, on procède par induction sur n. En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'image de A dans H/L par la projection canonique, on voit que

$$A \subset (A \cap (H_1 . L)) . (A \cap (H_2 . L)) \ldots\ldots (A \cap (H_m . L)). \tag{1}$$

Mais, en vertu de *a)*, L est contenu dans l'un des groupes H_i, disons dans H_s, et l'on a $H_i . L = H_i \times L$ ou $H_i . L = H_i$ suivant que $i \neq s$ ou $i = s$, d'où encore, compte tenu de ce qui a déjà été démontré :

$$A \cap (H_i . L) \subset (A \cap H_i) . (A \cap L).$$

Comme $A \cap L \subset A \cap H_s$, l'inclusion (1) devient

$$A \subset (A \cap H_1) . (A \cap H_2) \ldots\ldots (A \cap H_m). \tag{2}$$

Enfin, soit

$$a_1 . a_2 \ldots\ldots a_m = b_1 . b_2 \ldots\ldots b_m \qquad (a_i, b_i \in A \cap H_i ; \quad i = 1, \ldots, m).$$

L'hypothèse de récurrence, appliquée à l'image de A dans H/L, donne $a_i \in b_i . L$, donc $a_i \in b_i . H_s$ pour tout i, d'où $a_i = b_i$ si $i \neq s$, et finalement aussi $a_s = b_s$.

(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii). Cela résulte du fait que H possède au moins une suite de composition à quotients commutatifs, et de *b)*.

(iii) ⇒ (iv). On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial. Vu *b)* il suffit de prouver que les termes de la suite centrale ascendante sont engendrés par leurs intersections avec les groupes H_i. Par une récurrence évidente sur la longueur de cette suite, on voit qu'il suffit de montrer que le centre Z de H est engendré par les groupes $H_i \cap Z$.

D'après *a)*, il existe s tel que $H = L_1 . H_s$. Soit $B = Z . H_s$. L'hypothèse de récurrence, appliquée à L_1 et aux groupes $L_1 \cap H_i$, et l'implication (iv) ⇒ (i) déjà établie, montrent que $B \cap L_1$ est engendré par ses intersections avec les H_i. Il en est donc de même pour $B = H_s . (B \cap L_1)$. Une suite centrale de B constituée par B, H_s et une suite centrale de H_s, est alors formée de groupes qui sont engendrés par leurs intersections avec les H_i, donc B vérifie (iv) vu *b)*. Il suit alors de l'implication (iv) ⇒ (i) que tout sous-groupe de B, en particulier Z, est engendré par ses intersections avec les H_i.

Remarques. — 1) les conditions du lemme précédent sont aussi équivalentes à :

(v) *Toute suite de composition de* G *possède un raffinement vérifiant* a).

En effet (v) ⇒ (iii) et, compte tenu de *b)*, (i) ⇒ (v).

2) Le groupe des transformations affines $x \mapsto a . x + b$ de la droite (sans opérateurs), et les sous-groupes H_1 des homothéties et H_2 des translations donnent un exemple de groupe non nilpotent et de sous-groupes vérifiant (iii), mais non (i).

3.4. *Proposition. — Soient* T *un tore maximal de* G, H *un sous-groupe connexe fermé normalisé par* T, *et* ψ *l'ensemble des racines* $a\in\Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$ *telles que* $\mathrm{U}_a\subset\mathrm{H}$. *Soit* H^* *le groupe engendré par les* U_a $(a\in\psi)$. *Alors :*

a) $\mathrm{H}=\mathrm{H}^*.(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})^0$.

b) *Si* η *est une partie close de* Φ *contenue dans* ψ *et si* H^* *est engendré par les groupes* U_a *avec* $a\in\eta$, *alors* $\eta=\psi$.

a) Soient B un sous-groupe de Borel de H, S un tore maximal de B et U le plus grand sous-groupe unipotent de B. Le groupe B fait partie d'un sous-groupe de Borel B′ de T.H et, par conjugaison dans T.H, ce qui laisse H stable, on peut supposer que $\mathrm{S}\subset\mathrm{T}$ [1, Cor. 16.6]. On a d'autre part $\mathrm{B}'=\mathrm{T}.\mathrm{U}$. Il s'ensuit en particulier que H et T.H ont les mêmes sous-groupes unipotents. D'après la remarque à 2.3, le sous-groupe engendré par les sous-groupes unipotents de T.H est déjà engendré par deux sous-groupes unipotents maximaux normalisés par T. Vu 2.3 ces derniers sont engendrés par les sous-groupes U_a qu'ils contiennent, donc le sous-groupe engendré par les sous-groupes unipotents de H n'est autre que H^*. Cela entraîne que $\mathrm{H}^*.(\mathrm{T}\cap\mathrm{H})^0$ est un sous-groupe de H qui contient un tore maximal S de H et tous les sous-groupes unipotents de H; il est donc égal à H (2.3, rem.).

b) Soient $\eta_s=\eta\cap(-\eta)$, $\eta_u=\eta\cap\complement(-\eta)$. Ce sont des parties closes de Φ (3.0). On sait [6, § 7, Prop. 22] que l'on peut fixer un ordre sur Φ tel que $\eta_u\subset\Phi^+$. Soient $\eta^\pm=\eta\cap\Phi^\pm$ et $\mathrm{V}^\pm$ le groupe engendré par les U_a $(a\in\eta^\pm)$. L'ensemble $\eta^\pm$ est aussi clos dans Φ, et 2.5 montre que $\mathrm{V}^\pm$ ne contient pas de groupe U_b avec $b\notin\eta^\pm$.

L'ensemble η_s, étant clos et symétrique, est aussi un système de racines. Posons $\mathrm{W}'=\mathrm{W}(\eta_s)$ et montrons que $\mathrm{M}=\mathrm{V}^+.\mathrm{W}.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-$ est un groupe (on utilise la convention du n° 2.4). Vu 2.3, il est engendré par T et les groupes U_a, où a parcourt η^+ et les opposés des racines simples de η_s, pour l'ordre fixé. Il suffit donc de faire voir que M est invariant par translation à gauche par T et par les U_a sus-mentionnés. C'est évident pour T, et pour U_a si $a\in\eta^+$. Soit donc a une racine simple de η_s. La Proposition 2.5 montre que le sous-groupe Y de V^+ engendré par les U_b $(b\in\eta^+, b\neq a)$ est normalisé par U_a, U_{-a}, donc en particulier que $\mathrm{V}^+=\mathrm{U}_a.\mathrm{Y}=\mathrm{Y}.\mathrm{U}_a$, d'où

$$\mathrm{U}_{-a}.\mathrm{M}\subset\mathrm{Y}.\mathrm{U}_{-a}.\mathrm{U}_a.\mathrm{W}'.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-.$$

La décomposition de Bruhat (2.4) de Z_a donne

$$\mathrm{U}_{-a}.\mathrm{U}_a\subset\mathrm{T}.\mathrm{U}_a\cup\mathrm{U}_a.r_a.\mathrm{T}.\mathrm{U}_a, \tag{1}$$

r_a étant la réflexion fondamentale associée à a, d'où

$$\mathrm{U}_{-a}.\mathrm{V}^+.w'.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-\subset\mathrm{M}\cup\mathrm{V}^+.\mathrm{U}_{-a}.w.\mathrm{T}.\mathrm{V}^- \qquad (w'\in\mathrm{W}';\ w=r_a.w'). \tag{2}$$

Si $w^{-1}(a)>0$, alors $w^{-1}(-a)\in\eta^-$, donc $\mathrm{U}_{-a}.w.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-\subset w.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-$ et le dernier terme de (2) fait partie de M. Soit donc $b=w^{-1}(-a)>0$. On a

$$\mathrm{U}_{-a}.w.\mathrm{T}.\mathrm{V}^-=w.\mathrm{T}.\mathrm{U}_b.\mathrm{V}^-. \tag{3}$$

La formule (1), avec a remplacé par $-b$, donne

(4) $$T.U_b.V^- \subset T.V^- \cup T.U_{-b}.r_b.V^-,$$

d'où, vu (3),

$$U_{-a}.w.T.V^- \subset w.T.V^- \cup U_a.w.r_b.T.V^-,$$

et, vu (2), $U_{-a}M \subset M$.

L'ensemble M est donc bien un groupe. La décomposition de Bruhat du quotient de M par son radical unipotent montre alors que ce quotient a η_s comme système de racines. Comme V^+ et V^- ne contiennent aucun U_b $(b \notin \eta)$ il en est alors de même de M, donc $\eta = \psi$.

3.5. *Lemme. — Soient* S *un tore de* G, T *un tore maximal de* G *contenant* S, *et* H *un sous-groupe fermé de* G *contenant* $\mathscr{Z}(S)$. *Alors le sous-groupe* H^* *de* H *engendré par les* U_a $(a \in \Phi(T, G))$ *contenus dans* H, *mais non dans* $\mathscr{Z}(S)$, *est normalisé par* $\mathscr{Z}(S)$.

Soient a, b deux éléments de $\Phi(T, G)$ tels que $U_a \in \mathscr{Z}(S)$, $U_b \notin \mathscr{Z}(S)$, $U_b \subset H$. Le groupe (U_a, U_b) est contenu dans le sous-groupe engendré par les U_c où c parcourt les racines de la forme $ma+nb$ $(m, n>0)$ (2.5), et engendré par ceux de ces sous-groupes qu'il contient (2.3). Ces derniers ne peuvent faire partie de $\mathscr{Z}(S)$ (puisque $n \neq 0$), mais sont dans H, donc dans H^*, ce qui prouve que $(U_a, U_b) \subset H^*$. Par conséquent, le normalisateur de H^* contient tout sous-groupe U_a faisant partie de $\mathscr{Z}(S)$; comme il contient aussi T, le lemme est démontré.

3.6. *Proposition. — Soient* H *un* k*-sous-groupe réductif connexe de rang maximum de* G *et* U *un* k*-sous-groupe unipotent connexe de* G *normalisé par* H. *Soit* S *le plus grand sous-tore déployé sur* k *du centre de* H. *Alors il existe un ordre sur* $X^*(S)$ *tel que les poids de* S *dans* U *soient* >0.

Remarquons tout d'abord que le centre de H est défini sur k (2.15), ce qui légitime la définition de S. Soit T un tore maximal de H, donc de G, défini sur k, qui existe vu 2.14, et soit ψ l'ensemble des racines a de G par rapport à T telles que $U_a \subset U$. C'est aussi (3.2) l'ensemble des poids de T dans U. Vu 3.1, il suffit donc, pour établir la proposition, de faire voir que toute combinaison linéaire à coefficients entiers >0 d'une famille non vide d'éléments de ψ a une restriction non nulle à S. Supposons le contraire, et soit c une telle combinaison linéaire qui s'annule sur S. Le groupe de Galois Γ de k_s/k opère sur $X^*(T)$, en permutant les éléments de ψ, et sur $X_*(T)$, en laissant $X_*(S)$ fixe point par point; quitte à remplacer c par la somme de ses transformés par Γ, on peut donc supposer c invariant par Γ, donc défini sur k. Il est alors trivial sur la composante neutre Z du centre de H (1.8). D'autre part, le groupe de Weyl W(H) de H opère aussi sur ψ, donc la somme c' des transformés de c par W(H) est aussi une combinaison linéaire à coefficients entiers >0 d'éléments de ψ, qui s'annule sur Z. Ce dernier fait montre que c' est combinaison linéaire, à coefficients rationnels, de racines de H par rapport à T. Comme elle est invariante par W(H), elle doit alors être nulle. Mais T.U fait partie d'un groupe de Borel de G, donc ψ est contenu dans l'ensemble des racines positives de G pour un ordre convenable, et $c' \neq 0$, d'où une contradiction.

3.7. *Corollaire.* — *Soient* U *un k-sous-groupe unipotent connexe de* G *et* S *un k-tore de* G *dont le centralisateur* $\mathscr{Z}(S)$ *normalise* U. *Alors les poids de* S *dans* U *sont tous non nuls.*

Le groupe $H = \mathscr{Z}(S)$ est réductif, connexe, défini sur k (2.15 d)) et de rang maximum. Soient T et ψ comme dans la démonstration précédente. Les poids de S dans U sont les restrictions à S des éléments de ψ. Si $a \in \psi$ a une restriction à S nulle, c'est une racine de H par rapport à T, et il est forcément nul sur le plus grand tore central de H, en contradiction avec 3.6.

3.8. *Ensembles quasi-clos de racines et sous-groupes associés.* — (i) Soient S un tore de G et T un tore maximal de G contenant S. Une partie μ de $\Phi(T, G) = \Phi$ est *quasi-close* si le groupe engendré par les U_a $(a \in \mu)$ ne contient aucun autre groupe U_b $(b \in \Phi)$. D'après 3.4, un ensemble clos est aussi quasi-clos. (Remarquons en passant que la réciproque ne peut être en défaut que dans les cas mentionnés dans la remarque à 2.5, où (U_a, U_b) est strictement plus petit que $U_{(a,b)}$ $(a, b \in \Phi, a+b \neq 0)$.)

Une partie ψ de $\Phi(S, G)$ est quasi-close si l'ensemble des racines de G par rapport à T dont la restriction à S est contenue dans $\psi \cup \{0\}$ est quasi-close. Comme deux tores maximaux de G contenant S sont conjugués dans $\mathscr{Z}(S)$, il est clair que cette condition sera alors vérifiée pour tout tore maximal de $\mathscr{Z}(S)$. Toute intersection de parties quasi-closes est quasi-close. Il y a donc un plus petit ensemble quasi-clos contenant une partie σ de $\Phi(S, G)$, qui sera appelé la *quasi-clôture* de σ. Si $\psi \subset \Phi(S, G)$ est quasi-close, $-\psi$ l'est aussi ; pour le montrer, il suffit évidemment de considérer le cas où $S = T$, et cela résulte alors de l'existence d'un automorphisme de G conservant T et induisant sur T l'automorphisme $t \mapsto t^{-1}$ ([10, exp. 24, cor. 1]).

(ii) Soient ψ une partie quasi-close de $\Phi(S, T)$ et μ (resp. ν) l'ensemble des éléments de $\Phi(T, G)$ dont la restriction à S est contenue dans $\psi \cup \{0\}$ (resp. ψ). On note $G_\psi^{(S)}$ ou G_ψ le groupe engendré par T et les U_a $(a \in \mu)$, et $G_\psi^{*(S)}$ ou G_ψ^* le groupe engendré par les U_a $(a \in \nu)$. Par définition, G_ψ ne contient aucun autre groupe U_b $(b \notin \mu)$, donc est engendré par $\mathscr{Z}(S)$ et G_ψ^*. De plus G_ψ^* est normalisé par $\mathscr{Z}(S)$ d'après 3.5, donc $G_\psi = \mathscr{Z}(S) . G_\psi^*$. Cela montre aussi que G_ψ et G_ψ^* ne changent pas si l'on remplace dans la définition précédente T par un autre tore maximal de G contenant S.

Par définition, on a

$$G_\mu^{(T)} = G_\psi^{(S)}, \qquad G_{\nu'}^{*(T)} = G_\psi^{*(S)} \tag{1}$$

où ν' est la quasi-clôture de ν (il se peut que $\nu' \neq \nu$).

Plus généralement soit S' un tore contenant S et soient σ (resp. τ) la quasi-clôture de l'ensemble des racines relatives à S' dont la restriction à S appartient à $\psi \cup \{0\}$ (resp. ψ). On a alors visiblement

$$G_\sigma^{(S')} = G_\psi^{(S)}, \qquad G_\tau^{*(S')} = G_\psi^{*(S)}. \tag{2}$$

Les poids de S dans G_ψ (resp. G_ψ^*) sont les éléments de $\psi \cup \{0\}$ (resp. de ψ ou $\psi \cup \{0\}$). Remarquons encore que si $\psi = \Phi(S, G)$, alors $G_\psi = G$ et G_ψ^* est le produit des facteurs presque simples de G non centralisés par S.

(iii) Soient ψ, η des parties quasi-closes de $\Phi(S, G)$. On dit que η est un *quasi-idéal* de ψ si G^*_η est un sous-groupe distingué de G^*_ψ. On verra (3.9) qu'un idéal est un quasi-idéal.

(iv) Si G^*_ψ est unipotent, on le notera souvent U_ψ, et l'on dira que ψ est *unipotent*. Si ψ est quasi-clos et formé de racines >0 pour un ordre convenable sur $X^*(S)$, alors il est unipotent, et ν est quasi-clos unipotent. En effet, soit Φ^+ l'ensemble des racines relatives à T positives pour un ordre sur $X^*(T)$ compatible avec l'ordre donné sur $X^*(S)$ (3.1). On a $\nu \subset \Phi^+$, donc aussi $\nu' \subset \Phi^+$, et $G^{*(T)}_{\nu'}$ fait partie du groupe unipotent maximal U engendré par les U_a $(a \in \Phi^+)$. De plus, si $a, b \in \nu$, $m, n \in \mathbf{N}^+$ et $m.a+n.b \in \nu'$, alors la restriction à S de $m.a+n.b$ ne peut être nulle, donc fait partie de ψ et $m.a+n.b \in \nu$. Il résulte alors de 2.5 que ν est quasi-clos et que S n'a pas le poids zéro dans U_ψ.

Si $S=T$, alors réciproquement tout ensemble quasi-clos unipotent est formé de racines positives, puisque $T.U_\psi$ est contenu dans un sous-groupe de Borel de G. Cela vaut aussi si S est défini sur k et contient le tore déployé sur k maximal du centre de $\mathscr{Z}(S)$, vu 3.6. Mais des exemples simples montrent que cette réciproque n'est pas vraie en général.

3.9. *Proposition. — On conserve les notations de* 3.8. *Soient* ψ, η *des parties quasi-closes de* $\Phi(S, G)$ *telles que* ψ *normalise* η. *Alors* G_ψ *normalise* G^*_η.

Soient T un tore maximal de G contenant S et $j : X^*(T) \to X^*(S)$ l'homomorphisme de restriction. Comme $\mathscr{Z}(S)$ normalise G^*_η, il suffit de montrer que si $a \in j^{-1}(\psi) \cap \Phi(T, G)$ et $b \in j^{-1}(\eta) \cap \Phi(T, G)$, alors $(U_a, U_b) \subset G^*_\eta$. Supposons d'abord que $m.j(a)+n.j(b) \neq 0$ quels que soient $m, n \in \mathbf{N}^+$; comme ψ normalise η, on a alors $m.a+n.b \in \eta$ toutes les fois que $m.a+n.b \in \Phi$, et notre assertion résulte de 2.5. Si, par contre, il existe $m, n \in \mathbf{N}^+$ tels que $m.j(a)+n.j(b)=0$, alors $j(a)=(m+1).j(a)+n.j(b) \in \eta$, donc $U_a \in G^*_\eta$, d'où évidemment $(U_a, U_b) \subset G^*_\eta$.

3.10. *Proposition. — Soient* S *un tore et* ψ, η *deux parties quasi-closes de* $\Phi(S, G)$ *positives pour un ordre donné sur* $X^*(S)$. *Soit* σ *l'ensemble des éléments de* $\Phi(S, G)$ *qui sont somme d'une combinaison linéaire non nulle à coefficients entiers* $\geqq 0$ *d'éléments de* ψ *et d'une combinaison linéaire non nulle à coefficients entiers* $\geqq 0$ *d'éléments de* η. *Alors* σ *est clos unipotent, et* $(U_\psi, U_\eta) \subset U_\sigma$.

Il est clair que σ est clos. Soient T un tore maximal de G contenant S, et Φ^+ l'ensemble des racines de G par rapport à T, positives pour un ordre sur $X^*(T)$ compatible avec l'ordre donné sur $X^*(S)$. Soient ψ', η', σ' les images réciproques de ψ, η, σ dans Φ. Vu 3.8 (iv), on a $U_\psi = U^{(T)}_{\psi'}$ et de même pour η, σ. D'autre part σ' est obtenu à partir de ψ', η' comme σ l'est à partir de ψ et η. La proposition est donc conséquence de 2.3, 2.5 et des identités $(x, yz)=(x, y).{}^y(x, z)$ et $(xy, z)={}^x(y, z).(x, z)$.

3.11. *Proposition. — Soient* S *un tore de* G, ψ *un ensemble quasi-clos unipotent de racines relatives à* S, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *des parties quasi-closes unipotentes de* ψ *dont* ψ *est la réunion disjointe, et* H *un sous-groupe unipotent fermé connexe de* U_ψ (*resp.* G_ψ) *normalisé par* S. *Alors* *l'application produit définit un isomorphisme de variétés de* $(H \cap U_{\psi_1}) \times \ldots \times (H \cap U_{\psi_n})$ (*resp.* $(H \cap \mathscr{Z}(S)) \times (H \cap U_{\psi_1}) \times \ldots \times (H \cap U_{\psi_n})$), *sur* H.

D'après 3.5, U_ψ est normalisé par $\mathscr{Z}(S)$, donc est le radical unipotent de G_ψ, et $S.H.U_\psi$ est un sous-groupe fermé résoluble de G_ψ. Soient B un sous-groupe de Borel de G contenant $S.H.U_\psi$ et T un tore maximal de B qui contient S, donc fait aussi partie de $\mathscr{Z}(S)$. Les poids de T dans le radical unipotent U de B sont les éléments positifs de $\Phi = \Phi(T, G)$ pour un ordre convenable. Soient $j : X^*(T) \to X^*(S)$ l'homomorphisme de restriction et $\eta_0 = j^{-1}(0) \cap \Phi^+$, $\eta_i = j^{-1}(\psi_i) \cap \Phi$ $(1 \leq i \leq n)$, $\eta = j^{-1}(\psi) \cap \Phi$ et $\sigma = \eta \cup \eta_0$. Évidemment η_0 est clos et, vu 2.3, $U_{\eta_0} = \mathscr{Z}(S) \cap U$; vu 3.8 (iv), $\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta$ sont des parties quasi-closes unipotentes de Φ^+, η est la réunion disjointe de $\eta_1, \ldots, \eta_n$, et l'on a $U_\psi = U_\eta^{(T)}$, $U_{\psi_i} = U_{\eta_i}^{(T)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Il résulte aussi de 2.3 que σ est l'ensemble des poids de T dans $V = G_\psi \cap U$, donc que σ est quasi-clos et que $V = U_\sigma$. Soient $a_1, \ldots, a_q$ (resp. $b_1, \ldots, b_r$) les éléments de η (resp. σ) rangés par ordre croissant. D'après 2.5 l'application produit définit un isomorphisme de variétés de $U_{a_j} \times \ldots \times U_{a_q}$ (resp. $U_{b_j} \times \ldots \times U_{b_r}$) sur un sous-groupe distingué V_j (resp. Y_j) de U_η (resp. U_σ) pour tout $j \leqq q$ (resp. $j \leqq r$). Les groupes V_j (resp. Y_j) forment donc une suite de composition de U_η (resp. U_σ) dont les éléments sont engendrés par leurs intersections avec les groupes U_{η_i} $(i = 1, \ldots, n)$ (resp. $i = 0, \ldots, n$). La proposition résulte alors de 3.3 (où l'on prend S comme groupe d'opérateurs).

3.12. *Proposition. — Soient* S *un tore,* H *un sous-groupe fermé connexe de* G *normalisé par* S *et* ψ *un ensemble convexe de racines de* G *relatives à* S. *Supposons que tout poids de* S *dans* H *appartienne à* ψ (*resp.* $\psi \cup \{0\}$). *Alors* H *est contenu dans* G_ψ^* (*resp.* G_ψ).

Soit S′ un tore maximal de S.H contenant S. Le groupe S.H est engendré par S′ et deux sous-groupes unipotents maximaux normalisés par S′ (2.3, remarque), donc H est engendré par $(S' \cap H)^0$ et deux sous-groupes unipotents normalisés par S. Il suffit par conséquent de considérer le cas où H est unipotent.

Soient B un sous-groupe de Borel de G contenant S.H, T un tore maximal de B contenant S, et U le radical unipotent de B. Soient Φ^+ l'ensemble des racines de U relatives à T, et φ_0 l'ensemble des éléments de Φ^+ dont la restriction à S′ est nulle. Soient $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les classes d'équivalence de la relation obtenue dans Φ^+ en considérant comme équivalentes deux racines dont les restrictions à S ne diffèrent que par un coefficient strictement positif; $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont convexes et (2.3) $\mathscr{Z}(S) \cap U = U_{\varphi_0}$. Soient ψ_i l'ensemble des restrictions à S des éléments de φ_i, et

$$U_i = U_{\psi_i} = U_{\varphi_i}^{(T)} \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad U_0 = U_{\varphi_0}^{(T)} = \mathscr{Z}(S) \cap U.$$

Il résulte de 3.11 que $H = (H \cap \mathscr{Z}(S)).(H \cap U_1) \ldots (H \cap U_n)$, et que $H \cap \mathscr{Z}(S) \neq \{e\}$ seulement si S a le poids zéro dans H. Soit $i \geqq 1$. Alors $H \cap U_i \neq \{e\}$ entraîne $\psi \cap \psi_i \neq \emptyset$, donc, puisque ψ est convexe, $\psi_i \subset \psi$, et $U_i \subset U_\psi$, d'où la proposition.

3.13. *Théorème. — Soient* S *un k-tore de* G, H *un sous-groupe connexe k-fermé de* G *normalisé par* $\mathscr{Z}(S)$ *et* ψ *une partie quasi-close de* $\Phi(S, G)$. *Alors :*

a) H *est défini sur* k, *et possède un unique sous-groupe de Levi* L *normalisé par* $\mathscr{Z}(S)$. *Les groupes* L *et* $R_u(H)$ *sont définis sur* k.

b) *Les groupes* G_ψ *et* G^*_ψ (3.8) *sont définis sur* k *si et seulement si* ψ *l'est* (1.7). *Les ensembles* $\psi_s=\psi\cap(-\psi)$ *et* $\psi_u=\psi\cap\complement(-\psi)$ *sont quasi-clos, et* ψ_u *est unipotent. Si* $H=G_\psi$ (*resp.* $H=G^*_\psi$), *alors* $L=G_{\psi_s}$ (*resp.* $L=G^*_{\psi_s}$) *et* $R_u(H)=U_{\psi_u}$.

a) Il suffit de faire la démonstration lorsque k est séparablement clos. D'après 2.10 et 2.14, S est contenu dans un tore maximal T de G faisant partie d'une donnée de déploiement sur k. Le groupe $R_u(H)$ (resp. H) est alors engendré par les groupes radiciels U_a qu'il contient (resp. et $(T\cap H)^0$) et est donc défini sur k.

Soient η l'ensemble des $a\in\Phi(T, G)$ tels que $U_a\subset H$, et $\eta_s=\eta\cap(-\eta)$, $\eta_u=\eta\cap\complement(-\eta)$. Montrons que l'ensemble η_u est égal à l'ensemble μ des $a\in\Phi(T, G)$ tels que $U_a\subset R_u(H)$. Soit $a\in\mu$. Si $-a$ faisait partie de η, alors le groupe Z'_a engendré par U_a et U_{-a} normaliserait $R_u(H)$, son radical unipotent contiendrait $R_u(H)\cap Z'_a$, donc U_a, et serait $\neq\{e\}$ ce qui est absurde puisque Z'_a est presque simple de dimension trois (2.3). Ainsi, $-a\notin\eta$, donc $a\in\eta_u$ et $\mu\subset\eta_u$. D'autre part, le quotient de T.H par $R_u(H)$ est réductif, donc a un ensemble de racines symétrique, d'où $\mu\supset\eta_u$, et $\mu=\eta_u$, ce qui montre en particulier que η_u est quasi-clos unipotent.

L'ensemble η_s est quasi-clos puisque η et $-\eta$ le sont (3.8(i)) et le groupe L engendré par les U_a ($a\in\eta_s$) et $T'=(T\cap H)^0$ est réductif. Vu 2.3, 3.4, il contient tout sous-groupe de H réductif normalisé par T, et l'on a $H=L.R_u(H)$. Les résultats rappelés en 2.3 montrent aussi que les algèbres de Lie de L et $R_u(H)$ sont transverses et que $L\cap R_u(H)$ est connexe, donc réduit à $\{e\}$. Le groupe H est par suite produit semi-direct de L et $R_u(H)$, et L est l'unique sous-groupe réductif normalisé par T ayant cette propriété. Il reste à voir que L est stable par $\mathscr{Z}(S)$. Le sous-groupe L′ de H engendré par les ${}^xL$ ($x\in\mathscr{Z}(S)$) est réductif, car il est stable par un automorphisme de G qui induit $t\mapsto t^{-1}$ sur T (et dont l'existence résulte du cor. 1 de [10, exp. 24]), donc possède un ensemble de racines ν par rapport à T qui est symétrique. On a évidemment $\eta_s\subset\nu\subset\eta$, d'où $\nu=\eta_s$ et $L'=L$, ce qui termine la démonstration de *a)*. Remarquons que l'on a montré en outre que

$$L=(T\cap H)^0.G^{*(T)}_{\eta_s},\qquad R_u(H)=G^{*(T)}_{\eta_u}. \tag{1}$$

b) Si G_ψ (resp. G^*_ψ) est défini sur k, il en est évidemment de même de ψ; réciproquement, si ψ est défini sur k alors G_ψ et G^*_ψ sont k-fermés, normalisés par $\mathscr{Z}(S)$, donc définis sur k vu *a)*.

Soit $j: X^*(T)\to X^*(S)$ l'homomorphisme de restriction, et soit η comme ci-dessus. Si $H=G_\psi$ (resp. $H=G^*_\psi$), alors on a $j^{-1}(\psi)\cap\Phi(T, G)\subset\eta\subset j^{-1}(\psi\cup\{0\})\cap\Phi(T, G)$, d'où en particulier $j^{-1}(\psi_s)\cap\Phi(T, G)\subset\eta_s$ et $j^{-1}(\psi_u)\cap\Phi(T, G)\subset\eta_u$. Compte tenu de (1), il s'ensuit que

$$G_{\psi_s}\ (\text{resp. } G^*_{\psi_s})\subset L \ \text{ et } \ G^*_{\psi_u}\subset R_u(H). \tag{2}$$

Mais $G^*_{\psi_u}$ est normalisé par G_{ψ_s} (3.0, 3.9), donc $H = G_{\psi_s}.G^*_{\psi_u}$ (resp. $G^*_{\psi_s}.G^*_{\psi_u}$), et les inclusions (1) sont en fait des égalités.

3.14. *Corollaire. — Soit* H *un k-sous-groupe connexe de* G *de rang maximum. Alors* H *possède une décomposition de Levi* (0.8) *sur k, et deux k-sous-groupes de Levi de* H *sont conjugués par un unique élément de* $R_u(H)_k$. *Les k-sous-groupes de Levi de* H *sont les centralisateurs dans* H *des tores maximaux de* R(H) *qui sont définis sur k.*

H contient un tore maximal défini sur k (2.14 *a*)), donc a une décomposition de Levi sur k vu 3.13. Soient $H = L.R_u(H)$ une telle décomposition et T un tore maximal de L. Le radical de H est défini sur k et égal à $Z.R_u(H)$, où Z est le centre connexe de L et aussi un tore maximal de R(H) défini sur k (2.15 *e*)). On a $L \subset \mathscr{Z}_H(Z)$ par construction. D'autre part, $\mathscr{Z}_H(Z) \cap R_u(H)$ est stable par T, donc engendré par les sous-groupes U_a ($a \in \Phi(T, G)$) qu'il contient (2.3), ce qui, compte tenu de 3.6, montre que $\mathscr{Z}_H(Z) \cap R_u(H) = \{e\}$, d'où $L = \mathscr{Z}_H(Z)$, et notre dernière assertion.

Soient L′ un deuxième k-sous-groupe de Levi et Z′ son centre connexe. Les tores Z et Z′ sont maximaux dans R(H), donc conjugués par un élément $u \in R_u(H)_{\bar{k}}$ [1, Th. 12.2]. Cet élément est unique, car le normalisateur et le centralisateur de Z dans R(H) coïncident [1, 10.2] et on a vu ci-dessus que ce dernier se réduit à Z. L'élément u est donc rationnel sur une extension inséparable de k, et, pour démontrer qu'il est rationnel sur k [1], on peut supposer k séparablement clos, donc G déployé sur k. Vu 2.10, appliqué à G et à $T.R_u(H)$, on peut supposer que T fait partie d'une donnée de déploiement et trouver $v \in R_u(H)_k$ tel que $v.Z'.v^{-1} \subset T$. On a alors $v.Z'.v^{-1} \subset L \cap R(H)$, donc $v.Z'.v^{-1} = Z$ et $v.L'.v^{-1} = L$.

3.15. *Contre-exemples.* — Nous supposons ici la caractéristique p de k non nulle. Soient V un espace vectoriel sur k de dimension deux, V_p sa p-ième puissance symétrique, et x, y une base de V_k. On identifie V_p à $\bar{k}^{p+1}$ en prenant comme base les monômes x^p, y^p, $x^{p-1}.y, \ldots, x.y^{p-1}$. Le groupe GL(V) opère canoniquement sur V_p, et l'on dénote L l'image dans $\mathbf{GL}_{p+1}$ du groupe SL(V) des éléments de déterminant un de GL(V) par cette représentation.

Soit P le sous-groupe de $\mathbf{GL}_{p+1}$ laissant stable le sous-espace W engendré par x^p et y^p, et soit $U = R_u(P)$. Il est immédiat que $U \cong (\mathbf{G}_a)^{2(p-1)}$ et que l'on a une décomposition de Levi $P = M.U$ avec $M \cong \mathbf{GL}_2 \times \mathbf{GL}_{p-1}$. La projection $\pi : P \to M' = P/U$ induit un isomorphisme ψ de M sur M′. D'autre part, il est élémentaire que L laisse W stable, donc que $L \subset P$. Soit $H = L.U$ le groupe engendré par L et U. On a $L \cap U = \{e\}$ donc H est au point de vue ensembliste le produit semi-direct de L et U. On peut aussi écrire $H = L'.U$, où $L' = H \cap M = \psi^{-1} \circ \pi(L)$ est k-isomorphe à L. Les algèbres de Lie de L′ et U sont transverses (puisque celles de M et de U le sont), donc L′ est un sous-groupe de Levi de H.

---

[1] Ce qui résulte aussi d'un théorème de Rosenlicht (*voir* 11.4).

Les sous-groupes L et L′ de H ne sont pas conjugués dans H, car s'ils l'étaient, on pourrait trouver un sous-espace W′ supplémentaire de W dans V_p stable par L, et un calcul élémentaire (ou bien [10, Exp. 20, p. 12]) montre qu'il n'en est rien.

On peut prendre comme base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$ de L les vecteurs H, X, Y tangents aux images des groupes de matrices diagonales, triangulaires unipotentes supérieures et triangulaires unipotentes inférieures respectivement. Un calcul élémentaire laissé au lecteur montre que H est diagonale, et que

a) si $p=2$, X et Y forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ de U;

b) si $p \geqslant 3$, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{u}$ sont transverses.

(On vérifie par exemple que X, Y ont leurs termes diagonaux nuls et que si $p \geqslant 3$, $X_{p,p+1} \neq 0$, $X_{p+1,p}=0$, $Y_{p,p+1}=0$, $Y_{p+1,p} \neq 0$.) Si $p \geqq 3$, H est donc un exemple de groupe possédant deux sous-groupes de Levi L, L′ non conjugués. Si $p=2$, H est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_3$, normalisé par le tore maximal des matrices diagonales de $\mathbf{GL}_3$, donc auquel 3.13 s'applique, mais qui possède un sous-groupe réductif maximal L tel que $H = L.U$ et dont l'algèbre de Lie a une intersection non nulle avec celle de U.

3.16. *Lemme. — Soient* U *un k-groupe unipotent connexe,* S *un k-tore opérant k-morphiquement sur* U, *et f un caractère non trivial de* S. *Supposons que sur* k_s, U *possède une structure d'espace vectoriel telle que l'opération d'un élément* $s \in S_{\bar{k}}$ *soit l'homothétie de rapport* s^f. *Alors il en est déjà ainsi sur k, et f est défini sur k* (1).

L'ensemble des poids de S dans U se réduit à f, et est d'autre part stable par le groupe de Galois Γ de k_s/k, donc f est défini sur k.

Les hypothèses entraînent que l'on a ${}^{\gamma}(c.u) = {}^{\gamma}c.{}^{\gamma}u$, quels que soient $\gamma \in \Gamma$, $c \in k_s$ et $u \in U_{k_s}$. Il suffit donc de faire voir que U possède une base formée d'éléments rationnels sur k. Il est clair que U possède une base formée d'éléments rationnels sur une extension galoisienne convenable K de k de degré fini. Soit $\Gamma' = \mathrm{Gal}(K/k)$ et soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une partie de U_k libre dans U_{k_s} (vu comme espace vectoriel sur k_s) maximale. Alors, pour tout $u \in U_K$ et $c \in K$, l'élément $\sum_{\gamma \in \Gamma'} {}^{\gamma}c.{}^{\gamma}u$ est rationnel sur k, donc combinaison linéaire des u_i $(1 \leqq i \leqq n)$. Il en est alors de même de u d'après le théorème de la base normale, donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de U_{k_s}.

3.17. *Théorème. — Soient* S *un k-tore de* G, ψ *un ensemble quasi-clos unipotent d'éléments de* $\Phi(S, G)$ *défini sur k, et f un élément défini sur k de* ψ *tel que* $\eta = \psi - \{f\}$ *soit un quasi-idéal de* ψ (3.8). *Soit* H *un k-sous-groupe de* U_ψ, *normalisé par un tore maximal* T *de* G *défini sur k et contenant* S. *Alors le quotient* $H/(H \cap U_\eta)$ *a une structure d'espace vectoriel définie sur k telle que l'automorphisme induit par* $\mathrm{Int}\, s$ $(s \in S_{\bar{k}})$ *soit l'homothétie de rapport* s^f.

Vu 3.16, on peut supposer que $k = k_s$, donc que G est déployé sur k et que T

(1) Ce lemme est aussi une conséquence facile du lemme p. 109 de [26]. Il est aussi vrai lorsque $f=0$ [26, th. 3, p. 107].

fait partie d'une donnée de déploiement. Il existe un sous-groupe de Borel de G qui contient $T.U_\psi$, et ce sous-groupe est engendré par les groupes radiciels U_a, où a parcourt l'ensemble Φ^+ des racines >0 pour un ordre convenable, donc est défini sur k. Soit μ (resp. ν) l'ensemble des éléments de Φ^+ dont la restriction à S est contenue dans ψ (resp. η). Alors (2.3, 3.11) l'application produit induit un k-isomorphisme α de variétés du produit des U_a, $a\in\mu$ (resp. U_b, $b\in\nu$), sur U_ψ (resp. U_η) et un morphisme bijectif du produit des $U_a\cap H$, $a\in\mu$ (resp. $U_b\cap H$, $b\in\nu$) sur $U_\psi\cap H$ (resp. $U_\eta\cap H$), où les éléments de μ (resp. ν) sont rangés dans un ordre quelconque. Mais $U_a\cap H$ est égal à $\{e\}$ ou à U_a (2.3) et α commute à l'action de T. Cette application induit donc un k-isomorphisme de variétés du produit des U_a ($a\in\mu$, $a\notin\nu$, $U_a\subset H$) sur $H/(H\cap U_\eta)$ qui commute à T, d'où le théorème.

3.18. *Corollaire. — Tout k-sous-groupe unipotent connexe* H *de* G *normalisé par un tore maximal* T *de* G *défini sur k est déployé sur k. Si σ est une partie quasi-close unipotente de* $\Phi(S, G)$ *définie sur k, alors U_σ est un k-groupe unipotent déployé sur k.*

Vu 3.6, il existe un ordre sur $X^*(T_d)$ tel que les poids de T_d dans H soient >0. Soient $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de $\Phi^+(T_d, G)$, rangés par ordre croissant. Pour tout i compris entre 1 et m, $\{a_i, \ldots, a_m\}$ est un quasi-idéal de $\{a_1, \ldots, a_m\}$. La première partie du corollaire résulte alors du théorème par récurrence descendante sur le plus petit entier i tel que $H\subset U_{\{a_i, \ldots, a_m\}}$.

Le groupe U_σ est défini sur k (3.13), normalisé par $\mathscr{Z}(S)$ (3.8 (ii)), donc aussi par un tore maximal de G défini sur k (2.15 *d)*). La deuxième assertion du corollaire est donc un cas particulier de la première.

Remarque. — Supposons S déployé sur k, et σ formé d'éléments positifs de $\Phi(S, G)$ pour un ordre convenable sur $X^*(S)$. Soient $b_1, \ldots, b_m$ les éléments de σ rangés par ordre croissant. Pour tout $i\geqq 1$, l'ensemble $\sigma_i=\{b_i, \ldots, b_m\}$ est une partie quasi-close de $\Phi(S, G)$, car c'est l'intersection de σ avec l'ensemble des racines $\geqq b_i$, qui est visiblement clos. Comme S est déployé sur k, tout élément de $\Phi(S, G)$ est défini sur k, donc $U_i=U_{\sigma_i}$ est un k-groupe unipotent. Vu 3.10, U_{i+1} est un sous-groupe invariant dans U_i, et vu 3.17, U_i/U_{i+1} admet une structure d'espace vectoriel sur k, telle que l'automorphisme intérieur par $s\in S_{\bar{k}}$ y induise une homothétie de rapport s^{b_i}. Il existe donc dans ce cas une suite de composition sur k, à quotients successifs vectoriels sur k, sur lesquels S agit par homothéties, ce qui précise 3.18.

L'hypothèse de positivité faite sur σ est vérifiée d'elle-même si $\sigma=(c)$ est l'ensemble des multiples entiers positifs d'un élément $c\in\Phi(S, G)$, ou, vu 3.6, si S est le plus grand tore déployé sur k du centre de $\mathscr{Z}(S)$, donc, plus particulièrement encore, si S est un tore déployé sur k maximal de G.

3.19. *Corollaire. — Soient* S *un tore de* G, f *un caractère non trivial de* S *et α un isomorphisme de $\mathbf{G}_a$ sur un sous-groupe* H *de* G *normalisé par* S *vérifiant* $s.\alpha(t).s^{-1}=\alpha(s^f.t)$ $(s\in S,\ t\in\mathbf{G}_a)$. *Alors* H *est contenu dans le sous-groupe* $U_{(f)}^{(S)}$, *où* (f) *désigne l'ensemble des éléments de* $\Phi(S, G)$ *de la forme* $n.f$ $(n\in\mathbf{N}^+)$.

Soit ψ l'ensemble des racines relatives à S de la forme $c.f$ avec $c>0$. Cet ensemble est convexe, donc $H \subset U_\psi$ d'après 3.12.

Soit η la plus petite partie quasi-close de ψ telle que $H \subset U_\eta$.

Supposons que $\eta \not\subset (f)$, et soit c le plus petit non-entier tel que $c.f \in \eta$. L'ensemble $\mu = \eta - \{c.f\}$ est un quasi-idéal de η. Soit π la projection canonique de U_η sur l'espace vectoriel $U_\eta/U_\mu = V$, et soit β le morphisme de variétés de $\mathbf{G}_m$ dans V qui applique $t \in \mathbf{G}_m$ sur $\pi(\alpha(t))$. D'après 3.17, on a

$$\beta(s^f.t) = s^{cf}.\beta(t) \qquad (s \in S,\ t \in \mathbf{G}_m). \tag{1}$$

Comme $H \subset U_\mu$, $\beta_{/H}$ n'est pas nul, mais alors (1) et le fait que β est un morphisme entraînent que c est entier, d'où une contradiction.

3.20. *Corollaire. — Soit* H *un k-sous-groupe connexe de* G, *normalisé par un tore maximal* T *de* G *défini sur k. Si k est infini, alors* H_k *est Zariski-dense dans* H.

Le groupe H admet une décomposition de Levi $H = L.R_u(H)$ sur k d'après 3.13. Le groupe $R_u(H)$ est normalisé par T, donc déployé sur k vu 3.18, donc isomorphe sur k à un espace affine [26, p. 101], ce qui implique que $R_u(H)_k$ est Zariski-dense dans $R_u(H)$. Enfin, L_k est Zariski-dense dans L d'après 2.14.

3.21. *Lemme. — Soient* S *un tore de* G, ψ *une partie convexe de* $\Phi(S, G)$ *et* A *la composante neutre du noyau des caractères appartenant à* ψ_s.

a) ψ_s *contient tout élément de* $\Phi(S, G)$ *qui s'annule sur* A.

b) *Si* S *est un tore maximal de* G, *tout élément* $w \in W(S, G)$ *qui opère trivialement sur* $X_*(A)$ *est produit de réflexions* r_b $(b \in \psi_s)$.

a) Soit $c \in \Phi(S, G)$ s'annulant sur A. Il existe donc des éléments de ψ_s dont c est combinaison linéaire à coefficients rationnels. Comme ψ_s est symétrique, on peut supposer ces coefficients >0; d'autre part, ψ_s est convexe, puisque ψ l'est, donc $c \in \psi_s$.

b) D'après [6], w est produit de réflexions r_b, où b est une racine nulle sur $X_*(A)$, donc un caractère de S nul sur A, donc un élément de ψ_s vu *a)*.

3.22. *Proposition. — Soient* S *un tore de* G *et* ψ, η *deux parties quasi-closes de* $\Phi(S, G)$. *Alors :*

a) $\mathfrak{g}_\psi \cap \mathfrak{g}_\eta = \mathfrak{g}_{\psi\cap\eta}$ *et* $(G_\psi \cap G_\eta)^0 = G_{\psi\cap\eta}$.

b) *Si* $\psi \cap \eta$ *est convexe,* $G_\psi \cap G_\eta = G_{\psi\cap\eta}$.

c) *Si* ψ *est unipotent,* $U_\psi \cap G_\eta = U_\psi \cap G^*_\eta = U_{\psi\cap\eta}$.

Soient T un tore maximal de G contenant S et $j : X^*(T) \to X^*(S)$ l'homomorphisme de restriction.

a) Un sous-groupe radiciel U_a $(a \in \Phi(T, G))$ par rapport à T fait partie de G_ψ si et seulement si a est un poids de T dans G_ψ (3.8), donc si et seulement si $j(a) \subset \psi \cup \{0\}$. Cela vaut aussi pour η ou $\psi \cap \eta$, d'où *a)*.

b) Il suffit de considérer le cas où k est algébriquement clos, donc où T fait partie d'une donnée de déploiement sur k de G. D'autre part, si $\mu \subset \Phi(S, G)$ est convexe, alors $\Phi(T, G) \cap j^{-1}(\mu \cup \{0\})$ est aussi convexe, et évidemment

$$j^{-1}((\psi \cap \eta) \cup \{0\}) = j^{-1}(\psi \cup \{0\}) \cap j^{-1}(\eta \cup \{0\}).$$

On peut donc supposer que $S = T$.

Soit $x \in G_\psi \cap G_\eta$. Nous devons montrer que $x \in G_{\psi \cap \eta}$. Le tore $x.T.x^{-1}$ étant conjugué à T dans $(G_\psi \cap G_\eta)^0$, on peut, vu *a)*, se borner au cas où $x \in \mathscr{N}(T)$. Soient $A = T_{\psi_s}$ et $B = T_{\eta_s}$ (1.2). D'après 3.13, 3.14, $G_{\psi_s} = \mathscr{Z}(A)$ et $G_{\eta_s} = \mathscr{Z}(B)$ sont des sous-groupes de Levi de G_ψ et G_η respectivement, donc l'élément w du groupe de Weyl $W(T, G)$ de G défini par x fait partie de $W(T, G_{\psi_s}) \cap W(T, G_{\eta_s})$; il centralise $X_*(A)$, $X_*(B)$ et par conséquent aussi $X_*(C)$, où C est la composante neutre de l'intersection des noyaux des éléments de $\psi_s \cap \eta_s = (\psi \cap \eta)_s$. Notre assertion résulte alors de 3.21 *b)*.

c) Ici aussi, on peut supposer k algébriquement clos et $S = T$, et *c)* résulte alors des propriétés de U rappelées en 2.3.

3.23. *Corollaire. — Supposons* S *défini sur k et soient* ψ, η *deux parties quasi-closes de* $\Phi(S, G)$ *définies sur k.*

(i) $G^*_{\psi,k} \subset G_{\eta,k}$ *si et seulement si* $\psi \subset \eta$.

(ii) $G^*_{\psi,k} = G^*_{\eta,k}$ (*resp.* $G_{\psi,k} = G_{\eta,k}$) *si et seulement si* $\psi = \eta$.

Les groupes G_ψ, G_η, G^*_ψ, G^*_η sont définis sur k d'après 3.13. L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de (i) et il est clair que $\psi \subset \eta$ entraîne $G^*_{\psi,k} \subset G_{\eta,k}$. Il reste à faire voir que $G^*_{\psi,k} \subset G_{\eta,k}$ implique $\psi \subset \eta$.

Soient $a \in \Phi(S, G)$ et (a) l'ensemble des multiples entiers positifs de a contenus dans $\Phi(S, G)$. Il est clos, unipotent (3.8 (iv)), donc $\mu = (a) \cap \psi$ est quasi-clos et unipotent. Comme ψ est réunion de parties de ce type, on peut supposer qu'il est unipotent. Dans ce cas, $U_\psi \cap G_\eta = U_{\psi \cap \eta}$ d'après 3.22. Les groupes $U_{\psi \cap \eta}$ et U_ψ sont unipotents déployés sur k (3.18), donc la variété sous-jacente à U_ψ est k-isomorphe au produit de $U_{\psi \cap \eta}$ par un espace vectoriel sur k [26, cor. 1, 2 to th. 1]. On ne peut alors avoir $U_{\psi,k} \subset U_{\psi \cap \eta,k}$ que si $U_\psi = U_{\psi \cap \eta}$, donc si $\psi \subset \eta$.

3.24. *Proposition. — Soient* S *un k-tore déployé et* ψ *une partie convexe de* $\Phi(S, G)$. *Alors, il existe des parties unipotentes convexes* $\psi_1, \ldots, \psi_m$ *de* $\Phi(S, G)$ *telles que* $\Phi(S, G)$ *soit la réunion disjointe de* $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_m$ *et que l'application produit définisse un k-isomorphisme de variétés de* $G_\psi \times U_{\psi_1} \times \ldots \times U_{\psi_m}$ *sur un ouvert de* G. *Si* $\psi \cup (-\psi) = \Phi(S, G)$, *on peut faire* $m = 1$ (*d'où* $\psi_1 = \Phi(S, G) - \psi$).

Posons $X = X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$, et soit Y le sous-espace vectoriel de X engendré par ψ_s. Si une combinaison linéaire à coefficients rationnels positive d'éléments de ψ_u appartient à Y, elle est identiquement nulle; en effet, de la relation

$$\sum_{i=1}^{r} c_i a_i \in Y \qquad (a_i \in \psi_u,\ c_i \in \mathbf{Q},\ c_i \geqslant 0)$$

on tire

$$-c_1 a_1 = \sum_{i=2}^{r} c_i a_i + \sum_{j=1}^{t} d_j b_j \qquad (b_j \in \psi_s,\ d_j \geqslant 0)$$

et si c_1 n'était pas nul, $-a_1$ devrait appartenir à ψ, ce qui est absurde. En vertu de 3.1, il existe dans X/Y un ordre tel que les images canoniques dans X/Y des éléments de ψ_u soient positives. Soit ψ' l'ensemble de tous les éléments de $\Phi(S, G)$ dont l'image canonique dans X/Y est positive pour l'ordre en question. Il est clair que ψ' est convexe, que $\psi'_s = \psi_s$, et que $\psi_u \subset \psi'_u$, ces deux ensembles étant égaux si $\psi \cup (-\psi) = \Phi(S, G)$. Soient $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ les parties convexes minimales de ψ'_u non contenues dans ψ_u. L'ensemble ψ'_u est la réunion disjointe de $\psi_u, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$; par conséquent (3.11) l'application produit est un isomorphisme de variété de $U_{\psi_u} \times U_{\psi_1} \times \ldots \times U_{\psi_{m-1}}$ sur $U_{\psi'_u}$, donc (3.13) de $G_\psi \times U_{\psi_1} \times \ldots \times U_{\psi_{m-1}}$ sur $G_{\psi'}$. Enfin, si on pose $\psi_m = -\psi'_u$, l'application produit est un isomorphisme de variétés de $G_{\psi'} \times U_{\psi_m}$ sur un ouvert de G. En effet, $G_{\psi'}$ et U_{ψ_m} sont normalisés par tout tore maximal contenu dans $\mathscr{Z}(S)$ et il résulte de 2.3 que leurs algèbres de Lie sont linéairement indépendantes et de somme égale à $\mathfrak{g}$; d'autre part, $G_{\psi'} \cap U_{\psi_m} = \{e\}$ en vertu de 3.22 *c)*.

3.25. *Corollaire. — La variété* G/G_ψ *est rationnelle sur k. La fibration de* G *par* G_ψ *possède une k-section locale, et la projection* $G_k \to (G/G_\psi)_k$ *est surjective.*

Le composé de l'application produit et de la projection $\pi : G \to G/G_\psi$ induit un k-isomorphisme de variétés de $U_{\psi_1} \times \ldots \times U_{\psi_m}$ sur un ouvert V de G/G_ψ, et la variété sous-jacente à U_{ψ_i} est k-isomorphe à un espace affine [26, p. 101], d'où la première assertion. La k-section locale est définie sur V comme l'inverse de $\pi : U_{\psi_1} \ldots U_{\psi_m} \to V$, et la dernière assertion résulte de 2.6, 2.14.

§ 4. SOUS-GROUPES PARABOLIQUES

Dans tout ce paragraphe, G *est réductif, connexe.*

4.1. Un sous-groupe fermé P d'un groupe algébrique H est *parabolique* s'il contient un sous-groupe de Borel de H. Vu [1, § 16], il revient au même d'exiger que G/P soit une variété complète ou une variété projective.

4.2. *Sous-groupes paraboliques standards.* — (i) On fixe un tore maximal T de G et un ordre sur l'ensemble Φ des racines de G par rapport à T, et on utilise les notations de 2.3. Pour toute partie θ de Δ, on note $[\theta]$ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de θ, et l'on pose

$$(1) \qquad \pi_\theta = [\theta] \cup \Phi^+, \ \pi_\theta^- = [\theta] \cup \Phi^-, \ \alpha_\theta = \complement[\theta] \cap \Phi^+, \ \alpha_\theta^- = \complement[\theta] \cap \Phi^-.$$

Évidemment

$$(2) \qquad \pi_\theta^- = -\pi_\theta, \ [\theta] = \pi_\theta \cap \pi_\theta^- = (\pi_\theta)_s, \ (\pi_\theta)_u = \alpha_\theta, \ (\pi_\theta^-)_u = \alpha_\theta^- = -\alpha_\theta.$$

Les ensembles π_θ et π_θ^- sont les seules parties fermées de Φ contenant respectivement Φ^+ et Φ^- [6, § 7, n° 7, Prop. 20].

(ii) On écrira P_θ, P_θ^-, Z_θ, V_θ, V_θ^- respectivement pour G_{π_θ}, $G_{\pi_\theta^-}$, $\mathscr{Z}(T_\theta)$, U_{α_θ}, $U_{\alpha_\theta^-}$ (cf. 3.8; suivant la convention de 1.2, T_θ désigne la composante neutre de l'intersection des noyaux des caractères $a\in\theta$). On a les décompositions de Levi

(3) $$P_\theta = Z_\theta . V_\theta, \qquad P_\theta^- = Z_\theta . V_\theta^-.$$

Les sous-groupes P_θ $(\theta\subset\Delta)$ sont les *sous-groupes paraboliques standards* (associés à T et Φ^+). Évidemment $P_\emptyset = B$ et $P_\Delta = G$.

(iii) Posons $W_\theta = W(Z_\theta)$. C'est le sous-groupe de W(G) engendré par les réflexions fondamentales r_b $(b\in\theta)$. D'après 2.4, et avec la convention d'écriture qui y est faite, on a

$$Z_\theta = (B\cap Z_\theta) . W_\theta . (B\cap Z_\theta),$$

d'où

(4) $$P_\theta = B . W_\theta . B, \qquad P_\theta^- = B^- . W_\theta . B^-.$$

Le groupe $V_\theta^- \cap P_\theta$ est stable par T, ne contient aucun groupe U_a $(a\in\Phi)$, donc est réduit à l'élément neutre (2.3). D'autre part, l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est somme directe des algèbres de V_θ^- et P_θ. Par suite, *l'application produit induit un isomorphisme de variétés de* $V_\theta^- \times P_\theta$ *sur un ouvert de* G, *et la fibration de* G *par* P_θ *possède une section locale* (*cf.* aussi 3.24, 3.25).

4.3. De 4.2 et [33, Th. 3], il résulte que les sous-groupes P_θ $(\theta\subset\Delta)$ sont les seuls sous-groupes de G contenant B, et que tout sous-groupe parabolique de G est connexe, égal à son normalisateur, et conjugué à un et un seul sous-groupe parabolique standard. (Le fait que les axiomes de [33] sont vérifiés résulte immédiatement des calculs de [9], qu'on retrouvera d'ailleurs plus loin (5.16).) Il s'ensuit que si deux sous-groupes paraboliques P et P' de G sont conjugués, et si $P\cap P'$ est parabolique, alors $P = P'$.

4.4. *Proposition. — Soient* P, P' *deux sous-groupes paraboliques de* G *et* L *un sous-groupe de Levi de* P.

a) *Si* $P\subset P'$, *le transporteur* $T(P, P') = \{x\in G \mid {}^xP\subset P'\}$ *de* P *dans* P' *est égal à* P'.

b) $(P\cap P') . R_u(P)$ *est un sous-groupe parabolique de* G. *Il est égal à* P *si et seulement si* P' *contient un sous-groupe de Levi de* P. *C'est un sous-groupe de Borel de* G *si* P' *en est un.*

c) *Les sous-groupes paraboliques de* G *contenus dans* P *sont les produits semi-directs des sous-groupes paraboliques de* L *par* $R_u(P)$. *Deux sous-groupes paraboliques de* G *contenus dans* P *sont conjugués dans* G *si et seulement si leurs intersections avec* L *sont conjuguées dans* L.

a) Si ${}^xP\subset P'$, alors ${}^xP'\cap P'\supset {}^xP$, donc ${}^xP' = P'$, et $x\in P'$ vu 4.3.

b) L'intersection $P\cap P'$ contient un tore maximal de G (2.4). Après conjugaison par un élément convenable de G, on peut donc supposer, dans les notations de 4.2, que $P = P_\theta$ et $P\cap P'\supset T$. Soit ψ l'ensemble des racines de P' par rapport à T. Il contient au moins un élément de chaque paire $(a, -a)$ $(a\in\Phi)$; il en est donc de même pour $\eta = (\pi_\theta\cap\psi)\cup\alpha_\theta$. Mais cet ensemble est clos dans Φ, car $\pi_\theta\cap\psi$ l'est et α_θ est un idéal dans π_θ. Vu la Prop. 20 de [6, § 7, n° 7], η contient l'ensemble des racines positives de G pour un ordre convenable. Comme η est aussi l'ensemble des racines de $(P \cap P').R_u(P)$ par rapport à T, il s'ensuit que $(P \cap P').R_u(P)$ contient un sous-groupe de Borel de G (2.3), d'où la première assertion de *b)*.

Si P′ contient un sous-groupe de Levi de P, il en est de même de $P \cap P'$, donc $(P \cap P').R_u(P) = P$. Réciproquement, cette égalité entraîne que les éléments $a \in [\theta]$ sont tous des racines de $P \cap P'$ par rapport à T, donc que $P \cap P' \supset Z_\theta$. Supposons enfin que P′ soit un sous-groupe de Borel de G. Alors l'ensemble ψ des racines de P′ ne contient qu'un élément de chaque paire $(a, -a)$ $(a \in \Phi)$. Il en est alors de même de l'ensemble η considéré plus haut, qui est donc l'ensemble des racines positives pour un ordre convenable [6, *loc. cit.*], et $(P \cap P').R_u(P)$ est alors le sous-groupe de Borel correspondant.

c) Tout sous-groupe de Borel de P contient $R_u(P)$ et se projette sur un sous-groupe de Borel de $P/R_u(P)$ vu [1, th. 22.1]. Par suite, les sous-groupes de Borel de P sont les produits semi-directs des sous-groupes de Borel de L avec $R_u(P)$, d'où la première partie de *c)*. Si deux sous-groupes paraboliques R, R′ contenus dans P sont conjugués dans G, ils le sont dans P par *a)*, donc leurs images dans $P/R_u(P)$ sont aussi conjuguées, ce qui équivaut à dire que $L \cap R$ et $L \cap R'$ sont conjugués dans L. La réciproque est évidente.

4.5. *Corollaire.* — $P \cap P'$ *est connexe. Si* P′ *est conjugué à* P *et contient* $R_u(P)$, *alors* $P = P'$.

Le groupe $(P \cap P').R_u(P)$ est parabolique, donc connexe, donc égal à $(P \cap P')^0.R_u(P)$, ce qui montre que $P \cap P'$ est engendré par $(P \cap P')^0$ et $H = (P \cap P') \cap R_u(P)$. Mais H est conjugué à un sous-groupe de U stable par T ; il est donc connexe (2.3), d'où la première assertion.

Si $P' \supset R_u(P)$, alors $P \cap P'$ contient $(P \cap P').R_u(P)$, qui est parabolique (4.4), et la deuxième assertion résulte de 4.3.

4.6. *Lemme.* — *Supposons* G *déployé sur* k. *Soient* P, P′ *deux* k*-sous-groupes paraboliques de* G, *et* (T, U_a) *une donnée de déploiement sur* k *de* G. *Alors il existe* $g \in G_k$ *et* $\theta \subset \Delta$ *tels que* ${}^gP = P_\theta$ *et* ${}^gP' \supset T$. *En particulier,* $P \cap P'$ *contient un tore maximal conjugué à* T *sur* k, *et* R(P), $R_u(P)$ *sont déployés sur* k.

Il existe un unique θ tel que P soit conjugué à P_θ sur $\bar{k}$ (4.3). Nous montrerons en premier lieu que P est conjugué à P_θ sur k. Le radical unipotent V_θ de P_θ est contenu dans un seul conjugué de P_θ (4.5), donc admet dans G/P un unique point fixe M, qui est alors rationnel sur k vu 2.7 (i), puisque V_θ est déployé sur k. L'application $g \mapsto g.M$ est alors un k-morphisme séparable de G sur G/P, constant sur les classes $x.P_\theta$; elle induit par suite un k-isomorphisme de variétés φ de G/P_θ sur G/P. Il est immédiat que $\varphi^{-1}(P)$ est le point fixe M′ de P dans G/P_θ, qui est donc rationnel sur k. Mais la fibration de G par P_θ possède une section locale d'image V_θ^- (4.2), donc définie sur k, et la projection $G_k \to (G/P_\theta)_k$ est surjective (2.6, 2.14). Si $x \in G_k$ s'envoie sur M′, alors ${}^xP_\theta = P$.

Cela montre que l'on peut se ramener au cas où $P = P_\theta$, et qu'il existe $x \in G_k$

tel que $P'' = {}^{x}P' \supset B$. Mais (2.11) on peut écrire $x = a.n^{-1}.b$ avec $a, b \in B_k$ et $n \in \mathcal{N}(T)_k$. On a alors ${}^{b}P = P$ et ${}^{b}P' = {}^{n}P'' \supset T$, ce qui démontre le lemme.

4.7. *Proposition. — Soient* P, P′ *deux k-sous-groupes paraboliques de* G. *Alors* $P \cap P'$ *contient un tore maximal de* G *défini sur k. Tout sous-groupe connexe k-fermé de* G *normalisé par* $P \cap P'$ *est défini sur k. En particulier,* $P \cap P'$, $R(P \cap P')$, $R_u(P \cap P')$ *sont définis sur k. Le groupe* $P \cap P'$ *possède des k-sous-groupes de Levi et deux quelconques d'entre eux sont conjugués par un unique élément de* $R_u(P \cap P')_k$.

G est déployé sur k_s (2.14), donc $P \cap P'$ est défini sur k_s (4.5, 4.6). Comme il est k-fermé, il est aussi défini sur k. D'autre part, il est de rang maximum (4.6), donc contient un tore maximal de G défini sur k (2.14). Les autres assertions sont alors conséquences de 3.13 et 3.14.

4.8. *Sous-groupes paraboliques opposés.* — Deux sous-groupes paraboliques de G sont *opposés* si leur intersection est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux.

Il est clair que P_θ^- est le seul sous-groupe parabolique opposé à P_θ contenant Z_θ. Par conséquent, vu 4.3 et la conjugaison des décompositions de Levi dans un sous-groupe parabolique (4.7), étant donné un sous-groupe parabolique P, l'application $\alpha : P' \mapsto P \cap P'$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques opposés à P sur l'ensemble des sous-groupes de Levi de P. Il résulte alors de 4.7 que *si P est un k-sous-groupe parabolique,* G *contient un k-sous-groupe parabolique opposé à* P, et que *deux tels sous-groupes sont conjugués par un unique élément de* $R_u(P)_k$. En particulier, P et P′ sont opposés si et seulement s'il existe $g \in G$ et $\theta \subset \Delta$ tels que ${}^{g}P = P_\theta$ et ${}^{g}P' = P_\theta^-$.

4.9. Deux classes de conjugaison $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ de sous-groupes paraboliques sont dites opposées s'il existe des sous-groupes paraboliques $P \in \mathscr{P}$, $P' \in \mathscr{P}'$ qui sont opposés. Vu 4.8, il existe une et une seule classe opposée à une classe donnée, et tout sous-groupe parabolique opposé à un élément de $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{P}'$) fait partie de $\mathscr{P}'$ (resp. $\mathscr{P}$). Si $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$, on dit que $\mathscr{P}$ est *auto-opposée.*

Fixons un ordre sur $\Phi(G)$ et soit i l'involution d'opposition de Φ (2.1). Si $n \in \mathcal{N}(T)$ représente l'élément de W qui applique Φ^+ sur Φ^-, alors

$$ {}^{n}P_\theta = P_{i(\theta)}^-, \qquad (\theta \subset \Delta); $$

par conséquent, si $P_\theta \subset \mathscr{P}$, alors la classe opposée contient $P_{i(\theta)}$. Si la symétrie $a \mapsto -a$ ($a \in \Phi$) fait partie de W(G), alors i est l'identité, donc toute classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques est auto-opposée.

4.10. *Proposition. — Soient* P, P′ *deux sous-groupes paraboliques de* G *et* $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ *leurs classes de conjugaison. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) P *et* P′ *sont opposés.*

b) $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *sont opposées et* P, P′ *contiennent deux sous-groupes de Borel opposés de* G.

c) $(P \cap P').R_u(P) = P$, $(P \cap P').R_u(P') = P'$ *et* P, P′ *contiennent deux sous-groupes de Borel opposés de* G.

d) *L'application produit est un isomorphisme de variétés de* $P \times R_u(P')$ *sur un ouvert de* G.

e) $P \cap R_u(P') = P' \cap R_u(P) = \{e\}$.

Si P et P′ sont opposés, alors (4.8) il existe $g \in G$ et $\theta \subset \Delta$ tels que ${}^gP = P_\theta$ et ${}^gP' = P_\theta^-$, donc *a)* ⇒ *b)*, *c)*, *e)* et, compte tenu de 4.2, *a)* ⇒ *d)*.

Supposons maintenant que P et P′ contiennent deux sous-groupes de Borel opposés. Vu 4.8, on peut, après conjugaison par un élément convenable de G, supposer que $P \supset B$ et $P' \supset B^-$, donc (4.3) que $P = P_\theta$ et $P' = P_\eta^-$ (θ, $\eta \subset \Delta$). Mais P′ est le seul élément de $\mathscr{P}'$ contenant B^- (4.3); si $\mathscr{P}'$ est opposée à $\mathscr{P}$, on doit donc avoir $\eta = \theta$, ce qui prouve que *b)* ⇒ *a)*. D'autre part, si *c)* est vraie, alors $P \cap P' \supset Z_\theta$, Z_η et Z_θ, Z_η sont des sous-groupes de Levi de $P \cap P'$. Comme ils contiennent T, ils sont égaux (3.13), donc *c)* ⇒ *a)*.

Montrons maintenant que *d)* ⇒ *a)*. On peut supposer que $P = P_\theta$ et $P' \supset T$ (4.6). Alors $R_u(P') \subset V_\theta^-$ et $\dim R_u(P') = \dim G - \dim P = \dim V_\theta^-$, donc $R_u(P') = V_\theta^-$ et $P' = P_\theta^-$.

Il reste à prouver que *e)* ⇒ *a)*. On peut de nouveau admettre que $P = P_\theta$ et $P' \supset T$. L'égalité $P \cap R_u(P') = \{e\}$ entraîne $R_u(P') \subset V_\theta^-$. D'autre part, l'égalité $P' \cap V_\theta = \{e\}$ montre que le sous-groupe de Levi L de P′ contenant T fait partie de Z_θ. L'ensemble $\Phi(T, L)$ est évidemment symétrique; s'il était strictement plus petit que $[\theta]$, ou bien si $R_u(P') \neq V_\theta^-$, alors on pourrait trouver une racine a telle que $U_a \not\subset P'$ et $U_{-a} \not\subset P'$, ce qui est absurde, donc $P' = P_\theta^-$.

4.11. *Proposition.* — *Soient* P, P′ *des sous-groupes paraboliques opposés de* G. *Alors le sous-groupe engendré par* $R_u(P)$ *et* $R_u(P')$ *est distingué dans* G.

On peut supposer que $P = P_\theta$ et $P' = P_\theta^-$ (4.8). Le sous-groupe M engendré par $R_u(P) = V_\theta$ et $R_u(P') = V_\theta^-$ est fermé connexe [10, Exp. 3, th. 2] normalisé par V_θ, V_θ^- et Z_θ, donc par P_θ et P_θ^-. Par suite (2.3), le normalisateur de M est ouvert dans G, donc égal à G.

4.12. *Lemme.* — *Soient* P, P′ *deux sous-groupes paraboliques de* G. *Alors l'ensemble* M *des éléments* $g \in G$ *tels que* ${}^gP$ *et* P′ *contiennent des sous-groupes de Borel opposés est un ouvert de* G *de la forme* $P'.x.P$ ($x \in G$)*; il possède un point rationnel sur* k *si* k *est infini ou si* P *et* P′ *sont définis sur* k.

Nous montrons tout d'abord que M est un ouvert de la forme $P'.x.P$ ($x \in G$). Pour cela on peut remplacer P et P′ par des sous-groupes conjugués, donc (4.3) supposer que P, P′ contiennent respectivement B et B^-. D'après 4.8, $x \in M$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que ${}^gB \subset {}^xP$ et ${}^gB^- \subset P'$, ce qui signifie (4.4 *a)*) que $g^{-1}.x \in P$ et $g \in P'$, d'où $x \in P'.P$. L'ensemble $P'.P$ est ouvert puisque $B^-.B$ l'est (2.3).

Si k est infini, alors G_k est Zariski dense dans G (2.14), donc $M_k \neq \emptyset$. Supposons maintenant k fini et P, P′ définis sur k. Alors P et P′ contiennent des sous-groupes de Borel définis sur k et deux sous-groupes de Borel définis sur k de G sont conjugués sur k ([23, p. 45], [5, 4.10]). Il suffit donc de faire voir que si B est un sous-groupe de Borel de G défini sur k, alors il existe un sous-groupe de Borel de G défini sur k et opposé à B, mais cela résulte de 4.8.

4.13. *Théorème. — Soient* P, P′ *des k-sous-groupes paraboliques de* G.

a) *La fibration de* G *par* P *possède une section locale définie sur* k; *la projection* $G_k \to (G/P)_k$ *est surjective.*

b) *Si* P *et* P′ *sont minimaux (parmi les k-sous-groupes paraboliques), ils sont conjugués sur* k.

c) *Si* P *et* P′ *sont conjugués sur une extension de* k, *ils sont aussi conjugués sur* k.

a) D'après 4.8, il existe un k-sous-groupe parabolique P″ opposé à P′; son radical unipotent est l'image d'une k-section locale de la fibration de G par P, vu 4.10; la deuxième partie de *a)* résulte alors de 2.6 et 2.14.

b) Si k est fini, P et P′ sont des k-sous-groupes de Borel de G [23, p. 45], donc sont conjugués sur k [5, 4.10].

Supposons donc k infini, et remarquons d'abord que si Q et Q′ sont des k-sous-groupes paraboliques minimaux, contenant des sous-groupes de Borel opposés, alors Q et Q′ sont opposés. En effet $(Q \cap Q').R_u(Q)$ et $(Q \cap Q').R_u(Q')$ sont des sous-groupes paraboliques (4.4) définis sur k (4.7), donc égaux à Q et Q′ respectivement, et la condition 4.10 *c)* est vérifiée.

Soit M (resp. M′) l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que ${}^gP$ (resp. ${}^gP'$) et P contiennent des sous-groupes de Borel opposés; M et M′ sont des ouverts non vides de G (4.12). Il en est donc de même pour $M \cap M'$, et comme G_k est dense dans G, il existe $x \in M_k \cap M'_k$. D'après la remarque faite précédemment, ${}^xP$ et ${}^xP'$ sont tous deux opposés à P. Étant définis sur k, ils sont alors conjugués par un élément de $R_u(P)_k$ d'après 4.8, d'où *b)*.

c) P′ est le seul sous-groupe conjugué à P contenant $R_u(P')$ vu 4.5, donc P′ admet un seul point fixe A sur G/P, qui est nécessairement k-fermé. Mais (2.14) G est déployé sur k_s; donc (4.6) le radical unipotent de P′ est aussi déployé sur k_s, et (2.7 (i)) possède un point fixe dans G/P rationnel sur k_s. Par conséquent, A est aussi rationnel sur k_s, donc rationnel sur k. D'après *a)*, on peut trouver $x \in G_k$ qui est appliqué sur A par la projection naturelle. On a alors ${}^xP = P'$.

Remarques. — 1) La démonstration précédente montre que si k est infini, deux k-sous-groupes paraboliques minimaux possèdent un opposé commun défini sur k. On verra plus loin que cela est encore vrai sur un corps quelconque pour un k-groupe parabolique P et un élément arbitraire de la classe de conjugaison de P (6.27).

2) Vu 4.15, 4.13 *a)* est un cas particulier de 3.25.

4.14. *Corollaire. — La classe de conjugaison* $\mathscr{P}$ *de sous-groupes paraboliques contenant les k-sous-groupes paraboliques minimaux est auto-opposée.*

En effet la classe opposée contient un élément défini sur k (4.8), de même dimension que les k-sous-groupes paraboliques minimaux, donc minimal, et conjugué à un élément de $\mathscr{P}$ vu 4.13.

4.15. *Théorème. —* a) *Soient* S *un tore déployé sur* k *de* G *et* Φ^+ (*resp.* Φ^-) *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* S *qui sont* >0 (*resp.* <0) *pour un ordre donné sur* $X^*(S)$. *Alors* G_{Φ^+}

et G_{Φ^-} *sont deux k-sous-groupes paraboliques opposés ayant* $\mathscr{Z}(S)$ *comme k-sous-groupe de Levi commun.*

b) *Soient* P *un k-sous-groupe parabolique de* G *et* S *un tore déployé sur k maximal de* R(P). *Alors il existe un ordre dans* $\Phi(S, G)$ *tel que* $P = G_{\Phi^+}$. *Les k-sous-groupes de Levi de* G *sont les centralisateurs des tores déployés sur k maximaux de* R(P).

a) Les groupes G_{Φ^+} et G_{Φ^-} sont définis sur k puisque Φ^+ et Φ^- le sont. Soit T un tore maximal de G défini sur k et contenant S (2.15 *d)*). Fixons sur $X^*(T)$ un ordre compatible avec l'ordre donné sur $X^*(S)$ (3.1). Alors $G_{\Phi^+} = G_\eta^{(T)} = G_\eta$, $G_{\Phi^-} = G_{-\eta}^{(T)}$, où η est l'ensemble des éléments de $\Phi(T, G)$ dont la restriction à S fait partie de $\Phi^+ \cup \{0\}$. Évidemment $\eta \supset \Phi(T, G)^+$, donc $G_\eta, G_{-\eta}$ sont paraboliques, et (4.2) il existe une partie θ de l'ensemble des racines simples de G par rapport à T telle que $G_\eta = P_\theta$, donc $G_{-\eta} = P_\theta^-$.

b) Le groupe $(\mathscr{Z}(S) \cap P)^0$ est défini sur k. Cela résulte de 10.5, ou peut se voir ainsi : P contient un tore maximal T′ de G défini sur k (2.14), qui fait donc partie d'une donnée de déploiement de G sur k_s (2.14, 2.10); S est conjugué dans P sur k_s à un sous-tore de T′ (2.10), donc $(\mathscr{Z}(S) \cap P)^0$ est conjugué sur k_s à un groupe normalisé par T′, k_s-fermé, donc défini sur k_s (3.13). Par suite, $(\mathscr{Z}(S) \cap P)^0$ est k-fermé et défini sur k_s, donc défini sur k.

Grâce à 2.14 *a)*, on peut trouver un tore maximal T de G défini sur k tel que $S \subset T \subset \mathscr{Z}(S) \cap P$. Soit $S' = R(P) \cap T$. C'est un tore maximal de R(P), et un sous-groupe de T qui est k-fermé, donc (1.6) défini sur k. Son centralisateur $\mathscr{Z}(S')$ est alors défini sur k (2.15 *d)*), et est un sous-groupe de Levi de P dont S′ est le centre connexe (4.2, 3.14). Par construction, S est le plus grand tore déployé sur k de S′, donc (3.6) les poids de S dans $R_u(P)$ sont >0 pour un ordre convenable sur $X^*(S)$. Mettons sur $X^*(T)$ un ordre compatible avec celui qui vient d'être fixé sur $X^*(S)$. Vu la structure des groupes paraboliques (4.2, 4.3), on a $\Phi(T, G) = \mu \cup \nu \cup (-\nu)$ où μ est l'ensemble des racines nulles sur S′ et ν l'ensemble des poids de T dans $R_u(P)$. Par conséquent, une racine est nulle sur S′ si et seulement si elle est nulle sur S, et $\mu \cup \nu$ est l'ensemble des racines dont la restriction à S est $\geqq 0$. On a alors $P = G_{\Phi^+}$ par définition (3.8) et $\mathscr{Z}(S) = \mathscr{Z}(S')$. Ainsi, le centralisateur d'un tore déployé sur k maximal de R(P) est un k-sous-groupe de Levi de P. Comme les k-sous-groupes de Levi de P sont conjugués sur k (3.14), cela termine la démonstration du théorème.

4.16. *Corollaire.* — *Soit* P *un k-sous-groupe parabolique de* G. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est minimal.*

(ii) R(P) *contient un tore déployé sur k maximal de* G.

(iii) *Les k-sous-groupes de Levi de* P *sont les centralisateurs des tores déployés sur k maximaux de* G *contenus dans* R(P).

(iv) *Tout tore déployé sur k maximal de* G *contenu dans* P *est contenu dans* R(P).

(i) ⇒ (ii). Soient S un tore déployé sur k maximal de R(P) et S′ un tore déployé sur k maximal de G contenant S. Choisissons dans $\Phi = \Phi(S, G)$ un ordre tel que $P = G_{\Phi^+}$, ce qui est possible d'après 4.15 *b)*, et dans $\Psi = \Phi(S', G)$ un ordre compatible avec celui-ci. Le groupe $P' = G_{\Psi^+}^{(S')}$ est parabolique, admet $\mathscr{Z}(S')$ comme sous-groupe de Levi, est défini sur k (4.15 *a)*) et contenu dans P. Ces groupes sont donc égaux, et $\mathscr{Z}(S')$ est un sous-groupe de Levi de P, donc $S' \subset R(P)$ et finalement $S' = S$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Cela résulte de 4.15 *b)* et de 4.7.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Soit S (resp. S') un tore déployé sur k maximal de G contenu dans P (resp. R(P)). On a $P = \mathscr{Z}(S').R_u(P)$. La projection S'' de S sur le facteur $\mathscr{Z}(S')$ de cette décomposition est un tore déployé sur k (1.9) ; il en est donc de même de $S'.S''$ (1.4). Puisque S' est maximal, cela signifie que $S'' \subset S'$, d'où $S \subset S'.R_u(P) = R(P)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Soit P' un k-sous-groupe parabolique minimal contenu dans P, et S un tore déployé sur k maximal de G contenu dans R(P'); en vertu des implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) déjà établies, un tel tore S existe et $\mathscr{Z}(S) \subset P'$. D'autre part, $S \subset R(P)$ et on a (4.15) $P = \mathscr{Z}(S).R_u(P) \subset P'$, d'où $P = P'$.

4.17. *Corollaire. — Le groupe* G *possède un k-sous-groupe parabolique propre si et seulement s'il contient un tore déployé sur k non central.*

C'est une conséquence évidente de 4.15 *a)* et 4.16.

4.18. *Corollaire. — L'intersection de deux k-sous-groupes paraboliques* P, P' *de* G *contient le centralisateur d'un tore déployé sur k maximal de* G.

On peut supposer P et P' minimaux. D'après 4.7, $P \cap P'$ contient un tore maximal T de G défini sur k. Le groupe $T \cap R(P)$ est un tore maximal de R(P), défini sur k vu 1.6. En vertu de 4.2, 4.3 et 2.15 *d)*, $\mathscr{Z}(T \cap R(P))$ est un k-sous-groupe de Levi de P, donc (4.6) $T \cap R(P)$ contient un tore déployé sur k maximal de G. Ce dernier est alors nécessairement égal au plus grand tore T_d déployé sur k de T. De même, $T_d \subset R(P')$, et l'inclusion $\mathscr{Z}(T_d) \subset P \cap P'$ est conséquence de 4.16.

4.19. *Corollaire. — Soient* $P \subset P'$ *des k-sous-groupes paraboliques de* G. *Alors les tores déployés sur k maximaux de* R(P') *sont les intersections de* R(P) *avec les tores déployés sur k maximaux de* R(P).

Comme $R(P) \supset R(P')$, cela est vrai pour au moins un k-tore déployé sur k maximal de R(P'), donc pour tous vu 4.15, la conjugaison sur k des k-sous-groupes de Levi (3.14), et le fait que R(P') est distingué dans R(P).

4.20 *Corollaire. — Soient* P, P' *des k-sous-groupes paraboliques de* G. *Alors* $P = P'$ *si et seulement si* $P_k = P'_k$.

Si k est infini, cela résulte du fait que P_k et P'_k sont denses dans P et P' (2.14, 3.20), mais la démonstration ci-dessous vaut sans hypothèse sur k.

Soient Q, Q' des k-sous-groupes paraboliques minimaux de G contenus dans P et P' respectivement. Vu 4.16, 4.18, on peut trouver un tore S déployé sur k maximal de G tel que $\mathscr{Z}(S)$ soit un k-sous-groupe de Levi commun à Q et Q'. Soit $V = R(P) \cap S$. D'après 4.19 et 4.15 il existe une partie α quasi-close de $\Phi(V, G)$ telle que $P = G_\alpha^{(V)}$. Si μ est l'ensemble des éléments de $\Phi(S, G)$ dont la restriction à V fait partie de $\alpha \cup \{0\}$, alors μ est quasi-clos et $P = G_\mu^{(S)}$ (3.8). De même, il existe une partie quasi-close ν de $\Phi(S, G)$ telle que $P' = G_\nu^{(S)}$. Notre assertion est maintenant conséquence de 3.23.

4.21. *Théorème. — Les tores déployés sur k maximaux de* G *sont conjugués sur k.*

Soient S, S′ deux tores déployés sur k maximaux de G. D'après 4.15 et 4.16, il existe deux k-sous-groupes paraboliques minimaux P et P′ tels que $\mathscr{Z}(S)$ et $\mathscr{Z}(S')$ soient des k-sous-groupes de Levi de P et P′ respectivement. Vu 4.13, P et P′ sont conjugués sur k et d'après 4.7, les k-sous-groupes de Levi de P sont conjugués sur k. Par conséquent il existe $g \in G_k$ tel que ${}^g\mathscr{Z}(S) = \mathscr{Z}(S')$. Mais alors ${}^gS$ et S′ coïncident avec le plus grand tore décomposé sur k du centre Z de $\mathscr{Z}(S)$ (rappelons que Z^0 est défini sur k vu 2.15 *a)*).

Remarque. — Le théorème vaut plus généralement pour un k-groupe algébrique connexe dont le radical unipotent est déployé sur k (11.6).

4.22. *Corollaire. — Soient* S, S′ *des tores déployés sur k maximaux de* G *et* A, A′ *des parties de* S_k *et* S'_k *ou des sous-tores de* S *et* S′ *respectivement. Soit* $x \in G_k$ *tel que* ${}^xA = A'$. *Alors il existe* $y \in G_k$ *tel que* ${}^yS = S'$ *et* ${}^ya = {}^xa$ $(a \in A)$.

Soit $S'' = {}^xS$. Les groupes S′ et S″ sont des tores déployés sur k maximaux du groupe $\mathscr{Z}(A')^0$, qui est défini sur k (1.6, 2.15 *d)*). D'après le théorème, on peut trouver $z \in \mathscr{Z}(A')^0_k$ tel que ${}^zS'' = S'$. Alors $y = z.x$ vérifie nos conditions.

4.23. *Définitions.* — La dimension (commune vu 4.21) des tores déployés sur k maximaux de G est le *k-rang de* G et est notée $r_k(G)$. Le *k-rang semi-simple* de G est le k-rang du groupe dérivé de G. Si k est algébriquement clos on omet en général le préfixe ou indice k. Le groupe G est *anisotrope sur k* si son k-rang est nul ou, ce qui revient au même d'après 4.17, s'il ne contient pas de k-sous-groupe parabolique propre et si son centre connexe est anisotrope sur k.

4.24. Supposons que G soit la composante neutre du groupe orthogonal $\mathbf{O}(Q)$ d'une forme quadratique Q sur un k-espace vectoriel V. Alors G *est anisotrope sur k si et seulement si* V_k *ne contient pas de vecteur isotrope non nul*, autrement dit si Q ne représente pas zéro sur k.

En effet, si V_k contient un vecteur isotrope non nul, on peut classiquement choisir des coordonnées dans V_k telles que $Q = c.x_1.x_2 + Q'(x_3, \ldots, x_n)$, $(c \in k^*)$, et G contient les transformations $(x_1 \mapsto \lambda.x_1,\ x_2 \mapsto \lambda^{-1}.x_2,\ x_i \mapsto x_i\ (i \geqq 3))(\lambda \in \bar{k}^*)$ qui définissent un tore déployé sur k de G.

Réciproquement, si G contient un tore $S \neq \{e\}$ déployé sur k, alors, en diagonalisant S sur k, on voit qu'il existe $x \in V_k - \{0\}$, et un entier $m \geqq 1$ tels que $Q(x) = Q(\lambda^m.x) = \lambda^{2m}.Q(x)$ quel que soit $\lambda \in \bar{k}$, d'où $Q(x) = 0$.

De manière similaire, on voit que si Q est non-dégénérée, le k-rang de G est égal à l'indice de Q, c'est-à-dire à la dimension des espaces isotropes maximaux (rationnels sur k bien entendu) de Q.

4.25. *Proposition. — Soient* G' *un k-groupe réductif et* $f : G \to G'$ *une k-isogénie séparable. Alors les tores déployés sur k maximaux de* G' *(resp. de* G*) sont les images par f (resp. les composantes neutres des images réciproques) des tores déployés sur k maximaux de* G *(resp.* G'*). En particulier,* G *et* G' *ont le même k-rang et le même k-rang semi-simple.*

(La notion de morphisme séparable est rappelée en 10.3; ici, cela revient à exiger que f induise un isomorphisme des algèbres de Lie.)

Comme l'image d'un k-tore déployé sur k par un k-morphisme est un tore déployé sur k (1.3), il suffit, vu 4.21, de montrer que si S' est un tore déployé sur k maximal de G', alors $S = (f^{-1}(S'))^0$ est un tore déployé sur k de G.

Soit T' un tore maximal de G' défini sur k et contenant S' (2.15 *d)*). Alors $T = (f^{-1}(T'))^0$ est un tore maximal de G [1, th. 22.1]. Il contient par conséquent le noyau de f, donc T est toute l'image réciproque de T'. Comme f est séparable, T est un cycle rationnel sur k [22, Prop. 1, Cor.] irréductible, donc T est un k-sous-groupe [39, Prop. 1, p. 208]; 1.8 montre alors que S est le plus grand tore déployé de T.

4.26. *Remarque.* — La proposition précédente n'est pas vraie sans restriction sur f, comme le montre l'exemple suivant.

Supposons k non parfait de caractéristique deux, et soient t un élément de k qui ne soit pas un carré dans k, Q la forme quadratique à trois variables donnée par $Q(x, y, z) = x^2 + t.y.z$, et $G = \mathbf{O}(Q)$ le groupe orthogonal de Q. La forme Q ne représente pas zéro sur k, donc G est anisotrope sur k (4.24). D'autre part, la forme bilinéaire associée à Q admet la droite $y = z = 0$ comme noyau. On en déduit immédiatement que les éléments de $G_{\bar{k}}$ sont les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (t.a.b)^{1/2} & (t.c.d)^{1/2} \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}, \qquad (a.d - b.c = 1),$$

donc que $M \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une k-isogénie de G sur $\mathbf{SL}_2 = G'$. Cependant $r_k(G) = 0$, et $r_k(G') = 1$.

4.27. *Proposition. — Soient* $G_1, \ldots, G_n$ *des k-sous-groupes distingués connexes dont* G *soit le produit presque direct* (0.6), S *un tore déployé sur k maximal de* G *et* $S_i = (S \cap G_i)^0$ $(1 \leq i \leq n)$. *Alors* S *est le produit presque direct des* S_i *et* S_i *est un tore déployé sur k maximal de* G_i $(1 \leq i \leq n)$. *En particulier* $r_k(G) = \sum_i r_k(G_i)$.

Grâce à 4.25, on peut se ramener au cas où G est le produit direct des G_i. La projection S_i' de S sur G_i $(1 \leq i \leq n)$ est un tore déployé sur k (1.3), donc $\prod S_i' = S$, et $S_i' = S_i$ $(1 \leq i \leq n)$. D'autre part, si S_i'' est un tore déployé sur k de G_i contenant S_i, alors $S.S_i''$ est un tore déployé sur k (1.3, 1.9), donc égal à S, d'où $S_i'' = S_i$, et S_i est bien maximal dans G_i.

4.28. *Corollaire.* — *G possède un plus grand k-sous-groupe connexe H distingué anisotrope sur k. Le groupe G est le produit presque direct de ce sous-groupe, de ses k-sous-groupes distingués presque simples sur k de k-rang >0 et de son plus grand tore déployé sur k central.*

Le sous-groupe en question est engendré par les k-sous-groupes distingués connexes presque simples sur k et anisotropes sur k de $\mathscr{D}G$ (voir 2.15 *b)*) et par le plus grand sous-tore anisotrope sur k de $\mathscr{Z}(G)$ (2.15 *a)*, 1.8).

Nous concluons ce paragraphe par deux résultats qui seront utilisés au § 8.

4.29. *Proposition.* — *Soient $\{H_i\}_{i\in I}$ un ensemble de k-sous-groupes connexes de G, P un k-sous-groupe parabolique minimal de G et H le sous-groupe engendré par $R_u(P)$ et les H_i $(i\in I)$. Supposons que pour tout $i\in I$, le groupe H_i soit normalisé par un k-sous-groupe parabolique P_i. Alors $\mathscr{N}(H)=P'$ est un k-sous-groupe parabolique contenant P, et $R_u(P')=R_u(H)$.*

Le groupe $(P\cap P_i).R_u(P)$ est un k-sous-groupe parabolique contenu dans P, donc égal à P, et P_i contient un k-sous-groupe de Levi L_i de P (4.4, 4.7). Le groupe F_i engendré par H_i et $R_u(P)$ est normalisé par L_i, donc par $P=L_i.R_u(P)$ et par conséquent $\mathscr{N}(H)\supset P$. Le groupe $\mathscr{N}(H)$, étant k-fermé, est alors défini sur k (4.7). Puisque $P'\supset P$, on a $R_u(P')\subset R_u(P)\subset H$; comme en outre $R_u(P')$ est normalisé par $H\subset P'$, on a aussi $R_u(P')\subset R_u(H)$. D'autre part $R_u(H)$ est normalisé par P', donc $R_u(H)\subset R_u(P')$.

4.30. *Corollaire.* — *Soit $\{P_i\}_{i\in I}$ un ensemble de k-sous-groupes paraboliques minimaux. Alors le sous-groupe H engendré par les groupes $R_u(P_i)$ est distingué dans le groupe engendré par les P_i $(i\in I)$.*

En effet, 4.29 montre que P_i normalise H quel que soit $i\in I$.

§ 5. RACINES, GROUPES DE WEYL ET DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES RELATIFS

Dans tout ce paragraphe, G est réductif connexe, et S est un tore déployé sur k maximal de G.

5.1. *Groupe de Weyl relatif et k-racines.* — Les racines de G par rapport à S seront appelées *k-racines* ou racines relatives à k de G (par rapport à S si cette précision paraît nécessaire). On écrira ${}_k\Phi(G)$ ou ${}_k\Phi$ pour $\Phi(S, G)$. Le *groupe de Weyl relatif à k de G* est le quotient $\mathscr{N}(S)/\mathscr{Z}(S)$ et est noté ${}_kW$, ou ${}_kW(G)$, ${}_kW(S, G)$. Comme $\mathscr{Z}(S)$ est la composante neutre de $\mathscr{N}(S)$, ce groupe est fini. Il opère canoniquement sur $X^*(S)$, (en laissant ${}_k\Phi$ stable), sur $X_*(S)$ (en permutant les noyaux des k-racines), donc aussi sur $X^*(S)\otimes A$ et $X_*(S)\otimes A$, où A est un anneau quelconque. Un produit scalaire sur $X^*(S)\otimes\mathbf{R}$ ou $X_*(S)\otimes\mathbf{R}$ invariant par ${}_kW$ est dit *admissible*, et sera noté en général $(\ ,\ )$. Comme ${}_kW$ est fini, il en existe toujours. On identifiera souvent $X^*(S)\otimes\mathbf{R}$ et $X_*(S)\otimes\mathbf{R}$ au moyen d'un produit scalaire admissible.

Si k est algébriquement clos, ou bien si G est déployé sur k, alors ${}_kW$ et ${}_k\Phi$ s'identifient au groupe de Weyl et aux racines usuels, et l'on omettra la mention de k.

Vu 4.21, les ensembles de racines $\Phi(S, G)$ et les groupes de Weyl relatifs associés à deux tores déployés sur k maximaux sont isomorphes.

5.2. Étant donné $a \in \Phi(S, G)$, on désignera par ${}_k U_a$ ou $U_{(a)}$ le groupe noté $G^{*(S)}_{(a)}$ dans 3.8, où (a) est l'ensemble des k-racines qui sont multiples entiers positifs de a. Ce groupe est unipotent (3.8 (iv)), défini sur k (3.13).

Soient $w \in {}_k W$, n un représentant de w dans $\mathscr{N}(S)$, et ψ une partie quasi-close de ${}_k\Phi$. Dans les notations de 3.8, il est clair que

$$(1) \qquad {}^n G_\psi = G_{w(\psi)}, \qquad {}^n G^*_\psi = G^*_{w(\psi)}.$$

Les groupes ${}^n G_\psi$ et ${}^n G^*_\psi$ ne dépendent donc que de l'image w de n dans ${}_k W$ et seront aussi notés ${}^w G_\psi$ et ${}^w G^*_\psi$. Ces groupes sont définis sur k (3.13).

Soient A une partie de $\mathscr{N}(S)$ (resp. $\mathscr{N}(S)_k$) et A′ son image canonique dans ${}_k W(G)$. Des classes d'éléments de G (resp. G_k) telles que P.A, P.A.P (resp. P_k.A, P_k.A.P_k) qui ne dépendent que de A′ seront aussi notées P.A′, P.A′.P (resp. P_k.A′, P_k.A′.P_k).

5.3. *Théorème. — Le rang de* ${}_k\Phi(G)$ *est égal au k-rang semi-simple de* G (4.23). *Le groupe* ${}_k W(G)$, *vu comme groupe d'automorphismes de* $X_*(S) \otimes \mathbf{R}$, *muni d'un produit scalaire admissible, est engendré par les symétries par rapport aux hyperplans annulant une k-racine. Chaque composante connexe de* $\mathscr{N}(S)$ *rencontre* G_k.

Soit S_a $(a \in {}_k\Phi)$ la composante neutre du noyau de a, et soit Z l'intersection des groupes S_a. Le groupe Z^0 est la composante neutre de $\mathscr{Z}(G) \cap S$, car la représentation adjointe de G a $\mathscr{Z}(G)$ comme noyau [23, lemma 1, p. 39]. (Cela résulte aussi du fait que si $z \in Z$, alors toutes les racines de G par rapport à un tore maximal de G contenant S sont nulles sur z, et de 2.3.) Comme $r_k(G) = r_k(\mathscr{Z}(G)) + r_k(\mathscr{D}G)$ vu 2.2 (ii) et 4.27, cela établit la première assertion.

Montrons maintenant que si $r_k(\mathscr{D}G) \neq 0$, alors $\mathscr{N}(S)_k \neq \mathscr{Z}(S)_k$. D'après 4.15, il existe deux k-sous-groupes paraboliques opposés P et P′ ayant $\mathscr{Z}(S)$ comme sous-groupe de Levi commun. Vu 4.16, ces groupes sont minimaux parmi les k-sous-groupes paraboliques, donc on peut trouver $x \in G_k$ tel que ${}^x P = P'$ (4.13). Les groupes ${}^x(\mathscr{Z}(S))$ et $\mathscr{Z}(S)$ sont deux k-sous-groupes de Levi de P′, donc (4.7), quitte à multiplier x par un élément de $R_u(P')_k$, on peut supposer que x normalise $\mathscr{Z}(S)$. Il doit alors aussi normaliser S, qui est le plus grand tore déployé sur k du centre de $\mathscr{Z}(S)$; d'autre part, il n'agit pas trivialement sur ${}_k\Phi$ vu 4.15, donc $x \in \mathscr{N}(S)_k$ et $x \notin \mathscr{Z}(S)_k$.

Prouvons maintenant que ${}_k W$ contient le groupe W′ engendré par les symétries r_a par rapport aux hyperplans $X_*(S_a) \otimes \mathbf{R}$ de $X_*(S) \otimes \mathbf{R}$ $(a \in {}_k\Phi)$.

Soit $M = \mathscr{Z}(S_a)$. C'est un k-groupe réductif connexe (2.15 *d)*). Il contient le groupe unipotent $U_{(a)}$ (5.2), donc $\mathscr{Z}(S) \neq M$, et S n'est pas central dans M. Vu 4.27, et le fait que S_a est de codimension un dans S, cela entraîne que $r_k(\mathscr{D}M) = 1$ et que $V = (S \cap \mathscr{D}M)^0$ est un tore déployé sur k maximal de $\mathscr{D}M$. D'après ce qui a déjà été démontré, on peut trouver dans $(\mathscr{D}M)_k$ un élément x normalisant, mais ne centralisant pas V. Comme $\dim V = 1$, on a nécessairement $(\operatorname{Int} x)(t) = t^{-1}$ $(t \in V)$. D'autre part, x centralise S_a, donc normalise S et induit un automorphisme involutif non trivial de $X_*(S)\otimes\mathbf{R}$ laissant $X_*(S_a)\otimes\mathbf{R}$ fixe point par point. C'est nécessairement une symétrie par rapport à cet hyperplan pour tout produit scalaire admissible, donc $r_a\in{}_kW$ et $W'\subset{}_kW$; de plus, toute composante connexe de $\mathscr{N}(S)$ se projetant dans W' contient un élément de G_k.

Il reste à faire voir que ${}_kW=W'$. Vu les propriétés classiques des groupes engendrés par des réflexions [6], il suffit pour cela de prouver que si $w\in{}_kW$ laisse stable une chambre de Weyl C de W' dans $X_*(S)\otimes\mathbf{R}$, alors w est l'identité. Il existe un point $D\in C$ fixe par w. On peut donc trouver un ordre sur $X^*(S)$ tel que si $a\in X^*(S)$ n'est pas nul sur D, alors $a>0$ si et seulement si $a(D)>0$. Comme les racines ne sont pas nulles sur D, l'élément w permute l'ensemble ψ des k-racines >0, donc tout $n\in\mathscr{N}(S)$ représentant w normalise le groupe $G_\psi=P$, qui est un k-groupe parabolique minimal vu 4.15, 4.16. Comme P est son propre normalisateur (4.3), on a $n\in P$ et il suffit de montrer que

$$\mathscr{N}(S)\cap P=\mathscr{Z}(S),$$

ce qui est immédiat : en effet, on peut écrire $n=u.v$ ($u\in\mathscr{Z}(S)$, $v\in R_u(P)$) (4.16), d'où $v\in R_u(P)\cap\mathscr{N}(S)$, et l'on sait que dans un groupe résoluble connexe, le normalisateur d'un tore est égal à son centralisateur [1, prop. 10.2].

5.4. *Corollaire. — Le plus grand k-sous-groupe* M *invariant connexe anisotrope sur k de* $\mathscr{Z}(S)$ *est distingué dans* $\mathscr{N}(S)$.

Le groupe M est évidemment normalisé par $\mathscr{N}(S)_k$. D'autre part (4.28), $\mathscr{Z}(S)$ est le produit presque direct de S et de M, donc M est invariant dans $\mathscr{Z}(S)$, et par suite dans $\mathscr{N}(S)=\mathscr{N}(S)_k.\mathscr{Z}(S)$.

Remarque. — Un peu plus généralement, cela montre que tout k-sous-groupe distingué de $\mathscr{Z}(S)$ invariant par tout k-automorphisme de $\mathscr{Z}(S)$ est distingué dans $\mathscr{N}(S)$.

5.5. *Corollaire. — Soient* K *une extension de k,* T *un tore déployé sur* K *maximal de* G *contenant* S. *Soient* $\mathscr{N}(S,T)=\mathscr{N}(S)\cap\mathscr{N}(T)$ *et* ${}_KW_k=\mathscr{N}(S,T)/\mathscr{Z}(T)$. *Alors* $\mathscr{N}(S)=\mathscr{N}(S,T).\mathscr{Z}(S)$, *et* ${}_kW$ *s'identifie à la restriction de* ${}_KW_k$ *à* S.

Pour démontrer la première égalité, il suffit, vu le théorème, de faire voir que $\mathscr{N}(S)_k\subset\mathscr{N}(S,T).\mathscr{Z}(S)$, ce qui résulte de 4.22. La deuxième assertion n'est qu'une autre manière d'énoncer la première.

5.6. *Corollaire. — Soient* $f:G\to G'$ *une k-isogénie séparable de* G *sur un k-groupe réductif connexe* G', *et* $S'=f(S)$. *Alors f induit une isogénie de* $\mathscr{N}(S)$ *sur* $\mathscr{N}(S')$, *un isomorphisme de* ${}_kW(G)$ *sur* ${}_kW(G')$ *et* $f^*:X^*(S')\to X^*(S)$ *induit une bijection de* ${}_k\Phi(G')$ *sur* ${}_k\Phi(G)$.

Le groupe S' est un tore déployé sur k maximal de G' d'après 4.25, et f induit un isomorphisme des algèbres de Lie, d'où la dernière partie du corollaire. Les autres assertions résultent alors du théorème.

5.7. *Proposition. — Soient* ψ *une partie de* ${}_k\Phi(G)$ *qui contient tous les multiples rationnels de ses éléments faisant partie de* ${}_k\Phi(G)$, w *un élément de* ${}_kW(G)$ *qui soit produit de réflexions* r_a ($a\in\psi$), *et* $c\in X^*(S)$. *Alors* $w(c)-c$ *est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de* ψ.

Soient T un tore maximal de G contenant S et $j : X^*(T) \to X^*(S)$ l'homomorphisme de restriction. Soit $\eta = j^{-1}(\psi) \cap \Phi(T, G)$. D'après 5.5, $W = W(T, G)$ contient au moins un élément w_a dont la restriction à S est r_a ($a \in {}_k\Phi$). Un tel élément agit trivialement sur l'hyperplan V_a de $X_*(S) \otimes \mathbf{R}$ annulant a, donc [6] est produit de réflexions $r_b \in W$, où b appartient à l'ensemble des racines qui s'annulent sur V_a. Ces dernières font partie de η, vu l'hypothèse faite sur ψ, donc W contient un élément w' dont la restriction à S est w, et qui est produit de réflexions r_b ($b \in \eta$). Comme d'autre part S est facteur direct dans T [1, § 7], j est surjectif. On est donc ramené au cas où $S = T$ est un tore maximal de G et où ${}_kW = W$, ${}_k\Phi = \Phi(G)$, pour lequel notre assertion est connue [6, § 7, no. 9, prop. 27].

5.8. *Corollaire. — Soient* (,) *un produit scalaire admissible sur* $X^*(S) \otimes \mathbf{R}$, $a \in \Phi_k(G)$ *et* $c \in X^*(S)$. *Alors* $2(a, c)/(a, a)$ *est un entier. En particulier,* ${}_k\Phi(G)$ *est un système de racines au sens de* 2.1 *dans* $(X^*(S), N)$ *où* N *désigne l'ensemble des caractères de* S *qui sont triviaux sur* $S \cap \mathscr{D}G$.

La restriction $X^*(S) \to X^*(S')$, où $S' = (S \cap \mathscr{D}G)^0$, est un isomorphisme de ${}_k\Phi(G)$ sur ${}_k\Phi(\mathscr{D}G)$, et le rang de ${}_k\Phi(\mathscr{D}G)$ est égal à $r_k(\mathscr{D}G)$ d'après 5.3, donc ${}_k\Phi(G)$ engendre dans $X^*(S) \otimes \mathbf{Q}$ un sous-espace supplémentaire de $N \otimes \mathbf{Q}$. D'autre part, on a

$$r_a(c) = c - 2.(a, c).(a, a)^{-1}.a,$$

donc $2(a, c).(a, a)^{-1} \in \mathbf{Z}$ d'après 5.7. Les autres conditions imposées à un système de racines sont vérifiées vu 5.3.

5.9. *Corollaire. — Si* P *est un k-sous-groupe parabolique minimal contenant* S, *alors* $P = G_\psi^{(S)}$, *où* ψ *est l'ensemble des k-racines positives pour un ordre convenable, et réciproquement. Le groupe* $\mathrm{Int}_G \mathscr{N}(S)$ *induit un groupe de permutations simplement transitif, isomorphe à* ${}_kW$, *des k-sous-groupes paraboliques minimaux contenant* S.

La première assertion résulte de 4.15, 4.16, la deuxième de 5.3, 5.8 et de la simple transitivité du groupe de Weyl sur les chambres de Weyl.

5.10. *Proposition. — Soient* $G_1, \ldots, G_n$ *des k-sous-groupes distingués connexes de* G *dont* G *est le produit presque direct et* $S_i = (S \cap G_i)^0$ ($1 \leqq i \leqq n$). *Alors, pour tout* $a \in {}_k\Phi(G)$, *il y a une et une seule valeur de l'indice i telle que la restriction de a à* S_i *ne soit pas nulle ; le groupe* ${}_kU_a$ *est contenu dans le groupe* G_i *correspondant. Si* Φ_i *est l'ensemble des k-racines non nulles sur* S_i, *alors* Φ *est somme directe des* Φ_i *et l'homomorphisme de restriction* $X^*(S) \to X^*(S_i)$ *induit un isomorphisme de* Φ_i *sur* ${}_k\Phi(G_i)$.

Soient T un tore maximal de G contenant S et $b \in \Phi(T, G)$ une racine dont la restriction à S soit a. Pour tout i, on a les implications suivantes

$$a|_{S_i} \neq 0 \Rightarrow b|_{S_i} \neq 0 \Rightarrow U_b \subset G_i \Rightarrow b|_{T \cap G_j} = 0 \ (j \neq i) \Rightarrow a|_{S_j} = 0 \ (j \neq i) \Rightarrow a|_{S_i} \neq 0$$

dont la deuxième et la troisième résultent de 2.3 et les autres sont évidentes. Ces assertions sont donc toutes équivalentes, d'où la première partie de la conclusion. La seconde en découle immédiatement.

5.11. *Corollaire. — Les k-sous-groupes distingués connexes presque simples sur k non anisotropes sur k de* G *sont les groupes* G^*_ψ, *où* ψ *parcourt les facteurs directs irréductibles de* ${}_k\Phi(G)$. *En particulier, si* G *est presque simple sur k,* ${}_k\Phi$ *est un système de racines irréductible. Tout k-sous-groupe distingué connexe de* G *est produit d'un groupe* G^*_ψ, *où* ψ *est un idéal de* Φ, *d'un tore déployé sur k et d'un groupe anisotrope sur k déterminés de façon unique.*

Soit ψ un facteur direct irréductible de ${}_k\Phi$. C'est un idéal, donc G^*_ψ est un k-sous-groupe distingué connexe de G; la prop. 5.10 montre que G^*_ψ est presque simple sur k et que tout k-groupe distingué connexe presque simple sur k, de k-rang non nul, s'obtient ainsi. La dernière assertion résulte alors de 4.28.

5.12. *k-sous-groupes paraboliques standards.* — On fixe un ordre sur ${}_k\Phi$ et on note ${}_k\Delta$ l'ensemble des k-racines simples correspondantes. A toute partie θ de ${}_k\Delta$, on peut associer comme en 4.2 des parties π_θ, π_θ^-, etc. de ${}_k\Phi$ et des sous-groupes P_θ, P_θ^-, etc., qui sont définis sur k vu 3.13; les paragraphes 4.2 (i), (ii) restent valables, une fois T et Φ remplacés par S et ${}_k\Phi$. Pour éviter des confusions avec les notions correspondantes sur $\bar{k}$, on écrira souvent ${}_kP_\theta$, ${}_kP_\theta^-$, ${}_kZ_\theta$, ${}_kV_\theta$, ${}_kV_\theta^-$ pour les groupes qui, dans les notations de 3.8, seraient désignés par $G^{(S)}_{\pi_\theta}$, $G^{(S)}_{-\pi_\theta}$, $\mathscr{Z}(S_\theta)$, $U^{(S)}_{\alpha_\theta}$ et $U^{(S)}_{-\alpha_\theta}$. Les groupes ${}_kP_\theta$ $(\theta\subset{}_k\Delta)$ sont les *k-sous-groupes paraboliques standards de* G. Le groupe ${}_kP_\theta$ est minimal si $\theta=\varnothing$, égal à G si $\theta={}_k\Delta$. Le radical unipotent ${}_kV_\varnothing$ de ${}_kP_\varnothing$ sera aussi noté ${}_kU$. Jusqu'au n° 5.20 inclus, on écrira P pour ${}_kP_\varnothing$.

5.13. Soit $w\in{}_kW$ et soient $\mu_w={}_k\Phi^+\cap w({}_k\Phi^-)$ et $\nu_w={}_k\Phi^+\cap w({}_k\Phi^+)$. Ce sont des ensembles de k-racines convexes dont ${}_k\Phi^+$ est réunion disjointe. On posera

$$(1)\qquad {}_kU'_w=U'_w=U^{(S)}_{\mu_w},\qquad {}_kU''_w=U''_w=U^{(S)}_{\nu_w}.$$

D'après 3.11, l'application produit est un k-isomorphisme de variétés de $U'_w\times U''_w$ sur ${}_kU$.

Plus généralement, soient $s\in{}_kW$,

$$\mu_{s,w}=s({}_k\Phi^+)\cap w({}_k\Phi^-),\qquad \nu_{s,w}=s({}_k\Phi^+)\cap w({}_k\Phi^+).$$

Ce sont des ensembles convexes de k-racines, dont $s({}_k\Phi^+)$ est la réunion disjointe. On a

$$(2)\qquad U^{(S)}_{\mu_{s,w}}={}^s({}_kU)\cap{}^w({}_kU^-)\qquad U^{(S)}_{\nu_{s,w}}={}^s({}_kU)\cap{}^w({}_kU),$$

et l'application produit est un isomorphisme de variétés de $U^{(S)}_{\mu_{s,w}}\times U^{(S)}_{\nu_{s,w}}$ sur ${}^s({}_kU)$.

5.14. *Proposition. — Les k-sous-groupes paraboliques standards sont les seuls k-sous-groupes contenant* $P={}_kP_\varnothing$. *Tout k-sous-groupe parabolique de* G *est conjugué sur k à un seul k-sous-groupe parabolique standard;* G *est engendré par* P *et les sous-groupes* $U_{(-a)}$ $(a\in{}_k\Delta)$.

Soit P′ un k-sous-groupe parabolique contenant P. Vu 4.16, 4.19, l'intersection $S'=R(P')\cap S$ est un tore déployé sur k maximal de R(P′), et, vu 4.15, on peut écrire $P'=G^{(S')}_\psi$, où ψ est l'ensemble des éléments de $\Phi(S', G)$ qui sont >0 pour un ordre convenable. On a donc aussi $P'=G^{(S)}_\eta$, où η est l'ensemble des k-racines dont la restriction à S′ est soit nulle soit contenue dans ψ. Comme ψ est clos dans $\Phi(S', G)$, l'ensemble η

est clos dans ${}_k\Phi$, contient ${}_k\Phi^+$ puisque $P'\supset P$, et l'existence de $\theta\subset{}_k\Delta$ tel que $\eta=\pi_\theta$ résulte alors de [6, § 7, nº 7, prop. 20].

Soit Q un k-sous-groupe parabolique de G. Vu 4.13 et ce qui vient d'être démontré, Q est conjugué sur k à au moins un k-sous-groupe parabolique standard. L'unicité de ce dernier est conséquence de 4.3. Enfin, ce qui précède montre que le sous-groupe Q engendré par P et les groupes $U_{(-a)}$ $(a\in{}_k\Delta)$ est le groupe P_θ $(\theta={}_k\Delta)$, donc est égal à G.

5.15. *Théorème. — Posons* $N=\mathscr{N}(S)$ *et* $U={}_kU$. *Soient* $s\in{}_kW$ *et* $n, n'\in N$. *Alors* $G_k={}^sU_k.N_k.U_k$. *On a* $n=n'$ *si et seulement si* ${}^sU.n.U={}^sU.n'.U$. *L'ensemble* ${}^sU.n.U$ *est localement fermé dans* G *et l'application produit est un isomorphisme de variétés de* $({}^sU\cap{}^nU^-)\times\{n\}\times U$ *sur* ${}^sU.n.U$, *qui est défini sur k si* $n\in N_k$. *Le groupe* G_k *est réunion disjointe des doubles classes* $P_k.w.P_k$ $(w\in{}_kW)$.

En utilisant le fait que N_k contient un élément dont l'image canonique dans ${}_kW$ est s, on se ramène immédiatement au cas où $s=1$.

Soit $g\in G_k$. D'après 4.18, le groupe $P\cap g^{-1}.P.g$ contient le centralisateur $\mathscr{Z}(S')$ d'un tore déployé sur k maximal S' de G. Les groupes $\mathscr{Z}(S)$ et $\mathscr{Z}(S')$ sont deux k-sous-groupes de Levi de P, donc (3.14) sont conjugués par un élément de $R_u(P)_k$, ce qui montre l'existence de $u\in P_k$ tel que $u.g^{-1}.P.g.u^{-1}\supset\mathscr{Z}(S)$. En utilisant 5.9, on voit que l'on peut alors trouver $v\in N_k$ tel que $v.u.g^{-1}\in\mathscr{N}(P)_k$; comme P est égal à son normalisateur (4.3), cela prouve que $g\in P_k.N_k.P_k$, donc aussi que $g\in U_k.N_k.U_k$, vu l'existence de la décomposition de Levi $P=\mathscr{Z}(S).U$.

L'ensemble $U.n.U$ est une orbite de $U\times U$ opérant sur G par translations à gauche et à droite, donc est ouvert dans son adhérence [1, § 15.2], i.e. est localement fermé. Soit w l'image canonique de n dans ${}_kW$. On a, dans les notations de 5.13,

$$U.n.U=U'_w.U''_w.n.U=U'_w.n.U, \tag{1}$$

puisque $n^{-1}.U''_w.n\subset U$, donc l'application produit définit un morphisme surjectif $\varphi: U'_w\times\{n\}\times U\to U.n.U$. Comme $n^{-1}.U'_w.n\subset U^-$, le composé de φ et de la translation à gauche par n^{-1} est la restriction à une partie fermée de l'application produit $U^-\times U\to U^-.U$. Comme cette dernière est un isomorphisme (4.10), il s'ensuit que φ est un isomorphisme; de plus, les groupes U'_w et U étant définis sur k, φ l'est aussi si $n\in N_k$. Prouvons maintenant que $U.n.U'=U.n'.U$ entraîne $n=n'$, autrement dit que $N\cap U.n.U=\{n\}$. Vu (1) cela équivaut encore à $N\cap n^{-1}.U'_w.n.U=\{e\}$, ce qui est conséquence de

$$N\cap U^-.U=\{e\}. \tag{2}$$

Il suffit donc d'établir (2). Soit $n=v.u$ $(n\in N, v\in U^-, u\in U)$. Quel que soit $s\in S$, on a évidemment

$$(v^{-1}.{}^ns.v.{}^ns^{-1}).({}^ns.s^{-1}).(s.u.s^{-1}.u^{-1})=e.$$

Mais les facteurs définis par les parenthèses appartiennent respectivement à U^-, S, U, et doivent donc être tous égaux à 1 vu 4.10. Cela entraîne que $u, v\in\mathscr{Z}(S)$, d'où $u=v=1$ et $n=1$.

La première partie du théorème et la décomposition $P_k = \mathscr{Z}(S)_k . U_k$ montrent que G_k est réunion des doubles classes $P_k . w . P_k$. Il reste à voir que ces dernières sont disjointes. Soit $w' \in P_k . w . P_k$ et soient n', n des représentants de w' et w dans N_k. Il existe alors $u, v \in U_k$ et $a, b \in \mathscr{Z}(S)_k$ tels que $n' = u.a.n.b.v$, d'où $n' = a.n.b$ et $w' = w$.

5.16. *Proposition.* — *Soient* $w \in {}_kW$ *et* r *une réflexion fondamentale. On a*

(i) $r.P_k.\{w, r.w\}.P_k = P_k.\{w, r.w\}.P_k$.

(ii) $r.P_k.r \neq P_k$.

Soit a la k-racine simple telle que $r = r_a$. Quitte à remplacer w par $r.w$, on peut supposer que $w^{-1}(a) \in {}_k\Phi^+$. Le groupe U est produit semi-direct sur k du radical unipotent V_a du k-groupe parabolique standard $P_{\{a\}}$ et du groupe $U_{(a)}$, et ce dernier est l'intersection de U avec $\mathscr{Z}(S_a)$. On a par conséquent

$$r.P_k.\{w, r.w\}.P_k = \mathscr{Z}(S)_k.r.U_k.\{w, r.w\}.P_k = \mathscr{Z}(S)_k.r.V_{a,k}.U_{(a),k}.\{w, r.w\}.P_k,$$
$$r.P_k.\{w, r.w\}.P_k = \mathscr{Z}(S)_k.V_{a,k}.r.U_{(a),k}.\{w, r.w\}.P_k.$$

En appliquant 5.15 à $\mathscr{Z}(S_a)$, on en déduit

$$r.P_k.\{w, r.w\}.P_k \subset P_k.\mathscr{Z}(S_a)_k.w.P_k = P_k.U_{(a),k}.\{1, r\}.U_{(a),k}.w.P_k$$

donc, puisque $w^{-1}(a) > 0$,

$$r.P_k.\{w, r.w\}.P_k \subset P_k.\{r.w, w\}.P_k.$$

En multipliant à gauche les deux membres par r, on en tire aussi l'inclusion contraire, d'où (i).

(ii) est une conséquence de 3.23 et du fait que $r({}_k\Phi^+) \neq {}_k\Phi^+$.

5.17. *Proposition.* — *Soient* θ *une partie de* ${}_k\Delta$ *et* W_θ *le sous-groupe de* ${}_kW$ *engendré par les réflexions fondamentales correspondant aux éléments de* θ. *Alors* $P_{\theta,k} = P_k.W_\theta.P_k$.

Le groupe de Weyl relatif de Z_θ (cf. 5.12) est W_θ. En vertu de 5.15, on a donc

$$P_{\theta,k} = Z_{\theta,k}.V_{\theta,k} = (U \cap Z_\theta)_k.W_\theta.(U \cap Z_\theta)_k.V_{\theta,k},$$

d'où

$$P_{\theta,k} = P_k.P_{\theta,k}.P_k = P_k.W_\theta.P_k.$$

5.18. *Corollaire.* — (i) *Les groupes* $P_{\theta,k}$ *sont les seuls sous-groupes de* G_k *contenant* P_k.

(ii) *Soient* $\theta, \theta' \subset {}_k\Delta$ *et* $g \in G_k$. *Alors* ${}^gP_{\theta',k} \subset P_{\theta,k}$ *si et seulement si* $\theta' \subset \theta$ *et* $g \in P_{\theta,k}$. *En particulier,* $P_{\theta,k}$ *est son propre normalisateur dans* G_k.

5.15 et 5.16 montrent que les axiomes de [33] sont vérifiés ; 5.18 résulte alors de 5.17 et des th. 2, 3, 4 de [33].

5.19. *Corollaire.* — *Soit* Q *un* k-*sous-groupe parabolique de* G. *Alors* Q_k *est le normalisateur dans* G_k *de* $R_u(Q)_k$.

Vu 5.14, on peut supposer que $Q = P_\theta$ ($\theta \subset {}_k\Delta$). Le normalisateur M de $R_u(Q)_k$ contient alors $P_{\theta,k}$, donc (5.18) est égal à un groupe $P_{\theta',k}$ ($\theta \subset \theta' \subset {}_k\Delta$). Supposons que $\theta' \neq \theta$. Soient a un élément de θ' non contenu dans θ, et n un représentant dans N_k de la réflexion fondamentale r_a. On a $U_{(a),k} \subset R_u(P_\theta)_k$, d'où aussi

$$U_{(-a),k} = {}^n U_{(a),k} \subset R_u(P_\theta)_k \subset P_k,$$

ce qui est absurde, donc $\theta' = \theta$ et $M = Q_k$.

5.20. *Corollaire.* — *Soient* θ, θ' *deux parties de* ${}_k\Delta$. *Alors il existe entre les doubles classes* $P_{\theta,k}.g.P_{\theta',k}$ $(g \in G_k)$ *de* G_k *et les doubles classes* $W_\theta.w.W_{\theta'}$ *de* ${}_kW$ $(w \in {}_kW)$ *une correspondance biunivoque caractérisée par la relation*

$$P_{\theta,k}.g.P_{\theta',k} = P_k.W_\theta.w.W_{\theta'}.P_k.$$

Soit $g \in G_k$. Soient n l'élément de N_k tel que $g \in U_k.n.U_k$ (5.15), et w l'image canonique de n dans ${}_kW$. En utilisant 5.16 (i) et 5.17, on a

$$P_{\theta,k}.g.P_{\theta',k} = P_k.W_\theta.P_k.w.P_k.W_{\theta'}.P_k \subset P_k.W_\theta.w.W_{\theta'}.P_k \subset P_{\theta,k}.w.P_{\theta',k} = P_{\theta,k}.g.P_{\theta',k}.$$

Il résulte alors de la dernière assertion de 5.15 que deux doubles classes distinctes $W_\theta.w.W_{\theta'}$, $W_\theta.w'.W_{\theta'}$ correspondent à des doubles classes distinctes de G_k modulo $P_{\theta,k}$, $P_{\theta',k}$.

Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques simples sur les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques.

5.21. *Proposition.* — *Soient* $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ *deux classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de* G *et* $P, P' \in \mathscr{P}$, $Q, Q' \in \mathscr{Q}$ *tels que* $P \cap Q$ *et* $P' \cap Q'$ *soient des sous-groupes paraboliques. Alors :*

(i) *Si* $P \subset Q$, *tout élément de* $\mathscr{P}$ *est contenu dans un seul élément de* $\mathscr{Q}$.

(ii) *Les groupes* $P \cap Q$ *et* $P' \cap Q'$ *sont conjugués.*

(iii) *Les sous-groupes paraboliques* R, R' *engendrés par* P, Q *et* P', Q' *respectivement sont conjugués.*

L'assertion (i) est contenue dans 4.3.

Reprenons les notations de 4.2. On peut trouver $g, g' \in G$ tels que

$${}^g(P \cap Q) \supset B, \qquad {}^{g'}(P' \cap Q') \supset B;$$

d'après 4.3, il existe alors $\theta, \psi \subset \Delta$ tels que

$${}^gP = {}^{g'}P' = P_\theta, \qquad {}^gQ = {}^{g'}Q' = P_\psi.$$

Il est alors clair que

$${}^g(P \cap Q) = {}^{g'}(P' \cap Q') = P_{\theta \cap \psi},$$

$${}^gR = {}^{g'}R' = P_{\theta \cup \psi},$$

d'où la proposition.

5.22. *Définition.* — Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ deux classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G. On écrit $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$ si tout élément de $\mathscr{P}$ est contenu dans un élément de $\mathscr{Q}$. La proposition précédente montre qu'il suffit pour cela qu'il existe un élément de $\mathscr{P}$ contenu dans un élément de $\mathscr{Q}$.

D'après 5.21, les sous-groupes paraboliques de la forme $P \cap Q$ ($P \in \mathscr{P}$, $Q \in \mathscr{Q}$) (resp. engendrés par deux sous-groupes $P \in \mathscr{P}$, $Q \in \mathscr{Q}$ tels que $P \cap Q$ soit parabolique) forment une seule classe de conjugaison, qui sera désignée par $\mathscr{P} \curlywedge \mathscr{Q}$ (resp. $\mathscr{P} \curlyvee \mathscr{Q}$).

5.23. On notera ${}_k\mathscr{P}_\theta$ la classe de conjugaison du k-groupe parabolique standard ${}_kP_\theta$ ($\theta \subset {}_k\Delta$) (5.12). On a évidemment

$$ {}_k\mathscr{P}_\theta \subset {}_k\mathscr{P}_\psi \Leftrightarrow \theta \subset \psi \qquad (\theta, \psi \subset {}_k\Delta). $$

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ contiennent chacun un élément défini sur k, il en est de même pour $\mathscr{P} \curlywedge \mathscr{Q}$ et $\mathscr{P} \curlyvee \mathscr{Q}$ vu 4.7, 4.13. D'après 5.14, il existe $\theta, \psi \subset {}_k\Delta$ tels que $\mathscr{P} = {}_k\mathscr{P}_\theta$ et $\mathscr{Q} = {}_k\mathscr{P}_\psi$. On a évidemment :

$$ {}_k\mathscr{P}_\theta \curlywedge {}_k\mathscr{P}_\psi = {}_k\mathscr{P}_{\theta \cap \psi}, \qquad {}_k\mathscr{P}_\theta \curlyvee {}_k\mathscr{P}_\psi = {}_k\mathscr{P}_{\theta \cup \psi} \qquad (\psi, \theta \subset {}_k\Delta). $$

Enfin, on voit exactement comme en 4.9 que si i est l'involution d'opposition de ${}_k\Phi$, alors la classe opposée à ${}_k\mathscr{P}_\theta$ est ${}_k\mathscr{P}_{i(\theta)}$.

5.24. Le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ opère à la manière usuelle sur l'ensemble des k_s-sous-variétés de G et laisse visiblement invariant l'ensemble des k_s-sous-groupes paraboliques de G. Dans la suite, nous aurons à considérer la condition suivante, imposée à une classe de conjugaison $\mathscr{P}$ de sous-groupes paraboliques :

(i) *L'ensemble $\mathscr{P}_{k_s}$ des éléments de $\mathscr{P}$ définis sur k_s est stable par* Γ,

et l'on dira que *$\mathscr{P}$ est défini sur k* si (i) est vérifiée. Bien que cela ne soit pas nécessaire dans ce travail, nous en donnerons ici une autre interprétation.

Un groupe parabolique est égal à son normalisateur, donc étant donné $P_0 \in \mathscr{P}$, on peut identifier $\mathscr{P}$ à G/P_0 par l'application φ_0 qui associe à $P \in \mathscr{P}$ l'unique point fixe de P dans G/P_0. L'application φ_0 commute à G, opérant sur $\mathscr{P}$ par automorphismes intérieurs et sur G/P_0 par translations à gauche, d'où une structure d'espace homogène (de groupe algébrique) sur $\mathscr{P}$, qui ne dépend visiblement pas du choix de l'origine P_0. C'est toujours d'elle qu'il sera question ci-dessous.

Si $\mathscr{P}$ contient un élément P défini sur une extension K de k, alors K est un corps de définition de l'espace homogène $\mathscr{P}$ (i.e. de $\mathscr{P}$ et du morphisme $G \times \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ définissant l'action de G) comme on le voit en prenant P comme origine. En particulier (2.14, 4.3), l'espace homogène $\mathscr{P}$ est défini sur k_s. Cela étant, la condition (i) équivaut à :

(ii) *L'espace homogène $\mathscr{P}$ admet k comme corps de définition.*

En effet, (i) $\Rightarrow$ (ii) d'après les critères de descente du corps de base (voir [37], ou aussi [5, 2.12, 4.10]). La réciproque est immédiate.

Remarquons qu'il peut arriver que $\mathscr{P}$ soit défini sur k, mais ne possède pas d'élément défini sur k. Par exemple la classe de conjugaison des sous-groupes de Borel de G est toujours définie sur k.

§ 6. DESCENTE DU CORPS DE BASE

6.1. *Notations.* — Dans ce paragraphe, K désigne toujours une extension de k, $\Gamma = \mathrm{Aut}(K/k)$ le groupe des k-automorphismes de K, G un groupe réductif connexe, S un tore déployé sur k maximal de G et T un tore déployé sur K maximal de G contenant S. Les groupes $X^*(S)$ et $X^*(T)$ sont dotés d'ordres compatibles (i.e. la restriction à S d'un caractère positif de T est positive), et ${}_k\Delta$, ${}_K\Delta$ désignent les ensembles de racines relatives simples qui y correspondent. Notons toutefois que l'hypothèse $S \subset T$ (et *a fortiori* la compatibilité des ordres) n'intervient pas avant le n° 6.6.

6.2. *Une action de* Γ *sur* $X^*(T)$. — Soit γ un élément de Γ. En vertu de 4.21, 5.9, il existe un automorphisme intérieur α par un élément de G_K transformant le tore ${}^\gamma T$ en T et l'ensemble de racines simples ${}^\gamma({}_K\Delta)$ relatives à ${}^\gamma T$ en ${}_K\Delta$. L'automorphisme de $X^*(T)$ induit par le composé $\alpha \circ \gamma$ est indépendant de l'automorphisme intérieur α choisi (deux tels α différant à gauche par un automorphisme intérieur centralisant T) et sera noté ${}_{K\Delta}\gamma$, ou, par abus de notation, ${}_\Delta\gamma$. Cet automorphisme laisse évidemment invariants ${}_K\Delta$ et ${}_K\Phi$, donc aussi le diagramme de ${}_K\Delta$ (2.1). On a la formule

$$({}_\Delta\gamma(c))(\alpha({}^\gamma t)) = \gamma(c(t)) \qquad (c \in X^*(T),\ t \in T_K,\ \gamma \in \Gamma). \tag{1}$$

Soit P un K-sous-groupe parabolique de G contenant T. Il est immédiat, à partir de 5.12, 5.14, que l'homomorphisme de restriction $X^*(P) \to X^*(T)$ identifie $X^*(P)_K$ à un sous-groupe de $X^*(T)$, qui est d'indice fini si P est minimal. On peut donc considérer ${}_\Delta\gamma$ comme opérant sur $X^*(P)_K$. Si β est un automorphisme intérieur de G transformant ${}^\gamma P$ sur P, cette action vérifie

$$({}_\Delta\gamma(c))(\beta({}^\gamma p)) = \gamma(c(p)) \qquad (c \in X^*(P)_K,\ p \in P_K,\ \gamma \in \Gamma), \tag{2}$$

comme on le voit à partir de (1), en remarquant que $P = \mathcal{N}(P)$ et que P agit trivialement sur ses caractères par automorphismes intérieurs.

Soit θ une partie de ${}_K\Delta$. On a la relation évidente

$$\gamma({}_K P_\theta) = {}_K P_{\theta'} \qquad (\theta' = {}_\Delta\gamma(\theta)). \tag{3}$$

Celle-ci constitue une nouvelle définition de ${}_\Delta\gamma$, si on ajoute le fait que, pour tout caractère $c \in X^*(T)$ qui s'annule sur $(T \cap \mathscr{D}G)^0$, on a ${}_\Delta\gamma(c) = {}^\gamma c$.

Le groupe Γ opère sur $X^*(T)$ par l'intermédiaire des ${}_\Delta\gamma$. Lorsque T est invariant par Γ (en particulier, lorsque T est défini sur k) il convient évidemment de distinguer cette action de celle envisagée habituellement, notamment ci-dessus (1.7), et que nous appellerons parfois l'action *usuelle* de Γ sur $X^*(T)$. Le lien entre ces deux actions peut être caractérisé comme suit : pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique élément w du groupe de Weyl ${}_K W$ tel que $w(\gamma({}_K\Delta)) = {}_K\Delta$, et on a alors ${}_\Delta\gamma = w \circ \gamma$. Remarquons encore que si P est défini sur k, on a, d'après (2),

(4) $$_{\Delta}\gamma(c) = {}^{\gamma}c \qquad (c \in X^*(P)_K).$$

En particulier, c est alors défini sur k si et seulement s'il est fixe par tous les $_{\Delta}\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$.

Il résulte de 4.21 et 5.9 que le Γ-module obtenu en faisant opérer Γ sur $X^*(T)$ par l'intermédiaire de $_{\Delta}\gamma$ ne dépend pas, à isomorphisme près, de T ni de $_K\Delta$. C'est donc un invariant du groupe G (relatif aux deux corps k, K). Par contre, si T et T′ sont deux tores déployés sur K maximaux, tous deux invariants par Γ, les Γ-modules usuels $X^*(T)$ et $X^*(T')$ ne sont pas nécessairement isomorphes [1].

6.3. *Descente et sous-groupes paraboliques.* — Soit θ une partie de $_k\Delta$. La relation $_k\mathscr{P}_\theta = {}_K\mathscr{P}_{\theta'}$ définit une partie θ' de $_K\Delta$ qui sera notée $_K\eta_k(\theta)$. Il résulte immédiatement de 4.9 et 5.23 que $_K\eta_k$, qui est donc une application de l'ensemble des parties de $_k\Delta$ dans l'ensemble des parties de $_K\Delta$, est compatible avec l'intersection, la réunion et l'opposition. Cela étant, il existe une application $_K\rho_k : {}_K\Delta \to {}_k\Delta \cup \{0\}$, caractérisée par la relation

$$_K\eta_k(\theta) = {}_K\rho_k^{-1}(0) \cup \bigcup_{a \in \theta} {}_K\rho_k^{-1}(a).$$

La signification de cette application apparaîtra dans la suite (6.8). Nous noterons encore

$$_K\Delta_k^0 = {}_K\eta_k(\varnothing) = {}_K\rho_k^{-1}(0),$$

la partie de $_K\Delta$ correspondant à la classe de conjugaison des sous-groupes paraboliques définis sur k minimaux. Dans toutes les notations introduites ci-dessus, le double indice K, k sera éventuellement omis, si aucune confusion ne risque d'en résulter.

Une partie θ de $_K\Delta$ sera dite *apparente* sur k si elle est l'image par η d'une partie de $_k\Delta$, c'est-à-dire si $_KP_\theta$ est conjugué à un sous-groupe parabolique défini sur k, et *définie* sur k si la classe de conjugaison de $_KP_\theta$ est définie sur k (cf. 5.24). Il résulte immédiatement de 4.7 que

(1) *Une partie de $_K\Delta$ est apparente sur k si et seulement si elle est définie sur k et contient $_K\Delta_k^0$.*

L'ensemble des parties apparentes sur k et l'ensemble des parties définies sur k sont invariants par Γ (pour l'action définie au n° 6.2) et par l'involution d'opposition.

Lorsque T est défini sur k, la notion d'ensemble de caractères défini sur k, introduite au n° 1.7, ne coïncide pas avec celle introduite ici dans le cas où les caractères en question sont des racines simples. Dans ce paragraphe, l'expression « défini sur k », en parlant d'un ensemble de racines simples, sera toujours comprise au sens qui lui a été donné ici.

6.4. *Caractérisation galoisienne des parties de $_K\Delta$ définies sur k.* — Soit Δ le système des racines simples de G. On a les identifications canoniques $\Delta = {}_{k_s}\Delta = {}_{K_s}\Delta$. Le groupe $\Gamma(k) = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ opère sur $_{k_s}\Delta$, donc sur Δ. Notons η_K l'application $_{K_s}\eta_K$, considérée comme application de l'ensemble des parties de $_K\Delta$ dans l'ensemble des parties de Δ. Par une descente galoisienne immédiate, on voit que les parties de $_{k_s}\Delta = \Delta$ définies sur k sont les parties invariantes par $\Gamma(k)$. Par conséquent

[1] Un exemple de J.-P. Serre montre du reste qu'il peut n'y avoir aucun tore déployé sur K maximal stable par Γ.

(1) *Une partie de* ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ *est définie sur* k *si et seulement si sa transformée par* η_{K} *est invariante par* $\Gamma(k)$.

Lorsque K est une extension normale de k, $\Gamma \cong \Gamma(k)/\Gamma(\mathrm{K})$, donc $\Gamma(k)$ opère sur ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ par l'intermédiaire de Γ. Il est clair que l'action de $\Gamma(k)$ permute avec l'application η_{K}, donc

(2) *Lorsque* K *est une extension normale de* k, *une partie de* ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ *est définie sur* k *si et seulement si elle est invariante par* Γ. *En particulier* (*d'après* 6.3, (1)), *les images par* ${}_{\mathrm{K}}\rho_k^{-1}$ *des éléments de* ${}_k\Delta$ *sont les orbites de* Γ *dans* ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ *non contenues dans* ${}_{\mathrm{K}}\Delta_k^0$.

Lorsque K est une extension radicielle de k, toute partie de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ est définie sur k. Plus généralement, toute classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques définie sur K l'est aussi sur k (5.24). Par contre, il n'est pas toujours vrai que toute partie de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ soit apparente sur k (c'est-à-dire que les tores déployés sur k maximaux soient aussi déployés sur K maximaux) comme le montre l'exemple du groupe $\mathbf{O}_3^+(\mathrm{Q})$ correspondant à une forme quadratique Q anisotrope, non dégénérée et de défaut 1 sur un corps k de caractéristique 2, K étant une extension radicielle de k sur laquelle Q acquiert des zéros non triviaux.

6.5. *k-formes, indice, classification.* — Soit $\overline{\mathrm{G}}$ un groupe algébrique défini sur K. Le groupe G est appelé une *k-forme* de $\overline{\mathrm{G}}$ s'il est isomorphe à $\overline{\mathrm{G}}$ sur K. Identifions $\overline{\mathrm{G}}$ à G, sur K, de façon à pouvoir considérer T et ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ comme un tore déployé et un ensemble de K-racines simples de $\overline{\mathrm{G}}$. On appelle *indice* de la k-forme G la donnée constituée par ${}_{\mathrm{K}}\Delta_k^0$ et par l'ensemble des parties de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ définies sur k (d'où on déduit aussi, par 6.3, (1), l'ensemble des parties apparentes). Si l'extension K/k est normale, l'*indice galoisien* est constitué par la donnée de ${}_{\mathrm{K}}\Delta_k^0$ et de l'action de Γ sur ${}_{\mathrm{K}}\Delta$.

De la seule donnée du diagramme de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$, on peut déduire, indépendamment du groupe $\overline{\mathrm{G}}$ et des corps K et k, des conditions auxquelles doivent satisfaire un ensemble de parties de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$, fermé par intersection et réunion, et un élément Δ^0 de cet ensemble, pour pouvoir être l'indice d'une forme. Certaines conditions se déduisent déjà immédiatement de 6.3 et 6.4. On sait notamment que l'indice doit être invariant par l'involution d'opposition. Notons que cette dernière condition est, à elle seule, très restrictive (cf. par ex. [32], n° 5), si on tient compte du fait que la restriction de l'indice à une partie Δ' de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ apparente sur k est aussi un indice de k-forme (c'est l'indice des k-sous-groupes de Levi d'un k-sous-groupe parabolique appartenant à ${}_{\mathrm{K}}\mathscr{P}_{\Delta'}$). D'autres conditions imposées aux indices possibles résultent du théorème 6.13 ci-après. On trouvera des éléments de classification dans [34, 35, 36].

Signalons encore l'existence d'un « théorème de Witt », permettant de caractériser une k-forme d'un groupe donné sur $\bar{k}$ par son indice galoisien et par la k-structure (avec spécification de l'isomorphisme sur $\bar{k}$) du centralisateur $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$ d'un tore déployé sur k maximal (cf. [28], [32]; la démonstration de [28] s'étend à un corps non parfait si on fait usage de 2.14).

6.6. *Lemme.* — *Soient* T *et* T′ *deux tores déployés sur* K *maximaux contenant* S, *soient donnés dans* $X^*(T)$ *et* $X^*(T')$ *des ordres compatibles avec un même ordre dans* $X^*(S)$, *et soient* ${}_K\Delta$ *et* ${}_K\Delta'$ *les ensembles de racines simples correspondants. Alors, tout élément* $g\in G$ *tel que* $\operatorname{Int} g$ *transforme* T *en* T′ *et* ${}_K\Delta$ *en* ${}_K\Delta'$ *appartient à* $\mathscr{Z}(S)$.

Soit P (resp. Q; resp. Q′) le sous-groupe parabolique défini sur k (resp. K; resp. K) minimal standard, correspondant à l'ordre choisi dans $X^*(S)$ (resp. $X^*(T)$; resp. $X^*(T')$). On a $P\supset Q$, $P\supset Q'$ et ${}^gQ=Q'$. En vertu de 4.3, il s'ensuit que ${}^gP=P$, donc $g\in P$ et $g=g'.g''$ avec $g'\in R_u(P)$ et $g''\in\mathscr{Z}(S)$. Pour tout $s\in S$, on a $(g,s)=(g',s)\in R_u(P)$, et $(g,s)={}^gs.s^{-1}\in T'.s^{-1}\subset\mathscr{Z}(S)$, donc $(g,s)=e$ et $g\in\mathscr{Z}(S)$.

6.7. *Proposition.* — *Supposons* T *invariant par* Γ. *Alors, pour tout* $c\in X^*(T)$ *et tout* $\gamma\in\Gamma$, *la différence* ${}_\Delta\gamma(c)-\gamma(c)$ *est une combinaison linéaire à coefficients entiers de racines s'annulant sur* S.

Soit w l'élément de ${}_KW$ tel que $w(\gamma({}_K\Delta))={}_K\Delta$. Le transformé par γ de l'ordre donné dans $X^*(T)$ est compatible avec l'ordre donné dans $X^*(S)$, et l'ensemble de racines simples qui lui correspond est $\gamma({}_K\Delta)$. En vertu du lemme précédent, w centralise donc S, et [6] est un produit de réflexions relatives à des racines s'annulant sur S. La proposition est alors une conséquence de 5.7 et du fait que ${}_\Delta\gamma=w\circ\gamma$.

6.8. *Proposition.* — *Soit* $j=X^*(T)\to X^*(S)$ *l'homomorphisme de restriction. Alors* $j(a)={}_K\rho_k(a)\in{}_k\Delta\cup\{0\}$ $(a\in{}_K\Delta)$.

Soient $k_1\subset k_2\subset k_3$ trois corps. On a la relation de transitivité évidente ${}_{k_2}\rho_{k_1}\circ{}_{k_3}\rho_{k_2}={}_{k_3}\rho_{k_1}$ (en posant $\rho(0)=0$). Il s'ensuit que

(1) si la proposition est vraie pour $k=k_1$, $K=k_3$ et pour $k=k_2$, $K=k_3$, elle l'est aussi pour $k=k_1$, $K=k_2$;

(2) si la proposition est vraie pour $k=k_1$, $K=k_2$, et si un tore déployé maximal sur k_2 est aussi déployé maximal sur k_3, la proposition est vraie pour $k=k_1$, $K=k_3$.

En appliquant (1) avec k_3 algébriquement clos, on se ramène au cas où K est algébriquement clos et ensuite, en appliquant (2) avec $k_2=k_s$, à celui où l'on a $K=k_s$, ce que nous supposerons dorénavant. Soient $b\in{}_K\Delta$, $a=\rho(b)$, $a'=b|_S$, (x) l'ensemble des racines de la forme $n.x$ avec $n\in\mathbf{N}$, et ${}_kP_\theta$ $(\theta\subset{}_k\Delta)$ les sous-groupes paraboliques standards par rapport à S et ${}_k\Delta$ (5.12). Il résulte de la définition de ρ que $a=0$ si et seulement si $U_{(-b)}\subset{}_kP_\varnothing$, et que si $a\neq 0$, $U_{(-b)}\subset{}_kP_a$. D'autre part, si $a'\neq 0$, $U_{(-b)}\subset U_{(-a')}$. Compte tenu de 3.22 *c)*, on a donc les implications

$$a'\neq 0 \Leftrightarrow U_{(-b)}\not\subset{}_kP_\varnothing \Leftrightarrow a\neq 0 \Rightarrow U_{(-b)}\subset{}_kP_a \Rightarrow a'\in\{a, 2a, 0\}.$$

Il s'ensuit que, dans tous les cas, $a'=a$ ou $a'=2a$.

Du lemme 6.6, il résulte que deux éléments d'une même orbite de Γ dans ${}_K\Delta$ (par rapport à l'action définie au n° 6.2) ont même restriction à S. En vertu de 6.4, (2), on a donc, pour tout $a\in{}_k\Delta$, $\rho^{-1}(a)|_S=\{a\}$ ou $\{2a\}$. Mais toute K-racine est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de ${}_K\Delta$, donc toute k-racine est combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de ${}_{\mathrm{K}}\Delta|_{\mathrm{S}}$, par conséquent, $\rho^{-1}(a)|_{\mathrm{S}}=\{a\}$ pour tout a.

6.9. *Corollaire. — Soit* S′ *la composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe de* T *défini par les équations* $a=1$ *pour tout* $a\in\Delta^0$, *et* $b=c$ *pour tous* $b, c\in{}_{\mathrm{K}}\Delta$ *tels que* $\rho(b)=\rho(c)$ *(c'est-à-dire, du noyau de l'ensemble de caractères* $\Delta^0\cup\{b-c\,|\,b, c\in{}_{\mathrm{K}}\Delta, \rho(b)=\rho(c)\}$*). Alors* $(\mathrm{S}\cap\mathscr{D}\mathrm{G})^0=(\mathrm{S}'\cap\mathscr{D}\mathrm{G})^0$.

Cela résulte de la proposition précédente et d'un calcul de dimension évident.

6.10. *Groupes de Weyl.* — Posons

$$\mathscr{N}(\mathrm{S},\mathrm{T})=\mathscr{N}(\mathrm{S})\cap\mathscr{N}(\mathrm{T}),\qquad \mathscr{N}^0(\mathrm{S},\mathrm{T})=\mathscr{Z}(\mathrm{S})\cap\mathscr{N}(\mathrm{T}).$$

On désignera par ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k=\mathscr{N}(\mathrm{S},\mathrm{T})/\mathscr{Z}(\mathrm{T})$ et ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0=\mathscr{N}^0(\mathrm{S},\mathrm{T})/\mathscr{Z}(\mathrm{T})$ les images canoniques respectives de $\mathscr{N}(\mathrm{S},\mathrm{T})$ et $\mathscr{N}^0(\mathrm{S},\mathrm{T})$ dans ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$. En particulier, ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0$ est le k-groupe de Weyl de $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$, engendré par les réflexions fondamentales correspondant aux éléments de Δ^0. C'est un sous-groupe distingué de ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k$, et on a (cf. 5.5) un isomorphisme canonique ${}_k\mathrm{W}={}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k/{}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0$.

On notera R (resp. ${}_k\mathrm{R}$) le sous-réseau de $\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$ (resp. $\mathrm{X}^*(\mathrm{S})$) engendré par les K-racines (resp. k-racines) et on posera $\mathrm{X}=\mathrm{R}\otimes\mathbf{R}$ et $\mathrm{Y}={}_k\mathrm{R}\otimes\mathbf{R}$, les groupes R et ${}_k\mathrm{R}$ étant identifiés à des sous-réseaux de X et Y. L'application de restriction $j:\mathrm{R}\to{}_k\mathrm{R}$ s'étend en une application linéaire $\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, qui coïncide avec ρ sur ${}_{\mathrm{K}}\Delta$, et dont le noyau N est engendré par Δ^0 et par les différences $b-c$ de racines $b, c\in{}_{\mathrm{K}}\Delta$ telles que $\rho(b)=\rho(c)$ (cf. 6.9). Ayant choisi dans X un produit scalaire admissible (5.1), on peut identifier Y à $\mathrm{N}^\perp$, ce que nous ferons. Alors, ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$ étant vu comme groupe de transformations linéaires de X, ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k$ (resp. ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0$) est le normalisateur (resp. le centralisateur) de Y dans ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$, et ${}_k\mathrm{W}$ est la restriction de ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k$ à Y. En particulier, la restriction à Y du produit scalaire choisi dans X est admissible. Des produits scalaires admissibles dans X et Y qui sont entre eux dans la relation ainsi décrite seront dits *compatibles*.

Si les éléments de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ sont tous définis sur k au sens de 6.3 (par exemple, si l'extension K/k est normale et si Γ opère trivialement sur ${}_{\mathrm{K}}\Delta$), ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k$ est le normalisateur de ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0$ dans ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$; en effet, Y est alors l'espace de tous les points fixes de ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0$ dans X.

6.11. Supposons que T soit défini sur k et que l'extension K/k soit normale. Alors, $\mathrm{N}^\perp$ est l'espace des points fixes de l'action *usuelle* de Γ sur X. Il s'ensuit que dans l'identification de Y avec $\mathrm{N}^\perp$, l'image canonique $j(a)$ dans Y d'un élément $a\in\mathrm{X}$ (par exemple, la restriction à S d'un caractère de T nul sur $\mathscr{Z}(\mathrm{G})$) est identifiée avec l'orbite

$$a^0=(1/|\Gamma|)\,.\sum_{\gamma\in\Gamma}{}^{\gamma}a,$$

de a sous l'action de Γ (lorsque Γ est infini, il faut le remplacer, dans la formule précédente, par un quotient fini par l'intermédiaire duquel il opère sur X et dont l'ordre est noté $|\Gamma|$). En particulier, on a, pour des produits scalaires compatibles, et quels que soient $a, b\in\mathrm{X}$,

$$(j(a), j(b))=(a^0, b^0)=(a, b^0)=(a^0, b). \tag{1}$$

Enfin, ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k$ est alors le groupe de tous les $w \in {}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$ tels que ${}^{\gamma}w \equiv w \,(\mathrm{mod.}\, {}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}_k^0)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, où l'exposant à gauche est relatif à l'action de Γ sur ${}_{\mathrm{K}}\mathrm{W}$ induite par l'action usuelle de Γ sur X.

6.12. Le théorème suivant permet de déterminer le diagramme de ${}_k\Delta$ à partir du diagramme de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ et de l'ensemble des $\rho^{-1}(a)$. Pour en simplifier l'énoncé, on utilisera la notation suivante. Soit $M = ((m_{ab}))$ $(a, b \in {}_{\mathrm{K}}\Delta)$ une matrice dont les lignes et les colonnes sont indexées par ${}_{\mathrm{K}}\Delta$. Alors, $\rho(M)$ désignera la matrice $((m'_{cd}))$ $(c, d \in {}_k\Delta)$, dont les lignes et les colonnes sont indexées par ${}_k\Delta$ et dont les coefficients sont donnés par

$$m'_{cd} = \sum_{a \in \rho^{-1}(c)} \sum_{b \in \rho^{-1}(d)} m_{ab}.$$

6.13. *Théorème.* — (i) *Les espaces* $\mathrm{X} = \mathrm{R} \otimes \mathbf{R}$ *et* $\mathrm{Y} = {}_k\mathrm{R} \otimes \mathbf{R}$ *étant dotés de produits scalaires compatibles, si* ${}_{\mathrm{K}}M$ (*resp.* ${}_kM$) *désigne la matrice des produits scalaires des* K-*racines simples* (*resp. des k-racines simples*), *on a* ${}_kM = (\rho({}_{\mathrm{K}}M^{-1}))^{-1}$.

(ii) *Soit* $a \in {}_k\Delta$. *Alors, le plus grand entier* n_a $(n_a = 1, 2)$ *tel que* $n_a . a$ *soit une k-racine est le maximum de la somme des coefficients des éléments de* $\rho^{-1}(a)$ *dans les* K-*racines qui sont combinaisons linéaires d'éléments de* $\rho^{-1}(a) \cup \Delta^0$.

Soit $\varkappa = \mathrm{K}$ ou k, et soient $\overline{m}_{xy}$ les coefficients de la matrice ${}_{\varkappa}M^{-1}$. Pour tout $x \in {}_{\varkappa}\Delta$, posons $x^* = \sum_y \overline{m}_{xy} . y$. On a $(x^*, y) = \delta_{xy}$ c'est-à-dire que $\{x^*\}$ est la base duale de ${}_{\varkappa}\Delta$ (dans X ou dans Y, selon que $\varkappa = \mathrm{K}$ ou k).

Comme au nº 6.10, on identifiera Y à $\mathrm{N}^{\perp}$, où N désigne le noyau de l'application canonique de X dans Y. Alors, pour tout $c \in {}_k\Delta$, c^* est défini par les relations

$$(1) \qquad (c^*, a) = \delta_{c, \rho(a)} \qquad \text{pour tout} \quad a \in {}_{\mathrm{K}}\Delta.$$

En effet, l'élément de X ainsi défini, que nous désignerons provisoirement par c', est orthogonal à toutes les différences $a - b$ de K-racines simples telles que $\rho(a) = \rho(b)$, ainsi qu'à tous les éléments de Δ^0, donc aussi à N. Par conséquent, il appartient à Y et on a, pour tout $a \in {}_{\mathrm{K}}\Delta$, $(c', \rho(a)) = (c', a) = \delta_{c, \rho(a)}$, d'où $c' = c^*$. De (1), il résulte que $c^* = \sum_{a \in \rho^{-1}(c)} a^*$, c'est-à-dire

$$\sum_{d \in {}_k\Delta} {}_k\overline{m}_{cd} . d = \sum_{a \in \rho^{-1}(c)} \sum_{b \in {}_{\mathrm{K}}\Delta} {}_{\mathrm{K}}\overline{m}_{ab} . b.$$

En formant le produit scalaire des deux membres avec d^*, il vient, toujours en tenant compte de (1),

$${}_k\overline{m}_{cd} = \sum_{a \in \rho^{-1}(c)} \sum_{b \in \rho^{-1}(d)} {}_{\mathrm{K}}\overline{m}_{ab},$$

ce qui démontre (i).

(ii) est une conséquence immédiate de 6.8.

Le théorème précédent permet notamment de calculer, à partir de ${}_{\mathrm{K}}\Delta$ et des $\rho^{-1}(a)$, l'ordre du produit de deux réflexions fondamentales dans ${}_k\mathrm{W}$ (ou, ce qui revient au même, l'angle de deux k-racines simples). Cependant, celui-ci peut aussi être obtenu à l'aide d'une formule plus simple, que nous établirons à présent.

6.14. *Proposition. — Soient a, b deux k-racines simples et soit* φ_0 *(resp.* φ_a*, resp.* φ_b*, resp.* φ_{ab}*) le cardinal du système de racines réduit ayant pour ensemble de racines simples* Δ^0 *(resp.* $\eta(a)=\Delta^0 \cup \rho^{-1}(a)$*; resp.* $\eta(b)$*; resp.* $\eta(a, b)$*). Alors, l'ordre* m_{ab} *du produit des réflexions fondamentales correspondant à a et b dans* ${}_k\mathrm{W}$ *est donné par*

$$m_{ab}=2(\varphi_{ab}-\varphi_0)/(\varphi_a+\varphi_b-2\varphi_0).$$

Dans cette démonstration, les racines dont il est question ne sont jamais données qu'à un facteur de proportionnalité strictement positif près. En particulier, l'égalité $a=b$ prend le sens de $a=r.b$ ($r\in\mathbf{R}$, $r>0$).

Soient ψ le système des k-racines qui sont combinaisons linéaires de a et b, $\mathrm{W}(\psi)$ son groupe de Weyl et $2m_{ab}$ l'ordre de $\mathrm{W}(\psi)$; pour toute k-racine x, soit $f(x)$ le cardinal de l'ensemble de K-racines dont la restriction à S est x. Pour que la restriction à S d'une K-racine c soit nulle (resp. proportionnelle à a; resp. à b; resp. soit combinaison linéaire de a et b), il faut et il suffit (6.8) que c soit combinaison linéaire de racines simples appartenant à Δ^0 (resp. $\eta(a)$; resp. $\eta(b)$; resp. $\eta(a, b)$). On a donc

$$f(a)=\frac{1}{2}(\varphi_a-\varphi_0), \qquad f(b)=\frac{1}{2}(\varphi_b-\varphi_0); \tag{1}$$

$$\sum_{x\in\psi} f(x)=\varphi_{ab}-\varphi_0. \tag{2}$$

D'autre part, il est clair que pour tout $w\in{}_k\mathrm{W}, f(w(x))=f(x)$. Or on sait que tout élément de ψ est exactement de deux façons le transformé d'une racine simple (a ou b) par un élément de $\mathrm{W}(\psi)$. Par conséquent,

$$2\sum_{x\in\psi} f(x)=2m_{ab}.f(a)+2m_{ab}.f(b). \tag{3}$$

La formule de l'énoncé est une conséquence immédiate de (1), (2), (3).

6.15. *Proposition. — Soient a, b deux k-racines simples distinctes et* m_{ab} *l'ordre du produit des réflexions fondamentales correspondantes. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La paire a, b est connexe; autrement dit,* $m_{ab}>2$.

(ii) *Pour toute* K*-racine* $a'\in\rho^{-1}(a)$*, il existe une* K*-racine* $b'\in\rho^{-1}(b)$ *et une partie* θ *de* Δ^0 *telles que* $\theta\cup\{a', b'\}$ *soit connexe.*

(iii) *Il existe des* K*-racines* $a'\in\rho^{-1}(a)$ *et* $b'\in\rho^{-1}(b)$*, et une partie* θ *de* Δ^0*, telles que* $\theta\cup\{a', b'\}$ *soit connexe.*

On peut, sans nuire à la généralité, supposer que ${}_k\Delta=\{a, b\}$: il suffit de remplacer G par le sous-groupe $\mathrm{G}_{\Phi'}$, où Φ' est le système des k-racines qui sont combinaisons linéaires de a et b.

Comme précédemment, on notera (x) l'ensemble des racines de la forme $n.x$ ($n\in\mathbf{N}$). Soit ψ (resp. ψ') le plus petit idéal du système ${}_k\Phi$ (resp. du système ${}_\mathrm{K}\Phi$) contenant b (resp. $\rho^{-1}(b)$). Le plus petit sous-groupe distingué de G contenant tous les $\mathrm{U}_{(b')}$ avec $b'\in\rho^{-1}(b)$, est aussi le plus petit sous-groupe distingué contenant $\mathrm{U}_{(b)}$. Ce sous-groupe, que nous noterons H, est défini sur k, puisqu'il est k-fermé et défini sur k_s (2.14 *a)*).

Il résulte alors de 5.11 que $H=G^*_\psi=G^*_{\psi'}$. Cela étant, on a les implications immédiates suivantes :

$$\text{(i)} \Rightarrow a\in\psi \Rightarrow H\supset U_{(a)} \Rightarrow \psi'\supset\rho^{-1}(a) \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \psi'\cap\rho^{-1}(a)\neq\varnothing \Rightarrow H\cap U_{(a)}\neq\{e\} \Rightarrow \text{(i)}.$$

6.16. *Corollaire.* — *Soient* $\theta=\{a_1, \ldots, a_t\}$ *une partie connexe de* ${}_k\Delta$ *et* $a'_1\in\rho^{-1}(a_1)$. *Alors il existe* $a'_i\in\rho^{-1}(a_i)$ $(2\leq i\leq t)$ *et une partie* ψ *de* Δ^0 *tels que* $\{a'_1, \ldots, a'_t\}\cup\psi$ *soit connexe.*

Cela résulte de 6.15 par récurrence sur t.

6.17. *Le foncteur* $R_{K/k}$. — Dans ce numéro et les quatre suivants, K est une extension séparable de degré fini d de k, contenue dans k_s, et $\sigma_1=\mathrm{id}$, $\sigma_2, \ldots, \sigma_d$ sont les différents monomorphismes de K dans k_s. On renvoie à [38, Chap. I], (voir aussi [5, 2.8]), pour la définition du foncteur $R_{K/k}$, de restriction des scalaires, qui va de la catégorie des K-groupes (ou K-variétés quasi-projectives) à celle des k-groupes (ou k-variétés quasi-projectives). Si H est un K-groupe connexe et $H'=R_{K/k}H$, alors il existe un K-morphisme $\mu : H'\rightarrow H$ tel que

$$\mu^0=({}^{\sigma_1}\mu, \ldots, {}^{\sigma_d}\mu) : H' \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma_1}H\times\ldots\times{}^{\sigma_d}H \tag{1}$$

soit un k_s-isomorphisme, et cela caractérise la paire (H', μ) à un k-isomorphisme près. Tout K-morphisme $\alpha : G\rightarrow H$ s'écrit d'une et d'une seule manière sous la forme $\mu\circ\beta$, où $\beta : G\rightarrow H'$ est un k-morphisme.

$(\mu^0)^{-1}$ applique $H={}^{\sigma_1}H$ sur un sous-groupe de H' qui est défini sur k_s et visiblement stable par tout élément de $\mathrm{Gal}(k_s/K)$, donc en fait défini sur K, d'où l'existence d'un K-morphisme $\nu : H\rightarrow H'$ tel que $\nu^0=(\nu, {}^{\sigma_2}\nu, \ldots, {}^{\sigma_d}\nu)$ soit l'inverse de μ^0 [3, § 1].

6.18. *Proposition.* — *On conserve les notations de* 6.17. *Alors* $R_{K/k}$ *définit une bijection des* K*-sous-groupes connexes de* H *sur l'ensemble des* k*-sous-groupes connexes* L' *de* H' *tels que* $\mu^0(L')$ *soit le produit de ses intersections avec les* ${}^{\sigma_i}H$. *Si* $L'=R_{K/k}(L)$, *et si* $\mathscr{Z}(L)^0$ (*resp.* $\mathscr{N}(L)^0$) *est défini sur* K, *alors* $R_{K/k}\mathscr{Z}(L)^0=\mathscr{Z}(L')^0$ (*resp.* $R_{K/k}\mathscr{N}(L)^0=\mathscr{N}(L')^0$).

Il est clair que si L est un K-sous-groupe connexe de H, alors $L'=R_{K/k}L$ a la propriété indiquée. Soit réciproquement L' un k-sous-groupe connexe de H' tel que $\mu^0(L')$ soit produit de ses projections sur les ${}^{\sigma_i}H$. Ce qu'on a dit précédemment montre que $\mu^0(L')\cap{}^{\sigma_1}H=L$ et la projection η de L' sur L sont définis sur K, ce qui entraîne immédiatement que (L', η) vérifie la propriété caractéristique (1) de 6.17.

La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la première.

6.19. *Corollaire.* — *Le foncteur* $R_{K/k}$ *définit une bijection des sous-groupes de Cartan définis sur* K *(resp. tores maximaux définis sur* K, *resp.* K*-sous-groupes paraboliques) de* H *sur les sous-groupes de Cartan définis sur k (resp. tores maximaux définis sur k, resp. k-sous-groupes paraboliques) de* H'.

Remarquons tout d'abord que le foncteur $R_{K/k}$ préserve la propriété d'être un tore ou d'être commutatif, ou nilpotent. On utilisera aussi le fait que les sous-groupes paraboliques d'un produit direct sont les produits directs de sous-groupes paraboliques de facteurs; cela résulte par exemple de 4.2, 4.3, après une réduction évidente au cas semi-simple.

Soit L un K-sous-groupe de H. Si L est un sous-groupe de Cartan (resp. un tore maximal; resp. un sous-groupe parabolique), il en est de même du sous-groupe ${}^{\sigma_i}L$ de ${}^{\sigma_i}H$, donc aussi du sous-groupe $R_{K/k}L$ de H'. Réciproquement, si L' est un sous-groupe de Cartan (resp. un tore maximal; resp. un sous-groupe parabolique) de H', alors $\mu^0(L')$ est produit direct de ses intersections avec les ${}^{\sigma_i}H$; si de plus L' est défini sur k, il existe (vu 6.18) un K-sous-groupe L de H tel que $L' = R_{K/k}L$, et L est un sous-groupe de Cartan de H, car il est nilpotent et égal à son normalisateur connexe (resp. est un tore maximal de H pour des raisons de dimension; resp. est un sous-groupe parabolique de H parce que $R_{K/k}(H/L) = H'/L'$ est une variété projective, et qu'il en est donc de même de H/L).

6.20. Soient T un tore défini sur K et $T' = R_{K/k}T$. Alors l'application $b \mapsto \sum_i {}^{\sigma_i}(b \circ \mu)$ définit un isomorphisme α de $X^*(T)_K$ sur $X^*(T')_k$ [21, § 1.4]; en particulier (1.8), T_d et T'_d ont même dimension. On a un homomorphisme naturel $X^*(T)_K \to X^*(T'_d)$, le composé de α et de la restriction $X^*(T') \to X^*(T'_d)$, qui est injectif, de conoyau fini, mais n'est pas bijectif en général.

Supposons T déployé sur K. Alors la projection de $\mu^0(T')$ sur ${}^{\sigma_i}T$ induit un isomorphisme de T'_d sur ${}^{\sigma_i}T$ pour tout i, d'où un isomorphisme $\beta_i : X^*({}^{\sigma_i}T) \to X^*(T'_d)$; il suffit de le vérifier pour $T = \mathbf{G}_m$, pour lequel c'est élémentaire. En particulier, β_1, qu'on notera aussi β, est un isomorphisme de $X^*(T) = X^*(T)_K$ sur $X^*(T'_d) = X^*(T'_d)_k$.

6.21. (i) Supposons maintenant H réductif. De 6.19, 6.20, on tire : $r_K(H) = r_k(H')$; si A est un tore déployé sur K maximal de H, alors le plus grand tore A'_d déployé sur k de $A' = R_{K/k}A$ est un tore déployé sur k maximal de H'; l'isomorphisme canonique $\beta : X^*(A) \to X^*(A'_d)$ de 6.20 induit une bijection de ${}_K\Phi(H)$ sur ${}_k\Phi(H')$, et $\mathscr{Z}(A') = \mathscr{Z}(A'_d)$.

Soit ψ une partie quasi-close de ${}_K\Phi(H)$ (3.8). Le groupe H_ψ peut être caractérisé comme le sous-groupe de H contenant $\mathscr{Z}(A)$ et dont l'algèbre de Lie est somme de celle de $\mathscr{Z}(S)$ et des espaces propres maximaux de A dans $\mathfrak{h}$ correspondant aux éléments de ψ. Vu 6.20 et l'égalité $\mathscr{Z}(A') = \mathscr{Z}(A'_d)$, il s'ensuit que

$$R_{K/k}H_\psi = H'_{\beta(\psi)}. \tag{1}$$

On voit de manière analogue que si η est quasi-clos, formé de racines positives pour un ordre convenable, alors $R_{K/k}H^*_\eta = H'^*_{\beta(\eta)}$. Comme H^*_ψ est engendré par des groupes de ce type, on a aussi

$$R_{K/k}H^*_\psi = H'^*_{\beta(\psi)}. \tag{2}$$

Il résulte en particulier de (1) que si l'on fixe sur $X^*(A)$ et $X^*(A'_d)$ des ordres se correspondant par β, alors, dans les notations de 5.12,

$$R_{K/k}{}_KP_\theta = {}_kP_{\beta(\theta)}, \tag{3}$$

θ étant une partie de l'ensemble des k-racines simples de H.

(ii) Si H est semi-simple et presque simple sur K, alors H' est semi-simple et presque simple sur k. En effet les groupes ${}^{\sigma_i}H$ sont alors les facteurs presque simples de H' et ils sont permutés transitivement par $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. Tout groupe G semi-simple et presque simple sur k est k-isogène à un groupe $R_{k'/k}H$ où k' est une extension de k convenablement choisie, et où H est un k'-groupe, presque simple sur $\bar{k}$. En effet, quitte à le remplacer par un groupe k-isogène, on peut supposer que G est $\bar{k}$-isomorphe à un produit direct de sous-groupes presque simples. Soit H l'un d'eux et soit $k' \subset \bar{k}$ son plus petit corps de définition contenant k. C'est une extension séparable de degré fini de k (2.14), que l'on peut donc supposer contenue dans k_s. Les facteurs simples de G sont permutés par Γ, nécessairement de façon transitive. On peut donc les écrire sous la forme ${}^{\nu_1}H, \ldots, {}^{\nu_d}H$ où $\nu_1, \ldots, \nu_d$ forment un système de représentants des classes à gauche de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ modulo $\mathrm{Gal}(k_s/k')$. Les restrictions des ν_i à k' sont évidemment les isomorphismes de k' dans k_s. D'autre part le produit des ${}^{\nu_i}H$ différents de H est défini sur k_s, stable par $\mathrm{Gal}(k_s/k')$, donc aussi défini sur k', et ainsi la projection π de G sur H est définie sur k'. Par conséquent, la paire (G, π) vérifie la propriété (1) de 6.17 et $G \cong R_{k'/k}H$.

6.22. *Proposition.* — *Soient* θ_i $(i = 1, 2)$ *deux parties de* ${}_k\Delta$, $P_i = {}_kP_{\theta_i}$ *les* k*-sous-groupes paraboliques standards correspondants* (5.12), ${}_kW_i$ (*resp.* ${}_KW_i$) *le sous-groupe de* ${}_kW$ (*resp.* ${}_KW$) *engendré par les réflexions fondamentales correspondant aux éléments de* θ_i (*resp.* ${}_K\eta_k(\theta_i)$ (6.3)) *et* $w \in {}_KW$. *Alors, la double classe* $P_{1,K}.w.P_{2,K} \subset G_K$ (5.20) *possède des points rationnels sur* k *si et seulement si la double classe correspondante* ${}_KW_1.w.{}_KW_2$ *a une intersection non vide avec* ${}_KW_k$ (6.10). *Lorsqu'il en est ainsi, cette intersection est l'image réciproque par l'application canonique* ${}_KW_k \to {}_kW$ *d'une double classe* ${}_kW_1.w'.{}_kW_2$, *avec* $w' \in {}_kW$, *et la double classe* $P_{1,k}.w'.P_{2,k}$ *est l'ensemble des points rationnels sur* k *de* $P_{1,K}.w.P_{2,K}$.

Soient x' un élément quelconque de ${}_kW$, x un représentant de x' dans ${}_KW_k$ et n un représentant de x' dans $\mathscr{N}(S)_k$. Puisque T et ${}^nT$ sont deux tores déployés sur K maximaux de $\mathscr{Z}(S)$, il existe un $z \in \mathscr{Z}(S)_K$ tel que ${}^zT = {}^nT$, c'est-à-dire tel que $n' = n^{-1}.z \in \mathscr{N}(S, T)_K$. L'image canonique x'' de n' dans ${}_KW_k$ est congrue à x (mod. ${}_KW_k^0$). On a donc, puisque $\mathscr{Z}(T)_K \subset P_{i,K}$,

$$P_{1,k}.x'.P_{2,k} = P_{1,k}.n.P_{2,k} \subset P_{1,K}.n.P_{2,K} = P_{1,K}.n'.P_{2,K} = P_{1,K}.x''.P_{2,K} = P_{1,K}.x.P_{2,K}.$$

La première partie de l'énoncé en résulte, compte tenu de 5.20.

Pour établir la seconde, il suffit à présent de montrer que si $\bar{x}' \in {}_kW$ est tel que $P_1.\bar{x}'.P_2 = P_1.x'.P_2$, alors $\bar{x}' \in {}_kW_1.x'.{}_kW_2$. Posons $P = {}_kP_\emptyset$, pour tout parabolique $Q \supset \mathscr{Z}(S)$, notons ${}^uQ$ son unique opposé contenant $\mathscr{Z}(S)$, et soient P' un k-sous-groupe parabolique tel que $\mathscr{Z}(S) \subset P' \subset ({}^{ux'}P_2 \cap P_1).R_u(P_1)$, et $P'' = ({}^{x^{-1}u}P' \cap P_2).R_u(P_2)$. D'après 4.4, 5.9, il existe $y' \in {}_kW_1$ et $y'' \in {}_kW_2$ tels que ${}^{y'}P' = P''$ et ${}^{y''}P = P''$. Il résulte de la construction de P', P'' que $P'.{}^{x'}P''$ est dense dans $P_1.{}^{x'}P_2$, donc que $P.y'.x'.y''.P$ est dense dans $P_1.x'.P_2$. De même, il existe $\bar{y}' \in {}_kW_1$ et $\bar{y}'' \in {}_kW_2$ tels que $P.\bar{y}'.\bar{x}'.\bar{y}''.P$ soit dense dans $P_1.\bar{x}'.P_2$. Mais alors $y'.x'.y'' = \bar{y}'.\bar{x}'.\bar{y}''$, en vertu de 5.15, et $\bar{x}' \in {}_kW_1.x'.{}_kW_2$.

6.23. *Corollaire. — Soient* P *et* P′ *deux sous-groupes paraboliques de* G *définis sur* k. *Alors, deux doubles classes distinctes de* P_k, P'_k *dans* G_k *sont contenues dans des doubles classes distinctes de* P_K, P'_K *dans* G_K.

6.24. *Remarques. — a)* La proposition 6.22 prend une forme particulièrement simple lorsque $P_1 = P_2 = {}_kP_\emptyset$, k-sous-groupe parabolique minimal, que nous noterons encore P. Dans ce cas, les doubles classes de P_K dans G_K correspondent aux doubles classes de ${}_KW_k^0$ dans ${}_KW$, et la proposition affirme que les doubles classes de P_K qui possèdent un point rationnel dans k sont celles qui correspondent aux doubles classes de ${}_KW_k^0$ dans ${}_KW_k$; ces dernières sont en fait des classes latérales simples, puisque ${}_KW_k^0$ est distingué dans ${}_KW_k$. L'ensemble des points rationnels de la double classe de P_K associée à une classe latérale donnée de ${}_KW_k^0$ dans ${}_KW_k$ est alors la double classe latérale de P_k dans G_k qui correspond à l'élément de ${}_kW$ représentant celle-ci.

b) Lorsque $K = \bar{k}$ (ou, si on préfère, lorsque K est le domaine universel), la proposition 6.22 donne la condition pour qu'une double classe « géométrique » $P_1.g.P_2$ possède des points rationnels sur k. Notons qu'une telle double classe peut être définie sur k sans posséder de points rationnels.

6.25. *Proposition. — Soient* P *et* P^- *deux k-sous-groupes paraboliques minimaux opposés, et soient* U *et* U^- *leurs radicaux unipotents. On a alors* $G_K = U_k . U_K^- . P_K$. *En particulier,* $G = U_k . U^- . P$.

Dans la suite nous supposons, ce qui est loisible (4.8, 4.13, 4.16) que $P \cap P^- = \mathscr{Z}(S)$. Avant de démontrer cette proposition, nous établirons deux corollaires.

6.26. *Corollaire. — Tout élément de* ${}_kW$ *possède un représentant dans l'ensemble* $U_k . U_k^- . U_k$.

En effet, il résulte de 6.25 que $G_k = U_k . U_k^- . P_k = U_k . U_k^- . U_k . \mathscr{Z}(S)_k$.

6.27. *Corollaire. — Étant donnés deux sous-groupes paraboliques* Q, Q′ *conjugués dont l'un est défini sur k, il existe un sous-groupe parabolique défini sur k qui leur est opposé à tous deux.*

On ne nuit pas à la généralité en supposant, dans les notations de 5.12 et 6.25, que $Q = {}_kP_\theta \supset P$ et que ${}_kP_\theta^- = P^-$ (4.8, 5.14). Soit $g \in G$ tel que $Q' = {}^gQ$. Vu 6.25, on peut poser $g = u.u'.p$ avec $u \in U_k$, $u' \in U^-$ et $p \in P$. Alors, le sous-groupe parabolique ${}^u({}_kP_\theta^-) = {}^{u.u'}({}_kP_\theta^-)$ est opposé simultanément à ${}^u({}_kP_\theta) = Q$ et à ${}^{u.u'}({}_kP_\theta) = Q'$.

On aurait pu tout aussi facilement déduire la proposition 6.25 du corollaire 6.27. C'est d'ailleurs essentiellement ce qu'exprime le lemme suivant, première étape de la démonstration de 6.25.

6.28. *Lemme. — Les notations étant celles de* 6.25, *supposons que, pour tout sous-groupe parabolique* P′ *conjugué à* P, *il existe un sous-groupe parabolique défini sur k et opposé simultanément à* P *et à* P′. *Alors,* $G_K = U_k . U_K^- . P_K$ *pour toute extension* K *de* k.

Soit $g \in G_K$ et soit Q un sous-groupe parabolique défini sur k opposé à P et à ${}^gP$. Alors (4.13) il existe $u \in U_k$ tel que ${}^uQ = P^-$. Le groupe ${}^{u.g}P$ est opposé à P^- et défini sur K, donc il existe un $u' \in U_K^-$ tel que ${}^{u'.u.g}P = P$. Mais alors,

$$u'.u.g \in P_K \quad \text{et} \quad g \in u^{-1}.u'^{-1}.P_K \subset U_k . U_K^- . P_K.$$

6.29. *Lemme.* — *Supposons que k soit égal au corps fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments, et que* G *soit k-isogène à* $\mathbf{SU}_3$. *Alors,* G *possède* (q^3+1) *k-sous-groupes de Borel et le nombre des k-sous-groupes de Borel non opposés à un sous-groupe de Borel donné quelconque est inférieur à* $2(q+1)$.

Soit $K=\mathbf{F}_{q^2}$ et soit γ l'élément de $\mathrm{Gal}(K/k)$ distinct de l'identité. Le groupe G est déployé sur K et la variété des sous-groupes de Borel de G (5.24) est définie sur K et peut être identifiée avec la variété des drapeaux (paires formées d'un point et d'une droite le contenant) d'un plan projectif M défini sur K (au sens de la géométrie algébrique), et dont l'ensemble M_K des points rationnels sur K est donc un plan projectif sur K (au sens usuel). Pour tout point $x \in M_K$, le transformé par γ du groupe de stabilité de x laisse invariant une et une seule droite que nous noterons D_x. La correspondance $x \mapsto D_x$ est une « polarité hermitienne » dans M_K (si $G=SU_3(f)$, c'est la polarité associée à la forme hermitienne f). L'identification mentionnée plus haut associe à tout sous-groupe de Borel B le drapeau F qu'il laisse stable, et F est défini sur k si et seulement si B l'est. Il est immédiat que les drapeaux définis sur k sont les drapeaux de la forme (x, D_x), avec $x \in M_K$. Leur nombre est égal à celui des points $x \in M_K$ qui sont isotropes (i.e. qui appartiennent à leur droite polaire D_x), donc à q^3+1.

Soit (y, D) un drapeau de M, et soit B son groupe de stabilité. Pour que le groupe d'isotropie d'un drapeau (x, D_x) rationnel sur k ne soit pas opposé à B, il faut et il suffit que l'on ait soit $x \in D$, soit $y \in D_x$. Comme une droite quelconque contient 0, 1 ou $q+1$ points isotropes rationnels sur K, le nombre de drapeaux (x, D_x) vérifiant la première condition est égal à 0, 1 ou $q+1$. Il en est de même du nombre de drapeaux vérifiant la deuxième condition ; en effet, si $y \in M_K$, cette dernière peut s'écrire $x \in D_y$, et sinon, y est contenu dans au plus une droite définie sur K.

6.30. *Démonstration de la proposition* 6.25.

a) *k est infini.* — La classe de conjugaison $\mathscr{P}$ des k-sous-groupes paraboliques minimaux est auto-opposée (4.14), donc deux éléments de cette classe sont opposés si et seulement s'ils contiennent des sous-groupes de Borel opposés (4.10). Il suit alors de 4.12 que les hypothèses de 6.28 sont vérifiées.

b) *Réduction au cas du rang semi-simple relatif* 1. — Nous nous proposons de montrer que la proposition est vraie en général si elle l'est pour les groupes de rang semi-simple relatif 1. Dans les calculs qui suivent, les indices K sont omis (on peut d'ailleurs, si on veut, se ramener immédiatement au cas où K est le domaine universel, soit en utilisant la relation $(U^-.P)_K=U_K^-.P_K$, soit en combinant la démonstration du corollaire 6.27 et le lemme 6.28). Posons $G^*=U_k.U^-.P$; soit a une k-racine simple quelconque, et désignons par (a) (resp. $(a)^*$) l'ensemble des racines positives proportionnelles (resp. non proportionnelles) à a. La proposition étant supposée vraie pour le groupe $G'=G_{(a)\cup(-a)}$, on a

$$\begin{aligned}G^*.U_{-(a)}=U_k.U^-.\mathscr{Z}(S).U_{(a)}.U_{(a)^*}.U_{-(a)}&=U_k.U_{-(a)^*}.U_{-(a)}.\mathscr{Z}(S).U_{(a)}.U_{-(a)}.U_{(a)^*}=\\&=U_k.U_{-(a)^*}.G'.U_{(a)^*}=U_k.U_{-(a)^*}.U_{(a),k}.U_{-(a)}.\mathscr{Z}(S).U_{(a)}.U_{(a)^*}=\\&=U_k.U_{(a),k}.U_{-(a)^*}.U_{-(a)}.\mathscr{Z}(S).U_{(a)}.U_{(a)^*}=U_k.U^-.P=G^*.\end{aligned}$$

Or $G^*.P = G^*$. Mais P et les groupes $U_{-(a)}$ correspondant à toutes les racines simples engendrent G (5.14). Par conséquent, $G^*.G = G^*$, et $G^* = G$.

c) *k est fini et* $r_k(\mathscr{D}G) = 1$.

Soit $k = \mathbf{F}_q$. Nous voulons montrer que G vérifie l'hypothèse du lemme 6.28. Celle-ci ne change pas si on remplace G par $\mathscr{D}G$. Nous supposerons donc G semi-simple et $r_k(G) = 1$, il est alors presque simple sur k puisqu'il n'existe pas de groupe semi-simple anisotrope non trivial sur un corps fini. Soient $G_0, \ldots, G_{n-1}$ les sous-groupes invariants quasi-simples de G et soit k' le plus petit corps de définition commun des G_i. Le groupe $\mathrm{Gal}(k'/k)$ permute transitivement les G_i, et puisqu'il est cyclique, il est d'ordre n et permute cycliquement les G_i. En particulier, on a $k' = \mathbf{F}_{q^n}$. Soit γ un générateur de $\mathrm{Gal}(k'/k)$. Nous supposerons que G_i est le transformé de G_0, que nous noterons encore G', par γ^i. Le groupe G est k-isogène à $R_{k'/k}(G')$ (6.21 (ii)) donc le k'-rang de G' est égal à 1 (6.21 (i)).

Tout sous-groupe de Borel B de G est un produit $B_0.B_1\ldots B_{n-1}$ de sous-groupes de Borel de $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ respectivement. D'après 6.19, le nombre de k-sous-groupes de Borel de G est égal à celui des k'-sous-groupes de Borel de G'.

Soit $B = B_0 \ldots B_{n-1}$ un sous-groupe de Borel de G. Un autre sous-groupe de Borel $B' = B'_0.B'_1 \ldots B'_{n-1}$ lui est opposé si et seulement si B'_i est opposé à B_i pour tout i. D'autre part, on tire de 4.18, 5.9 que dans un k-groupe réductif, de k-rang semi-simple égal à un, deux k-sous-groupes paraboliques minimaux distincts sont opposés. Par conséquent, pour établir notre assertion il suffira de montrer que si N_i désigne le nombre de sous-groupes de Borel de G_i définis sur k' et non opposés à B_i, on a $\sum_i N_i < N - 1$ quel que soit B. Or il résulte de la classification que G' est, à une k'-isogénie près, le groupe $\mathbf{SL}_2$ ou le groupe $\mathbf{SU}_3$. Dans le premier cas, on a $N = q^n + 1$ et $0 \leqq N_i \leqq 1$, d'où $\sum_i N_i \leqq n < N - 1$. Dans le second cas, il suit du lemme 6.29 que $N = q^{3n} + 1$ et $N_i \leqq 2(q^n + 1)$, d'où $\sum_i N_i \leqq 2n.(q^n + 1) < N - 1$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La prop. 6.25 répond à une question de Grothendieck et Demazure. Elle a aussi été démontrée par Steinberg et Demazure.

§ 7. UN SOUS-GROUPE DÉPLOYÉ MAXIMAL

7.1. *Lemme. — Soient donnés un système de racines de rang 2, et un ordre dans celui-ci. Soient a, b les racines simples, r_a, r_b les réflexions fondamentales correspondantes et* W *le groupe de Weyl. Pour tout entier $i \geqq 1$, posons $c_i = a$ ou b selon que i est pair ou impair et soit $w_i \in W$ défini inductivement par les relations $w_1 = r_b$ et $w_i = r_{c_i}.w_{i-1}$ pour $i \geqq 2$. Soit m (resp. m'; resp. m'') la plus petite valeur de l'entier $i \geqq 2$ telle que $(r_a.r_b)^i = e$ (resp. telle que $w_{i-1}(a)$ soit une racine simple; resp. telle que $w_i(a)$ soit une racine négative). Alors, $m = m' = m''$ et $w_{m-1}(a) = c_m$.*

La racine $w_{m''-1}(a)$ est positive et sa transformée par $r_{c_{m''}}$ est négative. Par conséquent, $w_{m''-1}(a)$ ne peut être que la racine simple $c_{m''}$ [6, § 7, nº 6, Prop. 17]. En particulier, $m' \leqq m''$.

Posons $w_{m'-1}(a) = c$ où c est donc égal à a ou b. On a $w_{m'-1} . r_a . w_{m'-1}^{-1} = r_c$. Selon que $c = c_{m'-1}$ ou $c_{m'}$, cette dernière relation peut encore s'écrire $(r_a . r_b)^{m'-1} = e$ ou $(r_a . r_b)^{m'} = e$. Il en résulte que $m \leqq m'$.

Enfin, la relation $(r_a . r_b)^m = e$ peut s'écrire $w_{m-1} . r_a . w_{m-1}^{-1} = r_{c_m}$, ou encore $w_{m-1}(a) = \pm c_m$. Puisque $m \leqq m''$, c'est le signe $+$ qui doit être retenu. Mais alors, $w_m(a) = r_{c_m}(c_m) = -c_m$, donc $m'' \leqq m$, ce qui achève la démonstration.

Avant d'énoncer le théorème de ce paragraphe, rappelons que dans un système de racines Φ, l'ensemble (d) des multiples entiers positifs d'une racine est égal à $\{d\}$ ou $\{d, 2d\}$ et que d est dite non multipliable dans le premier cas. L'ensemble Φ' des racines non multipliables est un système de racines réduit.

7.2. *Théorème. — Supposons* G *réductif connexe. Soient* S *un tore déployé sur k maximal de* G, $\Phi = \Phi(\mathrm{S}, \mathrm{G})$ *le système des k-racines de* G, Φ' *celui des racines non multipliables de* Φ, *et* Δ *l'ensemble des racines simples de* Φ' *pour un ordre donné sur* $\mathrm{X}^*(\mathrm{S})$. *Pour tout* $a \in \Delta$, *soit* E_a *un k-sous-groupe de dimension un de* $\mathrm{U}_{(a)}$ *normalisé par* S *et soit* V *le groupe engendré par les* E_a. *Alors* G *possède un unique sous-groupe réductif* F *connexe déployé sur k contenant* S.V. *Le tore* S *est un tore maximal de* F *et* $\Phi' = \Phi(\mathrm{S}, \mathrm{F})$. *En particulier,* $\mathrm{W}(\mathrm{F}) \cong_k \mathrm{W}(\mathrm{G})$. *Pour tout* $d \in \Phi$, *l'intersection* $\mathrm{U}_{(d)} \cap \mathrm{F}$ *est le groupe radiciel* $\mathrm{U}_{d'}$ *de* F *correspondant à la racine d' de* Φ' *contenue dans* (d).

Pour tout élément $b \in \Phi'$, on a $(b) = \{b\}$, donc le groupe $\mathrm{U}_{(b)}$ admet une structure d'espace vectoriel sur k telle que $\mathrm{Int}\, s$ $(s \in \mathrm{S})$ soit l'homothétie de rapport s^b (3.18, rem.). Par suite, tout k-sous-groupe de dimension un de $\mathrm{U}_{(b)}$ stable par S est k-isomorphe au groupe additif $\mathbf{G}_a$. Cela vaut en particulier pour les groupes E_a de l'énoncé.

Soit v un élément quelconque de $\mathrm{E}_{a,k}$, distinct de l'élément neutre. D'après le théorème 5.15, appliqué au groupe réductif $\mathrm{G}_{\{a,-a\}}$ (3.4, 3.8), v possède une décomposition unique de la forme

$$(1) \qquad v = v' . n_a . v'', \qquad (v', v'' \in \mathrm{U}_{(-a)}\,;\; n_a \in \mathscr{N}(\mathrm{S}), \quad \text{et} \quad v', v'', n_a \in \mathrm{G}_k).$$

Soit s un élément de S tel que $s^a = -1$. On a

$$v = {}^s(v^{-1}) = {}^s(v''^{-1}) . {}^s(n_a^{-1}) . {}^s(v'^{-1}) = v'' . {}^s(n_a^{-1}) . v',$$

d'où, en vertu de l'unicité de (1), $v' = v''$, ${}^s(n_a^{-1}) = n_a$, et

$$(2) \qquad n_a^2 = (n_a, s) \in \mathrm{S}_k.$$

Posons $\mathrm{E}_{-a} = \{{}^s v' \mid s \in \mathrm{S}\} \cup \{e\}$. On a vu que $\mathrm{U}_{(-a)}$ a une structure d'espace vectoriel sur k telle que la conjugaison par $s \in \mathrm{S}$ soit la multiplication scalaire par s^{-a}. Donc E_{-a} est un k-groupe k-isomorphe au groupe additif. On a, pour tout $s \in \mathrm{S}$,

$$\mathrm{S} . \mathrm{E}_{-a} . {}^s v = \mathrm{S} . \mathrm{E}_{-a} . {}^s n_a . {}^s v'\,;$$

comme ${}^{s}n_a \in n_a . S = S . n_a$, on en tire, par réunion étendue à S,

$$S . E_{-a} . (E_a - \{e\}) = S . E_{-a} . n_a . (E_{-a} - \{e\}). \tag{3}$$

Multiplions membres à membres cette relation et celle qu'on en déduit en remplaçant chaque membre par son inverse; il vient, compte tenu de (2),

$$S . E_{-a} . E_a . E_{-a} = S . E_{-a} . n_a . E_{-a} . n_a . E_{-a}.$$

Posons

$$Y_a = S . E_{-a} . \{e, n_a\} . E_{-a}. \tag{4}$$

De (3) multipliée à droite par E_{-a}, il résulte que Y_a est aussi égal à $S . E_{-a} . E_a . E_{-a}$. Donc

$$S . E_{-a} . n_a . E_{-a} . n_a . E_{-a} = Y_a.$$

Il s'ensuit que $Y_a . Y_a \subset Y_a$. D'autre part, $Y_a^{-1} = Y_a$. Par conséquent Y_a est un groupe qui, étant engendré par E_a, E_{-a} et S, est connexe et défini sur k. Du théorème 5.15 (où il faut remplacer l'ensemble des racines positives par celui des racines négatives) il résulte que $Y_a \cap U_{(-a)} = E_{-a}$. En transformant cette relation par n_a, on voit que $n_a . E_{-a} . n_a^{-1}$ contient E_a; pour raison de dimension, il s'ensuit que

$$n_a . E_{-a} . n_a^{-1} = E_a. \tag{5}$$

Transformons à présent la relation (4) par n_a; il vient

$$Y_a = S . E_a . \{e, n_a\} . E_a. \tag{6}$$

Soient $a, b \in \Delta$ deux racines simples quelconques, (a, b) l'ensemble de toutes les racines de la forme $m.a + n.b$ avec m et n entiers strictement positifs, E_{ab} le groupe engendré par E_a et E_b, et $E'_{ab} = (E_a, E_b)$ le groupe engendré par les commutateurs (x, y) avec $x \in E_a$ et $y \in E_b$. On a $E'_{ab} = E'_{ba}$, et d'après 3.10,

$$E'_{ab} \subset U_{(a,b)}. \tag{7}$$

En vertu de l'identité

$${}^{v}(x, y) = (v . x, y) . (v, y)^{-1},$$

E'_{ab} est normalisé par E_a, donc le produit $E_a . E'_{ab}$ est un groupe que nous noterons X_{ab}. Celui-ci est normalisé par E_b, car E_b normalise E'_{ab} et $(E_b, E_a) = E'_{ab} \subset X_{ab}$. Par conséquent

$$E_{ab} = X_{ab} . E_b = E_a . E'_{ab} . E_b. \tag{8}$$

Il résulte alors de (7) et 3.11 qu'on a $E_{ab} \cap U_{(a)} = E_a$ et $E_{ab} \cap U_{(b)} = E_b$, ce qui nous permet, sans risque de contradiction dans les notations, de poser pour tout $c \in (a, b) \cup \{a, b\}$,

$$E_c = E_{ab} \cap U_{(c)}.$$

L'ensemble $A = \{{}^{x}y \mid x \in E_b - \{e\}, y \in E_a\}$ est un système générateur de X_{ab}. En effet, cet ensemble étant normalisé par S, il en est de même du groupe qu'il engendre, et il résulte alors de 3.11 qu'en même temps que ${}^{x}y = (x, y) . y^{-1}$, ce groupe contient (x, y)

et y^{-1}. Aucune combinaison linéaire $m.a-n.b$, avec m et n entiers strictement positifs, n'étant une racine, les groupes E_a et E_{-b} commutent comme on le voit à partir de 3.10, en utilisant un ordre sur $X^*(S)$ tel que $a, -b>0$. Par conséquent, si on pose

$$Y_b^* = (E_b - \{e\}).S.E_{-b} = Y_b - \{e, n_b\}.S.E_{-b},$$

on a $A = \{{}^x y \mid x \in Y_b^*, y \in E_a\}$. Or, d'après (2) et la deuxième expression donnée pour l'ensemble Y_b^*, celui-ci est invariant par multiplication à gauche par n_b. Il s'ensuit que A est normalisé par n_b et il en est donc de même de X_{ab} :

(9) $$n_b.X_{ab}.n_b^{-1} = X_{ab}.$$

De (5), (8), (9) et 3.11, il résulte que, si r_a désigne (pour tout $a \in \Delta$) la réflexion fondamentale correspondant à a, on a, pour tout $c \in (a, b) \cup \{a, b\}$,

(10) $$n_b.E_c.n_b^{-1} = E_{r_b(c)}.$$

Soient $m(a, b)$ l'ordre du produit $r_a.r_b$ dans le groupe de Weyl relatif ${}_kW$, $n_{ab} = \ldots n_a.n_b$ le produit de $m(a, b)-1$ facteurs alternativement égaux à n_b et à n_a, en commençant par la droite, et $c(a, b)$ la racine simple égale à a ou b selon que $m(a, b)$ est pair ou impair. On a alors, en vertu de (10) et du lemme 7.1,

$$n_{ab}.E_a.n_{ab}^{-1} = E_{c(a,b)},$$

et, par ailleurs

$$n_{ab}.U_{(-a)}.n_{ab}^{-1} = U_{(-c(a,b))}.$$

Transformons à présent la relation (1) par n_{ab}; on voit, compte tenu des deux relations précédentes et du théorème 5.15, que

$$n_{ab}.n_a.n_{ab}^{-1} \in n_{c(a,b)}.S_k,$$

ou encore, en utilisant (2),

(11) $$(n_a.n_b)^{m(a,b)} \in S_k.$$

Les relations (2) et (11) et la définition classique des groupes de Weyl par générateurs et relations montrent que, si M désigne le groupe engendré par S et les n_a $(a \in \Delta)$, on a

(12) $$M \cap \mathscr{Z}(S) = S,$$

et que l'application canonique $M_k \rightarrow {}_kW$ est surjective.

Soit V_a^* le groupe engendré par les X_{ba} $(b \in \Delta - \{a\})$; puisque E_a normalise les X_{ba}, il normalise aussi V_a^*, donc

$$V = E_a.V_a^* = V_a^*.E_a.$$

Soit $(a)'$ (resp. $(a)^*$) l'ensemble des racines positives proportionnelles (resp. non proportionnelles) à a. En vertu de (7), V_a^* est contenu dans $U_{(a)^*}$, donc on a, d'après 3.11,

(13) $$V \cap U_{(a)'} = E_a,$$

et

(14) $$V \cap U_{(a)^*} = V_a^*.$$

D'autre part, il résulte de (9) que

(15) $$n_a . V_a^* . n_a^{-1} = V_a^* .$$

Nous nous proposons à présent de montrer que

(16) si $m \in M$ et si l'image canonique w de m dans ${}_k W$ transforme a en une racine positive, alors $m . E_a . m^{-1} \subset V$.

La démonstration se fera par induction sur le nombre de racines positives transformées en racines négatives par w^{-1}. Si ce nombre est nul, $w = e$, et l'assertion est évidente. Soit $w \neq e$, soit $b \in \Delta$ tel que $w^{-1}(b) < 0$, posons $w' = r_b . w$ et $m' = n_b . m$. En vertu de l'hypothèse d'induction, on a $m' . E_a . m'^{-1} \subset V = E_b . V_b^*$. Mais $w'(a)$ n'est pas proportionnelle à b (puisque $w(a) > 0$), donc, d'après (14), $m' . E_a . m'^{-1} \subset V_b^*$. En transformant les deux membres de cette relation par n_b, il vient, tenant compte de (15), $m . E_a . m^{-1} \subset V_b^* \subset V$, ce qui établit (16).

Faisant usage de (4), (15), (16), et du fait que Y_a est un groupe, on peut reproduire ici les calculs de 5.16, d'où il résulte que, pour tout $m \in M$ et tout $a \in \Delta$, on a

$$n_a . V . \{n_a, n_a . m\} . V . S = V . \{n_a, n_a . m\} . V . S.$$

Il en résulte immédiatement (cf. par ex. [33]) que le produit $F = V . M . V$ est un groupe, qui, étant engendré par S, les E_a et les E_{-a}, est connexe et défini sur k. Soit d une racine quelconque, soient (d) et d' définis comme dans l'énoncé, et soit m un élément de M_k dont l'image canonique w dans ${}_k W$ transforme d' en un élément de Δ que nous désignerons par a, de sorte que $w((d)) = (a)$ ou $(a)'$. Il résulte alors du théorème 5.15 et de (13) que

$$m . (F \cap U_{(d)}) . m^{-1} = E_a .$$

Par conséquent, $F \cap U_{(d)} = m^{-1} . E_a . m$ est un sous-groupe de $U_{(d')}$ isomorphe sur k au groupe additif, et que nous noterons $E_{d'}$; il est clair que cette notation est cohérente avec celles introduites plus haut. Si d' est positive, $E_{d'}$ est contenu dans V (par exemple en vertu de (16)), donc on a, d'après 3.11,

(17) $$V = \prod_{d' \in \Phi'^+} E_{d'} .$$

Le groupe Y_a n'est pas résoluble, car s'il l'était, son radical unipotent contiendrait E_a et E_{-a}, donc n_a, donc aussi tout commutateur (n_a, s), avec $s \in S$, ce qui est absurde. Tout sous-groupe Q de F contenant le produit S.V et distinct de lui contient au moins un élément de M dont l'image canonique w dans ${}_k W$ est distincte de e. Il existe alors au moins une racine simple a dont la transformée par w est négative. Mais alors Q contient E_{-a}, donc Y_a, et n'est pas résoluble. Le sous-groupe S.V étant résoluble (puisque contenu dans $S . U^+$), c'est un sous-groupe de Borel de F, et V en est un sous-groupe unipotent maximal. Soit m un élément de M dont l'image canonique dans ${}_k W$ transforme les racines positives en les racines négatives. Le transformé $V^- = {}^m V$ est aussi un sous-groupe unipotent maximal de F et on a $R_u(F) \subset V \cap V^- = \{e\}$ (3.22), donc F est réductif. En vertu du théorème 5.15, $F \cap \mathscr{Z}(S) = \mathscr{Z}_F(S) = S$, par conséquent S est un tore maximal de F. Les $E_{d'}(d' \in \Phi')$ sont des sous-groupes radiciels à un paramètre de F relativement à S, et ce sont les seuls, en vertu de la relation (17) et de sa transformée par m. Le groupe F est donc déployé et Φ' est le système des racines de F par rapport à S.

Enfin, soit $\overline{F}$ un sous-groupe réductif déployé de G contenant S.V. Le tore S est un tore maximal de $\overline{F}$. En vertu de (17), les $E_{d'}$, avec $d' \in \Phi'^+$ sont des sous-groupes radiciels à un paramètre de $\overline{F}$ relatifs à S. En particulier, le système des racines de $\overline{F}$ contient Φ'^+. Comme, d'autre part, il est nécessairement réduit, et contenu dans Φ, il ne peut être que Φ'. Soient a une racine simple, $v \in E_{a,k}$ et $\overline{E}_{-a}$ le sous-groupe radiciel à un paramètre de $\overline{F}$ relatif à $-a$. En appliquant le théorème 5.15 au groupe engendré par S, E_a et $\overline{E}_{-a}$, on voit qu'il doit exister des éléments $\overline{n}_a \in \mathscr{N}(S)_k$ et $\overline{v}', \overline{v}'' \in \overline{E}_{-a,k}$ tels que $v = \overline{v}'.\overline{n}_a.\overline{v}''$. Comme $\overline{E}_{-a}$ est contenu dans $U_{(-a)}$ (3.19), cette décomposition de v doit coïncider avec la décomposition (1). En particulier, $\overline{v}' = v'$, donc $\overline{E}_{-a} = E_{-a}$ et $\overline{F} = F$, ce qui achève la démonstration du théorème.

7.3. *Remarques.* — Le théorème 7.2 suggère les questions suivantes :

(i) Les sous-groupes F correspondant à divers choix des E_a sont-ils conjugués entre eux?

(ii) Lorsqu'ils sont conjugués, deux sous-groupes F le sont-ils sur k?

(iii) Le groupe F est-il le seul sous-groupe réductif déployé contenant V?

(iv) Les sous-groupes F du théorème 7.2 sont-ils les seuls sous-groupes réductifs déployés maximaux de G?

La réponse aux quatre questions est négative, comme le montrent les exemples suivants.

Soient $f = x.y + f_1(z_1, z_2, z_3)$ une forme quadratique à cinq variables d'indice 1 (i.e. f_1 est anisotrope) et de défaut 1 si la caractéristique est 2, et $G = \mathbf{O}^+(f)$. Le groupe G n'a que deux racines relatives opposées, $\pm a$, et on voit immédiatement que (i) (resp. (ii)) a une réponse affirmative si et seulement si deux sous-espaces vectoriels à une dimension de $U_{(a)}$, définis sur k, sont conjugués par un élément de $\mathscr{Z}(S)$ (resp. $\mathscr{Z}(S)_k$). Dans le cas présent, $\mathscr{Z}(S) = S \times \mathbf{O}^+(f_1)$, et le second facteur opère sur $U_{(a)}$ (qui a 3 dimensions) par la représentation usuelle. On obtient donc un contre-exemple à (i) en supposant la caractéristique égale à 2 (k est alors nécessairement non parfait) et un contre-exemple à (ii) en supposant la caractéristique $\neq 2$, et en prenant pour f_1 une forme dont les valeurs ne forment pas une seule classe de restes quadratiques.

Soit à présent $G = SU_3(f)$ un groupe spécial unitaire, correspondant à une forme hermitienne f d'indice 1 (groupe quasi-déployé : cf. [35]). Ce groupe, de k-rang égal à 1, possède quatre k-racines $\pm d$ et $\pm 2d$. Le groupe $U_{(2d)}$ a une dimension. On obtient un contre-exemple à (iii) en conjuguant F par un élément de $U_{(d),k}$ n'appartenant pas à $U_{(2d)}$. Supposons à présent k de caractéristique 0, et soit $V' \neq U_{(2d)}$ un sous-groupe de dimension 1 de $U_{(d)}$ défini sur k. Il résulte du théorème de Jacobson-Morozov [14, th. 17, p. 100] que V' est contenu dans un sous-groupe de G isogène sur k à $\mathbf{SL}_2$, lequel constitue un contre-exemple à (iv), car on vérifie aisément que V' et $U_{(2d)}$ ne sont pas conjugués (par exemple, le normalisateur de V' est $S.V'$ tandis que celui de $U_{(2d)}$ est $\mathscr{Z}(S).U_{(d)}$).

II. — COMPLÉMENTS ET APPLICATIONS

§ 8. SOUS-GROUPES TRIGONALISABLES (k PARFAIT)

8.1. Un sous-groupe fermé de $\mathbf{GL}_n$ est dit *trigonalisable sur un corps* K s'il est défini sur K et conjugué sur K à un sous-groupe du groupe $\mathbf{T}_n$ des matrices triangulaires supérieures. Il est alors nécessairement résoluble.

Supposons G connexe résoluble. La prop. 5 de [23] et l'existence d'un tore maximal défini sur k (2.14, ou [26], ou 11.4) montrent que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est k-isomorphe à un groupe matriciel trigonalisable sur k.

(ii) G possède un tore maximal déployé sur k, et son radical unipotent G_u est défini sur k.

(iii) Toute image de G par un k-morphisme $G \to \mathbf{GL}_m$ est trigonalisable sur k.

On dira que G est *trigonalisable sur* k s'il vérifie ces propriétés. Tout groupe résoluble connexe déployé sur k est trigonalisable sur k [23, prop. 7]. La réciproque n'est pas vraie en général puisque un k-groupe unipotent est toujours trigonalisable sur k [23, cor. 1, p. 33] mais n'est pas nécessairement déployé sur k [23, p. 35]. Elle l'est cependant sur un corps parfait [23, cor. 2, p. 34]. Vu (ii), un tore est déployé sur k si et seulement s'il est trigonalisable sur k.

8.2. *Théorème. — Supposons k parfait. Alors les sous-groupes résolubles déployés sur k maximaux (resp. les tores déployés sur k maximaux, resp. les k-sous-groupes unipotents connexes maximaux) de* G *sont conjugués sur k. Si* H *est un sous-groupe résoluble déployé sur k maximal, alors* $G_k/H_k = (G/H)_k$ *s'identifie à l'ensemble des points rationnels sur k d'une k-variété projective sur laquelle* G *opère.*

Soit H un sous-groupe résoluble déployé sur k de dimension maximum de G. On choisit une réalisation linéaire de G comme k-groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V sur k contenant une droite W définie sur k telle que $H = \{g \in G \mid g(W) = W\}$, ce qui est toujours possible [25, p. 222]. Comme H est résoluble, déployé sur k, son image par le morphisme naturel dans $GL(V/W)$ est trigonalisable sur k (cf. 8.1). Il existe donc un drapeau F_0 de V, défini sur k, stable par H, dont la droite est W. Le groupe H est alors *a fortiori* le groupe de stabilité de F_0 dans G. Soit B le groupe de stabilité de F_0 dans GL(V). C'est un groupe de Borel de GL(V), la variété des drapeaux $\mathscr{F}(V)$ s'identifie au quotient $GL(V)/B$, et la projection canonique $\pi : GL(V) \to \mathscr{F}(V)$ est surjective pour les points rationnels sur k (4.13).

Montrons que

$$G(F_0)_k = \overline{(G(F_0))}_k. \tag{1}$$

Soient $P \in \overline{(G(F_0))}_k$ et G_P le groupe d'isotropie de P dans G. Comme P est un drapeau défini sur k, son groupe de stabilité est trigonalisable sur k, donc la composante neutre de G_P est un groupe résoluble déployé sur k; par conséquent, $\dim G_P \leqq \dim H$ et $\dim G(P) \geqq \dim G(F_0)$. Mais l'adhérence de $G(F_0)$ est réunion de $G(F_0)$ et d'orbites de dimensions strictement plus petites [1, § 16], donc $P \in G(F_0)_k$.

Soit maintenant L un sous-groupe résoluble déployé sur k de G. Il opère sur $\mathscr{F}(V)$ en laissant la variété complète $\overline{G(F_0)}$ stable. Comme cette dernière est définie sur k et possède au moins un point rationnel sur k, le groupe L admet un point fixe $P \in \overline{(G(F_0))}_k$ (2.7 (i)), qui, vu (1), est en fait dans $G(F_0)_k$. Mais, H étant déployé sur k, la projection canonique $G_k \to G(F_0)_k$ est surjective (2.7 (ii)). Il existe alors $g \in G_k$ tel que $g.F_0 = P$, donc tel que $g^{-1}.L.g \subset H$, ce qui montre que tout sous-groupe résoluble déployé sur k de G est conjugué sur k à un sous-groupe de H. L'assertion de conjugaison des sous-groupes unipotents résulte alors du fait que tout k-groupe unipotent connexe est déployé sur k, celle des tores maximaux du fait que, dans H, les tores maximaux définis sur k sont conjugués sur k (voir [26], ou aussi (11.4); on peut du reste donner une démonstration de ce fait plus simple dans le cas des groupes déployés sur un corps parfait).

8.3. *Lemme. — Supposons* G *connexe et* k *de caractéristique zéro. Alors tout* k*-sous-groupe unipotent* V *de* G *est contenu dans un* k*-sous-groupe parabolique minimal* P *de* G, *et l'on a* $P \neq G$ *si* $V \not\subset R_u(G)$.

Soit $\pi : G \to G' = G/R_u(G)$ la projection canonique. Les k-sous-groupes de G contenant $R_u(G)$ sont les images réciproques des k-sous-groupes de G' et si H est l'un d'eux, $G/H \simeq G'/\pi(H)$. L'application $H \mapsto \pi(H)$ est donc une bijection pour les k-sous-groupes paraboliques minimaux, et l'on peut se borner au cas où G est réductif.

Soit V un k-sous-groupe unipotent $\neq \{e\}$ de G. Il contient un k-sous-groupe unipotent V' de dimension un. D'après le théorème de Jacobson-Morosow [14, Chap. III, th. 17, p. 100], il existe un homomorphisme de $\mathfrak{sl}_{2,k}$ dans $\mathfrak{g}_k$ dont l'image contient $\mathfrak{v}'_k$. Comme, en caractéristique zéro, toute représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ d'un groupe semi-simple connexe et simplement connexe H, est la différentielle d'une représentation (rationnelle) de H, on voit qu'il existe aussi un k-morphisme $f : \mathbf{SL}_2 \to G$ dont l'image contient V'. Ce morphisme est de noyau fini, donc G contient un tore $S \neq \{e\}$ déployé sur k (par exemple l'image par f du groupe des matrices diagonales de $\mathbf{SL}_2$), et par conséquent un k-sous-groupe parabolique propre P (4.17). Le groupe V est déployé sur k, donc possède un point fixe dans $(G/P)_k$ vu 2.7, et est alors conjugué sur k à un sous-groupe de P d'après 4.13 *a)*, d'où le lemme.

8.4. *Proposition. — Supposons* G *connexe et k de caractéristique zéro. Alors les k-sous-groupes unipotents maximaux de* G *sont les radicaux unipotents des k-sous-groupes paraboliques minimaux de* G.

Comme précédemment, on voit en considérant la projection de G sur $G/R_u(G)$ que l'on peut se borner au cas où G est réductif.

Soient P un k-sous-groupe parabolique minimal de G, S un tore déployé sur k maximal de G contenu dans P. On a la décomposition de Levi $P=\mathscr{Z}(S).R_u(P)$ et $R(P)\supset S.R_u(P)$ (4.16). Soit V un k-sous-groupe unipotent non trivial de G. Vu 8.3, il suffit de considérer le cas où $V\subset P$, et nous avons alors à montrer que $V\subset R_u(P)$, ou, ce qui revient au même, que $V\subset R(P)$. Si ce n'était pas le cas, le groupe réductif $P/(S.R_u(P))\cong\mathscr{Z}(S)/S$ contiendrait un k-sous-groupe unipotent non trivial, donc un tore déployé sur k non trivial (8.3, 4.17), ce qui contredirait l'hypothèse faite sur S, vu 1.9 *b)*.

8.5. *Corollaire. — Supposons* G *réductif et k de caractéristique zéro. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est anisotrope sur k.*

(ii) G *ne contient aucun k-sous-groupe unipotent non trivial, et* $X^*(G^0)_k=\{0\}$.

(iii) G_k *est formé d'éléments semi-simples, et* $X^*(G^0)_k=\{0\}$.

Le groupe G est produit presque direct de son groupe dérivé, qui est semi-simple, par son centre connexe Z (2.2), donc $X^*(G^0)_k$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $X^*(Z)_k$ et, vu 1.7, 1.8, on a

$$X^*(G^0)_k=\{0\}\Leftrightarrow Z_d=\{1\}. \tag{1}$$

En caractéristique zéro, tout groupe algébrique unipotent est connexe, donc chacune des conditions de 8.5 équivaut à cette même condition pour G^0, et l'on peut supposer G connexe. Alors, (i) $\Rightarrow$ (ii) d'après 8.3, 4.17 et (1). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de l'existence d'une décomposition de Jordan pour les éléments de G_k [1, th. 8.4], et (iii) entraîne (i) en vertu de (1) et 4.17.

8.6. *Proposition. — Supposons* G *connexe et k de caractéristique zéro. Soient* P *un k-sous-groupe parabolique minimal et* H *un k-sous-groupe connexe contenant* $R_u(P)$. *Alors* $\mathscr{N}(R_u(H))=P'$ *est un k-sous-groupe parabolique contenant* P, *et* $R_u(P')=R_u(H)$. *Le groupe* H *contient le plus petit k-sous-groupe distingué de* P′ *contenant* $R_u(P)$.

On se ramène comme plus haut au cas où G est réductif. Soit $\pi: H\to H'=H/R_u(H)$ la projection canonique. Vu 8.4, $\pi(R_u(P))=U'$ est un k-sous-groupe unipotent maximal de H′. Soit V′ le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique minimal de H′ opposé à $\mathscr{N}(U')$ (4.9). D'après 4.11, U′ et V′ engendrent un sous-groupe distingué de H′, donc $U=R_u(P)=\pi^{-1}(U')$ et $V=\pi^{-1}(V')$ engendrent un k-sous-groupe distingué H_1 de H. Comme H_1 contient $R_u(H)$, on a $R_u(H)=R_u(H_1)$. Le groupe $\mathscr{N}(V)$ étant un k-sous-groupe parabolique (8.4), 4.29 montre que $P''=\mathscr{N}(H_1)$ est un k-sous-groupe parabolique contenant P, dont le radical unipotent est égal à celui de H_1. On a donc aussi $P''=\mathcal{N}(R_u(H_1))=\mathcal{N}(R_u(H))=P'$ et $R_u(P')=R_u(H_1)=R_u(H)$. Par construction $H\supset H_1\supset R_u(P)$ et H_1 est engendré par $R_u(P)$ et par un sous-groupe V qui est aussi conjugué à U dans P' vu 8.4, donc H_1 est le plus petit sous-groupe distingué de P' contenant $R_u(P)$.

8.7. *Proposition. — Supposons* G *réductif et k de caractéristique* 0. *Soient* H *et* H' *deux k-sous-groupes de* G *conjugués. Alors si* H *contient un k-sous-groupe unipotent (resp. un sous-groupe résoluble déployé sur k) maximal de* G, *il en est de même pour* H'.

On peut supposer H connexe. Dans les deux cas envisagés, il existe, vu 8.4, un k-sous-groupe parabolique minimal P tel que $H\supset U=R_u(P)$. Soient $Q=\mathcal{N}(R_u(H))$ et $Q'=\mathcal{N}(R_u(H'))$. D'après 8.6, Q est un k-sous-groupe parabolique et $R_u(Q)=R_u(H)$. Comme H et H' sont conjugués sur une extension convenable K de k, les groupes Q et Q' sont conjugués sur K, et Q' est aussi un sous-groupe parabolique. Il est évidemment défini sur k, donc conjugué sur k à Q (4.13). On peut par conséquent se borner au cas où $Q=Q'$. Soit H_1 le plus petit sous-groupe distingué de Q contenant U. Vu 8.6, il fait partie de H. D'autre part, un élément $x\in G_K$ tel que ${}^xH=H'$ doit normaliser Q, donc faire partie de Q (4.3), donc normaliser H_1, d'où $H'={}^xH\supset H_1\supset U$.

Supposons maintenant que H contienne un sous-groupe résoluble déployé sur k maximal de G. Vu 8.2, 8.4, on peut supposer que $H\supset S.R_u(P)$, où S est un tore déployé sur k maximal de G contenu dans R(P), et il reste à prouver que H' contient un tore déployé sur k maximal de G. En utilisant ce qui a déjà été obtenu, et 8.6, on se ramène au cas où $Q=\mathcal{N}(H)=\mathcal{N}(H')$ et $R_u(Q)=R_u(H)=R_u(H')$, et où il existe $x\in Q$ tel que ${}^xH=H'$.

Le groupe Q admet une décomposition de Levi $Q=\mathscr{Z}(S').R_u(Q)$, où $S'=S\cap R(Q)$ est un tore déployé sur k maximal de R(Q), donc est aussi le plus grand tore déployé sur k central de $\mathscr{Z}(S')$ (4.15, 4.19). Le groupe $S'.R_u(Q)$ est invariant dans Q, contenu dans H, donc aussi dans H'. Le groupe $\mathscr{Z}(S')$ est produit presque direct sur k de S' et d'un k-groupe M, qui ne possède pas de tore déployé sur k central non trivial, et l'on a $H=(H\cap M).S'.R_u(Q)$, $H'=(H'\cap M).S'.R_u(Q)$. D'après 4.27, il suffit de faire voir que $H'\cap M$ contient un tore déployé sur k maximal de M. Comme les tores déployés sur k maximaux se correspondent par isogénie séparable (4.25), on voit, en considérant les images de H et H' dans $Q/(S'.R_u(Q))$, que l'on est ramené au cas où G n'a pas de tore central non trivial déployé sur k et ou H possède un k-sous-groupe H_1 réductif, qui est invariant dans G et contient $R_u(P)$. Le groupe G est alors produit presque direct de H_1 et d'un k-groupe réductif H_2. Ce dernier n'a pas de k-sous-groupe non trivial unipotent (sinon $R_u(P)$ ne serait pas un k-groupe unipotent maximal) et ne possède pas de tore déployé sur k central non trivial, puisque G n'en a pas; par suite H_2 est anisotrope sur k (8.5), et (4.27) H_1 contient tout tore déployé sur k maximal de G. Comme $H'\supset H_1$ cela termine la démonstration.

Remarque. — On renvoie à un article en préparation de l'un de nous pour des extensions de 8.3 à 8.7 à des corps de base plus généraux.

§ 9. SOUS-GROUPES TRIGONALISABLES (CORPS LOCALEMENT COMPACT DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO)

9.1. Soit K un corps localement compact de caractéristique zéro. (K est donc isomorphe à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou à un corps p-adique, *i.e.* à une extension finie d'un corps $\mathbf{Q}_p$ (p premier).) Soit V une variété algébrique sur K. Alors V_K est munie canoniquement d'une topologie d'espace localement compact séparé. Si $f: V \to W$ est un K-morphisme de V dans une variété algébrique W sur K, alors $f_K : V_K \to W_K$ est continue. Enfin, si V est irréductible, non singulière, de dimension n, alors V_K est une K-variété analytique de dimension m [39, App. III].

Rappelons encore que si V est un espace homogène sur K d'un K-groupe algébrique H, alors V_K est réunion d'un nombre fini d'orbites de H_K [5, § 6.4], qui sont des sous-variétés analytiques ouvertes et fermées de V_K.

9.2. *Lemme.* — *Supposons k localement compact de caractéristique zéro et* G *résoluble, déployé sur k. Soit* V *une k-variété algébrique sur laquelle* G *opère k-morphiquement. Soit* M *un sous-ensemble compact non vide de* V_k *stable par* G_k. *Alors* M *contient un point fixe par* G_k (1).

La démonstration procède par récurrence sur dim G. Supposons tout d'abord G de dimension un, donc isomorphe à $\mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$. Soient $v \in M$ et Y l'adhérence de $G.v$. Admettons tout d'abord que $Y \cap M = G.v \cap M$. Alors $G.v \cap M$ est fermé donc compact. Mais $(G.v)_k$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de G_k, qui sont ouvertes et fermées dans $(G.v)_k$. Par suite, $G.v \cap M$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de G_k, qui sont compactes. Chacune est de la forme G_k/H_k, où H est un k-sous-groupe fermé de G, et comme $G = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$, cela entraîne $G = H$; donc v est fixe par G. Supposons maintenant $Y \cap M \neq G.v \cap M$, et soit $y \in M \cap Y$, $y \notin G.v$. Son orbite $G.y$ est de dimension strictement plus petite que celle de v [1, § 16], donc est de dimension zéro, et y est un point fixe.

Si $\dim G > 1$, le groupe G contient un k-sous-groupe invariant connexe N de codimension un déployé sur k. L'ensemble W des points fixes par N est une k-sous-variété algébrique de V, et $W \cap M$ est non vide par hypothèse d'induction. Le groupe G/N opère k-morphiquement sur W [25, prop. 2] et $(G/N)_k$ laisse $W \cap M$ stable. Comme G est déployé sur k, G/N l'est aussi, et l'on est ramené au cas précédent.

9.3. *Proposition.* — *Supposons k localement compact de caractéristique zéro, et soit* H *un k-sous-groupe fermé de* G. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *contient un sous-groupe connexe trigonalisable sur k maximal de* G^0.

(ii) G_k/H_k *est compact.*

(iii) $(G/H)_k$ *est compact.*

Le groupe $(G^0)_k$ est ouvert, d'indice fini dans G_k. On peut donc se borner au cas où G est connexe.

(1) L'énoncé original supposait V complète. Indépendamment, J. I. Hano a mentionné dans une lettre à l'un de nous ce lemme lorsque $k = \mathbf{R}$, ce qui nous a conduit à lever la restriction faite d'abord sur V.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit L un sous-groupe connexe trigonalisable sur k maximal de G contenu dans H. Alors G_k/L_k s'identifie à l'ensemble des points rationnels sur k d'une k-variété projective (8.2), donc est compact. *A fortiori*, G_k/H_k est compact.

(ii) $\Rightarrow$ (i) En appliquant 9.2 au cas où $V = G/H$ et $M = G_k/H_k$, on voit que tout sous-groupe résoluble connexe déployé sur k de G admet un point fixe dans G_k/H_k, donc est conjugué sur k à un sous-groupe de H.

$(G/H)_k$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de G_k (9.1). On peut donc trouver un nombre fini de k-sous-groupes H_i ($1 \leq i \leq m$, $H_1 = H$) de G tels que $(G/H)_k = \bigcup_i G_k/H_{i,k}$, et chaque orbite est ouverte et fermée dans $(G/H)_k$. Cela prouve que (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Il reste à montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii). Les groupes H_i sont évidemment conjugués de $H = H_1$ sur une extension convenable K de k (puisque ce sont des groupes de stabilité dans une même orbite de G). Il résulte donc de 8.7 que pour tout i, H_i contient un sous-groupe résoluble déployé sur k maximal de G. Vu l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) déjà établie, il s'ensuit que $G_k/H_{i,k}$ est compact pour tout i, donc que $(G/H)_k$ est compact.

Remarque. — L'équivalence de (i) et (ii) a été aussi obtenue par I. Satake (*Publ. Math.*, I.H.E.S., Paris, n° 18 (1964), prop. 1, § 1), et pour $k = \mathbf{R}$ par R. Hermann (*Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A., *51* (1964), 456-461) et J. I. Hano.

9.4. *Corollaire.* — *Le groupe* G_k *est compact si et seulement si* G *est réductif et anisotrope sur* k.

Si G_k est compact, alors tout k-sous-groupe connexe trigonalisable sur k est réduit à l'élément neutre, donc G est réductif, et, vu 8.5, anisotrope sur k. La réciproque est conséquence de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de 9.3.

§ 10. CLASSES DE CONJUGAISON FERMÉES ET CENTRALISATEURS DE TORES

10.0. *Notations.* — Soit V une variété algébrique. L'espace tangent à V en un point simple v sera noté $T(V)_v$. Si $f: V \to W$ est un morphisme de V dans une variété algébrique, on notera df sa différentielle. Si $v \in V$ et $f(v) = w$ sont des points simples, alors df induit une application linéaire de $T(V)_v$ dans $T(W)_w$ qui sera désignée en général par df_v.

10.1. *Lemme.* — *Soient* H *un sous-groupe fermé de* G *et* s *un élément semi-simple de* G *normalisant* H. *Alors l'espace* $\mathfrak{z}(s) \cap \mathfrak{h}$ *des points fixes de* Ad s *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *de* H *est l'algèbre de Lie du groupe* $\mathscr{Z}(s) \cap H$.

On peut évidemment supposer que $G = \mathbf{GL}_n$. On démontrera le lemme tout d'abord lorsque $H = \mathbf{GL}_n$. Pour cela on considère une décomposition de Bruhat de $\mathbf{GL}_n$, et l'on reprend les notations de 2.3, en supposant $s \in T$. Soit U^- le groupe unipotent engendré par les U_a ($a < 0$). Alors $(x, t, y) \mapsto x.t.y$ est une immersion ouverte de $U^- \times T \times U$ dans G, dont l'image sera notée V. Vu 2.3, la restriction de Int s à U_a, identifié à $\mathbf{G}_a$, est la multiplication par $a(s)$, donc la restriction de la différentielle $\mathrm{Ad}\, s$ de $\mathrm{Int}\, s$ à l'algèbre de $\mathfrak{u}_a$ de U_a est aussi la multiplication par $a(s)$. Par conséquent $\mathscr{Z}(s) \cap V$ est engendré par T et par les groupes U_a, où a parcourt les racines égales à un sur s, et

$$\mathfrak{z}(s) = \mathfrak{t} \oplus \sum_{a(s)=1} \mathfrak{u}_a, \qquad (\mathfrak{t} \text{ algèbre de Lie de } T),$$

donc $\mathfrak{z}(s)$ est l'algèbre de Lie de $\mathscr{Z}(s)$.

Soit c_s l'application de G dans lui-même qui envoie g sur le commutateur (s, g). Il est clair que $(dc_s)_e = \mathrm{Ad}\, s - 1$, donc

$$\mathfrak{m} = \mathrm{Im}((dc_s)_e) = \sum_{a(s) \neq 1} \mathfrak{u}_a,$$

$$(1) \qquad \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{g} = \mathfrak{z}(s) \oplus \mathfrak{m}.$$

Soit $M = c_s(G)$. C'est la translatée par s d'une orbite de G, opérant sur lui-même par automorphismes intérieurs, donc M est une variété non singulière. D'autre part, une fois U_a identifié à $\mathbf{G}_a$, on a $c_s(u) = (a(s) - 1) . u$ $(u \in U_a)$, donc $\mathfrak{m}$ fait partie de l'espace tangent en e à M. Mais $s^{-1}.M$ est la classe de conjugaison de s^{-1}; donc sa dimension est égale à celle de $G/\mathscr{Z}(s)$, c'est-à-dire à celle de $\mathfrak{m}$, vu ce qui a été démontré plus haut. Il s'ensuit que $\mathfrak{m} = T(M)_e$.

Soit maintenant H quelconque. Vu (1) et le fait que ${}^sH = H$, on a

$$(2) \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{z}(s) \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}.$$

Notons aussi, en vue de 10.3, que la restriction de $(dc_s)_e$ à $\mathfrak{m}$ étant un isomorphisme,

$$(3) \qquad \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = (dc_s)_e \mathfrak{h}.$$

L'espace tangent $\mathfrak{c}$ à $\mathscr{Z}(s) \cap H$ en e est contenu dans $\mathfrak{z}(s) \cap \mathfrak{h}$ et l'espace tangent $\mathfrak{m}'$ en e à $M' = c_s(H)$ fait partie de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$, car $M' \subset M \cap H$. Comme c_s est un morphisme de H sur M' dont les fibres sont les classes à gauche $h.(\mathscr{Z}(s) \cap H)$ $(h \in H)$, on doit avoir $\dim \mathfrak{m}' + \dim \mathfrak{c} = \dim \mathfrak{h}$, d'où, vu (2),

$$(4) \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{z}(s) \cap \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}.$$

10.2. *Théorème. — Soient g un élément de* G, *et $\mathscr{C}(g)$ sa classe de conjugaison.*

(i) *Si g est semi-simple, et* H *un sous-groupe fermé de* G *normalisé par g, alors l'ensemble* $\mathrm{Int}_G H(g)$ *des conjugués de g par* H *est fermé. En particulier, $\mathscr{C}(g)$ est fermé.*

(ii) *Si* G *est semi-simple et connexe, l'adhérence $\overline{\mathscr{C}(g)}$ de $\mathscr{C}(g)$ contient la partie semi-simple g_s de g; en particulier $\mathscr{C}(g)$ n'est pas fermé lorsque g n'est pas semi-simple.*

On désignera par $C(X, \lambda)$ et $M(X, \lambda)$ le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice carrée X, où λ est une indéterminée.

(i) $\mathrm{Int}_G H(g)$ est la classe de conjugaison de g dans le groupe algébrique engendré par H et le groupe $\mathscr{A}(g)$ adhérent à g (qui normalise H). On peut donc supposer $H = G$. On identifie G avec une de ses réalisations linéaires. Soit

$$L = \{x \in G \mid M(g, x) = 0,\ C(\mathrm{Ad}\, x, \lambda) = C(\mathrm{Ad}\, g, \lambda)\}.$$

C'est un sous-ensemble algébrique de G, stable par automorphismes intérieurs. On considère L comme espace de transformations de G, opérant par automorphismes intérieurs. L'orbite de $x \in L$ est la classe de conjugaison de x dans G et sa dimension est par suite égale à celle de $G/\mathscr{Z}(x)$. Or, si $x \in L$, il annule le polynôme minimal de g, donc $M(x, \lambda)$ divise $M(g, \lambda)$ et n'a que des facteurs simples. Par conséquent, x est aussi semi-simple, et 10.1 entraîne que $\dim \mathscr{Z}(x)$ est égale à la multiplicité de la valeur propre un de Ad x. Mais Ad x et Ad g ont même polynôme caractéristique, donc $\dim \mathscr{Z}(x)$ est aussi égale à la multiplicité de la valeur propre un pour Ad g, et par conséquent (10.1) à $\dim \mathscr{Z}(g)$. Les orbites de G dans L ont ainsi toutes la même dimension. Elles sont donc fermées [1, § 16].

(ii) Soit $g = g_s . g_u$ la décomposition multiplicative de Jordan de g. On suppose $k = \bar{k}$ et on reprend les notations de 2.3, en admettant que $g_s \in T$, $g_u \in U$. On peut trouver un groupe à un paramètre $\mu : \mathbf{G}_m \to T$ tel que $<\mu, a> = m_a$ soit >0 pour toute racine simple, donc pour toute racine positive. Notons u_a la composante de g_u dans U_a, identifié à $\mathbf{G}_a$, et soit φ le morphisme de variétés algébriques de $\mathbf{G}_m$ dans U qui applique x sur $\mathrm{Int}\,\mu(x)(g_u)$. La composante dans U_a de $\varphi(x)$ est égale à $x^{m_a}.u_a$ $(a \in \Phi^+)$. Comme les m_a sont >0, cela montre que φ est la restriction à $\mathbf{G}_m$ d'un morphisme de la droite affine qui applique l'origine sur l'élément neutre. Ce dernier fait donc partie de l'adhérence de $\varphi(\mathbf{G}_m)$. Comme $\mu(\mathbf{G}_m)$ centralise g_s, il s'ensuit que g_s fait partie de l'adhérence de $\mathrm{Int}_G\,\mu(\mathbf{G}_m)(g)$, donc de $\overline{\mathscr{C}(g)}$.

10.3. *Proposition. — Soient* H *un sous-groupe fermé de* G, *s un élément semi-simple du normalisateur de* H *dans* G, *et* $F = \mathscr{Z}(s) \cap H$. *Alors l'application* $c_s : h \mapsto (s, h)$ *est un morphisme séparable de* H *sur* $M = c_s(H)$, *qui induit par passage au quotient un isomorphisme de* H/F *sur* M. *Si* H *est connexe, et si* H, *s sont définis sur k, alors* F^0 *est défini sur k.*

(Rappelons qu'un morphisme $f : V \to W$ de k-variétés algébriques irréductibles qui est surjectif (ou génériquement surjectif, *i.e.* tel que $f(V)$ contienne un ouvert non vide de W) est *séparable* si le corps $\bar{k}(V)$ des fonctions rationnelles sur V est une extension séparable de l'image de $\bar{k}(W)$ par le comorphisme f^0 associé à f. Il suffit pour cela que $df_v : T(V)_v \to T(W)_{f(w)}$ soit surjectif lorsque v et $f(w)$ sont des points simples. En effet, l'espace tangent en un point générique étant identifié à l'espace des dérivations du corps des fonctions rationnelles (*voir* [39], prop. 15, p. 12 et chap. IV, n° 6), cette condition signifie que toute dérivation de $f^0(\bar{k}(W))$ sur $\bar{k}$ se prolonge en une dérivation de $\bar{k}(V)$ sur $\bar{k}$, donc que $\bar{k}(V)$ est une extension séparable de $f^0(\bar{k}(W))$ d'après un critère connu (*voir* Samuel-Zariski, *Commutative Algebra*, I, Van Nostrand, chap. II, th. 42).)

Il est immédiat que $c_s(x) = c_s(y)$ $(x, y \in H)$ si et seulement si $x \in y.F$, donc c_s induit un morphisme bijectif de H/F sur M. Pour établir la première assertion, il suffit de faire voir que $(dc_s)_h : T(H)_h \to T(M)_m$ $(m = c_s(h))$ est surjectif quel que soit $h \in H$. Identifiant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H à $T(H)_e$, on a $T(H)_h = h.\mathfrak{h}$, et

$$dc_s(h.X) = s.h.X.s^{-1}.h^{-1} - s.h.s^{-1}.X.h^{-1} \qquad (X \in \mathfrak{h}),$$

ou encore
$$dc_s(h.X) = c_s(h).\mathrm{Ad}\, s.h.(\mathrm{Ad}\, s - 1)(X),$$

d'où

(1) $$dc_s(\mathrm{T(H)}_h)=c_s(h)\,.\,\mathrm{Ad}\,s.h.(\mathfrak{m}),$$

avec

(2) $$\mathfrak{m}=(\mathrm{Ad}\,s-1)(\mathfrak{h})=(dc_s)_e(\mathfrak{h}).$$

Mais, vu 10.1, (3) et (4), $\mathfrak{m}=\mathrm{T(M)}_e$; donc $(dc_s)_h$ est surjective.

Supposons maintenant H connexe. Soit $\Gamma\subset \mathrm{H}\times\mathrm{M}$ le graphe de l'application c_s. On a $\Gamma\cap(\mathrm{H}\times\{e\})=\mathrm{F}\times\{e\}$ au point de vue ensembliste. Mais la surjectivité de dc_s entraîne que $\mathrm{H}\times\{e\}$ et Γ se coupent transversalement; d'après le critère de multiplicité un [39, VI, § 2, th. 6], on a alors

$$\mathrm{F}=\mathrm{pr_H}(\mathrm{F}\times\{e\})=\mathrm{pr_H}(\Gamma\,.\,(\mathrm{H}\times\{e\})),$$

où le point désigne ici une intersection de cycles. Cela signifie que le cycle somme des composantes irréductibles de F, chacune affectée du coefficient 1, est rationnel sur k. Comme F^0 est stable par $\mathrm{Gal}(k_s/k)$, c'est une composante rationnelle sur k de F. Étant irréductible, F^0 est alors aussi défini sur k [39, prop. 1, p. 208].

10.4. *Corollaire. — L'application* $\varphi: h\mapsto h.s.h^{-1}$ *induit un isomorphisme d'espaces homogènes de* H/F *sur* $\mathrm{Int_G\,H}(s)$.

En effet, φ est le composé de $c_{s^{-1}}$ et de la translation à gauche par s.

10.5. *Corollaire. — Supposons* G *connexe et soit* S *un k-tore de* G. *Alors* $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$ *est défini sur* k.

Le groupe $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$ est connexe [1, prop. 18.4] et k-fermé. Il reste à montrer qu'il est défini sur k_s. On peut supposer que $k=k_s$, donc que k est infini. D'après 1.10, il existe alors $s\in \mathrm{S}_k$ tel que $\mathscr{Z}(s)=\mathscr{Z}(\mathrm{S})$, et notre assertion résulte de 10.3.

10.6. *Proposition. — Supposons* G *connexe et soit* $f:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ *un k-morphisme séparable de* G *sur un k-groupe* G'. *Alors les tores maximaux définis sur k (resp. les tores déployés sur k maximaux) de* G' *sont les images par f des tores maximaux définis sur k (resp. des tores déployés sur k maximaux) de* G.

On sait déjà que l'image d'un tore maximal de G est un tore maximal de G' [1, th. 22.1]. Soit T' un tore maximal de G' défini sur k et soit $\mathrm{H}=f^{-1}(\mathrm{T}')^0$. Ce groupe est défini sur k. En effet, d'après [22, prop. 1] et [39, Chap. VIII, th. 4], le cycle $f^{-1}(\mathrm{T}')$, dont chaque composante est affectée du coefficient un, est rationnel sur k. Comme H est k-fermé, il est alors aussi défini sur k [39, chap. VIII, prop. 1].

Le groupe H contient un tore maximal de G [1, *loc. cit.*] donc aussi (2.14) un tore maximal T de G défini sur k. Alors $\mathrm{T}'=f(\mathrm{T})$.

Si S est un tore déployé sur k de G, alors $f(\mathrm{S})$ est aussi déployé sur k (1.8). Pour terminer la démonstration, il suffit de prouver que si S est un tore déployé sur k de G et si S' est un tore déployé sur k maximal de G' contenant $f(\mathrm{S})$, alors S fait partie d'un tore S'' déployé sur k tel que $f(\mathrm{S}'')=\mathrm{S}'$.

Le centralisateur de S' est défini sur k (10.5), donc contient un tore maximal T' de G' défini sur k (2.14). Le groupe $H = f^{-1}(T')^0$ considéré ci-dessus est défini sur k, contient S et est de rang maximum, donc $(\mathscr{Z}(S) \cap H)^0$ est défini sur k (10.5) et est de rang maximum. Vu 2.14, ce groupe contient par conséquent un tore maximal T de G défini sur k contenant S. On a alors $S \subset T_d$, et $f(T) = T'$, d'où aussi (1.8) $f(T_d) = T'_d = S'$.

§ 11. SOUS-GROUPES DE CARTAN DES GROUPES RÉSOLUBLES

Ce paragraphe donne de nouvelles démonstrations de théorèmes d'existence et de conjugaison dans les groupes résolubles, dus à Rosenlicht [26] et Grothendieck [11]. Elles utilisent le lemme 11.1, qui généralise et précise le lemme 9.6 de [1].

11.1. *Lemme. — Soit* H *un k-groupe et supposons que* G *soit un sous-groupe unipotent connexe de* H. *Soit s un élément semi-simple de* H_k *normalisant* G. *Soient* F *le centralisateur de s dans* G, c_s *l'application* $g \mapsto (s, g)$ *de* G *dans* G *et* $M = c_s(G)$. *Alors* $M \cap F = \{e\}$; *le groupe* F *est connexe, défini sur k*; M *est une k-sous-variété irréductible fermée; l'application produit* $\alpha : M \times F \to G$ *et la restriction de* c_s *à* M *sont des isomorphismes de variétés.*

Remarquons tout d'abord que la restriction de c_s au centre $\mathscr{Z}(G)$ de G est un homomorphisme de $\mathscr{Z}(G)$ dans lui-même et que, plus généralement :

(1) $$c_s(x.y) = c_s(x).c_s(y) \qquad (x \in G,\ y \in \mathscr{Z}(G)).$$

Soit $v = (s, g) \in F$. Dans l'égalité $g.s^{-1}.g^{-1} = s^{-1}.v$, le membre de droite est produit d'un élément semi-simple et d'un élément unipotent commutant entre eux, tandis que le membre de gauche est semi-simple, d'où $v = e$, $g \in F$ et $M \cap F = \{e\}$.

M est le translaté par s de l'ensemble des conjugués par G de l'élément semi-simple s^{-1}. C'est donc une sous-variété irréductible fermée (10.2), évidemment définie sur k.

Nous voulons montrer maintenant que

(*) F est connexe et α est bijective.

Si $\dim G = 1$, ou plus généralement si G est commutatif, (*) résulte de [1, lemme 9.6]. Nous procédons donc par récurrence sur dim G et supposons G non commutatif. Comme (*) est de nature géométrique, nous pouvons aussi admettre que $k = \bar{k}$. Soit $V \neq \{e\}$ un sous-groupe fermé connexe du centre de G, stable par Int s. Soit π la projection du normalisateur N de V dans H, sur $N' = N/V$. Le groupe $G' = \pi(G)$ est connexe unipotent, $s' = \pi(s)$ est semi-simple, normalise G', et l'on peut appliquer l'hypothèse d'induction à $c_{s'}$, G', $M' = c_{s'}(G')$ et $F' = c_{s'}^{-1}(e)$. On a évidemment $c_{s'} \circ \pi = \pi \circ c_s$, donc $M' = \pi(M)$ et $\pi(F) \subset F'$.

Soient $g' \in F'$ et $g \in \pi^{-1}(g')$. On a $s.g.s^{-1} = g.z$ $(z \in V)$ et, compte tenu de l'hypothèse d'induction, on peut écrire

$$z = s.x.s^{-1}.x^{-1}.y \qquad (x \in V,\ y \in F \cap V),$$

d'où, en posant $h=x^{-1}.g=g.x^{-1}$, l'égalité $s.h.s^{-1}=h.y$, qui montre que $y\in M\cap F$, donc que $y=e$, et que $h\in\pi^{-1}(g')\cap F$. Par conséquent, la restriction de π à F est un morphisme de F sur F', de noyau $F\cap V$. Comme F' et $F\cap V$ sont connexes par hypothèse d'induction, F est aussi connexe.

De l'égalité $G'=M'.F'$, on tire alors $G=M.F.V$; mais $V=c_s(V).(F\cap V)$ d'où, vu (1)

$$G=c_s(G).F.c_s(V).(F\cap V)=c_s(G).c_s(V).F=c_s(G.V).F=M.F,$$

ce qui montre que α est surjective. Il reste à prouver que α est injective. Comme F est un groupe, cela revient à faire voir que si $a, b\in M$ et $a=b.f$ $(f\in F)$, alors $f=e$. On a $\pi(a)=\pi(b).\pi(f)$, donc $\pi(f)=e$, et $f\in V$. Mais si $x, y\in G$ sont tels que $c_s(x)=a$, $c_s(y)=b$, on tire immédiatement de l'égalité $a=b.f$ et du fait que $f\in V$ est central que $f=c_s(y^{-1}.x)$, d'où $f\in M\cap F$ et $f=e$, ce qui termine la démonstration de (*).

On a $c_s(x)=c_s(y)$ $(x, y\in G)$ si et seulement si $x\in y.F$, ce qui, vu (*), montre que la restriction β de c_s à M est un k-morphisme bijectif de M sur M. On a déjà vu que α est aussi bijective. Comme les variétés G, M, F sont non singulières, donc normales, il suffit, pour terminer la démonstration du lemme (en vertu du Main Theorem de Zariski [17, chap. V, § 2]), de faire voir que α et β sont birationnelles, donc que leurs différentielles sont bijectives sur les espaces tangents.

Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}$ les algèbres de Lie de G et F respectivement. D'après 10.3 (1), (2), on a

$$dc_s(T(G)_g)=c_s(g).\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{m}) \qquad (\mathfrak{m}=(\mathrm{Ad}\, s-1)(\mathfrak{g});\ g\in G), \tag{2}$$

$$dc_s(T(G)_g)=T(M)_m \qquad (m=c_s(g)). \tag{3}$$

Montrons que $T(M)_m.f$ et $m.T(F)_f$ sont linéairement indépendants quel que soit $f\in F$. Vu (2), cela équivaut à

$$m.\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{m}).f\cap m.\mathfrak{f}.f=\{0\}$$

donc à

$$\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{f}=\{0\}. \tag{4}$$

Le groupe Ad G est un sous-groupe unipotent connexe de $GL(\mathfrak{g})$, et $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}s$ est un élément semi-simple de $GL(\mathfrak{g})$ normalisant Ad G. On peut trouver une base (X_i) $(1\leqq i\leqq\dim\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ formée de vecteurs propres de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}s$ par rapport à laquelle Ad G est représenté par des matrices triangulaires supérieures. Pour le voir, on raisonne par récurrence sur dim V. Soit W l'espace des points fixes de Ad G et soit W' un supplémentaire de W stable par s. On a $W\neq 0$, donc on peut admettre que V/W possède une base (Y_j) ayant les propriétés requises. On prend pour (X_i) une base formée de vecteurs propres de s dont les premiers engendrent W et dont les suivants sous-tendent W' et s'appliquent sur les vecteurs Y_j par la projection canonique. Soit $w\in\mathfrak{m}-\{0\}$. On a donc $w=\sum_i m_i.X_i$ avec $m_i\in\bar{k}$, $m_i=0$ si $X_i\in\mathfrak{f}$. Si j est le plus grand indice tel que $m_j\neq 0$, alors $\mathrm{Ad}\, g(w)=m_jX_j$ modulo une combinaison linéaire de $X_1, \ldots, X_{j-1}$. Comme $m_j \neq 0$, $X_j \notin \mathfrak{k}$, donc $\operatorname{Ad} g(w) \notin \mathfrak{k}$, ce qui prouve (4).

Pour des raisons de dimension, $T(M)_m.f$ et $m.T(F)_f$ engendrent $T(G)_{m.f}$. Comme ils font évidemment partie de l'image de $d\alpha_{(m.f)}$, il s'ensuit que $d\alpha_{(m.f)}$ est bijectif.

Soit $z = c_s(m.f) = c_s(m)$. D'après (3), $(dc_s)_{m.f}$ applique $T(G)_{m.f}$ sur $T(M)_z$. Son noyau, qui contient $m.T(F)_f$, doit donc être égal à $m.T(F)_f$ pour des raisons de dimension. Mais $m.T(F)_f$ n'a que zéro en commun avec $T(M)_m.f$ d'après ce qui a déjà été démontré, donc la restriction de dc_s à $T(M)_m.f$ est injective, et $d\beta(T(M)_m) = T(M)_z$.

11.2. *Proposition. — Supposons* G *connexe résoluble. Soit* L *un sous-groupe de* G_k *formé d'éléments semi-simples. Alors* $\mathscr{Z}_G(L)$ *est connexe, défini sur* k, *et* L *est contenu dans un tore maximal de* G.

Le groupe L étant commutatif [1, Prop. 10.2], une récurrence immédiate permet de se ramener au cas où L est engendré par un élément x. Ce dernier fait partie d'un tore maximal T de G [1, Théorème 12.6], et G est le produit semi-direct de T par son radical unipotent G_u [1, Théorème 12.2]. Par suite, $\mathscr{Z}_G(x) = T.(\mathscr{Z}_G(x) \cap G_u)$. Comme $\mathscr{Z}_G(x) \cap G_u$ est connexe (11.1), le groupe $\mathscr{Z}_G(x)$ l'est aussi. Il est alors défini sur k d'après 10.3.

Le lemme suivant est conséquence immédiate de quelques résultats de Rosenlicht.

11.3. *Lemme. — Supposons* G *connexe unipotent commutatif, et tel que* $G^p = \{e\}$ *si la caractéristique* p *de* k *est non nulle. Soit* T *un* k*-tore qui opère* k*-morphiquement sur* G, *et n'a que l'élément neutre de* G *comme point fixe. Alors* G *est déployé sur* k.

D'après [24, Prop. 1.2], G est $\bar{k}$-isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{G}_a$. Le groupe T étant décomposé sur k_s (1.5), le lemme de la p. 109 de [26] (dans lequel on a $G_0 = \{e\}$ vu notre hypothèse), montre que G est k_s-isomorphe à un produit de groupes $\mathbf{G}_a$. Ainsi, G est déployé sur k_s, donc sur k [26, Théorème 3].

11.4. *Théorème. — Soit* G *résoluble connexe. Alors* G *possède un sous-groupe de Cartan (resp. un tore maximal) défini sur* k. *Deux tels sous-groupes sont conjugués par un élément de* $(\mathscr{C}^\infty G)_k$.

Un sous-groupe de Cartan C possède un unique tore maximal T dont il est le centralisateur [1, § 20]. Si C (resp. T) est défini sur k, il en est de même de T (resp. C) d'après [23, Prop. 9] (resp. (10.3)). Pour prouver 11.4, on peut donc se borner à considérer les sous-groupes de Cartan.

(i) Nous donnerons tout d'abord une démonstration, différente de celle de [11], de l'existence d'un k-sous-groupe de Cartan lorsque k est infini. (Si k est fini, nous renvoyons à [23, Note p. 45].) On procède par récurrence sur $\dim G$.

Admettons tout d'abord que $\mathscr{C}^\infty G$ possède un k-sous-groupe connexe propre $N \neq \{e\}$ normal dans G, et soit $\pi : G \to G' = G/N$ la projection canonique. Soit C′ un k-sous-groupe de Cartan de G′. Comme $\mathscr{C}^\infty G' = \pi(\mathscr{C}^\infty G) \neq \{e\}$, le groupe G′ n'est pas nilpotent, donc $C' \neq G'$ et $H = \pi^{-1}(C')$ est un k-sous-groupe connexe propre de G. Il contient un sous-groupe de Cartan de G [1, Théor. 22.2], donc tout sous-groupe de Cartan de H est un sous-groupe de Cartan de G; par l'hypothèse de récurrence, il en existe au moins un qui est défini sur k.

Si $\mathscr{C}^\infty G$ ne contient pas de sous-groupe N vérifiant les conditions ci-dessus, alors $\mathscr{C}^\infty G$ est commutatif, et $(\mathscr{C}^\infty G)^p = \{e\}$ lorsque la caractéristique p de k est non nulle. Montrons l'existence d'un élément semi-simple $a \in G_k$, tel que $\mathscr{Z}(a) \cap \mathscr{C}^\infty G = \{e\}$.

Soit $\pi : G \to G' = G/\mathscr{C}^\infty G$ la projection canonique. Le quotient G' est un k-groupe nilpotent, son unique tore maximal T' est défini sur k [23, Prop. 9], et $H = \pi^{-1}(T')$ est un k-groupe connexe. Il opère par automorphismes intérieurs sur $\mathscr{C}^\infty G$; comme $\mathscr{C}^\infty G$ est commutatif, il opère trivialement sur lui-même, donc, par passage au quotient, G' opère k-morphiquement sur $\mathscr{C}^\infty G$ [25, Prop. 2]. L'intersection de $\mathscr{C}^\infty G$ avec le centralisateur d'un tore maximal de H est réduite à $\{e\}$ [1, Théorème 13.4], donc le seul point fixe de T' dans $\mathscr{C}^\infty G$ est l'élément neutre. Par suite, $\mathscr{C}^\infty G$ est déployé sur k (11.3), et la fibration de G sur G' possède une section régulière s définie sur k [26, Theorem 1].

Soit V l'ensemble des éléments de T' dont l'ensemble des points fixes dans $\mathscr{C}^\infty G$ est différent de l'élément neutre. C'est la réunion d'un nombre fini de sous-groupes propres fermés, et l'on peut trouver $x \in T'_k - V_k$ (1.10). Soit $y = s(x)$. Si k est parfait, alors la partie semi-simple y_s de y est rationnelle sur k, et $\pi(y_s) = x$, donc y_s est l'élément cherché. Si $p \neq 0$, alors il existe une puissance $q = p^m$ de p telle que $z = y^q$ soit semi-simple, et évidemment rationnel sur k. On a alors $\pi(z) = \pi(y)^q = x^q$. Mais $t \mapsto t^q$ est une bijection de T' sur lui-même laissant stable tout sous-groupe; on a donc encore $x^q \in T'_k - V_k$, d'où $\mathscr{Z}(z) \cap \mathscr{C}^\infty G = \{e\}$ ce qui établit notre assertion.

Le groupe $\mathscr{Z}(a)$ est connexe, défini sur k (10.3) et contient un sous-groupe de Cartan C de G. On a $G = C.\mathscr{C}^\infty G$ et $\mathscr{Z}(a) \cap \mathscr{C}^\infty G = \{e\}$, donc $C = \mathscr{Z}(a)$ est défini sur k.

(ii) Soient T un tore maximal de G défini sur k et g un élément semi-simple de G_k. Nous voulons montrer l'existence de $x \in (\mathscr{C}^\infty G)_k$ tel que $x.g.x^{-1} \in T$.

La projection $\pi : G \to G' = G/\mathscr{C}^\infty G$ induit un isomorphisme de T sur le k-tore maximal T' de G'. En effet, $\pi : T \to T'$ est bijectif, $\pi(T)$ est un tore maximal de G' [1, Théor. 22.2], $\pi : G \to G'$ est séparable, et le noyau de $d\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie de $\mathscr{C}^\infty G$; mais G est, en tant que variété, le produit de T par G_u [1, Théor. 12.2], donc $d\pi$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{t}$ sur $\mathfrak{t}'$, d'où notre assertion. Il existe donc un unique élément $t \in T_k$ tel que $\pi(t) = \pi(g)$. On a $t^{-1} = g^{-1}.u$, avec $u \in (\mathscr{C}^\infty G)_k$. Le théorème de conjugaison sur k des tores maximaux montre l'existence de $v \in \mathscr{C}^\infty G$ tel que $v.g^{-1}.v^{-1} = t^{-1}$, d'où

$$u = (g, v) \in c_g(\mathscr{C}^\infty G),$$

et 11.1 entraîne l'existence de $x \in (\mathscr{C}^\infty G)_k$ tel que $u = (g, x)$. On a alors

$$t^{-1} = g^{-1}.g.x.g^{-1}.x^{-1} = x.g^{-1}.x^{-1},$$

d'où (ii).

(iii) Soient C, C′ deux k-sous-groupes de Cartan de G, et T, T′ leurs tores maximaux respectifs. Supposons tout d'abord k infini. Vu 1.10, on peut trouver $a' \in \mathrm{T}'_k$ tel que $\mathscr{Z}(a') = \mathscr{Z}(\mathrm{T}') = \mathrm{C}'$. Vu (ii), il existe $x \in (\mathscr{C}^\infty \mathrm{G})_k$ tel que $x.a'.x^{-1} = a \in \mathrm{T}$. Évidemment, $x.\mathscr{Z}(a').x^{-1} = \mathscr{Z}(a)$. Ainsi, $\mathscr{Z}(a)$ est un sous-groupe de Cartan contenant C, donc égal à C, d'où $x.\mathrm{C}'.x^{-1} = \mathrm{C}$.

Supposons maintenant k fini, ou plus généralement parfait, et soit

$$\mathrm{V} = \{x \in \mathscr{C}^\infty \mathrm{G} \mid x.\mathrm{C}.x^{-1} = \mathrm{C}'\}.$$

C'est un ensemble algébrique [1, 2.5] défini sur k puisque C et C′ le sont (et k est parfait), non vide vu le théorème de conjugaison des sous-groupes de Cartan sur $\overline{k}$, et qui est un espace homogène pour le groupe $\mathrm{H} = \mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathscr{C}^\infty \mathrm{G}$. Mais $\mathscr{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathscr{Z}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{C}$ [1, Prop. 10.2, Théor. 12.2], et 11.1 montre que H est connexe. Étant unipotent, H est alors déployé sur k [23, Cor. 2, p. 34], donc V possède un point rationnel sur k [22, Theor. 10].

11.5. *Corollaire. — Soient* T *un tore maximal défini sur* k *de* G, S *un* k*-tore de* G *et* L *un sous-groupe de* G_k *formé d'éléments semi-simples. Alors* S (*resp.* L) *est conjugué à un sous-groupe de* T *par un élément de* $(\mathscr{C}^\infty \mathrm{G})_k$, *et le groupe* $\mathscr{A}(\mathrm{L})$ *adhérent à* L [1, § 3] *est défini sur* k.

Les groupes $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$ et $\mathscr{Z}(\mathrm{L})$ sont connexes et définis sur k d'après 10.5 et 11.2. Soit T′ un tore maximal de $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathscr{Z}(\mathrm{L})$) défini sur k, ce qui existe vu 11.4. Il contient S (resp. L) et est un tore maximal de G (11.2). La première assertion résulte donc de 11.4 appliqué à T et T′. Pour la deuxième, on peut par suite supposer $\mathrm{L} \subset \mathrm{T}$. Alors $\mathscr{A}(\mathrm{L})$ est un sous-groupe de T qui est k-fermé, donc défini sur k (1.6).

Remarque. — Le théorème 11.4 pour les tores maximaux est dû à Rosenlicht [26, Theor. 4]. L'existence de k-sous-groupes de Cartan définis sur k dans un k-groupe algébrique connexe quelconque a été démontrée par Grothendieck [11, Exp. XII, Théor. 1.1]. Dans [11, Exp. XIV, § 6] il est également montré que l'espace homogène G/C (G résoluble connexe, C un sous-groupe de Cartan défini sur k) est k-isomorphe à un espace affine; cela résulte ici du fait que $\mathscr{C}^\infty \mathrm{G}$ est déployé sur k [26, Théor. 4, Cor. 2] et de ce qu'un k-espace homogène d'un groupe unipotent déployé sur k qui possède un point rationnel sur k est k-isomorphe à un espace affine [11, Exp. XIV, lemme 6.5]. Remarquons encore que si un tore maximal T de G défini sur k possède un point s rationnel sur k tel que $\mathscr{Z}(s) = \mathscr{Z}(\mathrm{T})$, ce qui est toujours le cas lorsque k est infini (1.10), alors la variété $\mathrm{M} = c_s(\mathscr{C}^\infty \mathrm{G}) = \{s.x.s^{-1}.x^{-1},\ (x \in \mathscr{C}^\infty \mathrm{G})\}$ est k-isomorphe à G/C. En effet, $\mathscr{C}^\infty \mathrm{G}$ est k-isomorphe, en tant que variété, au produit $(\mathscr{Z}(s) \cap \mathscr{C}^\infty \mathrm{G}) \times \mathrm{M} = (\mathrm{C} \cap \mathscr{C}^\infty \mathrm{G}) \times \mathrm{M}$, d'après 11.1, donc la projection de G sur G/C est un isomorphisme de M sur G/C.

Nous terminons ce paragraphe par une application à des groupes non nécessairement résolubles.

11.6. *Proposition. — Supposons que* $\mathrm{R}_u(\mathrm{G}^0)$ *soit déployé sur* k. *Alors les tores déployés sur* k *maximaux de* G *sont conjugués par des éléments de* $\mathrm{G}^0_{\ k}$.

(Si k est parfait, l'hypothèse faite sur $R_u(G^0)$ est vérifiée d'elle-même [23, Cor. 1, 2 à la Prop. 5], donc 11.6 généralise l'assertion de conjugaison de tores déployés faite dans 8.2.)

Pour la démonstration, on peut supposer G connexe. Soit π la projection canonique de G sur $G'=G/R_u(G)$, et soient S, S' deux tores déployés sur k maximaux de G. Vu 10.6, $\pi(S)$ et $\pi(S')$ sont des tores déployés sur k maximaux de G', donc sont conjugués sur k (4.21). Comme $R_u(G)$ est déployé sur k, l'application $\pi : G_k \to G'_k$ est surjective; il existe donc $g \in G_k$ tel que ${}^gS \subset \pi^{-1}(\pi(S')) = S'.R_u(G)$, et l'on est ramené à 11.4.

§ 12. QUESTIONS DE RATIONALITÉ POUR LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

Dans ce paragraphe, la caractéristique de k est nulle, G *est connexe, semi-simple, et* $\widetilde{G}$ *désigne le revêtement universel de* G. *On fixe un tore maximal* T *de* G *et un sous-groupe de Borel* B *de* G *contenant* T, *et on désigne par* Δ *l'ensemble correspondant des racines simples. On écrit* Γ *pour* $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Nous rappelons tout d'abord quelques propriétés classiques des représentations linéaires de G (*voir* [10, 14, 29, 31]).

12.1. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation irréductible de G dans l'espace vectoriel V. Il existe dans V une et une seule droite D_ρ stable par B. L'orbite C_ρ de D_ρ par G sera appelée le *cône de la représentation* ρ. Les groupes de stabilité des droites de C_ρ forment une classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G, notée $\mathscr{P}_\rho$, la *classe de sous-groupes paraboliques de* ρ.

Soit V' l'espace projectif des droites de V, et Aut V' le groupe des automorphismes de V'. La représentation ρ définit une représentation projective ρ' de G, i.e. un morphisme $\rho' : G \to \mathrm{Aut}\, V'$, qui est irréductible, c'est-à-dire ne laisse invariant aucun sous-espace projectif propre de V'. A C_ρ est associée une sous-variété fermée C'_ρ de V', qui s'identifie à l'espace homogène G/P, $P \in \mathscr{P}_\rho$, et est la seule orbite fermée de G dans V'. Un élément $P' \in \mathscr{P}_\rho$ n'a qu'un seul point fixe dans V', et ce point fixe fait partie de C'_ρ.

12.2. La représentation de T dans D_ρ induite par ρ définit un caractère l_ρ de T, le *poids dominant* de ρ, qui caractérise ρ à une équivalence près. Si (,) désigne un produit scalaire admissible sur $X^*(T) \otimes \mathbf{R}$, on a

$$2(l_\rho, a) = (a, a).m_a \qquad (m_a \in \mathbf{N},\ a \in \Delta), \tag{1}$$

et réciproquement tout élément de $X^*(T)$ vérifiant les conditions (1) est poids dominant d'une représentation irréductible.

Supposons $G = \widetilde{G}$. Il existe alors pour tout ensemble d'entiers $m_a \geqq 0$ $(a \in \Delta)$ un poids dominant vérifiant (1). Les poids dominants l_a définis par

$$2(l_a, a) = (a, a), \qquad (l_a, b) = 0 \ (a \neq b) \qquad (a, b \in \Delta), \tag{2}$$

sont les *poids dominants fondamentaux*, et les poids dominants de G sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers ≥ 0 des poids fondamentaux. Même si G n'est pas simplement connexe, on exprimera tout poids dominant l_ρ comme combinaison linéaire des l_a, ce qui se justifie en envisageant soit l_ρ comme poids dominant de $\widetilde{G}$, soit les l_a comme des éléments de $X^*(T) \otimes \mathbf{Q}$. Le coefficient de l_a sera quelquefois noté $c_a(l_\rho)$. On a donc

$$l_\rho = \sum_{a \in \Delta} c_a(l_\rho) . l_a, \qquad c_a(l_\rho) = 2(l_\rho, a) . (a, a)^{-1} \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Rappelons encore que $\mathscr{P}_\rho = \mathscr{P}_\theta$, où θ est l'ensemble des $a \in \Delta$ orthogonaux à l_ρ.

12.3. On notera $\mathscr{R}(G)$ ou $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'(G)$ ou $\mathscr{R}'$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations linéaires (resp. projectives) irréductibles de G. Les notions introduites précédemment qui ne dépendent que de la classe d'équivalence de ρ ou de ρ' seront aussi indexées par la classe de ρ ou ρ', et $d(\xi)$ ($\xi \in \mathscr{R}$) (resp. $d(\xi')$, $\xi' \in \mathscr{R}'$) désignera la dimension de l'espace vectoriel (resp. projectif) de toute représentation contenue dans ξ (resp. ξ').

Il est clair que $\mathscr{R}'(\widetilde{G}) = \mathscr{R}'(G)$; on a une application naturelle de $\mathscr{R}(G)$ dans $\mathscr{R}'(G)$, qui fait correspondre à toute représentation linéaire la représentation projective associée, et qui est bijective lorsque G est simplement connexe.

Un élément $\xi \in \mathscr{R}$ est *rationnel sur k* s'il contient un k-morphisme $G \to \mathbf{GL}_d$ ($d = d(\xi)$). Comme deux espaces vectoriels de même dimension définis sur k sont k-isomorphes, il revient au même d'exiger l'existence dans ξ d'un k-morphisme $G \to GL(V)$, où V est un espace vectoriel défini sur k, de dimension $d(\xi)$. Un tel morphisme est déterminé à une équivalence sur k près. En effet, si $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$ sont deux k-morphismes appartenant à ξ, il existe un $\bar{k}$-isomorphisme $A : V \to V'$ tel que

$$A . \rho(x) = \rho'(x) . A, \qquad (x \in G_{\bar{k}})$$

d'où, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in G_{\bar{k}}$,

$${}^\gamma A . \rho({}^\gamma x) = \rho'({}^\gamma x) . {}^\gamma A,$$

et le lemme de Schur entraîne l'existence de $a_\gamma \in \bar{k}^*$ tel que $A = a_\gamma . {}^\gamma A$. Il est immédiat que $\gamma \mapsto a_\gamma$ est un 1-cocycle de Γ à valeurs dans $\bar{k}^*$, donc un cobord [30, prop. 2, p. 158], ce qui signifie qu'il existe $b \in \bar{k}^*$ tel que $a_\gamma = b^{-1} . {}^\gamma b$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$. On a alors ${}^\gamma(b . A) = b . A$, donc B est un k-isomorphisme de V sur V' qui réalise une équivalence de ρ avec ρ'.

Il est clair que si ξ est rationnelle sur k, la classe de sous-groupes paraboliques $\mathscr{P}_\xi$ associée à ξ est stable par Γ, c'est-à-dire est définie sur k (5.24), mais la réciproque est inexacte, comme on le voit déjà en considérant une forme unitaire de $\mathbf{SL}_2$.

Un élément $\xi \in \mathscr{R}$ est *fortement rationnel sur k* s'il est rationnel sur k et si $\mathscr{P}_\xi$ contient un k-groupe.

Un élément $\eta \in \mathscr{R}'$ est *rationnel sur k* s'il existe une k-forme V' de l'espace projectif

$\mathbf{P}_d$ $(d=d(\eta))$ et un k-morphisme $\sigma : G \to \mathrm{Aut}\, V'$ appartenant à η. Comme $\mathbf{P}_d$ a en général des k-formes non triviales, les « variétés de Severi-Brauer » [30, chap. X, 6], cette condition est plus faible que l'existence d'un k-morphisme $G \to \mathbf{PGL}_{d+1} \cong \mathrm{Aut}\, \mathbf{P}_d$ appartenant à η. Si η provient de $\xi \in \mathscr{R}$, cette dernière condition équivaut au fait que ξ est rationnelle sur k. En effet, si $\pi : \mathbf{GL}_d \to \mathbf{PGL}_d$ est la projection naturelle et si $\rho : G \to \mathbf{GL}_d$ est tel que $\rho' = \pi \circ \rho$ soit un k-morphisme, alors ρ est défini sur k, car c'est l'unique morphisme de G dans $\mathbf{GL}_d$ tel que $\rho' = \pi \circ \rho$. La réciproque est évidente.

Dans la suite, on s'intéressera aux trois conditions suivantes portant sur un élément $\xi \in \mathscr{R}(G)$ et sur son image $\xi' \in \mathscr{R}'(G)$.

a) ξ' est rationnel sur k,

b) ξ est rationnel sur k,

c) ξ est fortement rationnel sur k.

Il est clair que *c)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *a)*. Si G est déployé sur k, alors $\widetilde{G}$ l'est aussi, et tout élément de $\mathscr{R}(G)$ (resp. $\mathscr{R}'(G)$) est fortement rationnel (resp. rationnel) sur k. Cela résulte du fait que les représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$ peuvent être construites rationnellement sur le corps de base [14, chap. VII]. On peut aussi le voir en remarquant que tous les systèmes linéaires de diviseurs sur G/B qui interviennent dans la construction des représentations irréductibles de G (voir [29, 31] en caractéristique zéro, [10] dans le cas général) sont rationnels sur k. Il s'ensuit en particulier que tout élément de $\mathscr{R}(G)$ est fortement rationnel sur $\bar{k}$.

12.4. Le groupe Γ opère de façon naturelle sur les représentations linéaires ou projectives, en respectant l'équivalence, donc aussi sur $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$. Si $\rho : G \to \mathbf{GL}_d$ est un $\bar{k}$-morphisme, on a

$$\gamma(\rho)(g) = \gamma(\rho(\gamma^{-1}(g))) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ g \in G_{\bar{k}}), \tag{1}$$

autrement dit

$$\gamma(\rho) = \gamma \circ \rho \circ \gamma^{-1}. \tag{2}$$

12.5. *Lemme. — On conserve les notations précédentes. Soient* $\xi \in \mathscr{R}(G)$ *et* $\gamma \in \Gamma$. *Alors le poids dominant de* $\gamma(\xi)$ *est* ${}_\Delta\gamma(l_\xi)$, *dans les notations de* 6.2.

Soient $\rho : G \to GL(V)$ un élément de ξ, D la droite de V stable par B, u un élément de $G_{\bar{k}}$ tel que $u . {}^\gamma B . u^{-1} = B$ et $E = {}^\gamma\rho(u) . {}^\gamma D \subset V$. Soient encore $b \in B$, $x \in D - \{0\}$ et $y = {}^\gamma\rho(u)({}^\gamma x)$. Le poids dominant $l_\rho \in X^*(T)$ possède une extension unique à B ; on la notera aussi l_ρ. On a alors

$${}^\gamma\rho(u . {}^\gamma b . u^{-1}) . y = {}^\gamma\rho(u) . \gamma(\rho(b)) . {}^\gamma\rho(u^{-1}) . y = {}^\gamma\rho(u) . \gamma(\rho(b) . x) = \gamma(l_\rho(b)) . y,$$

donc E est stable par B, agissant dans ${}^\gamma V$ par l'intermédiaire de ${}^\gamma\rho$, et le caractère l' de B dans E est donné par

$$\gamma(l_\rho(b)) = l'(u . {}^\gamma b . u^{-1}),$$

ce qui (6.2 (2)) signifie précisément que $l' = {}_\Delta\gamma(l_\rho)$.

12.6. *Proposition.* — *Soit* $\xi \in \mathscr{R}(G)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) ${}_\Delta\gamma(l_\xi) = l_\xi$ *quel que soit* $\gamma \in \Gamma$.
(ii) ξ *est stable par* Γ.
(iii) *La classe de représentations projectives* ξ' *est rationnelle sur* k.
(iv) *Il existe une algèbre à division centrale* C_k *sur* k *et un* k*-morphisme*

$$G \to \mathbf{GL}_m(C) \qquad (d(\xi) = m.c, \quad c^2 = [C : k]).$$

L'équivalence de (i) et (ii) résulte de 12.2 et 12.5.

(ii) $\Rightarrow$ (iii), (iv). Soit $\rho : G \to \mathbf{GL}_n$ $(n = d(\xi))$ un élément de ξ défini sur $\bar{k}$. Vu l'hypothèse (ii), il existe pour tout $\gamma \in \Gamma$ une matrice $A_\gamma \in \mathbf{GL}_{n,\bar{k}}$ telle que

$$^\gamma\rho(g) = A_\gamma^{-1}.\rho(g).A_\gamma, \qquad (g \in G_{\bar{k}}).$$

D'après le lemme de Schur, A_γ est déterminée à la multiplication par un élément de $\bar{k}^*$ près, donc l'image $A'_\gamma = \pi(A_\gamma)$ de A_γ dans $\mathbf{PGL}_n$ par la projection canonique est univoquement déterminée. Si $\delta \in \Gamma$, on a

$$^{\delta.\gamma}\rho(g) = \delta(^\gamma\rho(\delta^{-1}(g))) = \delta(A_\gamma^{-1}.\rho(\delta^{-1}(g)).A_\gamma) = \delta(A_\gamma^{-1}).{}^\delta\rho(g).\delta(A_\gamma),$$

d'où l'on déduit que $A_\delta.\delta(A_\gamma)$ est le produit de $A_{\delta\gamma}$ par un scalaire, donc que $A' : \gamma \mapsto A'_\gamma$ est un 1-cocycle de Γ, à valeurs dans $\mathbf{PGL}_n$, au sens de la cohomologie galoisienne [5, 30]. Comme $\mathbf{PGL}_n \cong \mathrm{Aut}\,\mathbf{P}_{n-1} \cong \mathrm{Aut}\,\mathbf{M}_n$, ce cocycle définit une k-forme V' de $\mathbf{P}_{n-1}$ et une k-forme M' de $\mathbf{M}_n$, (voir [5, § 2.6] ou [30, Chap. X, § 6]). Il existe alors des $\bar{k}$-isomorphismes $\varphi : \mathbf{P}_{d-1} \to V'$ et $\psi : \mathbf{M}_n \to M'$ tels que $^\gamma\varphi = \varphi.A'_\gamma$, $^\gamma\psi = \psi.A'_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Soit alors $\sigma = \varphi \circ \rho' \circ \varphi^{-1}$. C'est un $\bar{k}$-morphisme de G dans Aut V'. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$^\gamma\sigma = {}^\gamma\varphi.{}^\gamma\rho'.{}^\gamma\varphi^{-1} = \varphi.A'_\gamma.A'^{-1}_\gamma.\rho'.A'_\gamma.A'^{-1}_\gamma.\varphi^{-1} = \sigma,$$

donc σ est défini sur k, ce qui montre que (ii) $\Rightarrow$ (iii). On voit de même que $\psi \circ \rho \circ \psi^{-1}$ est un k-morphisme de G dans le groupe M'* des éléments inversibles de M'. Mais M'_k est une algèbre centrale simple de degré n^2 sur k, donc est de la forme $\mathbf{M}_m(C_k)$ où C_k est une algèbre à division centrale sur k, d'où (ii) $\Rightarrow$ (iv).

Réciproquement, soient V' une k-forme de $\mathbf{P}_{n-1}$ (resp. M' une k-forme de $\mathbf{M}_n$), $\sigma : G \to \mathrm{Aut}\,V'$ (resp. $\sigma : G \to M'^*$) un k-morphisme de ξ et $\varphi : \mathbf{P}_{n-1} \to V'$ (resp. $\varphi : \mathbf{M}_n \to M'$) un $\bar{k}$-isomorphisme. Alors $A' : \gamma \mapsto A'_\gamma = \varphi^{-1}.{}^\gamma\varphi$ est un 1-cocycle de Γ à valeurs dans $\mathbf{PGL}_n$. Si l'on pose $\rho = \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi$, le calcul précédent montre que $^\gamma\rho = A'^{-1}_\gamma.\rho.A'_\gamma$, d'où les implications (iv) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (ii).

12.7. A toute classe ξ de représentations vérifiant les conditions de 12.6, correspond un élément β_ξ du groupe de Brauer $H^2(k^*)$: l'image par l'application cobord $\delta : H^1(\Gamma, \mathbf{PGL}_n) \to H^2(k^*)$ de la classe de cohomologie du cocycle A' considéré plus haut. Rappelons que δ fait partie de la suite exacte de cohomologie non commutative associée à la suite exacte

$$1 \to \mathbf{G}_m \to \mathbf{GL}_n \to \mathbf{PGL}_n \to 1,$$

et que, comme $H^1(\Gamma, \mathbf{GL}_n)=0$, on a en fait une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma, \mathbf{PGL}_n) \xrightarrow{\delta} H^2(k^*).$$

Bien entendu, l'image β_ξ de la classe de cohomologie du cocycce A' de 12.6 par δ correspond à l'algèbre à division C_k (voir [30, Chap. X] pour plus de détails).

12.8. *Proposition. — Soient* $\xi \in \mathscr{R}(G)$ *et* ξ' *son image dans* $\mathscr{R}'(G)$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) ξ *est rationnelle sur* k.

(ii) ξ' *est rationnelle sur* k, *et l'élément* β_ξ *du groupe de Brauer associé à* ξ' *dans* 12.7 *est nul.*

Si ξ est rationnelle sur k, alors ξ' l'est aussi, et le cocycle A' de 12.6 est trivial, donc (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si $\beta_\xi=0$, alors, vu 12.7, A' est un cobord, donc il existe $B \in \mathbf{PGL}_{n,\bar{k}}$ tel que $A'_\gamma = B^{-1}.{}^\gamma B$ $(\gamma \in \Gamma)$. Si l'on pose $\sigma'(g)=B.\rho'(g).B^{-1}$, on a

$$^\gamma\sigma'(g) = {}^\gamma B.{}^\gamma\rho'(g).{}^\gamma B^{-1} = {}^\gamma B.A'^{-1}_\gamma.\rho'(g).A'_\gamma.{}^\gamma B^{-1} = B.\rho'(g).B^{-1},$$

donc ${}^\gamma\sigma'=\sigma'$, et σ' est défini sur k, ce qui montre que ξ' est représenté par un k-morphisme de G dans $\mathbf{PGL}_n$. Donc ξ est rationnelle sur k (12.3).

12.9. Dans la suite, nous supposerons que T contient un tore déployé sur k maximal S et que B est contenu dans un k-sous-groupe parabolique minimal P. On a donc $P = P_\theta$ $(\theta = \{a \in \Delta \mid a|_S = 0\})$.

12.10. *Proposition. — Soit* $\xi \in \mathscr{R}(G)$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) l_ξ *est stable par* Γ, *et le coefficient* $c_a(l_\xi)$ *est nul si* $a|_S=0$.

(ii) ξ *est fortement rationnelle sur* k.

Supposons (ii) vérifiée. Alors ξ est stable par Γ vu 12.6. D'autre part, $\mathscr{P}_\xi$ contient un élément défini sur k, donc un élément $P' \supset P$. On a alors $P'=P_{\theta'}$ avec $\theta \subset \theta' \subset \Delta$ (5.14), et l_ξ est orthogonal à θ' (12.2) donc à θ, d'où la deuxième partie de (i).

Supposons maintenant que ξ vérifie (i). Vu 12.6, il existe une k-forme V' de $\mathbf{P}_{d-1}$ $(d=d(\xi))$ et un k-morphisme $\rho' : G \to \mathrm{Aut}\, V'$ appartenant à ξ'. De plus, $\mathscr{P}_\xi \succ \mathscr{P}_\theta$, donc $\mathscr{P}_\xi$ possède un élément défini sur k (4.7).

Soit P' un k-groupe de $\mathscr{P}_\xi$. D'après ce qui a été rappelé en 12.1, P' a un seul point fixe Q dans V', qui est alors nécessairement rationnel sur k. Un résultat de F. Châtelet (*Annales E.N.S.*, *61* (1944), 249-300) implique alors que V' est k-isomorphe à $\mathbf{P}_{d-1}$; par suite, ξ' contient un k-morphisme de G dans $\mathbf{PGL}_d$ et ξ est rationnelle sur k (12.3).

12.11. *Corollaire. —* ξ *est fortement rationnelle sur k si et seulement si* l_ξ *est la restriction à* T *d'un élément de* $X^*(P)_k$.

Supposons ξ fortement rationnelle sur k. Soit $\rho : G \to \mathbf{GL}_d$ un k-morphisme contenu dans ξ et soit D la droite invariante par B. La classe $\mathscr{P}_\xi$ contient un élément défini sur k. L'unique élément P' de $\mathscr{P}_\xi$ qui contient P est donc défini sur k (4.7), et il en est de même de la droite D, unique droite stable par P'. Le poids dominant peut s'envisager comme le caractère de P′ dans D; c'est par conséquent la restriction à T d'un élément de $X^*(P')_k$, donc *a fortiori* d'un élément de $X^*(P)_k$.

Supposons maintenant que l_ξ soit dans l'image de $X^*(P)_k \to X^*(T)_k$. Il est fixe par Γ d'après 6.2 (3). D'autre part, l_ξ est trivial sur le groupe dérivé de $\mathscr{Z}(S)$, donc orthogonal aux racines simples qui sont égales à 1 sur S. On retrouve ainsi la condition (i) de 12.10.

12.12. Soit π une représentation irréductible de G. Les *k-poids* de π sont les restrictions à S des poids de π. Si G est déployé sur k, il n'y a donc pas de distinction à faire entre poids et k-poids. Le k-poids dominant (restriction du poids dominant) sera noté m_π ou m_ξ, ξ étant la classe de π.

Dans la suite, on supposera, outre les conditions de 12.9, que T est défini sur k, et que l'on a choisi sur $X^*(T)$ et $X^*(S)$ des ordres compatibles, dont les ensembles positifs de racines correspondent à P et B. On note j la restriction $X^*(T) \to X^*(S)$ et $(\ ,\ )$ des produits scalaires admissibles et compatibles sur $X^*(T)\otimes\mathbf{R}$ et $X^*(S)\otimes\mathbf{R}$ (6.10).

Pour tout $b \in {}_k\Delta$, soit $l_{(b)}$ la somme des l_a $(a \in \rho^{-1}(b))$. Il résulte de 12.10 que le poids dominant d'une représentation fortement rationnelle sur k est combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqq 0$ des $l_{(b)}$ (et réciproquement si G est simplement connexe). Si m_b désigne la restriction de $l_{(b)}$ à S, on a, d'après 6.11 :

$$(1) \qquad 2(m_b, b) = c_b \cdot (b, b), \qquad (m_b, c) = 0 \qquad (b, c \in {}_k\Delta;\ b \neq c),$$

avec c_b rationnel >0, (en fait $c_b = (a, a)/(b, b)$, où $a \in \Delta$ est un élément quelconque de $\rho^{-1}(b)$), d'où la proposition suivante :

12.13. *Proposition. — Soit* $\xi \in \mathscr{R}(G)$ *fortement rationnelle sur k. Alors* m_ξ *est combinaison linéaire à coefficients entiers* $\geqq 0$ *des poids* m_b $(b \in {}_k\Delta)$. *Il existe un entier* $d_b \geq 1$ *tel que* $z \cdot d_b \cdot m_b$ *soit le k-poids dominant d'une représentation fortement rationnelle sur k pour tout* $z \in \mathbf{N}$.

Appelons représentation fortement rationnelle sur k *fondamentale*, toute représentation fortement rationnelle sur k dont le k-poids dominant soit le plus petit multiple possible d'un m_b. Il existe donc $r = r_k(G)$ représentations fortement rationnelles sur k fondamentales, et leurs poids dominants forment une base de $X^*(S)\otimes\mathbf{Q}$. De plus, toute combinaison linéaire à coefficients entiers $\geqq 0$ de ces derniers est le k-poids dominant d'une représentation fortement rationnelle sur k, mais la réciproque est inexacte en général. Elle l'est toutefois si G est simplement connexe, et dans ce cas les k-poids dominants fondamentaux sont les m_b $(b \in {}_k\Delta)$.

12.14. Nous terminerons ce paragraphe par quelques propriétés des k-poids d'une représentation irréductible π (non nécessairement rationnelle sur k). On sait que tout poids de π est de la forme $l = l_\pi - \Sigma c_a(l) \cdot a$ $(a \in \Delta,\ c_a(l) \in \mathbf{N})$, où l_π est le poids dominant de π. Comme $\rho(\Delta) \subset {}_k\Delta \cup \{0\}$, il s'ensuit qu'un k-poids q de π peut s'écrire

$$(1) \qquad q = m_\pi - \sum_{b \in {}_k\Delta} d_b(q) \cdot b, \qquad (d_b(q) \in \mathbf{N}),$$

où m_π est le k-poids dominant de π. On notera $\theta(l)$ (resp. $\theta(q)$) l'ensemble des $a\in\Delta$ (resp. $b\in_k\Delta$) tels que $d_a(l)\neq 0$ (resp. $d_b(q)\neq 0$), et $|l|$ (resp. $|q|$) la somme des $d_a(l)$ (resp. $d_b(q)$).

L'ensemble des k-poids de π est évidemment invariant par le groupe de Weyl ${}_k\mathrm{W}(\mathrm{G})$ relatif à k (5.1).

12.15. *Lemme. — Soit q un k-poids de π, différent du k-poids dominant. Alors il existe $c\in\theta(q)$ tel que $q+c$ soit un k-poids de π.*

Soit V l'espace de la représentation π. Il est somme directe des espaces propres V_r de S correspondant aux différents k-poids r de π, espaces qui sont stables par $\mathscr{Z}(\mathrm{S})$. D'après un raisonnement élémentaire et bien connu, on a

$$(1)\qquad \rho(\mathrm{X})(\mathrm{V}_r)\subset \mathrm{V}_{r+c}\qquad (c\in_k\Phi,\ \mathrm{X}\in\mathfrak{g}_c),$$

où l'on a posé $$\mathfrak{g}_c=\{\mathrm{X}\in\mathfrak{g}\,|\,\mathrm{Ad}\,s(\mathrm{X})=s^c.\mathrm{X}\ (s\in\mathrm{S})\}\qquad (c\in_k\Phi).$$

Le radical unipotent U de B est engendré par les groupes radiciels U_a $(a\in\Delta)$ (cf. 2.3), comme cela résulte par exemple de 2.5 et de la remarque à 2.5 (c'est d'ailleurs vrai en toute caractéristique). Si $q+c$ n'était pas un k-poids quel que soit $c\in_k\Delta$, V_q serait stable par U, vu (1), donc par B (puisque $\mathrm{B}\subset\mathscr{Z}(\mathrm{S}).\mathrm{U}$), et contiendrait par conséquent une droite fixe par B, ce qui est absurde, vu 12.1. Il existe donc $c\in_k\Delta$ tel que $q+c$ soit un k-poids de π. Mais, si $c\notin\theta(q)$, alors $q+c$ n'est pas un k-poids vu 12.14, d'où le lemme.

La proposition suivante est due à Satake lorsque $k=\mathbf{R},\mathbf{C}$ [27, lemmas 5, 7].

12.16. *Proposition. — On conserve les notations précédentes. Une partie θ de ${}_k\Delta$ est de la forme $\theta(q)$, où q est un k-poids de la représentation irréductible π, si et seulement si $\{m_\pi\}\cup\theta$ est connexe.*

Prouvons tout d'abord que $\theta(q)\cup\{m_\pi\}$ est connexe. On procède par récurrence sur le nombre d'éléments de $\theta(q)$, l'assertion étant vide si $\theta(q)$ l'est. Par application répétée de 12.15, on voit qu'il existe un k-poids l de π et un élément $c\in\theta(q)$ tels que $\theta(q)=\theta(l)\cup\{c\}$, $c\notin\theta(l)$, et que $l'=l-c$ soit un k-poids de π. Par hypothèse d'induction, $\{m_\pi\}\cup\theta(l)$ est connexe. Il reste donc à montrer que c n'est pas orthogonal à $\{m_\pi\}\cup\theta(l)$. S'il l'était, alors $(l',c)=-(c,c)$, donc le transformé

$$r_c(l')=l'-2(l',c).(c.c)^{-1}.c=l'+2c=l+c,$$

de l' par la réflexion r_c serait un k-poids, ce qui est absurde vu 12.14 et le fait que $c\notin\theta(l)$.

Réciproquement, soit $\theta\subset{}_k\Delta$ tel que $\{m_\pi\}\cup\theta$ soit connexe. On peut numéroter les éléments b_i de θ de manière à ce que $(m_\pi,b_1)>0$, et que pour tout i $(2\leqq i\leqq m=\mathrm{card}(\theta))$ il existe un j $(1\leqq j<i)$ tel que $(b_j,b_i)\neq 0$ (donc <0). On vérifie alors immédiatement, par récurrence sur i, que

$$q_i=r_{b_i}\ldots r_{b_1}(m_\pi)$$

est un k-poids tel que $\theta(q_i)=\{b_1,\ldots,b_i\}$ $(1\leqq i\leqq m)$ et que $(q_i,b_{i+1})>0$ si $i<m$.

12.17. *Proposition. — On conserve les notations précédentes. Soient* $w \in {}_k\mathrm{W}(\mathrm{G})$ *et* $q = w(m_\pi)$. *Alors il existe* $w_1, w_2 \in {}_k\mathrm{W}(\mathrm{G})$ *tels que* $w_2(m_\pi) = m_\pi$, *que* w_1 *soit un produit de réflexions* r_b $(b \in \theta(q))$, *et que* $w = w_1 . w_2$.

On procède par récurrence sur $|q|$, la proposition étant évidente si $|q| = 0$.

On sait que l'adhérence d'une chambre de Weyl est un domaine fondamental pour ${}_k\mathrm{W}(\mathrm{G})$ [6]. Par conséquent, tout élément de l'orbite de m_π par ${}_k\mathrm{W}(\mathrm{G})$, différent de m_π, a un produit scalaire < 0 avec au moins un élément de ${}_k\Delta$. Il existe donc $c \in {}_k\Delta$ tel que $(q, c) < 0$. Soit alors

$$q' = r_c(q) = q - 2(q, c) . (c, c)^{-1} . c.$$

C'est un k-poids. Vu 12.14 et l'inégalité $(q, c) < 0$, on doit avoir $c \in \theta(q)$, donc $\theta(q') \subset \theta(q)$, et $|q'| < |q|$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse d'induction à q' et de remarquer que l'on a aussi $q = r_c(q')$.

§ 13. GROUPES $\mathfrak{p}$-ADIQUES A ENGENDREMENT COMPACT

13.1. Un groupe topologique est à *engendrement compact* s'il est égal au sous-groupe engendré par un sous-ensemble compact convenable. On sait que tout groupe de Lie réel ou complexe, n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, est à engendrement compact. Il n'en n'est pas toujours ainsi du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique H sur un corps $\mathfrak{p}$-adique K. Par exemple, si H est le groupe additif $\mathbf{G}_a$, alors H_K est non compact, mais réunion d'une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts. Le but de ce paragraphe est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que H_K soit à engendrement compact. La remarque suivante sera utile :

(i) Soient L un groupe topologique localement compact, M un sous-groupe fermé à engendrement compact. Alors si L/M est compact, L est à engendrement compact.

Cela résulte du fait que tout compact de L/M est image d'un compact de L par la projection canonique.

13.2. *Lemme. — Soient* G *unipotent et k de caractéristique zéro. Alors* $(\mathscr{D}\mathrm{G})_k = \mathscr{D}(\mathrm{G}_k)$.

Le lemme est évident si G est commutatif. Sinon, soit V un k-sous-groupe central non trivial de G contenu dans $\mathscr{D}\mathrm{G}$, par exemple le dernier sous-groupe non trivial de la série centrale descendante. Si x, y sont des éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G dont le crochet fait partie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{v}$ de V, alors, la formule de Campbell-Hausdorff entraîne immédiatement que $(\exp x, \exp y) = \exp[x, y]$. Par conséquent,

$$\mathrm{V}_k \subset \mathscr{D}(\mathrm{G}_k). \tag{1}$$

Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{V}$ la projection canonique. Raisonnant par récurrence sur la dimension, on peut supposer que $\mathscr{D}(\mathrm{G}'_k) = (\mathscr{D}\mathrm{G}')_k$. Comme $\mathrm{G}'_k = \mathrm{G}_k/\mathrm{V}_k$ (2.7), cela donne $(\mathscr{D}\mathrm{G})_k \subset \mathscr{D}(\mathrm{G}_k) . \mathrm{V}_k$, et le lemme résulte alors de (1).

13.3. *Lemme.* — *Supposons k de caractéristique zéro. Soient* U *un k-sous-groupe unipotent distingué de* G, $\pi : G \to G' = G/\mathscr{D}U$ *la projection canonique et* L *une partie de* G_k. *Si* $\pi(L)$ *engendre* G'_k, *alors* L *engendre* G_k.

Démonstration par récurrence sur dim G. Si U est commutatif, il n'y a rien à prouver. Sinon, soit V le dernier sous-groupe non-trivial de la série centrale descendante de U. Il est défini sur k, et invariant dans G. On a évidemment $G' = (G/V)/\mathscr{D}(U/V)$.

Soit L^* le sous-groupe engendré par L. L'hypothèse de récurrence, et l'égalité $G_k/V_k = (G/V)_k$ (2.7) montrent que $G_k = L^*.V_k$, donc aussi que $U_k = (L^* \cap U_k).V_k$. Or, si

$$x = a.v, \quad y = b.w \qquad (a, b \in L^* \cap U_k;\ v, w \in V_k),$$

on a, puisque v, w sont dans le centre de U, $(x, y) = (a, b)$, d'où $\mathscr{D}(U_k) \subset L^* \cap U_k$ et aussi, vu 13.2, $V_k \subset L^*$, donc $G_k = L^*$.

13.4. *Théorème.* — *Supposons que k soit un corps* $\mathfrak{p}$-*adique de caractéristique zéro. Soient* U *le radical unipotent de* G, $V = U/\mathscr{D}U$, *et* ρ *la représentation de* G *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{v}$ *de* V *définie à partir de la représentation adjointe de* G. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G_k *est à engendrement compact.*

(ii) $\mathfrak{v}$ *ne contient aucun sous-espace* $\mathfrak{w} \neq 0$ *défini sur k, stable par* G, *tel que l'image de* G_k *dans* $GL(\mathfrak{w})$ *par* ρ *soit compacte.*

En particulier, tout k-groupe réductif est à engendrement compact (1).

Le groupe $(G^0)_k$ étant d'indice fini dans G_k [5, 6.4], on peut supposer G connexe. Nous prouverons tout d'abord que (ii) $\Rightarrow$ (i), en distinguant plusieurs cas.

a) $G = \mathbf{G}_m$. Alors $G_k = k^*$ est engendré par le groupe M des unités de k, qui est compact, et par t, où t est une uniformisante de k (élément dont l'image dans k^*/M, qui est cyclique infini, engendre ce groupe).

b) $G = T$ *est un tore.* Alors T contient un tore décomposé T_d tel que $T' = T/T_d$ soit anisotrope sur k (1.8). Le groupe T'_k est compact (9.4) et l'on a $T_k/T_{d,k} = T'_k$ (2.7). Notre assertion résulte alors de *a)*, et 13.1 (i).

c) $G = T.U$ *est le produit semi-direct d'un k-tore* T *et d'un k-sous-groupe invariant unipotent* U *de dimension un.*

L'hypothèse (ii) entraîne que T opère non trivialement par automorphismes intérieurs sur U. Il existe donc $\chi \in X^*(T)_k$, $\chi \neq 0$, et un k-isomorphisme $\theta : \mathbf{G}_a \to U$, tels que

$$\theta(\chi(t).x) = t.\theta(x).t^{-1} \qquad (x \in \mathbf{G}_a,\ t \in T).$$

On peut alors trouver un k-morphisme $\lambda : \mathbf{G}_m \to T$ tel que $\chi \circ \lambda$ soit de la forme $s \mapsto s^m$ où m est un entier > 0 (cf. § 1). Par conséquent $\chi(T_k) \supset (k^*)^m$. Si L est un système générateur compact de T_k, qui existe d'après *b)*, alors G_k est engendré par L et par les $\theta(x^i.y)$, où x est une uniformisante de k, $i \in \mathbf{N}$, $i < m$ et y parcourt les entiers de k, d'où *c)*.

(1) Ce théorème répond à une question de M. Kneser, et intervient dans [15]. Nous lui devons en outre plusieurs suggestions pour le passage du cas réductif au cas général.

d) G est réductif. Soit P un k-sous-groupe parabolique minimal de G. Écrivons-le sous la forme $P = M.S.U$ où U est le radical unipotent de P, S un tore déployé sur k maximal de G, et M la partie anisotrope sur k de $\mathscr{Z}(S)$ (cf. 4.28). Le groupe U admet une suite de composition sur k dont les quotients successifs sont des espaces vectoriels sur lesquels S opère par des homothéties non triviales (3.18, remarque). Il résulte alors immédiatement de *c)* que $(S.U)_k = S_k.U_k$ est à engendrement compact. Le groupe $\mathscr{Z}(S)/S$ est isogène à M, donc anisotrope sur k, et $(\mathscr{Z}(S)/S)_k$ est compact (9.4). Comme S est déployé, on a $(\mathscr{Z}(S)/S)_k = \mathscr{Z}(S)_k/S_k$, donc vu *b)* et 13.1 (i), $\mathscr{Z}(S)_k$ est à engendrement compact. Alors $P_k = \mathscr{Z}(S)_k.U_k = \mathscr{Z}(S)_k.(S.U)_k$ est aussi à engendrement compact, et il en est de même de G_k, qui est réunion d'un nombre fini de doubles classes modulo P_k (5.15).

e) G n'est pas réductif. Il est le produit semi-direct de son radical unipotent U et d'un k-sous-groupe réductif maximal H (cf. 0.8). Soit $\mathfrak{q}$ le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathfrak{v}$ contenant toute droite définie sur k qui est stable par un tore décomposé sur k n'opérant pas trivialement sur elle. Ce sous-espace est défini sur k, stable par H_k, donc aussi par H, puisque H_k est Zariski dense dans H [23]. Les représentations rationnelles de H étant complètement réductibles, on peut trouver un supplémentaire $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{v}$, défini sur k et stable par H. Tout tore décomposé sur k de H opère trivialement sur $\mathfrak{r}$, donc l'image de l'homomorphisme $\sigma : H \rightarrow GL(\mathfrak{r})$ défini par ρ est anisotrope sur k, et $\sigma(H_k)$ est compact (9.4). Vu l'hypothèse (ii), on a donc $\mathfrak{r} = \{0\}$. On déduit alors immédiatement de la définition de $\mathfrak{q}$ et de *c)* l'existence d'un sous-ensemble compact M de $(G/\mathscr{D}U)_k$ tel que V_k soit contenu dans le sous-groupe M^* engendré par M. Vu *d)*, il s'ensuit que $(G/\mathscr{D}U)_k = H_k.V_k$ est à engendrement compact. Puisque $(G/\mathscr{D}U)_k = G_k/(\mathscr{D}U)_k$, on voit qu'il existe un compact $L \subset G_k$ dont l'image dans $(G/\mathscr{D}U)_k$ engendre ce groupe; L engendre alors G_k d'après 13.3, ce qui termine la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Le groupe $(G/\mathscr{D}U)_k = G_k/(\mathscr{D}U)_k$ est aussi à engendrement compact; on peut donc supposer U commutatif, $U = V$. Soit $\mathfrak{q}$ un k-sous-espace de $\mathfrak{v}$ stable par G, et soit $\mathfrak{r}$ un supplémentaire sur k de $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{v}$, stable par le sous-groupe de Levi H de G, donc aussi par G. Soient $Q = \exp \mathfrak{q}$ et $R = \exp \mathfrak{r}$ les sous-groupes correspondants. V est donc le produit direct de Q et R, et G le produit semi-direct de H, Q, R. Soit encore L un ensemble compact engendrant G_k, que l'on suppose de la forme $L = A.B.C$ $(A \subset H_k, B \subset Q_k, C \subset R_k)$, ce qui est évidemment loisible. Supposons que l'image de G_k dans $GL(\mathfrak{q})$ soit compacte. Alors, quitte à remplacer B par $\bigcup_{g \in G_k} {}^gB$, qui est aussi compact, on peut supposer que B est invariant par les automorphismes intérieurs de G_k. Pour tout entier $n \geqq 1$, on a alors

$$H_k.B^n.R_k.A.B.C \subset H_k.B^{n+1}.R_k,$$

ce qui montre que G_k est la réunion des sous-ensembles $H_k.B^n.R_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc que Q_k est engendré par le compact B. Comme Q_k est le groupe additif d'un espace vectoriel sur k, cela entraîne que $Q = \{e\}$, d'où (ii).

§ 14. GROUPES RÉELS

14.1. Suivant l'usage, $\pi_0(X)$ désigne l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace topologique X. C'est un groupe si X est un groupe topologique. On sait que si X est une **R**-variété algébrique, alors $\pi_0(X_{\mathbf{R}})$ est fini [40]. (Ici et dans la suite on considère bien entendu $X_{\mathbf{R}}$ comme muni de la topologie usuelle, définie à partir de celle de **R**, cf. 9.1.) La dimension topologique de $X_{\mathbf{R}}$ est au plus égale à dim X, et si X est une variété non singulière, chaque composante connexe de $X_{\mathbf{R}}$ est une variété analytique de dimension dim X [40]. Lorsque X est un groupe, on notera également $(X_{\mathbf{R}})^0$ la composante neutre de $X_{\mathbf{R}}$.

14.2. *Proposition. — Supposons* G *connexe, défini sur* **R**, *et soit* P *un* **R**-*sous-groupe parabolique de* G. *Alors* $(G/P)_{\mathbf{R}}$ *est une variété compacte connexe.*

$(G/P)_{\mathbf{C}}$ est une variété projective complexe non singulière, donc $(G/P)_{\mathbf{R}}$ est une variété réelle (9.1), projective, donc compacte.

Soit $G=H.U$ une décomposition de Levi de G. Le groupe P contient U et $G/P=H/(H\cap P)$. Le groupe $H\cap P$ est donc un **R**-sous-groupe parabolique de H, et l'on peut supposer que G est réductif.

Soit V le radical unipotent d'un **R**-sous-groupe parabolique opposé à P. On a vu (4.10) que la projection de G sur G/P identifie V à un ouvert de G/P, donc (9.1) $V_{\mathbf{R}}$ à un ouvert de $(G/P)_{\mathbf{R}}$. Le complémentaire Y de V dans G/P est un **R**-sous-ensemble algébrique de dimension strictement plus petite que $m=\dim G/P$. La dimension topologique de $Y_{\mathbf{R}}$ est donc $<m$ (14.1), et $V_{\mathbf{R}}$ est dense dans $(G/P)_{\mathbf{R}}$. Comme $V_{\mathbf{R}}$ est connexe, la proposition est démontrée.

14.3. Dans [8, Chap. VI, § 5, n° 2, prop. 2] il est montré que « tout groupe linéaire compact est algébrique ». Dans la terminologie suivie ici, cela signifie qu'un sous-groupe compact H de $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ est l'ensemble des points réels d'un sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ défini sur **R**, que l'on peut prendre égal à l'adhérence de Zariski $\mathscr{A}(H)$ de H. Cela implique en particulier que *si* $G\subset\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ *est connexe, défini sur* **R**, *et si* $G_{\mathbf{R}}$ *est compact, alors* $G_{\mathbf{R}}$ *est connexe*. En effet, ${G_{\mathbf{R}}}^0=\mathscr{A}((G_{\mathbf{R}})^0)_{\mathbf{R}}$ donc si $G_{\mathbf{R}}\neq(G_{\mathbf{R}})^0$, le groupe $\mathscr{A}((G_{\mathbf{R}})^0)$ est un sous-groupe propre de même dimension de G, et G n'est alors pas connexe.

14.4. *Théorème* (Matsumoto [18]). — *Supposons* G *connexe, défini sur* **R**, *et soit* S *un tore déployé sur* R *maximal de* G. *Alors* $G_{\mathbf{R}}=(G_{\mathbf{R}})^0.S_{\mathbf{R}}$.

Nous avons à montrer que l'homomorphisme naturel $\pi_0(S_{\mathbf{R}})\to\pi_0(G_{\mathbf{R}})$ est surjectif. Soient H un **R**-sous-groupe réductif maximal de G contenant S et U le radical unipotent de G. Le groupe $U_{\mathbf{R}}$ est connexe et $G_{\mathbf{R}}$ est homéomorphe au produit $H_{\mathbf{R}}\times U_{\mathbf{R}}$. L'homomorphisme $\pi_0(H_{\mathbf{R}})\to\pi_0(G_{\mathbf{R}})$ est donc bijectif, et il suffit de faire la démonstration lorsque G est réductif.

Soit P un **R**-sous-groupe parabolique minimal de H contenant S. C'est le produit semi-direct de son radical unipotent par $\mathscr{Z}(S)$, donc $\pi_0(\mathscr{Z}(S)_{\mathbf{R}}) \to \pi_0(P_{\mathbf{R}})$ est bijectif. Mais $(G/P)_{\mathbf{R}}$ est égal à $G_{\mathbf{R}}/P_{\mathbf{R}}$ (4.13) et est connexe (14.2). La suite exacte d'homotopie

$$\pi_0(P_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\iota} \pi_0(G_{\mathbf{R}}) \to \pi_0(G_{\mathbf{R}}/P_{\mathbf{R}}) \tag{1}$$

montre donc que ι est surjectif. Il reste à prouver que $\pi_0(S_{\mathbf{R}}) \to \pi_0(\mathscr{Z}(S)_{\mathbf{R}})$ est surjectif.

Le groupe $M' = \mathscr{Z}(S)/S$ est anisotrope sur $\mathbf{R}$, connexe, donc $M'_{\mathbf{R}}$ est compact (9.4) et connexe (14.3). Comme S est déployé sur $\mathbf{R}$, on a $M'_{\mathbf{R}} = \mathscr{Z}(S)_{\mathbf{R}}/S_{\mathbf{R}}$ et notre assertion résulte de la suite d'homotopie (1), appliquée à la fibration de $\mathscr{Z}(S)$ par S.

14.5. *Corollaire.* — *On a* $\pi_0(G_{\mathbf{R}}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$, *où* $d \leq r_{\mathbf{R}}(G)$.

En effet, $S_{\mathbf{R}}$ est un produit de $r = r_{\mathbf{R}}(G)$ facteurs $\mathbf{R}^*$, donc $\pi_0(S_{\mathbf{R}}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^r$, et $\pi_0(G_{\mathbf{R}})$ est un quotient de $\pi_0(S_{\mathbf{R}})$ d'après le théorème.

14.6. *Corollaire.* — *Supposons* G *réductif. Alors tout élément du groupe de Weyl relatif* ${}_{\mathbf{R}}W(G)$ (*cf.* 5.1) *admet un représentant dans* $(G_{\mathbf{R}})^0$.

En effet, si $x \in \mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}}$, il existe, vu 14.4, $y \in S_{\mathbf{R}}$ tel que $y.x \in (G_{\mathbf{R}})^0$, et $y.x$ représente évidemment le même élément de ${}_{\mathbf{R}}W(G)$ que x.

14.7. Nous terminons par quelques remarques pour faire le lien entre la théorie des groupes et algèbres de Lie semi-simples réels et certaines notions introduites dans ce travail. On suppose G semi-simple, défini sur $\mathbf{R}$. Il s'agit principalement de voir que le groupe A.N de la décomposition d'Iwasawa est la composante neutre de l'ensemble des points réels d'un $\mathbf{R}$-groupe trigonalisable maximal, et que ${}_{\mathbf{R}}W(G)$ et ${}_{\mathbf{R}}\Phi$ s'identifient au groupe de Weyl et au système de racines de la paire symétrique $(G_{\mathbf{R}}, K)$, où K est un sous-groupe compact maximal de $G_{\mathbf{R}}$.

Nous rappelons tout d'abord les décompositions de Cartan et d'Iwasawa. (Pour plus de détails, et les démonstrations, voir par exemple [13], ainsi que [4, § 1] pour divers compléments, concernant en particulier les groupes réels non connexes.)

Soient K un sous-groupe compact maximal, $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{p}$ le complément orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ de $G_{\mathbf{R}}$ par rapport à la forme de Killing, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{p}$, nécessairement commutative, et $P = \exp \mathfrak{p}$, $A = \exp \mathfrak{a}$. On sait que $(k, p) \mapsto k.\exp p$ est un homéomorphisme de $K \times \mathfrak{p}$ sur $G_{\mathbf{R}}$ (décomposition de Cartan) et que $s : k.p \mapsto k.p^{-1}$ $(k \in K, p \in P)$ est un automorphisme involutif de $G_{\mathbf{R}}$ (involution de Cartan), dont K est l'ensemble des points fixes. Les endomorphismes ad a $(a \in \mathfrak{a})$ sont simultanément diagonalisables sur $\mathbf{R}$, et $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ est somme directe du centralisateur $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ et d'espaces propres $\mathfrak{v}_a$, où a parcourt un ensemble ψ fini de formes linéaires non nulles sur $\mathfrak{a}$, les *racines de* $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ par rapport à $\mathfrak{a}$. Choisissons un ordre sur $\mathfrak{a}^*$ et soit $\mathfrak{n} = \sum_{a>0} \mathfrak{v}_a$. Alors $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie formée d'éléments x tels que ad x soit nilpotent, donc nilpotente, qui est normalisée par $\mathfrak{a}$. Soient $A = \exp \mathfrak{a}$ et $N = \exp \mathfrak{n}$ les sous-groupes analytiques de $G_{\mathbf{R}}$ engendrés par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$. Ils sont fermés, et $(k, a, n) \mapsto k.a.n$ est un homéomorphisme de $K \times A \times N$ sur $G_{\mathbf{R}}$ (décomposition d'Iwasawa). De plus N est unipotent, A diagonalisable sur $\mathbf{R}$, et A.N trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Soit $L = \mathscr{A}(A.N)$

l'adhérence de Zariski de A.N dans G. Alors L est un **R**-sous-groupe trigonalisable sur **R** maximal de G, et $A.N = (L_{\mathbf{R}})^0$. En effet, L est trigonalisable sur **R**, puisque A.N l'est. D'autre part $G_{\mathbf{R}}/A.N$ est compact (il est homéomorphe à K), donc $G_{\mathbf{R}}/L_{\mathbf{R}}$ l'est aussi, et 9.3 implique que L contient un **R**-sous-groupe trigonalisable maximal de G.

Cela entraîne aussi que $A = (S_{\mathbf{R}})^0$ où $S = \mathscr{A}(A)$ est un tore déployé sur **R** maximal, donc $\mathscr{N}(S) = \mathscr{N}(A)$. L'involution de Cartan s laisse stable A, donc aussi $\mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}}$. On a $\mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}} = (K \cap \mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}}).\exp \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'intersection de $\mathfrak{p}$ avec l'algèbre de Lie de $\mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}}$ (cf. [4, 1.10]). Mais la relation $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ montre alors que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{a}] = 0$, d'où $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ et

$$\mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}} = (K \cap \mathscr{N}(S)_{\mathbf{R}}).A,$$

d'où aussi, puisque A.N est connexe

$$(G_{\mathbf{R}})^0 \cap \mathscr{N}(S) = (K^0 \cap \mathscr{N}(S)).A.$$

Tenant compte de 14.6, on voit que tout élément de ${}_{\mathbf{R}}W(G)$ possède un représentant dans K^0, d'où aussi

$${}_{\mathbf{R}}W(G) = (K^0 \cap \mathscr{N}(A))/(K^0 \cap \mathscr{Z}(A)).$$

Le groupe ${}_{\mathbf{R}}W(G)$ coïncide donc avec le groupe introduit dans la théorie des espaces symétriques par E. Cartan; de plus, comme $\mathfrak{a}$ est la partie réelle de l'algèbre de Lie de S, les racines de $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ par rapport à $\mathfrak{a}$ s'identifient aux **R**-racines de G (ou plus précisément à leurs différentielles). On retrouve ainsi les définitions originales de ces notions, posées sans référence aux groupes algébriques.

The Institute for advanced study, Princeton N. J.,
Universität Bonn.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.), Groupes linéaires algébriques, *Annals of Math.* (2), *64*, 1956, 20-80.

[2] — Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques, *Coll. sur la théorie des groupes algébriques*, Bruxelles, 1962, 23-40.

[3] — Some finiteness properties of adele groups over number fields, *Publ. Math.*, I.H.E.S., n° *16* (1963), 101-126.

[4] BOREL (A.) et HARISH-CHANDRA, Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Annals of Math.* (2), *75* (1962), 485-535.

[5] BOREL (A.) et SERRE (J.-P.), Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne, *Comm. Math. Helv.*, *39* (1964), 111-164.

[6] BOURBAKI (N.), *Groupes et algèbres de Lie*, chap. II : « Systèmes de racines » *(à paraître)*.

[7] CHEVALLEY (C.), *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, Princeton 1946.

[8] — *Théorie des groupes de Lie*, II : « *Groupes algébriques* », Act. Sci. Ind., n° 1151, Hermann, Paris, 1951; III : « *Théorèmes généraux sur les algèbres de Lie* », Act. Sci. Ind., n° 1226, Hermann, Paris, 1955.

[9] — Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. Jour.* (2), *7* (1955), 14-66.

[10] — *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vol., Paris, 1958 (notes polycopiées).

[11] DEMAZURE (M.) et GROTHENDIECK (A.), *Schémas en groupes*, I.H.E.S., 1964 (notes polycopiées).

[12] GODEMENT (R.), Groupes linéaires algébriques sur un corps parfait, *Sém. Bourbaki*, n° 206, Paris, 1960.

[13] HELGASON (S.), *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Acad. Press, New York, 1962.

[14] JACOBSON (N.), *Lie algebras*, Intersc. tracts in pure math., *10*, Interscience publ., New York, 1962.

[15] KNESER (M.), Erzeugende und Relationen verallgemeinerter Einheitsgruppen, *Jour. f. reine u. ang. Mat.*, *214/15* (1964), 345-349.

[16] LANG (S.), Algebraic groups over finite fields, *Amer. J. Math.*, *78* (1956), 555-563.

[17] — *Introduction to algebraic geometry*, Intersc. tracts in pure math., *5*, Interscience publ., New York, 1958.

[18] MATSUMOTO (H.), Quelques remarques sur les groupes algébriques réels, *Proc. Japan. Ac.*, *40* (1964), 4-7.

[19] — Self-adjoint group, *Ann. of Math.* (2), *62* (1955), 44-45.

[20] MOSTOW (G. D.), Fully reducible subgroups of algebraic groups, *Amer. Jour. Math.*, *78* (1956), 200-221.

[21] ONO (T.), Arithmetic of algebraic tori, *Ann. of Math.*, (2), *74* (1961), 101-139.

[22] ROSENLICHT (M.), Some basic theorems on algebraic groups, *Amer. Jour. Math.*, *78* (1956), 401-443.

[23] — Some rationality questions on algebraic groups, *Annali di Mat.* (IV), *43* (1957), 25-50.

[24] — Extensions of vector groups by abelian varieties, *Amer. Jour. Math.*, *80* (1958), 685-714.

[25] — On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *101* (1961), 211-223.

[26] — Questions of rationality for solvable algebraic groups over nonperfect fields, *Annali di Math.* (IV), *61* (1963), 97-120.

[27] SATAKE (I.), On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, *Annals of Math.* (2), *71* (1960), 77-110.

[28] — On the theory of reductive algebraic groups over a perfect field, *Jour. Math. Soc. Japan*, *15* (1963), 210-235.

[29] SERRE (J.-P.), Représentations linéaires et espaces homogènes kähleriens des groupes de Lie compacts, *Sém. Bourbaki*, n° 100, Paris, 1954.

[30] — *Corps locaux*, Act. Sci. Ind., n° 1296, Paris, Hermann, 1962.

[31] TITS (J.), Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mém. Acad. Royale Belgique*, *29* (3) (1955).

[32] — Sur la classification des groupes algébriques semi-simples, *C.R. Acad. Sci. Paris*, *249* (1959), 1438-1440.

[33] — Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, *254* (1962), 2910-2912.

[34] — Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, *Coll. alg. top. found. geom. Utrecht* (1959), 175-192, Pergamon Press, Oxford, 1962.

[35] — Groupes semi-simples isotropes, *Coll. sur la théorie des groupes algébriques*, Bruxelles, 1962, 137-147.
[36] — Groupes simples et géométries associées, *Proc. Int. Congr. Math. Stockholm*, 1962, 197-221.
[37] WEIL (A.), The field of definition of a variety, *Amer. Jour. Math.*, *78* (1956), 509-524.
[38] — *Adeles and algebraic groups* (Notes by M. DEMAZURE and T. ONO), The Institute for Advanced Study, Princeton, 1961.
[39] — *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., n° 29, 2e éd., 1962.
[40] WHITNEY (H.), Elementary structure of real algebraic varieties, *Annals of Math.* (2), *66* (1957), 545-556.

Reçu le 1er novembre 1964.

TABLE DES MATIÈRES