PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

JEAN-PIERRE SERRE

Groupes proalgébriques

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 7 (1960), p. 5-67
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1960__7__5_0>

INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

GROUPES PROALGÉBRIQUES

par Jean-Pierre SERRE

1960

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 7

5, ROND-POINT BUGEAUD — PARIS (XVI^e)

DÉPOT LÉGAL
1re édition .. .. .. 1er trimestre 1961

INTRODUCTION

On rencontre fréquemment des *systèmes projectifs* de groupes algébriques commutatifs. Citons notamment :

(i) Les groupes connexes qui sont des revêtements d'un groupe fixé G.

(ii) Les jacobiennes généralisées J_m associées à une courbe algébrique X (cf. [13], par exemple).

(iii) Les groupes U/U^n, où U désigne le groupe des unités d'un corps valué complet à corps résiduel algébriquement clos (cf. [14]).

On peut, bien entendu, étudier séparément chaque groupe du système; c'est le point de vue de [13]. Mais il est plus commode de « passer à la limite »; les résultats obtenus sont en général plus simples. Dans le cas (i), la limite en question est le *revêtement universel* de G (au sens qui sera défini plus loin), dans le cas (ii), c'est le *groupe des classes d'idèles de degré* 0 de X, et dans le cas (iii), c'est le groupe U. Bien entendu, pour que le passage à la limite soit utilisable, il est nécessaire d'en démontrer au préalable un certain nombre de propriétés fondamentales : c'est là le but du présent mémoire; les applications à la théorie des corps locaux (c'est-à-dire au groupe U de l'exemple (iii)) seront exposées ailleurs.

Une première difficulté se présente; en caractéristique $\neq 0$, les groupes algébriques (commutatifs, comme toujours dans ce qui suit) *ne forment pas une catégorie abélienne* : il existe des morphismes $f : G \rightarrow G'$ dont le noyau et le conoyau sont nuls, et qui ne sont pas des isomorphismes. Nous remédierons à cette situation en convenant d'*identifier* deux groupes tels que G et G'; on obtient ainsi la catégorie $\mathcal{Q}$ des *groupes quasi-algébriques* (cf. § 1), qui, cette fois, est abélienne. Cette façon un peu brutale de procéder n'a pas d'inconvénients tant que l'on ne s'intéresse qu'à des extensions séparables (ce qui est le cas dans les applications que nous avons en vue). Si l'on voulait conserver les phénomènes dus à l'inséparabilité, il faudrait au contraire *agrandir* la catégorie des groupes algébriques, en acceptant ceux dont les anneaux locaux contiennent des *éléments nilpotents*; d'après un résultat inédit de Grothendieck, la catégorie ainsi définie est bien une catégorie abélienne.

Dans ce qui suit, nous nous en tenons au point de vue des groupes quasi-algébriques, et nous définissons les groupes proalgébriques comme des *limites projectives de groupes quasi-algébriques* (on devrait donc les qualifier de « pro-quasi-algébriques »...). On verra au § 2 que ces groupes forment une catégorie abélienne $\mathcal{P}$, où le foncteur limite projective existe et est exact. Les méthodes générales de l'Algèbre homologique, développées par Cartan-Eilenberg [1] et Grothendieck [7] (cité T dans ce qui suit), s'appliquent à la catégorie $\mathscr{P}$; en particulier cette catégorie contient *suffisamment de projectifs*. Il est alors commode de définir le groupe fondamental π_1 ainsi que les groupes d'homotopie supérieurs comme les *foncteurs dérivés* du foncteur $\pi_0 =$ groupe des composantes connexes. On trouve, et c'est là le principal résultat de ce mémoire, que les foncteurs π_i sont *nuls* pour $i \geqslant 2$, ou, ce qui revient au même, que π_1 est *exact à gauche*. La démonstration repose sur une étude détaillée de divers types de groupes proalgébriques : groupes de dimension zéro (§ 4), groupes de type multiplicatif (§ 7), groupes unipotents (§ 8), variétés abéliennes (§ 9). On obtient en même temps des *résolutions projectives* de ces groupes, et aussi (grâce à un théorème général de Gabriel, cf. § 3) la détermination de tous les *projectifs* de $\mathscr{P}$; les foncteurs Ext^i sont nuls dans $\mathscr{P}$ pour $i \geqslant 3$, et même pour $i \geqslant 2$ en caractéristique zéro (cf. § 10).

Les résultats résumés ci-dessus ont fait l'objet d'un cours au Collège de France; je tiens à remercier les auditeurs de ce cours, et particulièrement P. Gabriel et A. Grothendieck, pour l'aide qu'ils m'ont apportée par leurs commentaires et leurs suggestions.

CONVENTIONS GÉNÉRALES

1) Tous les groupes considérés sont supposés *commutatifs*.

2) La lettre k désigne un corps algébriquement clos; on note p son *exposant caractéristique* (Bourbaki, *Alg.*, V, § 1). Toutes les variétés algébriques considérées sont définies sur k (au sens de *FAC* [11], n° 34); nous conservons les notations de *FAC*, à cela près qu'une « application régulière » sera appelée un « morphisme ».

§ 1. GROUPES QUASI-ALGÉBRIQUES

1.1. Équivalence de structures de groupes algébriques.

Soit V une variété et soit $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions sur V. Si $q = p^n$, avec $n \in \mathbf{Z}$, nous noterons $\mathcal{O}^q$ le faisceau dont les sections sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$ sont les puissances q-ièmes des sections de $\mathcal{O}$ sur U; on vérifie tout de suite que V, muni de sa topologie de Zariski et du nouveau faisceau $\mathcal{O}^q$, est une variété algébrique; on la notera V^q. Si $n \geqslant 0$, on a $\mathcal{O}^q \subset \mathcal{O}$, ce qui signifie que l'application identique $i : \mathrm{V} \to \mathrm{V}^q$ est un morphisme; de même, si $n \leqslant 0$, $i : \mathrm{V}^q \to \mathrm{V}$ est un morphisme. On a donc une suite de morphismes :

$$\ldots \to \mathrm{V}^{p^{-1}} \to \mathrm{V} \to \mathrm{V}^p \to \ldots$$

On notera $\mathcal{O}^{p^{-\infty}}$ la réunion des faisceaux $\mathcal{O}^q$; la structure définie sur V par sa topologie et ce nouveau faisceau n'est pas en général une structure de variété algébrique; nous reviendrons là-dessus au n° 1.4.

Si G est un groupe algébrique, il en est de même de G^q, la loi de composition de G^q étant la même (ensemblistement !) que celle de G. En particulier, si $q \geqslant 1$, le morphisme $i : G \to G^q$ est un morphisme de groupes algébriques ; ce morphisme est bijectif, mais ce n'est pas un isomorphisme en général (sauf si $q = 1$, ou si $\dim(G) = 0$).

PROPOSITION 1. *Soit* $f : G_1 \to G_2$ *un morphisme bijectif de groupes algébriques. Il existe alors une puissance positive* q *de* p, *et un morphisme* $g : G_2 \to G_1^q$ *tels que le composé :*

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_1^q$$

soit l'application identique $i : G_1 \to G_1^q$.

On se ramène tout de suite au cas où G_1 et G_2 sont connexes, ou, ce qui revient au même, irréductibles. Si l'on note K_1 et K_2 leurs corps de fonctions rationnelles, f définit un plongement de K_2 dans K_1 ; de plus, comme f est bijectif, l'extension K_1/K_2 est radicielle, et comme les corps K_i sont de type fini sur k, il existe $q = p^n$, $n \geqslant 0$, tel que $K_2 \supset K_1^q$. On en déduit une application rationnelle $g : G_2 \to G_1^q$ telle que $g \circ f = i$; comme f et i sont des morphismes de groupes algébriques, on a $g(x+y) = g(x) + g(y)$ si x et y appartiennent à un ouvert non vide convenable de G_2 ; on en déduit par translation (cf. [13], p. 89, lemme 6, ou bien Lang [9], p. 5) que g est un morphisme de groupes algébriques.

Remarque. La proposition précédente peut aussi s'énoncer en disant que f est un homéomorphisme, et que, si l'on identifie G_1 et G_2 au moyen de f, le faisceau $\mathcal{O}_2$ de G_2 contient $\mathcal{O}_1^q$ pour q convenable. Comme $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$, on a donc $\mathcal{O}_1^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_2^{p^{-\infty}}$.

Soit maintenant G un groupe. Si S est une structure de groupe algébrique sur G, compatible avec sa structure de groupe, nous noterons G_S le groupe G muni de S, et nous désignerons par T_S et $\mathcal{O}_S$ sa topologie et son faisceau d'anneaux.

PROPOSITION 2. *Soient* S_1 *et* S_2 *deux structures de groupe algébrique sur* G, *compatibles avec sa structure de groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une structure* S_3 *telle que les applications identiques* $G_{S_3} \to G_{S_1}$ *et* $G_{S_3} \to G_{S_2}$ *soient des morphismes.*

(ii) *Il existe une structure* S_4 *telle que les applications identiques* $G_{S_1} \to G_{S_4}$ *et* $G_{S_2} \to G_{S_4}$ *soient des morphismes.*

(iii) *Il existe une puissance positive* q *de* p *telle que l'application identique* $G_{S_1} \to G_{S_2}^q$ *soit un morphisme.*

(iv) *On a* $T_{S_1} = T_{S_2}$ *et* $\mathcal{O}_{S_1}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_{S_2}^{p^{-\infty}}$.

On a (iii) $\Rightarrow$ (i) : il suffit de prendre $G_{S_3} = G_{S_1}^{q^{-1}}$; de même, on a (iii) $\Rightarrow$ (ii) en prenant $G_{S_4} = G_{S_2}^q$.

D'après la remarque qui suit la prop. 1, on a (i) $\Rightarrow$ (iv) et (ii) $\Rightarrow$ (iv). Il reste donc seulement à montrer que (iv) $\Rightarrow$ (iii). Posons, pour simplifier, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{S_1}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{S_2}$. D'après (iv), on a $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1^{p^{-\infty}}$. Recouvrons G_{S_2} par un nombre fini d'ouverts affines U_i, et pour chacun d'eux choisissons un système fini h_{ij} de générateurs de la k-algèbre $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_2)$. On a $h_{ij} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_1^{p^{-\infty}})$, et comme chacun des U_i est quasi-compact, on en déduit qu'il existe une puissance positive q de p telle que $h_{ij} \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_1^{q^{-1}})$ pour tout couple (i, j); on a alors $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_2) \subset \Gamma(U_i, \mathcal{O}_1^{q^{-1}})$, d'où $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1^{q^{-1}}$ et $\mathcal{O}_2^q \subset \mathcal{O}_1$, ce qui établit (iii) et achève la démonstration.

DÉFINITION 1. *Soit* G *un groupe, et soient* S_1 *et* S_2 *deux structures de groupe algébrique sur* G, *compatibles avec sa structure de groupe. On dit que* S_1 *et* S_2 *sont équivalentes si elles vérifient les conditions de la proposition* 2.

(Vu (iv), c'est bien une relation d'équivalence.)

On notera que, en caractéristique zéro, l'équivalence se réduit à l'égalité, puisque $\mathcal{O}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}$.

1.2. Groupes quasi-algébriques.

DÉFINITION 2. *On appelle groupe quasi-algébrique un groupe* G *muni d'une classe d'équivalence (au sens de la définition* 1*) de structures de groupe algébrique compatibles avec sa structure de groupe.*

Si G est un groupe quasi-algébrique, une structure de groupe algébrique sur G appartenant à la classe d'équivalence définissant la structure de G sera dite *compatible* avec la structure quasi-algébrique de G.

Tout groupe algébrique G définit de façon naturelle un groupe quasi-algébrique, que l'on notera $G^{p^{-\infty}}$, ou simplement G si aucune confusion ne peut en résulter.

D'après la condition (iv), tout groupe quasi-algébrique G est muni d'une *topologie* (dite « de Zariski »), et d'un *faisceau d'anneaux*, que l'on notera $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$.

Soit G un groupe quasi-algébrique, et soit H un *sous-groupe fermé* de G; soit S une structure de groupe algébrique sur G, compatible avec sa structure quasi-algébrique. Puisque H est fermé dans G_S, on peut le munir de la structure induite par celle de G_S, structure que l'on notera $S|H$. On vérifie (par exemple en se servant de la condition (i)) que si S et S' sont équivalentes, il en est de même de $S|H$ et $S'|H$; la classe ainsi définie munit H d'une structure de groupe quasi-algébrique, dite *induite* par celle de G. On définit de même la structure *quotient* sur G/H, et la structure *produit* sur $G \times G'$ (G' étant un autre groupe quasi-algébrique). En ce qui concerne les *morphismes*, on peut les caractériser de diverses façons :

PROPOSITION 3. *Soient* G *et* G' *deux groupes quasi-algébriques, et soit* $f : G \to G'$ *un homomorphisme (au sens usuel, i.e. ensembliste). Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) Il existe sur G *et* G' *des structures algébriques* S *et* S', *compatibles avec leur structure quasi-algébrique, et telles que* $f : G_S \to G'_{S'}$ *soit un morphisme de groupes algébriques.*

b) L'application f est continue et si φ *est une section de* $\mathcal{O}_{G'}^{p^{-\infty}}$ *sur un ouvert* U', $\varphi \circ f$ *est une section de* $\mathcal{O}_G^{p^{-\infty}}$ *sur l'ouvert* $f^{-1}(U')$.

c) Le graphe de f est un sous-groupe fermé de $G \times G'$.

Il est clair que *a)* entraîne *b)* et *c)*. Supposons *b)* vérifiée, et munissons G et G' de structures algébriques S et S' compatibles avec leur structure quasi-algébrique; si φ est une section de $\mathcal{O}_{S'}$ sur un ouvert U', $\varphi \circ f$ est une section de $\mathcal{O}_S^{p^{-\infty}}$ sur $f^{-1}(U)$. Le raisonnement déjà fait dans la démonstration de la prop. 2 montre alors qu'il existe une puissance positive q de p telle que f^{-1} applique $\mathcal{O}_{S'}$ dans $\mathcal{O}_S^{q^{-1}}$, et f est un morphisme de G_S dans $G_{S'}^{\prime q}$, d'où *b)* $\Rightarrow$ *a)*. Enfin, supposons *c)* vérifiée et choisissons comme ci-dessus des structures S et S′ sur G et G′; si G″ désigne le graphe de f, on peut munir G″ de la structure induite par celle de $G_S \times G'_{S'}$, et l'on obtient une structure S″. Comme $pr_1 : G''_{S''} \rightarrow G_S$ est un morphisme bijectif, S″ et S sont équivalentes (une fois G et G″ identifiés au moyen de pr_1); comme $pr_2 : G''_{S''} \rightarrow G'_{S'}$ est un morphisme, on a bien *c)* $\Rightarrow$ *a)*.

DÉFINITION 3. *Si* G *et* G′ *sont deux groupes quasi-algébriques, on appelle morphisme de* G *dans* G′ *tout homomorphisme* $f : G \rightarrow G'$ *qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition* 3.

Les propriétés habituelles des morphismes sont vérifiées (cf. Bourbaki, *Ens.*, IV, § 2). On notera Hom(G, G′) l'ensemble des morphismes de G dans G′; c'est un groupe abélien pour l'addition des morphismes. On vérifie également que les termes de « structure induite », « structure quotient », « structure produit » définis plus haut sont justifiés du point de vue « morphique » (cf. Bourbaki, *loc. cit.*, n^{os} 4 et 6). De plus :

PROPOSITION 4. *Soit* $f : G \rightarrow G'$ *un morphisme de groupes quasi-algébriques, soit* N *le noyau de* f *et soit* I *son image. Alors* N *et* I *sont fermés dans* G *et* G′ *respectivement, et* f *définit par passage au quotient un isomorphisme de* G/N *sur* I.

Choisissons sur G et G′ des structures S et S′ telles que la condition *a)* de la prop. 3 soit vérifiée. Comme $f : G_S \rightarrow G'_{S'}$ est un morphisme de groupes algébriques, on voit que I et N sont fermés, et que $G_S/N \rightarrow I$ est un morphisme bijectif. D'après la définition même de l'équivalence des structures algébriques, il s'ensuit que $G/N \rightarrow I$ est un isomorphisme pour les structures quasi-algébriques de ces deux groupes.

Nous noterons $\mathcal{Q}$ la catégorie formée par les groupes quasi-algébriques et les morphismes que l'on vient de définir.

PROPOSITION 5. *La catégorie* $\mathcal{Q}$ *est une catégorie abélienne, où la notion de sous-objet coïncide avec celle de sous-groupe fermé.*

En effet, la prop. 4 montre que les axiomes AB 1) et AB 2) de T sont satisfaits.

Lorsque la caractéristique de k est zéro, la catégorie $\mathcal{Q}$ est identique à la catégorie $\mathcal{A}$ des groupes algébriques.

1.3. Premières propriétés de la catégorie $\mathcal{Q}$.

Notons d'abord la propriété suivante, qui jouera un rôle essentiel par la suite :

PROPOSITION 6. *Tout objet de* $\mathcal{Q}$ *est artinien.*

En d'autres termes, si $G \in \mathcal{Q}$, et si $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ est une suite décroissante de sous-objets de G, la suite $G_1, \ldots, G_n, \ldots$ est stationnaire; c'est évident du fait que les G_i sont fermés dans G, et que G est un espace topologique noethérien.

Par contre, il existe des objets de $\mathcal{Q}$ qui *ne sont pas noethériens* (le groupe multiplicatif G_m contient une suite strictement croissante de sous-groupes finis). La situation s'améliore si l'on passe à la catégorie quotient $\mathcal{Q}/\mathcal{Q}_0$, où $\mathcal{Q}_0$ désigne la catégorie des groupes finis : tout objet de $\mathcal{Q}/\mathcal{Q}_0$ est de longueur finie [pour la définition des catégories quotients, voir T, nº 1.11 — ici, passer au quotient par $\mathcal{Q}_0$ équivaut à raisonner « à une isogénie près », comme on le fait souvent dans la théorie des variétés abéliennes].

Avant d'aller plus loin, introduisons une convention générale. Soit P une propriété portant sur les groupes algébriques, et vérifiant la condition suivante :

Si S_1 *et* S_2 *sont deux structures équivalentes de groupe algébrique sur un même groupe* G, *et si* S_1 *vérifie* P, *alors* S_2 *vérifie* P.

Soit G un groupe quasi-algébrique. Nous dirons que G *vérifie* P si toute structure de groupe algébrique sur G qui est compatible avec la structure quasi-algébrique de G vérifie P; vu la condition ci-dessus, il suffit que ce soit vrai pour *l'une* de ces structures. Par exemple, cela a un sens de dire que G est *connexe*, *fini*, *linéaire*, *unipotent*, ou que c'est un *tore*, une *variété abélienne*, etc. Les théorèmes de structure pour les groupes algébriques (voir Chevalley [2], exposés 4 et 6, ainsi que Rosenlicht [10]) donnent alors :

Proposition 7. a) *Tout groupe quasi-algébrique connexe* G *contient un sous-groupe connexe linéaire* L *tel que* G/L *soit une variété abélienne.*

b) *Tout groupe connexe linéaire* L *est produit d'un tore* T *par un groupe unipotent* U.

c) *Tout tore est produit de groupes isomorphes au groupe multiplicatif* G_m.

d) *Tout groupe unipotent connexe possède une suite de composition formée de sous-groupes fermés dont les quotients successifs sont isomorphes au groupe additif* G_a.

De plus, les sous-groupes L, T, U *dont l'existence est affirmée par* a) *et* b) *sont uniques.*

On peut donner des résultats plus précis sur les groupes unipotents ([13], chap. VII, théorèmes 1, 2, 3), mais nous n'en aurons pas besoin dans ce qui suit.

Corollaire. *Tout groupe quasi-algébrique possède une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes, soit au groupe* G_a, *soit au groupe* G_m, *soit à une variété abélienne, soit à un groupe fini.*

(Il va sans dire qu'il s'agit de suite de composition formée de *sous-objets*, c'est-à-dire de sous-groupes fermés; des omissions de ce genre seront fréquentes dans la suite.)

1.4. Variétés parfaites.

Les définitions et résultats des numéros précédents conduisent naturellement à introduire une nouvelle catégorie de variétés, que j'appellerai *variétés parfaites* (leurs anneaux locaux sont en effet des anneaux parfaits, c'est-à-dire tel que $x \to x^p$ soit un automorphisme). Cette catégorie est utile en diverses circonstances; toutefois, je n'en ferai pas usage dans la suite de ce travail, et je vais donc me borner à de brèves indications.

Soit X un espace topologique, muni d'un sous-faisceau $\mathcal{H}_X$ du faisceau des fonctions continues à valeurs dans k. Je dirai que X est une *pré-variété parfaite* si l'on a :

$(\mathrm{P_I})$. *Il existe un recouvrement ouvert fini* $\{\mathrm{U}_i\}$ *de* X *tel que chaque* U_i, *muni de la structure induite par celle de* X, *soit isomorphe à une variété algébrique munie de sa topologie de Zariski et de son faisceau* $\mathcal{O}^{p^{-\infty}}$ (*cf.* nº 1.1).

On définit de façon évidente le produit de deux prévariétés parfaites, et l'on dit que X est une *variété parfaite* si l'on a :

$(\mathrm{P_{II}})$. *La diagonale* Δ *est fermée dans* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$.

Les *morphismes* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ sont définis par la condition d'être continus et d'appliquer $\mathscr{H}_{\mathrm{X}'}$ dans $\mathscr{H}_{\mathrm{X}}$. Toutes les propriétés élémentaires des morphismes, sous-variétés, produits, se démontrent comme dans le cas algébrique (cf. *FAC*, nº 35).

Toute variété algébrique V définit (au moyen de $\mathcal{O}_{\mathrm{V}}^{p^{-\infty}}$) une variété parfaite $\mathrm{V}^{p^{-\infty}}$, et tout morphisme de variétés $f:\mathrm{V}\to\mathrm{V}'$ est un morphisme de variétés parfaites $f:\mathrm{V}^{p^{-\infty}}\to\mathrm{V}'^{p^{-\infty}}$. Inversement :

PROPOSITION 8. *Si* $f:\mathrm{V}^{p^{-\infty}}\to\mathrm{V}'^{p^{-\infty}}$ *est un morphisme de variétés parfaites, il existe une puissance* q *de* p *telle que* f *soit un morphisme de la variété algébrique* V *dans la variété algébrique* V'^{q}.

On raisonne comme dans la démonstration de la prop. 2.

Soit maintenant X une variété parfaite quelconque, et soient X_i ses composantes irréductibles; pour tout $x\in\mathrm{X}_i$, soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal de $\mathscr{H}_{x,\mathrm{X}}$ formé des fonctions nulles sur X_i, et soit $\mathrm{K}_{i,x}$ le corps des fractions de l'anneau d'intégrité $\mathscr{H}_{x,\mathrm{X}}/\mathfrak{p}_i$. Les $\mathrm{K}_{i,x}$ forment un faisceau constant sur X_i (cf. *FAC*, nº 36 pour le cas algébrique); soit K_i le corps des sections de ce faisceau. Les K_i sont des corps *parfaits*. Choisissons maintenant, pour chaque i, un sous-corps E_i de K_i vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\mathrm{K}_i=\mathrm{E}_i^{p^{-\infty}}$.

2) E_i *est une extension de type fini de* k.

(On montre facilement qu'un tel choix est possible.)

La donnée des E_i permet alors de définir un sous-faisceau $\mathscr{H}_{\mathrm{E}}$ de $\mathscr{H}$: on a $f\in\mathscr{H}_{x,\mathrm{E}}$ si, pour tout i tel que $x\in\mathrm{X}_i$, l'image de f dans $\mathscr{H}_{x,\mathrm{X}}/\mathfrak{p}_i$ appartient au sous-corps E_i.

PROPOSITION 9. *La topologie de Zariski et le faisceau* $\mathscr{H}_{\mathrm{E}}$ *définissent sur* X *une structure de variété algébrique* X_{E} *dont la variété parfaite associée n'est autre que* X.

La démonstration a un caractère local (l'axiome de séparation se vérifiant trivialement), et est laissée au lecteur.

COROLLAIRE. *Toute variété parfaite peut être définie par une variété algébrique.*

Revenons maintenant aux groupes. Puisque les produits existent dans la catégorie des variétés parfaites, on n'a pas de difficulté à définir un « groupe parfait » : c'est un groupe G, muni d'une structure de variété parfaite telle que $(x,y)\to x-y$ soit un morphisme de $\mathrm{G}\times\mathrm{G}$ dans G. Tout groupe quasi-algébrique est évidemment un groupe parfait. Inversement :

PROPOSITION 10. *Tout groupe parfait est un groupe quasi-algébrique.*

Indiquons le principe de la démonstration. On se ramène au cas où G est connexe, donc irréductible; soit K le corps parfait qui lui est attaché, et soit E un sous-corps de K vérifiant les conditions 1) et 2) ci-dessus. Si l'on note σ_g les translations par les éléments $g \in \mathrm{G}$, on a $\sigma_g(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}^{p^{-\infty}}$; en appliquant la prop. 8 au morphisme $(x, y) \rightarrow x - y$ de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G, on montre qu'il existe une puissance q de p telle que $\sigma_g(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}^q$ pour tout g. Le corps E' engendré par les $\sigma_g(\mathrm{E})$ vérifie donc encore 1) et 2) et est invariant par les σ_g. Si l'on munit G de la structure de variété algébrique associée à E' (prop. 9), on trouve une variété $\mathrm{G}_{\mathrm{E'}}$; de plus, l'application $(x, y) \rightarrow x - y$ est un morphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{E'}} \times \mathrm{G}_{\mathrm{E'}}$ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{E'}}$ (cela se voit par un raisonnement semblable à celui de [12], p. 723, lemme 6). Comme $(\mathrm{G}_{\mathrm{E'}})^{p^{-\infty}} = \mathrm{G}$, la proposition est démontrée.

Remarque. Les résultats de ce paragraphe s'étendent, avec des modifications évidentes, aux groupes non commutatifs. Dans la démonstration de la prop. 10, il faut introduire les translations à gauche et à droite, ainsi que les automorphismes induits sur la composante connexe de l'élément neutre de G par les automorphismes intérieurs de G.

§ 2. GROUPES PROALGÉBRIQUES

2.1. Définitions.

DÉFINITION 1. *On appelle groupe proalgébrique un groupe* G *muni d'une famille non vide* S *de sous-groupes et, pour tout* $\mathrm{H} \in \mathrm{S}$, *d'une structure de groupe quasi-algébrique sur* G/H, *ces données vérifiant les axiomes suivants* :

(P-1) $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathrm{S} \Rightarrow \mathrm{H} \cap \mathrm{H}' \in \mathrm{S}$.

(P-2) *Si* $\mathrm{H} \in \mathrm{S}$, *les sous-groupes* H' *contenant* H *qui appartiennent à* S *sont les images réciproques des sous-groupes fermés de* G/H.

(P-3) *Si* $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathrm{S}$, *et si* $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}'$, *l'homomorphisme* $\mathrm{G}/\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{G}/\mathrm{H}'$ *est un morphisme de groupes quasi-algébriques.*

(P-4) *L'application naturelle* $\mathrm{G} \rightarrow \varprojlim \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est une bijection de* G *sur la limite projective des groupes* G/H $(\mathrm{H} \in \mathrm{S})$.

L'ensemble S sera appelé *l'ensemble complet de définition* du groupe G, et les $\mathrm{H} \in \mathrm{S}$ seront appelés les *sous-groupes de définition* de G.

Remarques. 1) L'axiome (P-4) est équivalent à la conjonction des deux suivants :

(P-4.1) *On a* $\bigcap_{\mathrm{H} \in \mathrm{S}} \mathrm{H} = 0$.

(P-4.2) *Si, pour tout* $\mathrm{H} \in \mathrm{S}$, *on se donne un translaté* T(H) *de* H *de telle sorte que* $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}'$ *entraîne* $\mathrm{T}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{T}(\mathrm{H}')$, *alors* $\bigcap_{\mathrm{H} \in \mathrm{S}} \mathrm{T}(\mathrm{H}) \neq \emptyset$.

2) Les axiomes (P-1) et (P-2) expriment une condition de *saturation* pour S, analogue à celle que l'on exige pour les *faisceaux* ou les *atlas complets*. Il est souvent commode de partir d'axiomes moins forts (cf. les préfaisceaux) : supposons donné un ensemble S' de sous-groupes qui vérifie seulement (P-3) et (P-4), et soit filtrant décrois-

sant; on montre alors aisément qu'il existe une façon et une seule de prolonger S′ en un ensemble S vérifiant (P-1), (P-2), (P-3) et (P-4). On dit que S′ est un *ensemble de définition* pour le groupe proalgébrique ainsi obtenu.

Exemples.

1) Tout *groupe quasi-algébrique* G peut être muni canoniquement d'une structure de groupe proalgébrique : on prend pour S l'ensemble des sous-groupes fermés de G, et pour structure quasi-algébrique sur les G/H, $H \in S$, la structure quotient de celle de G. Les groupes proalgébriques ainsi obtenus sont ceux pour lesquels 0 est un sous-groupe de définition.

2) Soit G un groupe topologique *compact et totalement discontinu*. Soit S l'ensemble des sous-groupes ouverts de G. Si $H \in S$, le groupe quotient G/H est fini, et peut donc être considéré comme un groupe quasi-algébrique de dimension zéro. Les axiomes (P-1) à (P-4) sont vérifiés (seul (P-4.1) n'est pas tout à fait évident). On peut donc considérer G comme un groupe proalgébrique; un tel groupe est dit *de dimension zéro* (cf. § 4).

3) Soit W le groupe additif des *vecteurs de Witt* (cf. [15])

$$x = (x_0, \ldots, x_n, \ldots), \qquad x_i \in k$$

de longueur infinie. Soit H_n le sous-groupe de W formé des vecteurs x dont les n premières composantes sont nulles; le quotient W/H_n n'est autre que le groupe W_n des *vecteurs de Witt de longueur n*, et se trouve muni de façon naturelle d'une structure de groupe algébrique (les x_i jouant le rôle de coordonnées), donc aussi de groupe quasi-algébrique. Les H_n forment une famille filtrante décroissante, vérifiant (P-3) et (P-4); ils forment donc un ensemble de définition pour une structure de groupe proalgébrique sur W. Ce groupe joue un rôle important dans l'étude des groupes unipotents (cf. § 8).

Passons maintenant aux morphismes :

DÉFINITION 2. *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes proalgébriques, d'ensembles complets de définition* S_1 *et* S_2. *On appelle morphisme de* G_1 *dans* G_2 *un homomorphisme* $f : G_1 \rightarrow G_2$ *qui vérifie la condition suivante* :

(M) *Pour tout* $H_2 \in S_2$, *on a* $f^{-1}(H_2) \in S_1$, *et l'application de* $G_1/f^{-1}(H_2)$ *dans* G_2/H_2 *définie par* f *est un morphisme de groupes quasi-algébriques.*

Il suffit de vérifier (M) pour des sous-groupes H_2 cofinaux dans S_2 (c'est-à-dire formant un ensemble de définition pour G_2).

On démontre tout de suite les propriétés habituelles des morphismes (Bourbaki, *Ens.*, IV, § 2); de plus, la différence de deux morphismes est un morphisme. On note $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ l'ensemble des homomorphismes de G_1 dans G_2; c'est un groupe abélien. On note $\mathscr{P}$ la catégorie formée par les groupes proalgébriques et les morphismes que l'on vient de définir. Le but essentiel du présent paragraphe est de montrer que $\mathscr{P}$ est une *catégorie abélienne*, où les *limites projectives* existent, et où le foncteur $\varprojlim$ est *exact* (prop. 7 et prop. 10). On notera que $\mathscr{Q}$ est une sous-catégorie de $\mathscr{P}$, et que $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ est le même dans $\mathscr{Q}$ et dans $\mathscr{P}$ si G_1 et G_2 appartiennent tous deux à $\mathscr{Q}$; nous verrons plus loin d'autres propriétés de la sous-catégorie $\mathscr{Q}$ (prop. 7).

2.2. Produits.

Soit $\{G_i\}_{i\in I}$ une famille de groupes proalgébriques ; soit S_i l'ensemble complet de définition de G_i. Nous allons munir le produit $G=\prod G_i$ d'une structure de groupe proalgébrique :

Soit S' l'ensemble des sous-groupes H de G qui sont de la forme $\prod H_i$, où $H_i \in S_i$, et $H_i = G_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. Le quotient G/H s'identifie au produit des G_i/H_i, c'est-à-dire au produit d'un nombre fini de groupes quasi-algébriques ; on munira alors G/H de la structure quasi-algébrique produit de celle des G_i/H_i. Il est clair que S' est filtrant décroissant, et que les conditions (P-3) et (P-4) sont vérifiées. D'après la remarque 2 du n° 2.1, il existe donc sur G une structure proalgébrique dont S' est ensemble de définition.

Proposition 1. *La structure proalgébrique définie ci-dessus sur le groupe* $G=\prod G_i$ *est le produit* (au sens de Bourbaki, *Ens.*, IV, § 2, n° 4) *des structures proalgébriques des* G_i.

Il est clair que les projections $pr_i : G \to G_i$ sont des morphismes. Si G' est un groupe proalgébrique, et si $f : G' \to G$ est un morphisme, il s'ensuit que les $f_i = pr_i \circ f$ sont des morphismes. Inversement, supposons que les f_i soient des morphismes, et soit $H=\prod H_i$ un sous-groupe appartenant à S'. On a $f^{-1}(H) = \bigcap f_i^{-1}(H_i)$, ce qui, vu l'axiome (P-1), montre que $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de définition de G'; de plus, l'homomorphisme de $G'/f^{-1}(H)$ dans $G/H=\prod G_i/H_i$ défini par f est un morphisme : en effet, sa i-ème composante est composée de $G'/f^{-1}(H) \to G'/f_i^{-1}(H_i)$ et de $G'/f_i^{-1}(H_i) \to G_i/H_i$ qui sont tous deux des morphismes. L'application f est donc bien un morphisme, c.q.f.d.

Corollaire. *La catégorie $\mathscr{P}$ des groupes proalgébriques est une catégorie additive où les produits infinis existent.*

2.3. Limites projectives d'espaces homogènes principaux sur des groupes quasi-algébriques.

Soit G un groupe, et soit X un espace homogène sur G. Nous dirons que X est *principal* si le sous-groupe d'isotropie d'un point $x \in X$ est réduit à 0; le choix de x définit alors une bijection de G sur X. Si G est quasi-algébrique, on transporte à X la structure topologique de G; le résultat ne dépend pas du point choisi; dans ce cas, on appellera *sous-variété affine* de X toute orbite d'un sous-groupe fermé de G; c'est une partie fermée non vide de X.

Soient X et X' deux espaces homogènes principaux sur des groupes quasi-algébriques G et G'. Une application $h : X \to X'$ est dite un *morphisme affine* s'il existe un morphisme $f : G \to G'$ tel que $h(x+g) = h(x) + f(g)$; l'application f est déterminée de façon unique par h et on l'appelle la *partie homogène* de h. Un morphisme affine transforme une sous-variété affine de X en une sous-variété affine de X'.

Proposition 2. *Soit* $\mathbf{X}=(X_i, f_{ij})$ *un système projectif où les* X_i *sont des espaces homogènes principaux sur des groupes quasi-algébriques, et où les* $f_{ij} : X_j \to X_i$ *sont des morphismes affines. Soit* $X = \varprojlim \mathbf{X}$ *et soit* $f_i : X \to X_i$ *l'application canonique de* X *dans* X_i. *Alors* :

a) On a $X \neq \emptyset$.

b) On a $f_i(X) = \bigcap_{j \geqslant i} f_{ij}(X_j)$.

C'est une conséquence d'un résultat général sur les limites projectives (Bourbaki, *Top.*, I, 3e édition, Appendice). Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler brièvement la démonstration :

Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des familles $(A_i)_{i \in I}$, où A_i est une sous-variété affine de X_i, et où $f_{ij}(A_j) \subset A_i$. L'ensemble $\mathfrak{S}$, ordonné par inclusion décroissante, est *inductif* : cela se voit en remarquant que l'ensemble des sous-variétés affines de chacun des X_i *vérifie la condition d'Artin* (cf. § 1, prop. 6). Soit (A_i) un élément minimal de $\mathfrak{S}$; si l'on pose $A'_i = \bigcap_{i \geqslant j} f_{ij}(A_j)$, on vérifie aisément que $(A'_i) \in \mathfrak{S}$, et comme (A_i) est minimal, on a $A_i = A'_i$, c'est-à-dire $f_{ij}(A_j) = A_i$ pour $j \geqslant i$. Enfin, chacun des A_i est réduit à un point x_i; en effet, soit $x_i \in A_i$ (i fixé), et pour $j \geqslant i$, soit A''_j l'image réciproque de x_i dans A_j; si j n'est pas $\geqslant i$, prenons $A''_j = A_j$; on vérifie encore que $(A''_j) \in \mathfrak{S}$, d'où $A''_j = A_j$, et en particulier $A_i = \{x_i\}$, ce qui démontre notre assertion. Le système des $\{x_i\}$ est alors cohérent, ce qui démontre *a*). Si maintenant on a $x_i \in \bigcap_{i \geqslant j} f_{ij}(X_j)$, on remplace les X_j, $j \geqslant i$, par les $f_{ij}^{-1}(x_i)$, et l'on applique *a*) au système projectif ainsi obtenu; on en déduit *b*).

Remarque. Dans toute la suite, on écrira indifféremment $\varprojlim X_i$ ou $\varprojlim \mathbf{X}$.

Corollaire. *Soient* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ *trois systèmes projectifs dans la catégorie* $\mathcal{Q}$, *indexés par le même ensemble d'indices, et formant une suite exacte* :

$$\mathbf{A}' \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}'' \qquad (cf.\ \mathrm{T},\ \mathrm{n}^{\mathrm{o}}\ 1.7)$$

La suite $\varprojlim \mathbf{A}' \to \varprojlim \mathbf{A} \to \varprojlim \mathbf{A}''$ *est alors exacte.*

Posons $\mathbf{A}' = (A'_i, f'_{ij})$, $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$, $\mathbf{A}'' = (A''_i, f''_{ij})$. Dire que la suite $\mathbf{A}' \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}''$ est exacte signifie que, pour chaque i, on a des morphismes $\varphi_i : A'_i \to A_i$, $\psi_i : A_i \to A''_i$, commutant aux f_{ij}, f'_{ij}, f''_{ij}, et tels que la suite :

$$A'_i \to A_i \to A''_i$$

soit exacte.

Soit (a_i) un élément du noyau de $\varprojlim \mathbf{A} \to \varprojlim \mathbf{A}''$, et posons $X_i = \varphi_i^{-1}(a_i)$. Si G_i est le noyau de $A'_i \to A_i$, l'ensemble X_i est un espace homogène principal sur G_i, et la restriction de f'_{ij} à X_j est un morphisme affine de X_j dans X_i. D'après la prop. 2, il existe un point $(a'_i) \in \varprojlim X_i$; comme $\varprojlim X_i \subset \varprojlim A'_i$, on a ainsi construit un élément de $\varprojlim A'_i$ dont l'image dans $\varprojlim A_i$ est (a_i), c.q.f.d.

Remarque. Les résultats de ce numéro s'étendent aux groupes proalgébriques, cf. no 2.5.

2.4. Sous-objets et objets quotients dans la catégorie $\mathscr{P}$.

Soient tout d'abord G un groupe proalgébrique, et S un ensemble de définition de G. On peut identifier G à $\varprojlim G/H$, pour $H \in S$; comme chacun des G/H est un groupe quasi-algébrique, on peut donc munir G de la topologie *limite projective* des topologies des G/H. Si l'on note f_H la projection $G \to G/H$, on obtient une base d'ouverts de cette topologie en prenant les ensembles de la forme $f_H^{-1}(U_H)$, où $H \in S$, et où U_H est ouvert dans G/H (cf. Bourbaki, *Top.*, I, § 4, n° 4, 3^e^ édition). Si A est une partie de G, et si l'on pose $A_H = f_H(A)$, l'adhérence de A dans G est donnée par la formule :

$$(*) \qquad \overline{A} = \bigcap_{H \in S} f_H^{-1}(\overline{A_H}) = \varprojlim \overline{A_H}$$

Si A est fermé, on a donc :

$$(**) \qquad A = \varprojlim A_H = \varprojlim \overline{A_H}$$

cf. Bourbaki, *loc. cit.*

On notera que G n'est *pas nécessairement quasi-compact*, bien que les G/H le soient.

Dans tout ce qui suit, on considérera G comme muni de la topologie que l'on vient de définir. Il est clair que tout morphisme $f: G' \to G$ est continu.

Proposition 3. *Soit* G *un groupe proalgébrique, et soit* S *un ensemble de définition de* G.

1) *Donnons-nous, pour tout* $H \in S$, *un sous-groupe fermé* G'_H *de* G/H *de telle sorte que, si* $H \subset K$, *l'image de* G'_H *dans* G/K *soit égale à* G'_K. *Soit* $G' = \varprojlim G'_H = \bigcap f_H^{-1}(G'_H)$. *Alors* G' *est un sous-groupe fermé de* G, *et son image dans* G/H *est égale à* G'_H.

2) *On obtient par le procédé précédent tous les sous-groupes fermés de* G.

La formule $G' = \bigcap f_H^{-1}(G'_H)$ montre que G' est fermé dans G. Le fait que l'application $G' \to G'_H$ soit surjective, résulte de la proposition 2, *b)*, appliquée au système projectif des G'_H. Enfin, si G' est un sous-groupe fermé de G, et si l'on définit G'_H comme l'adhérence de $f_H(G')$, la formule $(**)$ ci-dessus montre que $G' = \varprojlim G'_H$, ce qui démontre 2).

Corollaire. *Si* G' *est un sous-groupe fermé de* G, *et si* H *est un sous-groupe de définition de* G, *l'image de* G' *dans* G/H *est fermée.*

Cela résulte de 1) et 2).

Conservons les notations de la prop. 3. Les groupes $H \cap G'$, $H \in S$, forment une famille filtrante décroissante de sous-groupes de G', et l'on a $G'_H = G'/G' \cap H$; comme G'_H est fermé dans G/H, il y a donc une structure naturelle de groupe quasi-algébrique sur $G'/G' \cap H$. Comme les axiomes (P-3) et (P-4) sont vérifiés, on obtient *sur* G' *une structure proalgébrique.*

Posons $G'' = G/G'$, et soit $G''_H = (G/H)/G'_H$. Pour tout H, on a une suite exacte :

$$0 \to G'_H \to G/H \to G''_H \to 0$$

On a $\varprojlim G'_H = G'$ et $\varprojlim G/H = G$; en appliquant le corollaire à la prop. 2, on voit que $\varprojlim G''_H$ s'identifie à G/G'. On en déduit *une structure proalgébrique sur* G/G', dont les groupes de définition sont les images des groupes de définition de G.

PROPOSITION 4. *La structure de groupe proalgébrique sur* G' (*resp. sur* G/G') *définie ci-dessus est la structure induite* (*resp. quotient*) *de celle de* G, *au sens de Bourbaki, Ens.*, IV, § 2.

Nous nous bornerons au cas de G', celui de G/G' étant analogue. Comme l'injection $i : G' \to G$ est visiblement un morphisme, il nous faut prouver que, si $G'' \in \mathscr{P}$, et si $f : G'' \to G'$ est une application telle que $g = i \circ f$ soit un morphisme, alors f est un morphisme. Il suffit de vérifier la condition (M) pour les $H \cap G'$, où H parcourt un ensemble de définition de G. Comme $f^{-1}(H \cap G') = g^{-1}(H)$, on voit que $f^{-1}(H \cap G') = H''$ est un groupe de définition de G''. De plus, le composé :

$$G''/H'' \to G'/(H \cap G') \to G/H$$

est un morphisme dans $\mathscr{Q}$, et comme $G'/(H \cap G') \to G/H$ est injectif, $G'/(H \cap G')$ est un sous-objet de G/H dans $\mathscr{Q}$, ce qui montre que $G''/H'' \to G'/(H \cap G')$ est un morphisme dans $\mathscr{Q}$, et l'application f est bien un morphisme, c.q.f.d.

PROPOSITION 5. (i) *Pour qu'un groupe proalgébrique* G *soit quasi-algébrique, il faut et il suffit que ses sous-groupes fermés vérifient la condition d'Artin.*

(ii) *Pour qu'un sous-groupe* H *d'un groupe proalgébrique* G *soit un groupe de définition de* G, *il faut et il suffit qu'il soit fermé et que* G/H *soit quasi-algébrique.*

La nécessité des conditions de (i) et de (ii) est triviale. Soit alors G un groupe proalgébrique; comme ses groupes de définition sont fermés, l'hypothèse de (i) entraîne qu'il existe un plus petit sous-groupe de définition, qui ne peut être que 0, ce qui montre bien que G est quasi-algébrique, d'où (i).

Soit maintenant H un sous-groupe fermé de G tel que G/H soit quasi-algébrique. Le sous-groupe 0 de G/H est groupe de définition de G/H; or, les sous-groupes de définition de G/H sont les images de ceux de G; il y a donc un sous-groupe de définition H' de G contenu dans H, et on en déduit aussitôt que H lui-même est un groupe de définition, c.q.f.d.

PROPOSITION 6. *Soit* $f : G \to G'$ *un morphisme de groupes proalgébriques, soit* N *le noyau de* f *et soit* I *son image. Alors* N *et* I *sont fermés dans* G *et* G' *respectivement, et* f *définit par passage au quotient un isomorphisme de* G/N *sur* I.

La formule $N = f^{-1}(0)$ montre que N est fermé.

Soit S (resp. S') l'ensemble complet de définition de G (resp. G') et soit T l'ensemble des couples (H, H'), $H \in S$, $H' \in S'$, tels que $f(H) \subset H'$. Ordonnons T par la relation :

$$(H_1, H_1') \leqslant (H_2, H_2') \quad \text{si} \quad H_1 \subset H_2 \quad \text{et} \quad H_1' \subset H_2'$$

C'est un ensemble filtrant décroissant. Si $t = (H, H')$ est un élément de T, nous poserons $G_t = G/H$, $G_t' = G'/H'$, et nous noterons G_t'' l'image de G_t dans G_t' par l'application définie par f. Les groupes G_t' et G_t'' ne dépendent en fait que de H'; on a $\varprojlim G_t' = G'$, et si l'on pose $G'' = \varprojlim G_t''$, G'' est un sous-groupe fermé de G'. Mais d'autre part, on a $G = \varprojlim G_i$, et le corollaire à la prop. 2 montre que $\varprojlim G_i \to \varprojlim G_i''$ est surjectif. On en conclut que G'' n'est autre que l'image I de G dans G′, ce qui montre bien que cette image est fermée.

Montrons enfin que le morphisme $G/N \to I$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer G par G/N et G′ par I, on peut supposer que $N = 0$ et $I = G'$, c'est-à-dire que f est *bijectif*. Soit H un groupe de définition de G; d'après la première partie de la proposition, le groupe $H' = f(H)$ est fermé dans G′; de plus, l'homomorphisme $G/H \to G'/H'$ est bijectif, et tout sous-groupe fermé de G'/H' a pour image réciproque un sous-groupe fermé de G/H; comme G/H est quasi-algébrique, la prop. 5 (i) montre que G'/H' est quasi-algébrique, et la prop. 5 (ii) montre que H′ est un groupe de définition de G′. Inversement, si H′ est un groupe de définition de G′, $H = f^{-1}(H')$ est groupe de définition de G d'après l'axiome (M); de plus, l'homomorphisme $G/H \to G'/H'$, étant bijectif, est un isomorphisme. Il s'ensuit bien que f est un isomorphisme, c.q.f.d.

PROPOSITION 7. *La catégorie $\mathscr{P}$ est une catégorie abélienne où les sous-objets sont les sous-groupes fermés. Pour qu'un objet $G \in \mathscr{P}$ soit dans la sous-catégorie $\mathscr{Q}$ des groupes quasi-algébriques, il faut et il suffit qu'il soit artinien.*

La première assertion résulte de la prop. 6, et de l'existence de produits finis dans $\mathscr{P}$. La seconde n'est qu'une reformulation de la prop. 5 (i).

COROLLAIRE 1. *La sous-catégorie $\mathscr{Q}$ est épaisse dans $\mathscr{P}$* (au sens de T, n° 1.11).

Cela signifie que, si $A \to B \to C$ est une suite exacte dans $\mathscr{P}$, et si A et C appartiennent à $\mathscr{Q}$, on a $B \in \mathscr{Q}$, ce qui est une propriété générale des objets artiniens dans une catégorie abélienne.

COROLLAIRE 2. *Les objets de $\mathscr{Q}$ forment une famille de cogénérateurs dans $\mathscr{P}$.*

Cela signifie que tout objet $G \in \mathscr{P}$ est isomorphe à un sous-objet d'un produit d'objets appartenant à $\mathscr{Q}$. Or, si S est un ensemble de définition de G, il est clair que G est isomorphe à un sous-objet du produit de tous les G/H, lesquels appartiennent à $\mathscr{Q}$.

2.5. Limites projectives.

Nous allons d'abord étendre à $\mathscr{P}$ les résultats du n° 2.3.

Soit $G \in \mathscr{P}$, et soit X un espace homogène principal sur G. Nous transporterons à X la topologie de G. Nous appellerons *sous-variété affine* de X l'orbite d'un sous-groupe *fermé* de G; si X et X′ sont deux tels espaces, correspondant aux groupes G, G′, nous appellerons *morphisme affine* toute application $h : X \to X'$ telle qu'il existe un morphisme (dans $\mathscr{P}$) $f : G \to G'$ vérifiant $h(x+g) = h(x) + f(g)$ pour $x \in X$ et $g \in G$.

PROPOSITION 8. *Soit $G \in \mathscr{P}$, et soit A_i une famille filtrante décroissante de sous-variétés affines de G. L'intersection des A_i est alors une sous-variété affine de G.*

Tout revient évidemment à démontrer que $\bigcap A_i \neq \emptyset$. Pour cela, soit S un ensemble de définition de G, et, si $H \in S$, soit $A_{i,H}$ l'image de A_i dans G/H; c'est un translaté de l'image de G_i dans G/H, et comme cette dernière est fermée (cor. à la prop. 3), $A_{i,H}$ est une *sous-variété affine* de G/H. Soit A_H l'intersection des $A_{i,H}$; comme les sous-variétés affines de G/H vérifient la condition d'Artin, A_H est une sous-variété affine de G/H. Quand H varie, les A_H forment un système projectif d'espaces homogènes principaux sur des groupes quasi-algébriques. On a donc $\varprojlim A_H \neq \emptyset$ d'après la prop. 2, et comme $\varprojlim A_H$ est contenue dans l'intersection des A_i, cela démontre la proposition.

PROPOSITION 9. *La proposition* 2 *du n*° 2.3 *reste valable lorsqu'on substitue dans son énoncé le mot* « *proalgébrique* » *au mot* « *quasi-algébrique* ».

La démonstration est la même, à cela près que, dans la prop. 2, on faisait usage de la propriété artinienne des sous-variétés affines de l'un des X_i, alors qu'ici on utilise la propriété d'intersection donnée par la prop. 8 (cf. Bourbaki, *Top.*, I, *loc. cit.*).

COROLLAIRE. *Le corollaire à la proposition* 2 *du n*° 2.3 *reste valable lorsqu'on substitue* $\mathscr{P}$ *à* $\mathscr{Q}$ *dans son énoncé.*

La démonstration est la même.

Soit maintenant $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$ un système projectif dans $\mathscr{P}$. Par définition même, le groupe $\varprojlim \mathbf{A}$ est le sous-groupe du produit $\prod A_i$ défini par les équations $f_{ij}(x_j) = x_i$ pour tout couple (i, j) tel que $j \geqslant i$. Si l'on munit le produit $\prod A_i$ de la structure de groupe proalgébrique définie au n° 2.2, on voit que $\varprojlim \mathbf{A}$ en est un sous-groupe *fermé*. Nous pouvons donc le munir de la structure proalgébrique *induite* par celle du produit; on obtient un ensemble de définition de cette structure en prenant les images réciproques des sous-groupes de définition des A_i. Il est immédiat que le groupe proalgébrique $\varprojlim \mathbf{A}$ est limite projective *dans la catégorie* $\mathscr{P}$ des groupes A_i; de plus, le corollaire à la prop. 9 montre que $\varprojlim$ est un foncteur exact. En résumé :

PROPOSITION 10. *Pour tout système projectif* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathscr{P}$, *la limite projective* $\varprojlim \mathbf{A}$ *existe, et c'est un foncteur exact en* $\mathbf{A}$.

COROLLAIRE 1. *Soit* $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$ *un système projectif dans* $\mathscr{P}$, *et soit* f_i *le morphisme canonique de* $\varprojlim \mathbf{A}$ *dans* A_i. *On a alors* :

$$\mathrm{Im}(f_i) = \bigcap_{j \geqslant i} \mathrm{Im}(f_{ij})$$

C'est un cas particulier de la prop. 9, *b)* (ou un corollaire de la prop. 10, au choix).

COROLLAIRE 2. *Soit* $f : G \to G'$ *un morphisme de groupes proalgébriques, et soit* (A_i) *une famille filtrante décroissante de sous-groupes fermés de* G. *On a alors* :

$$f(\bigcap A_i) = \bigcap f(A_i)$$

On applique la prop. 10 aux systèmes projectifs formés par les A_i et par les $f(A_i)$, en tenant compte de ce que la limite projective s'identifie ici à l'intersection.

Remarque. Si $B = \mathrm{Ker}(f)$, la formule du cor. 2 est équivalente à la suivante, qui n'est autre que l'axiome (AB 5*) de T, n° 1.5 :

$$B + \bigcap A_i = \bigcap (B + A_i)$$

Corollaire 3. *Soit* G *un groupe proalgébrique, et soit* A_i *une famille filtrante décroissante de sous-groupes fermés de* G, *avec* $\bigcap A_i = 0$. *L'application canonique* $G \to \varprojlim G/A_i$ *est alors un isomorphisme. Si, de plus, les* G/A_i *sont quasi-algébriques, les* A_i *forment un ensemble de définition de* G.

Posons $G_i = G$ pour tout i. On a des suites exactes :

$$0 \to A_i \to G_i \to G_i/A_i \to 0$$

d'où, en passant à la limite, la suite exacte :

$$0 \to \varprojlim A_i \to \varprojlim G_i \to \varprojlim G/A_i \to 0$$

Il est clair que $\varprojlim A_i = \bigcap A_i = 0$, et $\varprojlim G_i = G$. On voit donc bien que $G \to \varprojlim G/A_i$ est un isomorphisme.

Si les G/A_i sont quasi-algébriques, la définition même de la structure de groupe proalgébrique de $\varprojlim G/A_i$ montre que les A_i forment un ensemble de définition de $G = \varprojlim G/A_i$.

Variante. Au lieu d'utiliser, comme nous l'avons fait, les systèmes projectifs d'espaces homogènes principaux, on pourrait tirer directement (AB 5*) de la prop. 8, et en déduire l'exactitude du foncteur $\varprojlim$ en appliquant la prop. 1.8 de T. C'est à peu près aussi long, surtout si l'on prend la peine de démontrer la prop. 1.8 en question (ce qui n'est pas fait dans T).

2.6. Équivalence des catégories $\mathscr{P}$ et Pro($\mathscr{Q}$).

Proposition 11. *Soit* $\mathbf{G} = (G_i, f_{ij})$ *un système projectif dans* $\mathscr{Q}$, *et soit* $B \in \mathscr{Q}$. *On a* :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B) = \mathrm{Hom}(\varprojlim G_i, B)$$

[Ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement que $\mathbf{G}$ est un système projectif dans $\mathscr{P}$, cf. prop. 14. Par contre, il est essentiel que B appartienne à $\mathscr{Q}$.]

Soit $G = \varprojlim G_i$, et soit f_i le morphisme canonique de G dans G_i; chacun des f_i définit un homomorphisme $\mathrm{Hom}(G_i, B) \to \mathrm{Hom}(G, B)$, d'où un homomorphisme $h : \varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B) \to \mathrm{Hom}(G, B)$, et il s'agit de montrer que *h est un isomorphisme.*

Supposons d'abord que les f_{ij} soient *surjectifs*. Il en est alors de même des f_i (cor. 1 à la prop. 10), ce qui prouve déjà que h est injectif. De plus, si $A_i = \mathrm{Ker}(f_i)$, les A_i forment un ensemble de définition de G (cor. 3 à la prop. 10). Tout morphisme de G dans B provient donc d'un morphisme de l'un des G_i dans B, ce qui montre que h est bijectif.

Passons au cas général. Soit $G'_i = \mathrm{Im}(f_i) = \bigcap_{j \geqslant i} \mathrm{Im}(f_{ij})$, cf. cor. 1 à la prop. 10. Il est clair que $\varprojlim G'_i \to \varprojlim G_i$ est un isomorphisme, et d'après ce qui précède, on a $\mathrm{Hom}(G, B) = \varinjlim \mathrm{Hom}(G'_i, B)$. On est donc ramené à démontrer que l'application naturelle (induite par les injections $G'_i \to G_i$)

$$r : \varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B) \to \varinjlim \mathrm{Hom}(G'_i, B)$$

est bijective. On va pour cela définir une application en sens inverse. Pour i fixé, les sous-groupes $\mathrm{Im}(f_{ij})$ forment une famille filtrante décroissante dans G_i, d'intersection G'_i; comme G_i est artinien, il existe donc un indice $j \geqslant i$ tel que $\mathrm{Im}(f_{ij}) = G'_i$. Le morphisme $G_j \to G'_i$ ainsi obtenu définit un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(G'_i, B) \to \mathrm{Hom}(G_j, B) \to \varinjlim \mathrm{Hom}(G_k, B)$$

que l'on notera s_i. La collection des s_i définit elle-même un homomorphisme

$$s : \varinjlim \mathrm{Hom}(G'_i, B) \to \varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B)$$

On a $r \circ s = 1$ et $s \circ r = 1$ (c'est trivial, dès que l'on a explicité ce que cela signifie). D'où la proposition.

Corollaire. *Si* (G_i) *et* (G'_j) *sont deux systèmes projectifs dans* $\mathscr{Q}$, *on a* :

$$\varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, G'_j) = \mathrm{Hom}(\varprojlim G_i, \varprojlim G'_j)$$

Par définition même de $\varprojlim$, on a $\mathrm{Hom}(A, \varprojlim G'_j) = \varprojlim \mathrm{Hom}(A, G'_j)$. En appliquant cette formule à $A = \varprojlim G_i$, et en tenant compte de la prop. 11, on obtient le corollaire.

Avant d'aller plus loin, rappelons comment on définit la catégorie $\mathrm{Pro}(\mathscr{C})$ des *pro-objets* d'une catégorie $\mathscr{C}$ (Grothendieck [8], p. 3) : un objet de $\mathrm{Pro}(\mathscr{C})$ est un système projectif $\mathbf{X} = (X_i, f_{ij})$ d'objets de $\mathscr{C}$, les f_{ij} étant des morphismes dans $\mathscr{C}$, et l'ensemble d'indices étant un ensemble préordonné filtrant quelconque; si $\mathbf{X} = (X_i)$ et $\mathbf{X}' = (X'_j)$ appartiennent à $\mathrm{Pro}(\mathscr{C})$, on pose :

$$\mathrm{Pro\,Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i, X'_j)$$

Prenons maintenant $\mathscr{C} = \mathscr{Q}$. Si $\mathbf{X} = (X_i)$ appartient à $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$, posons $\varphi(\mathbf{X}) = \varprojlim \mathbf{X}$. On obtient ainsi un foncteur

$$\varphi : \mathrm{Pro}(\mathscr{Q}) \to \mathscr{P}$$

Proposition 12. *Le foncteur* φ *définit une équivalence de la catégorie* $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$ *avec la catégorie* $\mathscr{P}$.

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ sont deux objets de $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$, le corollaire à la prop. 11 montre que φ définit une bijection de $\mathrm{Pro\,Hom}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ sur $\mathrm{Hom}(\varphi(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}'))$. Pour prouver que φ est une équivalence, il suffit de remarquer que tout objet de $\mathscr{P}$ est isomorphe à un objet de la forme $\varphi(\mathbf{X})$, avec $\mathbf{X} \in \mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$.

On obtient un foncteur $\psi : \mathscr{P} \to \mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$ adjoint de φ en associant à tout groupe proalgébrique G, d'ensemble de définition S, le pro-objet $\psi(G) = (G/H)_{H \in S}$ (c'est un pro-objet *strict* dans la terminologie de Grothendieck, *loc. cit.*).

2.7. Prolongement d'un foncteur défini sur $\mathscr{Q}$.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne où les limites projectives existent (axiome AB 3*) de T, nº 1.5), et soit $T : \mathscr{Q} \to \mathscr{C}$ un foncteur covariant additif. On prolonge T à $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$ en posant

$$\mathrm{T}(\mathbf{X}) = \varprojlim \mathrm{T}(\mathrm{X}_i) \quad \text{si} \quad \mathbf{X} = (\mathrm{X}_i)$$

cf. Grothendieck [8], *loc. cit.*

Comme $\mathscr{P}$ est équivalente à $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$ (prop. 12), on peut donc aussi prolonger T à $\mathscr{P}$; on aura par définition :

$$\mathrm{T}(\varprojlim \mathrm{G}_i) = \varprojlim \mathrm{T}(\mathrm{G}_i) \quad \text{si} \quad (\mathrm{G}_i) \in \mathrm{Pro}(\mathscr{Q})$$

Proposition 13. (i) *Le foncteur prolongé* $\mathrm{T} : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ *commute aux limites projectives.*

(ii) *Si* $\mathrm{T} : \mathscr{Q} \to \mathscr{C}$ *est exact à gauche, il en est de même de son prolongement à* $\mathscr{P}$.

(iii) *Si* $\mathrm{T} : \mathscr{Q} \to \mathscr{C}$ *est exact à droite, et si* $\mathscr{C}$ *vérifie* (AB 5*) (T, nº 1.5), *le foncteur prolongé* $\mathrm{T} : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ *est exact à droite.*

Soit $\mathbf{G} = (\mathrm{G}_i, f_{ij})$ un système projectif dans $\mathscr{P}$, indexé par I, et soit $\mathrm{G} = \varprojlim \mathbf{G}$. Soit S_i l'ensemble de définition de G_i, et soit S l'ensemble des couples (i, H_i), où $\mathrm{H}_i \in \mathrm{S}_i$. On pose $(i, \mathrm{H}_i) \leqslant (j, \mathrm{H}_j)$ si $i \leqslant j$, et si $f_{ij}(\mathrm{H}_j) \subset \mathrm{H}_j$; l'ensemble S, muni de cette relation de préordre, est filtrant croissant. On voit facilement que, dans toute catégorie où $\varprojlim$ existe, on a la formule de « double limite » :

$$\varprojlim{}_{\mathrm{S}} = \varprojlim{}_{\mathrm{I}}(\varprojlim{}_{\mathrm{S}_i})$$

où $\varprojlim_{\mathrm{S}}$ désigne la limite suivant S.

En particulier, on a $\mathrm{G} = \varprojlim_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i)$, et comme les $\mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i$ sont dans $\mathscr{Q}$, on en déduit :

$$\mathrm{T}(\mathrm{G}) = \varprojlim{}_{\mathrm{S}} \mathrm{T}(\mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i)$$

En appliquant à nouveau la formule de double limite, on en tire :

$$\mathrm{T}(\mathrm{G}) = \varprojlim{}_{\mathrm{I}}(\varprojlim{}_{\mathrm{S}_i} \mathrm{T}(\mathrm{G}_i/\mathrm{H}_i)) = \varprojlim{}_{\mathrm{I}} \mathrm{T}(\mathrm{G}_i)$$

ce qui démontre (i).

Soit maintenant G′ un sous-groupe fermé de G, et $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}/\mathrm{G}'$. Si H est un groupe de définition de G, soit $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \cap \mathrm{G}'$, et soit $\mathrm{H}'' = (\mathrm{G}' + \mathrm{H})/\mathrm{G}'$; on sait que les sous-groupes ainsi obtenus forment un ensemble de définition pour G′ et G″. De plus, pour tout H, on a des suites exactes :

$$0 \to \mathrm{G}'/\mathrm{H}' \to \mathrm{G}/\mathrm{H} \to \mathrm{G}''/\mathrm{H}'' \to 0$$

Si T est exact à gauche, on en déduit des suites exactes :

$$0 \to \mathrm{T}(\mathrm{G}'/\mathrm{H}') \to \mathrm{T}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \to \mathrm{T}(\mathrm{G}''/\mathrm{H}'')$$

et en passant à la limite (ce qui est possible, le foncteur $\varprojlim$ étant toujours exact à gauche), on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{T}(\mathrm{G}') \to \mathrm{T}(\mathrm{G}) \to \mathrm{T}(\mathrm{G}'')$$

qui montre bien que le foncteur T, prolongé à $\mathscr{P}$, est exact à gauche.

Le raisonnement est le même si T est exact à droite, à cela près qu'il faut supposer que $\mathscr{C}$ vérifie (AB 5*) pour pouvoir affirmer que $\varprojlim$ est exact à droite.

Donnons tout de suite une application de la prop. 13 (on en verra d'autres par la suite) :

Proposition 14. *Soit* $\mathbf{G}=(G_i)$ *un système projectif dans* $\mathscr{P}$, *et soit* $B\in\mathscr{Q}$. *On a* :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B) = \mathrm{Hom}(\varprojlim G_i, B)$$

Posons $T(G)=\mathrm{Hom}(G, B)$, pour $G\in\mathscr{Q}$, et considérons T comme un foncteur de $\mathscr{Q}$ dans la catégorie $\mathscr{G}^*$ *duale* de la catégorie $\mathscr{G}$ des groupes; c'est un foncteur additif et covariant. Prolongeons-le à $\mathscr{P}$ par le procédé expliqué au début. On a encore $T(G)=\mathrm{Hom}(G, B)$, d'après la prop. 11. En appliquant la prop. 13, (i), on voit que T commute aux limites projectives, d'où la proposition (puisque le passage de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{G}^*$ transforme $\varinjlim$ en $\varprojlim$).

§ 3. OBJETS PROJECTIFS ET FONCTEURS DÉRIVÉS DANS LA CATÉGORIE $\mathscr{P}$

3.1. Existence d'objets projectifs.

Comme dans toute catégorie abélienne, un objet G de la catégorie $\mathscr{P}$ des groupes proalgébriques est dit *projectif* si $\mathrm{Hom}(G, B)$ est un foncteur exact en B, pour $B\in\mathscr{P}$.

Proposition 1. *Tout objet de* $\mathscr{P}$ *est quotient d'un objet projectif. De façon plus précise* : *Il existe un foncteur* $X:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$, *et un morphisme f du foncteur* X *dans le foncteur identique, tels que* $X(G)$ *soit projectif pour tout* $G\in\mathscr{P}$, *et que* $f(G):X(G)\to G$ *soit surjectif.*

Il suffit de montrer que $\mathscr{P}$ vérifie les hypothèses duales de celles du th. 1.10.1 de T (p. 135), c'est-à-dire que $\mathscr{P}$ vérifie (AB 5*), et possède un *ensemble* de cogénérateurs. Le premier point a été démontré au nº 2.5 (remarque suivant le cor. 2 à la prop. 10). Pour le second, on remarque que les objets de $\mathscr{Q}$ forment une famille de cogénérateurs pour $\mathscr{P}$ (2.4, cor. 2 à la prop. 7), et qu'il existe un *sous-ensemble* V de $\mathscr{Q}$ tel que tout $A\in\mathscr{Q}$ soit isomorphe à un $A'\in V$.

Proposition 2. *Pour qu'un objet* $G\in\mathscr{P}$ *soit projectif, il suffit (et il faut, trivialement) que* $\mathrm{Hom}(G, B)$ *soit un foncteur exact en* B, *pour* $B\in\mathscr{Q}$.

On s'appuie sur les propriétés suivantes : *a)* $\mathscr{P}$ vérifie (AB 5*); *b)* les objets de $\mathscr{Q}$ forment une famille de cogénérateurs pour $\mathscr{P}$; *c)* tout quotient d'un objet de $\mathscr{Q}$ est dans $\mathscr{Q}$. La démonstration est standard (cf. T, p. 136, lemme 1, où est traité le cas d'un cogénérateur unique).

Corollaire. *Toute limite projective et tout produit d'objets projectifs dans* $\mathscr{P}$ *est un objet projectif dans* $\mathscr{P}$.

Soit $\mathbf{G}=(G_i)$ un système projectif formé d'objets G_i projectifs dans $\mathscr{P}$, et soit $G=\varprojlim G_i$. Pour tout $B\in\mathscr{Q}$, on a $\mathrm{Hom}(G, B)=\varinjlim \mathrm{Hom}(G_i, B)$, cf. nº 2.7, prop. 14. Comme chacun des $\mathrm{Hom}(G_i, B)$ est un foncteur exact en B, et que $\varinjlim$ est aussi un foncteur exact (sur la catégorie des groupes abéliens), on voit que $\mathrm{Hom}(G, B)$ est exact en B, ce qui démontre bien que G est projectif, d'après la prop. 2. Le cas d'un produit se ramène à celui d'une limite projective, car tout produit est limite projective de produits finis.

3.2. Structure des objets projectifs (d'après Gabriel).

La catégorie $\mathcal{P}$ vérifie les hypothèses duales de celles introduites par Gabriel ([5], n$^{\text{os}}$ 1 à 4, [6], n° 1) dans l'étude des objets injectifs. Nous allons commencer par traduire ses définitions et ses résultats :

Soit $X \xrightarrow{u} G \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\mathcal{P}$. Nous dirons que X est *extension essentielle* de G si tout sous-objet de X se projetant sur G est égal à X lui-même.

Proposition 3. *Pour tout* $G \in \mathcal{P}$, *il existe une suite exacte* $X \xrightarrow{u} G \rightarrow 0$, *où* X *est projectif et extension essentielle de* G. *Deux telles suites exactes sont isomorphes.*

Pour la démonstration, voir Eckmann-Schopf [4], ou bien Gabriel [5], p. 17-03 à 17-05.

Le couple (X, u) de la prop. 3 est appelé *l'enveloppe projective* de G.

Proposition 4. *a) Toute extension essentielle de* G *est quotient de l'enveloppe projective de* G.

b) Si $Y \xrightarrow{v} G \rightarrow 0$ *est une suite exacte,* Y *étant projectif, il existe un morphisme surjectif* $f : Y \rightarrow X$ *tel que* $v = u \circ f$.

Pour la démonstration, voir [5], *loc. cit.* Noter que, sous les hypothèses de *b)*, l'objet projectif Y se décompose en produit $Y = X \times Y'$, où Y' est un autre objet projectif. La situation est tout à fait analogue à celle que l'on rencontre en algèbre locale, à propos des « résolutions minimales ».

Un objet projectif X dans $\mathcal{P}$ sera dit *indécomposable* s'il est non nul et s'il n'est pas somme directe de sous-objets X', X'', non nuls. L'anneau des endomorphismes d'un projectif indécomposable est un « anneau local non commutatif » (le quotient de l'anneau par son radical est un corps gauche), cf. [5], p. 17-11.

Proposition 5. *Pour que l'enveloppe projective d'un objet* $G \in \mathcal{P}$ *soit indécomposable, il faut et il suffit que* G *soit non nul, et que la relation* $G = A + B$, A *et* B *étant des sous-objets de* G, *entraîne* $A = G$ *ou* $B = G$.

Voir [5], *loc. cit.*

Théorème 1 (Gabriel [5], p. 17-11 et 17-12). *Tout projectif* X *dans* $\mathcal{P}$ *est produit direct de projectifs indécomposables, et cette décomposition est unique, à un automorphisme de* X *près.*

Le théorème précédent ramène la détermination des objets projectifs à celle des projectifs *indécomposables*. A cet effet, posons la définition suivante :

Définition 1. *On appelle groupes élémentaires les groupes suivants :*

(i) *Les groupes cycliques d'ordre premier* $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$.

(ii) *Le groupe multiplicatif* G_m.

(iii) *Le groupe additif* G_a.

(iv) *Les variétés abéliennes simples au sens de Weil* (*cf.* Lang [9], p. 29).

THÉORÈME 2. *L'enveloppe projective d'un groupe élémentaire est un projectif indécomposable, et tout projectif indécomposable de la catégorie $\mathscr{P}$ est de ce type. Si* G *et* G′ *sont deux groupes élémentaires distincts, leurs enveloppes projectives* X *et* X′ *sont isomorphes si et seulement si* G *et* G′ *sont des variétés abéliennes isogènes.*

Les groupes élémentaires vérifient l'hypothèse de la prop. 5 : c'est clair pour les types (i), (ii), (iii), et pour le type (iv) cela résulte du théorème de complète réductibilité de Poincaré-Weil (cf. [9], th. 6, p. 28). Leurs enveloppes projectives sont donc bien indécomposables. Inversement, soit X un projectif indécomposable. Les théorèmes de structure pour les groupes quasi-algébriques (cf. n° 1.3, cor. à la prop. 7) montrent que X admet un quotient isomorphe à un groupe élémentaire G, et, d'après la prop. 4 *b)*, le groupe X est nécessairement l'enveloppe projective de G.

Reste à voir à quelles conditions les enveloppes projectives X et X′ de deux groupes élémentaires G et G′ sont isomorphes. Tout d'abord, si G et G′ sont des variétés abéliennes isogènes, il existe un morphisme surjectif $G \to G'$ qui montre que G′ est quotient de X. Puisque X est indécomposable, on en déduit comme ci-dessus que X est enveloppe projective de G′, c'est-à-dire est isomorphe à X′. Nous allons voir que, à part le cas trivial $G = G'$, le cas précédent est le seul où X soit isomorphe à X′ :

Supposons donc $G \neq G'$, et, si G et G′ sont tous deux des variétés abéliennes, supposons que G ne soit pas isogène à G′. Si X était isomorphe à X′, il existerait un morphisme surjectif $X \to G'$. Les morphismes $X \to G$ et $X \to G'$ définissent un morphisme $X \to G \times G'$, dont nous noterons l'image par G″. Le groupe G″ est un sous-objet de $G \times G'$ se projetant sur G et sur G′; de plus, il est distinct de $G \times G'$, car sinon X serait l'enveloppe projective de $G \times G'$, et serait décomposable. Or, un tel sous-groupe de $G \times G'$ *n'existe pas*; en effet :

a) Si G est du type (i), comme $G'' \cap G \times \{0\}$ est distinct de G, on a $G'' \cap G \times \{0\} = \{0\}$, et G″ est le graphe d'un morphisme surjectif $G \to G'$, ce qui est absurde.

b) On peut donc supposer G et G′ connexes, ainsi que G″ (quitte à le remplacer par sa composante connexe de l'élément neutre). Les projections $G'' \to G$ et $G'' \to G'$ ont des noyaux finis (car ce sont des sous-groupes de G′ et de G distincts de G′ et G). Les théorèmes de structure des groupes quasi-algébriques (n° 1.3) montrent alors que si G est égal à G_a, G_m, ou une variété abélienne simple, il en est de même de G″; de plus, dans le dernier cas, G″ et G sont isogènes. Notre assertion est alors immédiate, c.q.f.d.

Il reste bien entendu à *déterminer explicitement les enveloppes projectives des groupes élémentaires*. C'est ce que nous ferons dans les paragraphes suivants. Pour le groupe élémentaire $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, on trouve le groupe $\mathbf{Z}_l$ des entiers l-adiques (n° 4.3); pour G_m, son revêtement universel $\overline{G_m}$ (n° 7.5); pour G_a, le groupe G_a lui-même si la caractéristique est zéro, et le revêtement universel $\overline{W}$ du groupe de Witt sinon (n°s 8.2 et 8.6); pour une variété abélienne A, une certaine extension de A par une limite projective de groupes linéaires (n° 9.2). Dans chaque cas on constate que le groupe obtenu est sans torsion; d'après le th. 2, *tout projectif est donc sans torsion*; y a-t-il une démonstration *a priori* de ce résultat ?

3.3. Foncteurs dérivés.

La prop. 1 montre que tout objet de $\mathscr{P}$ admet une *résolution projective*. Cela permet, par le procédé habituel, de définir les foncteurs *dérivés droits d'un foncteur additif contravariant*, ainsi que les foncteurs *dérivés gauches d'un foncteur additif covariant*, cf. T, n° 2.3. Si F désigne le foncteur en question, ses foncteurs dérivés seront notés R^iF dans le premier cas, L_iF dans le second (la position de l'indice i indiquant qu'il s'agit d'un foncteur *cohomologique*, ou d'un foncteur *homologique*). Bien entendu, on passe d'un cas à l'autre par dualité.

PROPOSITION 6. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne vérifiant* (AB 5*), *et soit* $T : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ *un foncteur additif covariant. Si* T *commute aux limites projectives, il en est de même de ses foncteurs dérivés* L_iT.

La démonstration est la même que celle du th. 9.4* de [1] (p. 100). Soit $\mathbf{G} = (G_\alpha)$ un système projectif dans $\mathscr{P}$; pour chaque α, soit $X_\alpha = (X_{n,\alpha})$ la résolution projective *canonique* de G, obtenue au moyen du foncteur X de la prop. 1; comme cette résolution dépend fonctoriellement de G_α, les X_α forment un système projectif de complexes, dont la limite projective sera notée X. Comme le foncteur $\varprojlim$ est exact dans $\mathscr{P}$, le complexe X est une résolution projective de G. Par définition, on a :

$$L_iT(G) = H_i(T(X)) \quad \text{et} \quad L_iT(G_\alpha) = H_i(T(X_\alpha))$$

Comme T commute aux limites projectives, on a $T(X) = \varprojlim T(X_\alpha)$, et comme le foncteur $\varprojlim$ est exact dans $\mathscr{C}$, on a :

$$H_i(\varprojlim T(X_\alpha)) = \varprojlim H_i(T(X_\alpha))$$

En combinant ces relations, on obtient bien :

$$L_iT(G) = \varprojlim L_iT(G_\alpha) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

La proposition précédente s'applique notamment lorsque le foncteur $T : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ est obtenu par passage à la limite à partir d'un foncteur additif covariant $T : \mathscr{Q} \to \mathscr{C}$, cf. n° 2.7, prop. 13.

3.4. Les foncteurs Ext^i.

Soit $\mathscr{G}$ la catégorie des groupes abéliens. Si B et G sont deux objets de $\mathscr{P}$, posons :

$$F_B(G) = \mathrm{Hom}(G, B)$$

Pour B fixé, F_B est un foncteur additif contravariant de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{G}$, exact à gauche. On pose :

$$\mathrm{Ext}^i(G, B) = R^iF_B(G)$$

Autrement dit, si $X = (X_n)$ est une résolution projective de G, on définit $\mathrm{Ext}^i(G, B)$ comme $H^i(\mathrm{Hom}(X, B))$. On sait (voir [1], chap. VI, ou bien T, nº 2.3) que les $\mathrm{Ext}^i(G, B)$ forment un foncteur cohomologique à la fois par rapport à G et par rapport à B; on a $\mathrm{Ext}^0(G, B) = \mathrm{Hom}(G, B)$.

PROPOSITION 7. *Soit* $\mathbf{G} = (G_\alpha)$ *un système projectif dans* $\mathscr{P}$, *et soit* $B \in \mathscr{Q}$. *On a* :

$$\varinjlim \mathrm{Ext}^i(G_\alpha, B) = \mathrm{Ext}^i(\varprojlim G_\alpha, B) \text{ pour tout } i \geqslant 0.$$

D'après la prop. 14 du nº 2.7, on a $F_B(\varprojlim G_\alpha) = \varinjlim F_B(G_\alpha)$. On peut donc appliquer à F_B la proposition duale de la prop. 6, et l'on obtient la formule cherchée.

Ainsi, les foncteurs Ext^i « passent à la limite » par rapport à la première variable (quand la seconde appartient à $\mathscr{Q}$); il n'en est pas de même pour la seconde variable, comme on peut le voir facilement. Toutefois :

PROPOSITION 8. *On a* $\mathrm{Ext}^i(G, \prod B_\alpha) = \prod \mathrm{Ext}^i(G, B_\alpha)$.

En effet, soit $X = (X_n)$ une résolution projective de G. On a

$$\mathrm{Hom}(X, \prod B_\alpha) = \prod \mathrm{Hom}(X, B_\alpha)$$

et comme la cohomologie commute aux produits directs (cf. [1], chap. V, prop. 9.3), on en déduit :

$$H^i(\mathrm{Hom}(X, \prod B_\alpha)) = \prod H^i(\mathrm{Hom}(X, B_\alpha))$$

c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^i(G, \prod B_\alpha) = \prod \mathrm{Ext}^i(G, B_\alpha)$, c.q.f.d.

Rappelons qu'on appelle *dimension projective* d'un objet $G \in \mathscr{P}$ la borne inférieure des entiers n tels que G admette une résolution projective de longueur n. On la notera $dp(G)$. Pour que $dp(G)$ soit $\leqslant k$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ext}^i(G, B) = 0$ pour $i > k$ et pour tout $B \in \mathscr{P}$. On a même :

PROPOSITION 9. *Soit* $G \in \mathscr{P}$, *et soit k un entier* $\geqslant 0$. *Si l'on a* $\mathrm{Ext}^{k+1}(G, B) = 0$ *pour tout groupe élémentaire* B (nº 3.2, déf. 1), *la dimension projective de* G *est* $\leqslant k$.

On raisonne par récurrence sur k. Si $k = 0$, et si $\mathrm{Ext}^1(G, B) = 0$ pour tout groupe élémentaire B, on en déduit d'abord $\mathrm{Ext}^1(G, B) = 0$ pour tout $B \in \mathscr{Q}$, puisque tout objet de $\mathscr{Q}$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont des groupes élémentaires. Le foncteur $\mathrm{Hom}(G, B)$ est alors exact sur la catégorie $\mathscr{Q}$, ce qui montre que G est projectif (prop. 2), c'est-à-dire de dimension projective nulle.

Si $k \geqslant 1$, on écrit G sous la forme $G = P/R$, où P est projectif. On a alors $\mathrm{Ext}^{k+1}(G, B) = \mathrm{Ext}^k(R, B)$ pour tout $B \in \mathscr{P}$. L'hypothèse de récurrence montre donc que $dp(R) \leqslant k - 1$, d'où évidemment $dp(G) \leqslant k$.

COROLLAIRE. *Soit k un entier tel que* $\mathrm{Ext}^{k+1}(G, B) = 0$ *pour tout couple de groupes élémentaires* G *et* B. *On a alors* :

$$\mathrm{Ext}^i(G, B) = 0 \text{ pour } i > k, \text{ et } B, G \in \mathscr{P}$$

(C'est l'analogue d'un théorème bien connu de M. Auslander.)

Puisque tout objet de $\mathcal{Q}$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont des groupes élémentaires, on voit que $\mathrm{Ext}^{k+1}(G, B) = 0$ pour tout $G \in \mathcal{Q}$ et tout groupe élémentaire B. La prop. 7 montre alors que cette relation est vraie pour tout $G \in \mathcal{P}$, et il s'ensuit, d'après la prop. 9, que $dp(G) \leqslant k$, d'où le corollaire.

Remarque. On verra au § 10 que les hypothèses du corollaire ci-dessus sont vérifiées pour $k=2$ (et même pour $k=1$ en caractéristique zéro).

3.5. Classes d'extensions.

Soient A et $B \in \mathcal{P}$. Une extension de A par B est une suite exacte :

$$0 \to B \to E \to A \to 0 \tag{$*$}$$

La notion d'*isomorphisme* de deux extensions se définit de manière évidente. Les classes (à isomorphisme près) d'extensions de A par B forment un ensemble, que l'on note $\mathrm{Ext}(A, B)$; un procédé bien connu, dû à Baer, permet de munir $\mathrm{Ext}(A, B)$ d'une structure de groupe abélien (cf. [1], chap. XIV, § 1, ou bien [13], chap. VII, § 1). On sait que ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(A, B)$. De façon plus précise, la suite exacte $(*)$ définit deux opérateurs bords

$$d : \mathrm{Hom}(B, B) \to \mathrm{Ext}^1(A, B)$$
$$d : \mathrm{Hom}(A, A) \to \mathrm{Ext}^1(A, B)$$

et, si 1_A (resp. 1_B) désigne l'application identique de A (resp. de B) sur lui-même, on pose :

$$\theta_1(E) = d(1_B) \qquad \theta_2(E) = d(1_A)$$

En faisant correspondre à E les éléments $\theta_1(E), \theta_2(E) \in \mathrm{Ext}^1(A, B)$, on obtient deux applications

$$\theta_1, \theta_2 : \mathrm{Ext}(A, B) \to \mathrm{Ext}^1(A, B)$$

[La notation θ_1 provient de ce que θ_1 est définie au moyen du cobord par rapport à la *première* variable; de même pour θ_2.]

Proposition 10. *Les applications* θ_1 *et* θ_2 *sont des isomorphismes de* $\mathrm{Ext}(A, B)$ *sur* $\mathrm{Ext}^1(A, B)$; *on a* $\theta_1 + \theta_2 = 0$.

Le fait que θ_1 soit un isomorphisme est démontré dans [1] (th. 1.1, p. 291) au moyen d'une résolution projective de A. Tout revient donc à prouver que $\theta_1 + \theta_2 = 0$; c'est fait en exercice dans [1], pour la catégorie des modules, mais la démonstration utilise à la fois des résolutions projectives et des résolutions injectives; elle ne s'applique donc pas ici. En fait, il n'est pas difficile de vérifier la formule en question par un calcul explicite; nous allons nous borner à en donner le principe.

Changeons d'abord les notations, et considérons une suite exacte :

$$0 \to A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \to 0$$

Choisissons une résolution projective *normale*

$$0 \to X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \to 0$$

de cette suite exacte (cf. [1], p. 78-79, dont nous conservons les notations). On va expliciter $d(1_{A''})$ et $d(1_{A'})$ au moyen des opérateurs Θ_n, σ qui interviennent dans la construction de X.

Calcul de $d(1_{A''})$. On considère $1_{A''}$ comme un élément de $H^0(\mathrm{Hom}(X'', A''))$, et on doit prendre son cobord en utilisant la suite exacte de complexes :

$$0 \to \mathrm{Hom}(X'', A') \to \mathrm{Hom}(X'', A) \to \mathrm{Hom}(X'', A'') \to 0$$

On relève la 0-cochaîne $1_{A''}$ en $\sigma \in \mathrm{Hom}(X_0'', A)$, et son cobord $\lambda \in \mathrm{Hom}(X_1'', A')$ est tel que $\psi\lambda = \sigma d_1''$. L'élément $d(1_{A''})$ cherché est la classe de λ dans

$$H^1(\mathrm{Hom}(X'', A')) = \mathrm{Ext}^1(A'', A')$$

Calcul de $d(1_{A'})$. On considère $1_{A'}$ comme un élément de $H^0(\mathrm{Hom}(X', A'))$, et on doit prendre son cobord en utilisant la suite exacte de complexes :

$$0 \to \mathrm{Hom}(X'', A') \to \mathrm{Hom}(X, A') \to \mathrm{Hom}(X', A') \to 0$$

On relève la 0-cochaîne $1_{A'}$ en $\zeta \in \mathrm{Hom}(X_0, A')$, où ζ est défini par $\zeta(x_0', x_0'') = \varepsilon' x_0'$. Le cobord de ζ est l'élément $\mu \in \mathrm{Hom}(X_1'', A')$ défini par $\mu = \varepsilon'\Theta_1$. L'élément $d(1_{A'})$ cherché est la classe de μ dans $H^1(\mathrm{Hom}(X'', A')) = \mathrm{Ext}^1(A'', A')$.

D'après [1], *loc. cit.*, formule (3), on a $\psi\varepsilon'\Theta_1 + \sigma d_1'' = 0$, c'est-à-dire $\psi\mu + \psi\lambda = 0$, et comme ψ est injectif, cela donne $\mu + \lambda = 0$, et achève la démonstration.

Les isomorphismes θ_1 et θ_2 sont fonctoriels en A et B. Nous allons voir comment ils se comportent vis-à-vis des opérateurs de bord :

Soit $B \in \mathscr{P}$, et soit $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{P}$. Si $f \in \mathrm{Hom}(A', B)$, l'image par f de la classe de A dans $\mathrm{Ext}(A'', A')$ est un élément $f(A) \in \mathrm{Ext}(A'', B)$ que l'on note $d'(f)$. L'application $d' : \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Ext}(A'', B)$ est un homomorphisme (cf. [13], *loc. cit.*), que l'on veut comparer avec l'homomorphisme bord $d : \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Ext}^1(A'', B)$.

De même, si $A \in \mathscr{P}$, et si $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ est une suite exacte, on définit $d'' : \mathrm{Hom}(A, B'') \to \mathrm{Ext}(A, B')$, et l'on veut comparer d'' à l'opérateur bord

$$d : \mathrm{Hom}(A, B'') \to \mathrm{Ext}^1(A, B')$$

Le résultat est le suivant :

Proposition 11. *On a* $\theta_1 d' = d = -\theta_2 d'$ *et* $\theta_2 d'' = d = -\theta_1 d''$.

Démontrons d'abord la formule $\theta_1 d' = d$. Les notations étant comme ci-dessus, soit $f \in \mathrm{Hom}(A', B)$, et soit E_f l'extension de A'' par B déduite au moyen de f. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_f & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $i = 1_{A''}$, et où g est un morphisme convenable, cf. [13], p. 164. On en tire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A', B) & \xrightarrow{d} & \mathrm{Ext}^1(A'', B) \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \mathrm{Hom}(B, B) & \xrightarrow{d} & \mathrm{Ext}^1(A'', B) \end{array}$$

où i est l'identité, et où j fait correspondre à $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, B)$ l'élément $\varphi \circ f$ de $\mathrm{Hom}(A', B)$. Appliquons la formule $i \circ d = d \circ j$ à l'élément 1_B de $\mathrm{Hom}(B, B)$. On trouve $d(1_B) = d(f)$, et comme $d(1_B)$ n'est autre que $\theta_1(E_f) = \theta_1 d'(f)$, la formule $\theta_1 d' = d$ est bien démontrée.

On prouve par le même argument fonctoriel la formule symétrique $\theta_2 d'' = d$. Les deux autres formules en résultent puisque $\theta_1 = -\theta_2$.

Ainsi, si l'on identifie $\mathrm{Ext}(A, B)$ et $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ au moyen de θ_2 (par exemple), l'opérateur d'' se transforme en l'opérateur bord par rapport à la seconde variable, mais l'opérateur d' se transforme en *l'opposé* de l'opérateur bord par rapport à la première variable. C'est dire qu'il faut se méfier de l'identification $\mathrm{Ext}(A, B) = \mathrm{Ext}^1(A, B)$! On va tout de même s'en servir pour démontrer le résultat suivant (qui m'a été signalé par Grothendieck) :

Proposition 12. *Soit* $A \in \mathscr{P}$, *et soit* $(B_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ *un système projectif dans* $\mathscr{P}$. *On suppose que* $\mathrm{Hom}(A, B_\alpha) = 0$ *pour tout* α. *On a alors* :

$$\mathrm{Ext}^1(A, \varprojlim B_\alpha) = \varprojlim \mathrm{Ext}^1(A, B_\alpha)$$

Soit $B = \varprojlim B_\alpha$. On va prouver que l'homomorphisme canonique de $\mathrm{Ext}(A, B)$ dans $\varprojlim \mathrm{Ext}(A, B_\alpha)$ est bijectif.

Montrons d'abord qu'il est *injectif*. Soit

$$0 \to B \to E \to A \to 0$$

une extension appartenant à son noyau. Cela signifie que, pour tout α, il existe un morphisme $f_\alpha : E \to B_\alpha$ tel que le composé $B \to E \to B_\alpha$ soit l'application canonique de B dans B_α. Un tel morphisme est unique; en effet, si $f'_\alpha : E \to B_\alpha$ vérifie la même condition, la différence $f_\alpha - f'_\alpha$ est nulle sur B, et définit donc un morphisme de A dans B_α, morphisme qui est nécessairement nul puisque $\mathrm{Hom}(A, B_\alpha) = 0$. Si $\beta \geqslant \alpha$, le composé $E \to B_\beta \to B_\alpha$ n'est autre que f_α, en vertu de l'unicité de f_α; le système des f_α définit donc un morphisme $f : E \to \varprojlim B_\alpha = B$, dont la restriction à B est l'identité. L'extension E est triviale.

Montrons maintenant que $\mathrm{Ext}(A, B) \to \varprojlim \mathrm{Ext}(A, B_\alpha)$ est *surjectif*. Donnons-nous donc, pour chaque α, une extension

$$0 \to B \to E_\alpha \to A \to 0$$

de telle sorte que les (E_α) forment un élément de $\varprojlim \operatorname{Ext}(A, B_\alpha)$. Cela signifie que, si $\beta \geqslant \alpha$, il existe un morphisme $\psi_{\alpha\beta}$ de E_β dans E_α rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B_\beta & \longrightarrow & E_\beta & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\alpha\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\alpha\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \\ 0 & \longrightarrow & B_\alpha & \longrightarrow & E_\alpha & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce morphisme est d'ailleurs unique, comme on le voit en utilisant l'hypothèse $\operatorname{Hom}(A, B_\alpha) = 0$. Les E_α forment donc un système projectif, dont la limite E est une extension de A par B ayant pour image le système $(E_\alpha) \in \varprojlim \operatorname{Ext}(A, B_\alpha)$, c.q.f.d.

3.6. Comparaison des Hom et des Ext dans $\mathscr{A}$ et dans $\mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{A}$ la catégorie des groupes algébriques. Bien que ce ne soit pas une catégorie abélienne (en caractéristique $p \neq 0$), la notion de suite *strictement exacte* permet d'y définir le foncteur $\operatorname{Ext}(A, B)$, $A, B \in \mathscr{A}$, cf. [13], chap. VII, n° 1. Pour ne pas créer de confusions avec la catégorie $\mathscr{P}$, nous noterons ce foncteur $\operatorname{Ext}_a(A, B)$. Nous définirons de même le foncteur $\operatorname{Hom}_a(A, B)$. Nous allons comparer ces foncteurs aux foncteurs correspondants dans $\mathscr{P}$:

PROPOSITION 13. *On a* $\operatorname{Hom}(A, B) = \varinjlim \operatorname{Hom}_a(A, B^{p^n}) = \varinjlim \operatorname{Hom}_a(A^{p^{-n}}, B)$ *et* $\operatorname{Ext}(A, B) = \varinjlim \operatorname{Ext}_a(A, B^{p^n}) = \varinjlim \operatorname{Ext}_a(A^{p^{-n}}, B)$.

L'assertion relative à Hom est essentiellement la *définition* de ce foncteur dans la catégorie $\mathscr{Q}$.

Montrons maintenant que l'homomorphisme canonique

$$\varepsilon : \varinjlim \operatorname{Ext}_a(A, B^{p^n}) \rightarrow \operatorname{Ext}(A, B)$$

est bijectif.

Soit $0 \rightarrow B^{p^n} \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ une extension qui devient triviale dans $\mathscr{Q}$. Il existe donc un morphisme quasi-algébrique $r : E \rightarrow B^{p^n}$ qui est une rétraction. Vu la définition des morphismes quasi-algébriques, il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que r soit un morphisme (dans $\mathscr{A}$) de E dans $B^{p^{n+m}}$. Il s'ensuit que l'image de E dans la limite inductive des $\operatorname{Ext}(A, B^{p^n})$ est triviale, ce qui démontre que ε est *injectif*.

Inversement, donnons-nous une extension

$$0 \rightarrow B \rightarrow E' \rightarrow A \rightarrow 0$$

dans la catégorie $\mathscr{Q}$. Munissons E' d'une structure algébrique compatible avec sa structure quasi-algébrique, et munissons B (resp. A) de la structure algébrique induite (resp. quotient) de celle de E'; soient B' et A' les groupes algébriques ainsi obtenus. La suite

$$0 \rightarrow B' \rightarrow E' \rightarrow A' \rightarrow 0$$

est strictement exacte, et définit un élément $e' \in \mathrm{Ext}_a(A', B')$. Quitte à remplacer E' par E'^{p^n}, on peut supposer que l'application identique de A sur A' est un morphisme (dans $\mathscr{A}$); en outre, on peut trouver un n assez grand pour que $B' \to B^{p^n}$ soit un morphisme. Les deux morphismes $A \to A'$ et $B' \to B^{p^n}$ appliquent $\mathrm{Ext}_a(A', B')$ dans $\mathrm{Ext}_a(A, B^{p^n})$; soit $e \in \mathrm{Ext}_a(A, B^{p^n})$ le transformé de e'. On vérifie tout de suite que ε transforme e en l'élément donné de $\mathrm{Ext}(A, B)$, d'où la surjectivité de ε.

La formule $\mathrm{Ext}(A, B) = \varinjlim \mathrm{Ext}_a(A^{p^{-n}}, B)$ se démontre de même.

Corollaire. *Si* A *ou* B *est un groupe fini, on a* $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}_a(A, B)$ *et* $\mathrm{Ext}(A, B) = \mathrm{Ext}_a(A, B)$.

En effet, si A est un groupe fini, on a $A^q = A$ pour toute puissance q de p.

Remarque. La prop. 13 nous permettra par la suite d'utiliser les déterminations des $\mathrm{Ext}_a(A, B)$ contenues dans [13], chap. VII, pour calculer les $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ correspondants.

§ 4. GROUPES DE DIMENSION ZÉRO

4.1. Premières propriétés.

Rappelons (nº 2.1) qu'un groupe $G \in \mathscr{P}$ est dit *de dimension zéro* si, pour tout sous-groupe de définition H, le quotient G/H est un groupe *fini*. Il revient au même de dire que G est *limite projective de groupes finis* (dans la terminologie de Tate, G est un groupe « de type galoisien »). Nous noterons $\mathscr{Q}_0$ la catégorie des groupes finis, et $\mathscr{P}_0$ celle des groupes de dimension zéro. On a $\mathscr{Q}_0 = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{Q}$. De plus, *la catégorie* $\mathscr{P}_0$ *est équivalente à la catégorie* $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q}_0)$: la démonstration est la même que celle de la prop. 12 du nº 2.6.

Si l est un nombre premier, nous dirons qu'un groupe $G \in \mathscr{P}_0$ est un *l-groupe*, ou est *l-primaire*, si tous ses quotients finis sont d'ordre une puissance de l. Tout $G \in \mathscr{P}_0$ se décompose de façon unique en produit :

$$G = \prod_l G_l \qquad (l \text{ parcourant l'ensemble des nombres premiers})$$

où les G_l sont l-primaires : cela se démontre par passage à la limite à partir du cas fini. Les G_l sont appelés les *composantes primaires* de G; ce sont des foncteurs additifs et exacts de G.

4.2. Dualité.

Proposition 1. *La catégorie duale de la catégorie* $\mathscr{P}_0$ *est équivalente à la catégorie* $\mathscr{T}$ *des groupes abéliens de torsion.*

C'est là un résultat classique en théorie de la dualité des groupes localement compacts. Rappelons comment se définit l'équivalence : à tout $G \in \mathscr{P}_0$ on fait correspondre $\check{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, ce dernier Hom étant défini comme $\varinjlim \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

Le foncteur $\check{G}$ définit une équivalence de la catégorie duale de $\mathscr{Q}_0$ avec $\mathscr{Q}_0$; par passage à la limite il définit donc une équivalence de la catégorie duale de $\mathrm{Pro}(\mathscr{Q}_0)=\mathscr{P}_0$ avec la catégorie des limites inductives de groupes finis, elle-même équivalente à $\mathscr{T}$.

4.3. Le groupe $\hat{\mathbf{Z}}$ et les groupes $\mathbf{Z}_l$.

Nous noterons $\hat{\mathbf{Z}}$ le complété du groupe $\mathbf{Z}$ pour la topologie définie par ses sous-groupes d'indice fini. C'est un groupe compact totalement discontinu, donc un élément de $\mathscr{P}_0$; on peut d'ailleurs l'écrire comme limite projective :

$$\hat{\mathbf{Z}}=\varprojlim(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$$

Sous cette forme, on voit que le groupe dual est $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Si l est un nombre premier, la composante l-primaire de $\hat{\mathbf{Z}}$ est $\mathbf{Z}_l=\varprojlim(\mathbf{Z}/l^m\mathbf{Z})$, groupe additif des entiers l-adiques. On a donc :

$$\hat{\mathbf{Z}}=\prod_l \mathbf{Z}_l$$

formule duale de la formule bien connue :

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}=\coprod \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \qquad \text{(somme directe).}$$

PROPOSITION 2. *Pour tout* $B\in\mathscr{Q}$, *le groupe* $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, B)$ *s'identifie fonctoriellement au sous-groupe* B_f *de* B *formé des éléments d'ordre fini.*

Puisque B appartient à $\mathscr{Q}$, on peut appliquer la prop. 11 du n° 2.6 à $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, B)$, et l'on obtient :

$$\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, B)=\varinjlim \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, B)$$

Il est clair que $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, B)$ s'identifie à ${}_nB$, sous-groupe de B formé par les éléments x tels que $nx=0$; comme B_f est réunion des ${}_nB$, la proposition en résulte.

Remarque. L'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, B)\to B_f$ que l'on vient de construire peut aussi se décrire directement : il associe à un morphisme $\varphi:\hat{\mathbf{Z}}\to B$ l'élément $\varphi(1)\in B_f$.

PROPOSITION 3. *Le groupe* $\hat{\mathbf{Z}}$ *est un objet projectif de* $\mathscr{P}$.

D'après la prop. 2 du n° 3.1 il suffit de montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}(\hat{\mathbf{Z}}, B)$ est exact pour $B\in\mathscr{Q}$. Soit donc :

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

une suite exacte dans $\mathscr{Q}$. Compte tenu de la prop. 2, il nous faut prouver que B_f s'applique *sur* C_f.

Pour tout entier $n\geqslant 1$, soit nA le sous-groupe de A formé des nx, $x\in A$; ces sous-groupes forment une famille filtrante décroissante de sous-groupes fermés. Comme A est artinien, cette famille est stationnaire. Si l'on pose donc $A'=\bigcap nA$, il existe un entier $m\geqslant 1$ tel que $A'=mA$. On a $A'=nA'$ pour tout n.

On peut factoriser l'homomorphisme $B_f \to (B/A)_f$ en $B_f \to (B/A')_f \to (B/A)_f$. Nous allons montrer que chacun de ces homomorphismes est surjectif :

a) *Homomorphisme* $B_f \to (B/A')_f$. Soit $x \in (B/A')_f$, et soit n un entier $\geqslant 1$ tel que $nx = 0$. Choisissons $y \in B$ s'appliquant sur x. On a $ny \in A'$. Mais $A' = nA'$. Il existe donc $a' \in A'$ tel que $na' = ny$, d'où $n(y - a') = 0$. L'élément $y - a'$ appartient donc à B_f, et a bien pour image x.

b) *Homomorphisme* $(B/A')_f \to (B/A)_f$. Le noyau de $B/A' \to B/A$ est A/A'; comme $mA = A'$, le groupe A/A' est annulé par m. Si $x \in B/A$ est annulé par n, et si l'on relève x en $y \in B/A'$, on aura $ny \in A/A'$, d'où $mny = 0$ et $y \in (B/A')_f$. C.q.f.d.

Proposition 4. *Pour tout nombre premier l, le groupe additif $\mathbf{Z}_l$ des entiers l-adiques est un projectif indécomposable dans $\mathscr{P}$; c'est l'enveloppe projective* (cf. n° 3.2) *du groupe élémentaire $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$.*

Puisque $\mathbf{Z}_l$ est facteur direct dans $\hat{\mathbf{Z}}$, qui est projectif, il est lui-même projectif. D'autre part, ses seuls sous-groupes fermés $\neq 0$ sont les sous-groupes $l^n\mathbf{Z}_l$ $(n = 0, 1, \ldots)$ qui sont emboîtés : il est donc indécomposable. Enfin, on a $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_l/l\mathbf{Z}_l$, et comme $\mathbf{Z}_l$ est projectif indécomposable, c'est nécessairement l'enveloppe projective de $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$.

4.4. Objets projectifs dans $\mathscr{P}_0$.

Proposition 5. *Soit $G \in \mathscr{P}_0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) G *est projectif dans* $\mathscr{P}_0$.

(ii) G *est projectif dans* $\mathscr{P}$.

(iii) G *est isomorphe à un produit de groupes* $\mathbf{Z}_l$.

(iv) G *est sans torsion.*

(v) *Le groupe* $\check{G}$ *dual de* G *est divisible.*

Le théorème de structure de Gabriel, appliqué à $\mathscr{P}$, montre l'équivalence de (ii) et (iii) (cf. n° 3.2, th. 2). Le même théorème, appliqué cette fois à $\mathscr{P}_0$, montre l'équivalence de (i) et (iii). Il est clair que (iii)$\Rightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(v). D'autre part, (v) signifie que $\check{G}$ est injectif dans la catégorie $\mathscr{G}$ des groupes abéliens, et entraîne donc que $\check{G}$ est injectif dans la sous-catégorie $\mathscr{T}$ des groupes de torsion. Par dualité, il s'ensuit que G est projectif dans $\mathscr{P}_0$. Donc (v)$\Rightarrow$(i), ce qui achève la démonstration.

Variante. En utilisant les théorèmes de structure pour les groupes de torsion (Bourbaki, *Alg.*, VII, § 2, exer. 3), on montre directement que (i), (iii), (iv), (v) sont équivalents. Comme (ii)$\Rightarrow$(i) (trivialement), et (iii)$\Rightarrow$(ii) (prop. 4), la proposition en résulte.

Corollaire 1. *Soit $A \in \mathscr{P}_0$. L'enveloppe projective de* A *est la même dans $\mathscr{P}_0$ et dans $\mathscr{P}$.*

Cela résulte de l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii). On voit en particulier que tout objet de $\mathscr{P}_0$ est quotient d'un objet projectif *appartenant aussi à $\mathscr{P}_0$.*

Corollaire 2. *La dimension projective d'un objet $A \in \mathscr{P}_0$ est $\leqslant 1$.*

En effet, on peut écrire $A = X/R$, où X est projectif dans $\mathscr{P}_0$, donc dans $\mathscr{P}$.

Comme X est sans torsion, il en est de même de R et R est projectif (prop. 5). La suite exacte :

$$0 \to R \to X \to A \to 0$$

est donc une résolution projective de A, de longueur 1, c.q.f.d.

Exemple : La suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}_l \xrightarrow{l} \mathbf{Z}_l \to \mathbf{Z}/l\mathbf{Z} \to 0$$

est une résolution projective de longueur 1 du groupe élémentaire $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$.

§ 5. GROUPES D'HOMOTOPIE

5.1. Connexion.

Soit G un groupe quasi-algébrique. Nous noterons G^0 la composante connexe de l'élément neutre dans G (et nous l'appellerons simplement la *composante connexe* de G) ; c'est le plus petit sous-groupe fermé de G tel que G/G^0 soit fini.

Soit maintenant G un groupe *proalgébrique*, d'ensemble de définition S; pour tout $H \in S$, la composante connexe $(G/H)^0$ de G/H est un sous-groupe fermé de G/H, et, si $K \subset H$, l'image de $(G/K)^0$ dans G/H est $(G/H)^0$. D'après la prop. 3 du nº 2.4, il existe donc un sous-groupe fermé G^0 de G dont l'image dans chaque G/H est égale à $(G/H)^0$. Ce sous-groupe peut aussi être caractérisé de la manière suivante :

Proposition 1. *Le sous-groupe* G^0 *est le plus petit sous-groupe fermé* G' *de* G *tel que* G/G' *soit de dimension zéro.*

Par construction, on a $G/G^0 = \varprojlim (G/H)/(G/H)^0$, ce qui montre que $G/G^0 \in \mathscr{P}_0$. D'autre part, si G' est un sous-groupe fermé de G tel que $G/G' \in \mathscr{P}_0$, les quotients $G/(G'+H)$ sont dans $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{Q}$, c'est-à-dire sont finis, et il s'ensuit que l'image de G' dans G/H contient $(G/H)^0$, ce qui signifie bien que G' contient G^0.

Le sous-groupe G^0 défini ci-dessus sera appelé la *composante connexe* de G; si $G = G^0$, on dit que G est *connexe*. On montre aisément que ces définitions sont équivalentes aux définitions *topologiques* usuelles (lorsqu'on munit G de la topologie définie au début du nº 2.4) ; ce fait ne jouera d'ailleurs aucun rôle dans la suite.

Le quotient G/G^0 sera noté $\pi_0(G)$; on a $\pi_0(G) \in \mathscr{P}_0$. C'est le 0-*ième groupe d'homotopie* de G.

On voit tout de suite que π_0 et « composante connexe » sont des foncteurs additifs covariants sur $\mathscr{P}$ (à valeurs dans $\mathscr{P}_0$ et dans $\mathscr{P}$ respectivement).

Proposition 2. *Les foncteurs* π_0 *et « composante connexe » commutent aux limites projectives. Le foncteur* π_0 *est exact à droite.*

Les deux foncteurs en question ont été définis par passage à la limite à partir des foncteurs correspondants sur $\mathscr{Q}$ (cf. nº 2.7). La proposition en résulte en appliquant la prop. 13 de 2.7 et en remarquant que π_0 est exact à droite sur $\mathscr{Q}$. [Bien entendu, on peut aussi raisonner directement, en utilisant la caractérisation de G^0 donnée par la prop. 1.]

On notera que le foncteur « composante connexe » n'est pas semi-exact; toutefois, il transforme une injection en une injection, et une surjection en une surjection.

5.2. Décomposition des projectifs.

PROPOSITION 3. *Tout projectif de la catégorie $\mathscr{P}$ est produit d'un projectif connexe et d'un projectif de dimension zéro.*

Soit $X \in \mathscr{P}$ un projectif; posons $C = X/X^0$. D'après le n° 4.4 (cor. 1 à la prop. 5) l'enveloppe projective Y de C est dans $\mathscr{P}_0$. D'autre part, d'après la prop. 4 du n° 3.2, X se décompose en $X = Y \times Z$; on en déduit $\pi_0(X) = \pi_0(Y) \times \pi_0(Z)$, et comme, par construction, l'application $\pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(X) = C$ est surjective, on a nécessairement $\pi_0(Z) = 0$, ce qui montre que Z est connexe; comme Z est facteur direct dans X, Z est projectif, c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. *Si $X \in \mathscr{P}$ est projectif, il en est de même de X^0 et de $\pi_0(X)$.*

En effet, si $X = Y \times Z$, avec $Y \in \mathscr{P}_0$ et Z connexe, on a nécessairement $Z = X^0$, et $Y = \pi_0(X)$.

COROLLAIRE 2. *L'enveloppe projective d'un groupe connexe est connexe.*

Soit $u : X \rightarrow G$ cette enveloppe. Puisque G est connexe, la restriction de u à X^0 est surjective; on en déduit $X = X^0$, par définition des extensions essentielles (cf. n° 3.2).

COROLLAIRE 3. *Un projectif indécomposable est ou bien connexe, ou bien de dimension zéro.*

C'est évident.

5.3. Groupes d'homotopie.

DÉFINITION 1. *Les foncteurs dérivés gauches du foncteur $\pi_0 : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}_0$ sont notés π_i et l'opérateur de bord correspondant ∂. Si $G \in \mathscr{P}$, les groupes $\pi_i(G)$ sont appelés les groupes d'homotopie du groupe* G.

Noter que, puisque π_0 est exact à droite, le 0-ième foncteur dérivé de π_0 s'identifie à π_0 lui-même, et notre notation est cohérente.

Par définition même des foncteurs dérivés, on a $\pi_i(G) = 0$ pour $i \geqslant 1$, si G est *projectif*. De plus, si

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte dans $\mathscr{P}$, il lui correspond une suite exacte (dite *suite exacte d'homotopie*) :

$$\ldots \rightarrow \pi_i(G') \rightarrow \pi_i(G) \rightarrow \pi_i(G'') \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(G') \rightarrow \ldots$$

PROPOSITION 4. *Les foncteurs $\pi_i : \mathscr{P} \rightarrow \mathscr{P}_0$ commutent aux limites projectives.*

Cela résulte de la prop. 6 du n° 3.3 et de la prop. 2 du n° 5.1.

PROPOSITION 5. *Si* G *est un groupe de dimension zéro, on a $\pi_i(G) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.*

D'après le n° 4.4, il existe une résolution de G de longueur 1 par des projectifs X_i

de $\mathscr{P}_0$. Comme on a $\pi_0(X_i) = X_i$, les groupes d'homologie supérieurs du complexe formé par les $\pi_0(X_i)$ sont nuls, et ce sont justement les groupes d'homotopie de G.

Corollaire. *On a* $\pi_i(G) = \pi_i(G^0)$ *pour* $i \geq 1$, *et tout* $G \in \mathscr{P}$.

Cela résulte de la prop. 5 (appliquée à G/G^0) et de la suite exacte d'homotopie.

Remarque. On verra au § 10 que les foncteurs π_i sont *nuls* pour $i \geq 2$, ou, ce qui revient au même, que π_1 est *exact à gauche.*

5.4. Groupes d'homotopie et foncteurs Ext.

Soit $N \in \mathscr{P}_0$. Si $G \in \mathscr{P}$, on peut évidemment écrire :

$$\mathrm{Hom}(G, N) = \mathrm{Hom}(\pi_0(G), N)$$

En d'autres termes, le foncteur $\mathrm{Hom}(\ , N) : \mathscr{P} \to \mathscr{G}$ se *factorise* en

$$\mathscr{P} \xrightarrow{\pi_0} \mathscr{P}_0 \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\ ,N)} \mathscr{G}$$

De plus (cor. 1 à la prop. 3), le foncteur $\pi_0 : \mathscr{P} \to \mathscr{P}_0$ transforme un objet projectif en un objet projectif. On est donc dans les conditions d'application de la *suite spectrale des foncteurs composés* (T, théorème 2.4.1, p. 148); on obtient ainsi une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}^p(\pi_q(G), N) \Rightarrow \mathrm{Ext}^n(G, N)$$

Le foncteur Ext^p qui intervient ici est calculé dans $\mathscr{P}_0$; comme tout objet de $\mathscr{P}_0$ a une résolution projective de longueur 1 (cf. nº 4.4, cor. 2 à la prop. 5), on a $\mathrm{Ext}^p = 0$ pour $p \geq 2$. La suite spectrale dégénère alors en une série de suites exactes :

Proposition 6. *Si* $G \in \mathscr{P}$ *et* $N \in \mathscr{P}_0$, *on a des suites exactes* :

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(\pi_{i-1}(G), N) \to \mathrm{Ext}^i(G, N) \to \mathrm{Hom}(\pi_i(G), N) \to 0$$

Pour $i = 1$, on obtient en particulier :

Corollaire. *Si* G *est connexe, on a un isomorphisme* :

$$\mathrm{Ext}^1(G, N) = \mathrm{Hom}(\pi_1(G), N)$$

[Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler brièvement comment on construit la suite spectrale précédente. On commence par choisir une résolution projective $X = (X_i)$ de G; les $\mathrm{Hom}(X_i, N)$ forment un complexe de cochaînes, noté $\mathrm{Hom}(X, N)$, et l'on a par définition :

$$\mathrm{Ext}^n(G, N) = H^n(\mathrm{Hom}(X, N))$$

D'autre part, on a $\mathrm{Hom}(X, N) = \mathrm{Hom}(\pi_0(X), N)$, et $\pi_0(X)$ est un complexe dont chaque composante est projective. Sa *seconde suite spectrale d'hyperhomologie* (T, p. 146) est la suite spectrale cherchée.

Quant à l'homomorphisme $\mathrm{Ext}^i(G, N) \to \mathrm{Hom}(\pi_i(G), N)$ qui intervient dans l'énoncé de la prop. 6, c'est l'un des « edge-homomorphisms » de la suite spectrale. On peut l'expliciter ainsi : si $Y = \pi_0(X)$, on a

$$\mathrm{Ext}^i(G, N) = H^i(\mathrm{Hom}(Y, N)), \qquad \pi_i(G) = H_i(Y)$$

et c'est l'homomorphisme standard de $H^i(\mathrm{Hom}(Y, N))$ dans $\mathrm{Hom}(H_i(Y), N)$.

On peut aussi montrer que $\mathrm{Ext}^i(G, N) \to \mathrm{Hom}(\pi_i(G), N)$ est l'unique homomorphisme de ∂^*-foncteurs qui prolonge l'isomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}(G, N)$ sur $\mathrm{Hom}(\pi_0(G), N)$, cf. T, n^os 2.1 et 2.3.]

Nous allons maintenant envisager un cas un peu différent, celui où N, au lieu d'appartenir à $\mathscr{P}_0$, appartient à la catégorie $\mathscr{T}$ des *groupes de torsion*. Si $G \in \mathscr{P}$, nous poserons :

$$\mathrm{Hom}(G, N) = \varinjlim \mathrm{Hom}(G, N_\alpha) \qquad \mathrm{Ext}^i(G, N) = \varinjlim \mathrm{Ext}^i(G, N_\alpha)$$

les N_α parcourant l'ensemble filtrant croissant des *sous-groupes finis* de N. On voit immédiatement que les $\mathrm{Ext}^i(\ , N)$ sont les foncteurs dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}(\ , N)$, qu'ils commutent aux limites projectives, et qu'ils forment un foncteur cohomologique en N (pour un groupe G fixé). La prop. 6 et son corollaire sont encore valables, comme on le voit par passage à la limite à partir du cas où N est fini.

Proposition 7. *Si* N *est un groupe de torsion divisible, on a des isomorphismes fonctoriels* :

$$\mathrm{Ext}^i(G, N) = \mathrm{Hom}(\pi_i(G), N)$$

Puisque N est divisible, on a $\mathrm{Ext}^1(A, N) = 0$ pour A fini, puis, par passage à la limite, pour $A \in \mathscr{P}_0$. Dans la suite exacte de la prop. 6, le terme $\mathrm{Ext}^1(\pi_{i-1}(G), N)$ est donc nul, d'où la proposition.

Corollaire. *Le groupe* $\pi_i(G)^\vee$, *dual du groupe* $\pi_i(G)$ (cf. n° 4.2), *est fonctoriellement isomorphe à* $\mathrm{Ext}^i(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \varinjlim \mathrm{Ext}^i(G, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

On applique la prop. 7 avec $N = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Remarque. L'isomorphisme de la prop. 7 peut aussi s'obtenir en remarquant que $\mathrm{Ext}^i(G, N)$ et $\mathrm{Hom}(\pi_i(G), N)$ sont deux foncteurs cohomologiques en G, qui coïncident pour $i = 0$, et qui sont nuls pour $i \geqslant 1$ et G projectif.

§ 6. GROUPE FONDAMENTAL ET REVÊTEMENT UNIVERSEL

6.1. Les groupes connexes et simplement connexes.

Définition 1. *Soit* $G \in \mathscr{P}$. *On appelle groupe fondamental de* G *le premier groupe d'homotopie* $\pi_1(G)$ *de* G (cf. n° 5.3, déf. 1).

Définition 2. *Un groupe* $G \in \mathscr{P}$ *est dit simplement connexe si* $\pi_1(G) = 0$.

Les groupes G qui sont à la fois connexes et simplement connexes forment une sous-catégorie de $\mathscr{P}$, que l'on notera $\mathscr{S}$.

Proposition 1. *Soit* $G \in \mathscr{P}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) G *appartient à* $\mathscr{S}$.

(ii) G *est connexe, et si* $0 \to N \to G' \to G \to 0$ *est une suite exacte telle que* G' *soit connexe, et* $N \in \mathscr{P}_0$, *on a* $N = 0$.

(iii) $\mathrm{Hom}(G, N) = \mathrm{Ext}^1(G, N) = 0$ *pour tout* $N \in \mathscr{P}_0$.

(iv) $\mathrm{Hom}(G, N) = \mathrm{Ext}^1(G, N) = 0$ *pour tout* N *fini.*

(v) $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$.

[La condition (ii) signifie que G est connexe et n'a aucun « revêtement » connexe non trivial.]

Nous allons raisonner « en cercle ». D'abord (i) $\Rightarrow$ (ii) car la suite exacte d'homotopie, appliquée à

$$0 \to N \to G' \to G \to 0$$

donne :

$$\pi_1(G) \to \pi_0(N) \to \pi_0(G')$$

d'où $\pi_0(N) = N = 0$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Puisque G est connexe, on a $\mathrm{Hom}(G, N) = 0$. Soit d'autre part E une extension de G par N; la composante connexe E^0 de E s'applique sur G, et l'on a la suite exacte :

$$0 \to N \cap E^0 \to E^0 \to G \to 0$$

Tenant compte de (ii), on voit que $N \cap E^0 = 0$, ce qui montre que l'extension E est triviale, d'où $\mathrm{Ext}^1(G, N) = 0$.

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) est évidente; l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v) résulte de la définition même de $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, cf. n° 5.4. Enfin, l'implication (v) $\Rightarrow$ (i) résulte du cor. à la prop. 7 du n° 5.4.

Corollaire. *Soit* $G \in \mathscr{S}$, *et soit* $f : A \to B$ *un morphisme dont le noyau et le conoyau appartiennent à* $\mathscr{P}_0$. *L'homomorphisme* :

$$\mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B)$$

défini par f *est alors un isomorphisme.*

Supposons d'abord que f soit surjectif, et soit N son noyau. On a la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(G, N) \to \mathrm{Hom}(G, A) \to \mathrm{Hom}(G, B) \to \mathrm{Ext}^1(G, N)$$

et comme on a $\mathrm{Hom}(G, N) = \mathrm{Ext}^1(G, N) = 0$ (prop. 1), on en déduit bien le résultat cherché. On raisonne de même lorsque f est injectif, et le cas général se déduit de ces deux cas particuliers.

6.2. Revêtement universel.

Proposition 2. *Soit* $G \in \mathscr{P}$. *Il existe* $\overline{G} \in \mathscr{S}$ *et un morphisme* $u : \overline{G} \to G$ *tels que le noyau et le conoyau de* u *appartiennent à* $\mathscr{P}_0$. *Le couple* $(\overline{G}, u)$ *est unique, à un isomorphisme unique près.*

Établissons d'abord *l'existence* du couple $(\overline{G}, u)$. Écrivons le groupe G^0, composante connexe de G, comme un quotient X/R, où X est projectif connexe (cf. n° 5.2, cor. 2 à la prop. 3). Posons $\overline{G} = X/R^0$, et soit $u : \overline{G} \to G$ le morphisme défini par passage au quotient à partir de $X \to G$. Comme R^0 est connexe, et que X est projectif, la suite exacte d'homotopie montre que $\overline{G}$ est connexe et simplement connexe; le noyau de u est $R/R^0 \in \mathscr{P}_0$, et son conoyau est $G/G^0 = \pi_0(G)$, qui appartient aussi à $\mathscr{P}_0$.

Établissons maintenant *l'unicité* de $(\overline{G}, u)$, et, plus généralement, son *caractère fonctoriel* en G. Soit donc $G' \in \mathscr{P}$, et soit $u' : \overline{G}' \to G'$ un morphisme dont le noyau et le conoyau appartiennent à $\mathscr{P}_0$, et tel que $\overline{G}' \in \mathscr{S}$. Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme. En appliquant le corollaire de la prop. 1 au groupe $\overline{G}$ et à $u' : \overline{G}' \to G'$, on voit qu'il existe un morphisme $\overline{\varphi} : \overline{G} \to \overline{G}'$ et un seul rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overline{G} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{G}' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G' \end{array}$$

On voit donc bien que $(\overline{G}, u)$ est un *foncteur covariant* par rapport à G; c'est un foncteur additif.

Définition 3. *Le couple* $(\overline{G}, u)$ *est appelé le revêtement universel de* G.

Il est clair que l'image de $\overline{G}$ dans G est égale à G^0. On a donc une suite exacte :

$$0 \to N \to \overline{G} \to G^0 \to 0$$

où N désigne le noyau de u. La suite exacte d'homotopie montre en outre que $\partial : \pi_1(G^0) \to \pi_0(N)$ est un isomorphisme. Comme $\pi_1(G) = \pi_1(G^0)$ (n° 5.3, cor. à la prop. 5), et $\pi_0(N) = N$, on obtient finalement un isomorphisme de $\pi_1(G)$ sur N, d'où :

Proposition 3. *Pour tout* $G \in \mathscr{P}$, *on a une suite exacte* :

$$0 \to \pi_1(G) \to \overline{G} \to G \to \pi_0(G) \to 0$$

On notera que le revêtement universel de G coïncide avec celui de G^0; on a $\overline{G} = 0$ si et seulement si G est de dimension zéro; nous reviendrons là-dessus au n° 10.4.

Proposition 4. *Le foncteur « revêtement universel » commute aux limites projectives.*

Si les (G_i) forment un système projectif, il en est de même des $(\overline{G}_i)$. De plus, le noyau (resp. le conoyau) du morphisme

$$\varprojlim \overline{G}_i \to \varprojlim G_i$$

est limite projective des noyaux (resp. des conoyaux) des morphismes $\overline{G}_i \to G_i$ (cf. n° 2.5, prop. 10), donc appartient à $\mathscr{P}_0$, ce qui montre que $\varprojlim \overline{G}_i \to \varprojlim G_i$ est bien le revêtement universel de $\varprojlim G_i$.

PROPOSITION 5. *Si* $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ *est une suite exacte, la suite*

$$\ldots \to \pi_2(G') \to \pi_2(G) \to \pi_2(G'') \xrightarrow{d} \overline{G}' \to \overline{G} \to \overline{G}'' \to 0$$

est exacte (le morphisme $d : \pi_2(G'') \to \overline{G}'$ *étant défini comme le composé de* $\partial : \pi_2(G'') \to \pi_1(G')$ *avec l'injection de* $\pi_1(G')$ *dans* $\overline{G}'$*).*

[Dès que l'on saura que $\pi_i = 0$ pour $i \geqslant 2$, on en déduira donc que le foncteur « revêtement universel » est exact, cf. n° 10.3.]

Soit X″ le conoyau du morphisme $\overline{G}' \to \overline{G}$, et soit $v'' : X'' \to G''$ le morphisme défini par passage au quotient à partir de $u : \overline{G} \to G$. Par construction, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \overline{G}' & \longrightarrow & \overline{G} & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v''} & & \\
0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

D'après le lemme 3.3 de [1], chap. III, on en déduit la suite exacte :

$$(*) \qquad \mathrm{Ker}(u') \to \mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(v'') \to \mathrm{Coker}(u') \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(v'')$$

On a ici $\mathrm{Ker}(u') = \pi_1(G')$, $\mathrm{Ker}(u) = \pi_1(G)$, $\mathrm{Coker}(u') = \pi_0(G')$, $\mathrm{Coker}(u) = \pi_0(G)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(v'')$ appartient à $\mathscr{P}_0$; d'autre part, puisque $G \to G''$ est surjectif, il en est de même de $\mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(v'')$, ce qui montre que $\mathrm{Coker}(v'')$ appartient aussi à $\mathscr{P}_0$. De plus, X″ est connexe (car image de $\overline{G}$), et simplement connexe (car quotient de $\overline{G}$ par un sous-groupe connexe). Le couple (X'', v'') peut donc être identifié au revêtement universel $(\overline{G}'', u'')$ de G″, et la suite

$$\overline{G}' \to \overline{G} \to \overline{G}'' \to 0$$

est bien exacte. Enfin, tout élément du noyau de $\overline{G}' \to \overline{G}$ a une image nulle dans G, donc aussi dans G′, c'est-à-dire appartient au noyau de $\pi_1(G') \to \pi_1(G)$; comme ce noyau est l'image de $\pi_2(G'')$, on en déduit bien la suite exacte de l'énoncé.

Remarque. Reprenons la suite exacte (∗). Puisque (X'', v'') est le revêtement universel de G″, elle peut s'écrire :

$$(*) \qquad \pi_1(G') \to \pi_1(G) \to \pi_1(G'') \to \pi_0(G') \to \pi_0(G) \to \pi_0(G'')$$

En fait, *c'est la suite exacte d'homotopie* définie par la suite exacte $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$. C'est évident pour tous les morphismes qui figurent dans (∗), sauf pour le morphisme médian : $\pi_1(G'') \to \pi_0(G')$, morphisme que nous noterons θ. Montrons donc que $\theta = \partial$.

Soit $B'' = (G'')^0$, et soit B l'image réciproque de B″ dans G. La suite $0 \to G' \to B \to B'' \to 0$ est exacte, et donne lieu à deux morphismes $\theta, \partial : \pi_1(B'') \to \pi_0(G')$. Comme θ et ∂ sont tous deux fonctoriels, on a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\pi_1(B'') \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr] & & \pi_0(G') \\
& \pi_1(G'') \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\pi_1(B'') \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr] & & \pi_0(G') \\
& \pi_1(G'') \arrow[ur, "\partial"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme $\pi_1(B'') \to \pi_1(G'')$ est un isomorphisme, on voit que, pour démontrer l'égalité $\theta = \partial$ pour la suite exacte donnée, il suffit d'établir la même égalité pour la suite exacte $0 \to G' \to B \to B'' \to 0$. En d'autres termes, on est ramené *au cas où* G'' *est connexe*; un argument analogue montre que l'on peut aussi supposer *que* G' *est de dimension zéro*. Soit alors N'' le noyau de $\overline{G}'' \to G''$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & N'' & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & \overline{G} & \to & \overline{G}'' & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & G' & \to & G & \to & G'' & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

et le morphisme $\overline{G} \to \overline{G}''$ est un isomorphisme, puisque $\overline{G}' = 0$. Le morphisme $\overline{G}'' \to G''$ se relève donc en $\overline{G}'' \to G$, et sa restriction à N'' applique N'' dans G'. Soit $g : N'' \to G'$ le morphisme ainsi obtenu. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & \overline{G}'' & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id.} & & \\ 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(G'') & \xrightarrow{\partial'} & N'' \\ & {\scriptstyle\partial}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle g} & \\ & G' & \end{array}$$

Or, par définition même de θ, on a $\theta = g \circ \partial'$. On obtient donc bien $\theta = \partial$, c.q.f.d.

6.3. Interprétation de l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(G, N) = \mathrm{Hom}(\pi_1(G), N)$ **pour un groupe** G **connexe.**

Soit $N \in \mathscr{P}_0$. On a vu au n° 5.4 qu'il existe un morphisme du foncteur cohomologique $(\mathrm{Ext}^i(G, N))$ dans le ∂^*-foncteur $(\mathrm{Hom}(\pi_i(G), N))$, se réduisant à l'identité en dimension zéro. De plus, si G est connexe, et si l'on prend $i = 1$, ce morphisme est un isomorphisme; nous le noterons $f : \mathrm{Ext}^1(G, N) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(G), N)$.

D'autre part (G étant toujours supposé connexe), on a la suite exacte

$$0 \to \pi_1(G) \to \overline{G} \to G \to 0$$

qui définit un élément canonique $\xi \in \mathrm{Ext}(G, \pi_1(G))$. Si φ est un morphisme de $\pi_1(G)$ dans N, l'image de ξ par φ est un élément $\varphi\xi = g(\varphi)$ de $\mathrm{Ext}(G, N)$. On obtient ainsi un homomorphisme

$$g : \mathrm{Hom}(\pi_1(G), N) \to \mathrm{Ext}(G, N)$$

Proposition 6. *Si l'on identifie* $\mathrm{Ext}(G, N)$ *à* $\mathrm{Ext}^1(G, N)$ *au moyen de l'isomorphisme* θ_1 *défini au n° 3.5, les deux homomorphismes f et g deviennent inverses l'un de l'autre.*

Comme f et θ_1 sont des isomorphismes, tout revient à démontrer que $g \circ f \circ \theta_1 = 1$. Soit donc $e \in \mathrm{Ext}(G, N)$; on représente e par une extension :

$$0 \to N \to E \to G \to 0$$

L'élément $\theta_1(e) \in \mathrm{Ext}^1(G, N)$ est égal, par définition, à $d(1_N)$, cf. n° 3.5. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(N, N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_0"'] & \mathrm{Ext}^1(G, N) \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Hom}(\pi_0(N), N) \arrow[r, "\partial^*"] & \mathrm{Hom}(\pi_1(G), N)
\end{tikzcd}$$

où f_0 est l'identité, et où ∂^* est l'homomorphisme défini par $\partial_E : \pi_1(G) \to \pi_0(N)$. Vu la définition de f (comme composante d'un morphisme de foncteurs cohomologiques), ce diagramme est commutatif. On en conclut que $f \circ \theta_1(e) = \partial_E$. D'autre part, le morphisme $\overline{G} \to G$ se relève en un morphisme $\overline{G} \to E$ (cor. à la prop. 1), et l'on obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1(G) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \overline{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "id."'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On voit tout de suite que $h = \partial_E$, c'est-à-dire que $e = g(\partial_E)$. Comme $f \circ \theta_1(e) = \partial_E$ on a bien $g \circ f \circ \theta_1(e) = e$, c.q.f.d.

6.4. Revêtement universel d'un groupe algébrique.

Soit G un groupe algébrique connexe. Nous appellerons *isogénie au-dessus* de G un morphisme (de groupes algébriques)

$$f : G_f \to G$$

où G_f est un groupe algébrique connexe de même dimension que G, et où f est surjectif (donc à noyau fini). Une isogénie sera dite *séparable* si l'extension de corps $k(G_f)/k(G)$ correspondante est séparable; il revient au même de dire que la suite

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to G_f \to G \to 0$$

est strictement exacte ([13], chap. VII, n° 1).

Si $f : G_f \to G$ et $g : G_g \to G$ sont deux isogénies au-dessus de G, on dira que g *domine* f s'il existe un morphisme $h : G_g \to G_f$ tel que $g = f \circ h$; le morphisme h est alors unique et si g est séparable, il en est de même de f. L'ensemble I des isogénies au-dessus de G est *préordonné* par la relation de domination; on montre facilement que c'est un ensemble *filtrant*, de même que le sous-ensemble I_s formé des isogénies séparables.

Ainsi, les G_f, pour $f \in I$ ou $f \in I_s$, forment un système projectif de groupes algébriques, donc aussi de groupes quasi-algébriques; on peut prendre leur limite projective, notée $\varprojlim G_f$; elle s'applique de façon naturelle sur G.

PROPOSITION 7. *Le groupe proalgébrique* $\varprojlim G_f$ *est le revêtement universel du groupe* G (*la limite projective étant prise soit suivant* I, *soit suivant* I_s).

(En termes plus imagés, le revêtement universel de G est limite projective des isogénies au-dessus de G.)

Notons G_s la limite projective des G_f, pour $f \in I_s$. C'est une extension de G par un groupe de dimension zéro, et c'est un groupe connexe. On va montrer que c'est un groupe simplement connexe. Pour cela, il suffit de prouver (cf. prop. 1) que, si N est un groupe fini, on a $\mathrm{Ext}(G_s, N) = 0$. Or, $\mathrm{Ext}(G_s, N) = \varinjlim \mathrm{Ext}(G_f, N)$ (n° 3.4, prop. 7), et $\mathrm{Ext}(G_f, N) = \mathrm{Ext}_a(G_f, N)$ (n° 3.6, cor. à la prop. 13). On est donc ramené à prouver que $\varinjlim \mathrm{Ext}_a(G_f, N) = 0$; soit donc $E/N = G_f$ une extension de G_f par N, et soit E^0 la composante connexe de E. Le composé $E^0 \to G_f \to G$ est une isogénie séparable au-dessus de G, et l'image de l'élément $E \in \mathrm{Ext}_a(G_f, N)$ dans $\mathrm{Ext}_a(E^0, N)$ est évidemment nulle; on a donc bien $\varinjlim \mathrm{Ext}_a(G_f, N) = 0$, ce qui démontre la proposition pour I_s. Le cas de I se traite de la même manière.

Remarque. Il résulte de la proposition précédente que les isogénies séparables au-dessus de G correspondent biunivoquement (à isomorphisme près, bien entendu), aux sous-groupes fermés d'indice fini de $\pi_1(G)$.

6.5. Détermination du groupe fondamental (cas élémentaires).

Soit $G \in \mathscr{P}$, et soit $n \in \mathbf{Z}$; l'application $x \to nx$ de G dans lui-même est un endomorphisme de G, que nous noterons encore $n : G \to G$.

LEMME 1. *Soit* $G \in \mathscr{P}$, *et soit* $n \in \mathbf{Z}$. *Si le morphisme* $n : G \to G$ *est surjectif, son noyau est un groupe de dimension zéro.*

Lorsque G est quasi-algébrique, cela résulte de l'additivité de la dimension. Le cas général s'en déduit par passage à la limite.

Dans tout ce qui suit nous noterons ${}_nG$ le noyau de $n : G \to G$, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des $x \in G$ tels que $nx = 0$.

LEMME 2. *Soit* G *un groupe proalgébrique connexe, et soit* n *un entier premier à* p. *Le morphisme* $n : G \to G$ *est alors surjectif.*

Il suffit de considérer le cas où G est algébrique, le cas général s'en déduisant par passage à la limite. Soit alors $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G; le morphisme $n : G \to G$ définit un morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui n'est autre que la multiplication par n (pour les propriétés élémentaires des algèbres de Lie, voir par exemple [13], chap. III, n° 11); comme $(n, p) = 1$, le morphisme $n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est surjectif, et il en est donc de même de $n : G \to G$.

(Bien entendu, on pourrait aussi utiliser les théorèmes de structure.)

PROPOSITION 8. *Soit* G *un groupe proalgébrique connexe, et soit* l *un nombre premier. Supposons que* $l : G \to G$ *soit surjectif. Alors :*

(i) *La composante l-primaire* $\pi_i(G)_l$ *de* $\pi_i(G)$ *est nulle pour tout* $i \geqslant 2$.

(ii) *Le groupe* $\pi_1(G)_l$ *est projectif, et le quotient* $\pi_1(G)_l/l\pi_1(G)_l$ *est isomorphe à* ${}_lG$.

On applique la suite exacte d'homotopie à la suite exacte :

$$0 \to {}_lG \to G \xrightarrow{l} G \to 0$$

Comme $\pi_i({}_lG) = 0$ pour $i \geqslant 1$ (en vertu du lemme 1 et de la prop. 5 du n° 5.3), on en tire d'abord que la multiplication par l est bijective dans $\pi_i(G)$, $i \geqslant 2$, ce qui équivaut à dire que la composante l-primaire de $\pi_i(G)$ est nulle, d'où (i). On en tire ensuite la suite exacte :

$$0 \to \pi_1(G) \xrightarrow{l} \pi_1(G) \to {}_lG \to 0,$$

qui montre d'abord que la composante l-primaire de $\pi_1(G)$ est sans torsion, donc projective (n° 4.4, prop. 5), puis que le quotient $\pi_1(G)_l/l\pi_1(G)_l$ est isomorphe à ${}_lG$ (car ce quotient s'identifie visiblement à $\pi_1(G)/l\pi_1(G)$).

COROLLAIRE 1. *Les hypothèses sur* l *et* G *étant les mêmes, supposons que* ${}_lG$ *soit isomorphe à* $(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})^I$, *où* I *est un ensemble quelconque. Alors* $\pi_1(G)_l$ *est isomorphe à* $(\mathbf{Z}_l)^I$.

(En particulier, si ${}_lG$ est un groupe fini d'ordre l^a, $\pi_1(G)_l$ est un $\mathbf{Z}_l$-module libre de rang a.)

Puisque $\pi_1(G)_l$ est projectif, il est de la forme $(\mathbf{Z}_l)^J$, pour un certain ensemble d'indices J (cf. n° 4.4, prop. 5). Le groupe ${}_lG$ est donc isomorphe à $(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})^J$, ce qui entraîne que J est équipotent à I, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. *On a* $\pi_i(G_m) = 0$ *pour* $i \geqslant 2$. *La composante l-primaire de* $\pi_1(G_m)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}_l$ *si* $l \neq p$, *et est nulle si* $l = p$.

Pour tout l, l'application $x \to x^l$ de G_m dans lui-même est surjective; son noyau a l éléments (resp. 1 élément) si $l \neq p$ (resp. si $l = p$). On applique alors la proposition et le cor. 1.

COROLLAIRE 3. *Soit* A *une variété abélienne, et soit* r *sa dimension. On a* $\pi_i(A) = 0$ *pour* $i \geqslant 2$. *La composante l-primaire de* $\pi_1(A)$ *est isomorphe à* $(\mathbf{Z}_l)^{2r}$ *pour* $l \neq p$, *et à* $(\mathbf{Z}_p)^s$ *pour* $l = p$, *l'entier* s *étant compris entre* 0 *et* r.

D'après un théorème de Weil (cf. par exemple Lang [9], p. 109, th. 6), le morphisme $l : A \to A$ est surjectif, et de degré l^{2r}. Si $l \neq p$, son application tangente est bijective; c'est donc une isogénie séparable, et le nombre d'éléments de son noyau est égal à son degré; d'où nos assertions dans ce cas. Si $l = p$, son application tangente est identiquement nulle. On en déduit aisément qu'il se factorise en $A \to A^p \xrightarrow{f} A$, où A^p désigne la « puissance p-ième » de A (cf. n° 1.1), et où f est un morphisme de degré p^r; le noyau de f a donc p^s éléments, s étant un entier compris entre 0 et r; d'où le résultat.

COROLLAIRE 4. *Soit* G *un groupe proalgébrique, et soit* l *un nombre premier différent de la caractéristique. Alors* $\pi_i(G)_l$ *est nul pour* $i \geqslant 2$, *et* $\pi_1(G)_l$ *est isomorphe à un produit de groupes* $\mathbf{Z}_l$.

On applique la proposition au groupe G^0, en tenant compte du lemme 2.

COROLLAIRE 5. *Les hypothèses sur* G *et* l *étant les mêmes que dans la proposition, soit* $G(l)$ *la limite projective du système projectif* :

$$\ldots \xrightarrow{l} G \xrightarrow{l} G \xrightarrow{l} G.$$

On a alors une suite exacte :

$$0 \to \pi_1(G)_l \to G(l) \to G \to 0.$$

Il est clair que $G(l)$ s'applique sur G; soit N le noyau. Comme $G(l)$ est connexe, l'homomorphisme $\partial : \pi_1(G) \to N$ est surjectif. D'autre part, la multiplication par l est *bijective* dans $G(l)$, par construction même. La composante l-primaire de $\pi_1(G(l))$ est donc nulle (cor. 1); comme N est l-primaire, la suite exacte d'homotopie montre alors que $\partial : \pi_1(G)_l \to N$ est un isomorphisme, c.q.f.d.

Remarque. La suite exacte du corollaire 5 montre que $\pi_1(G)_l$ est limite projective des groupes ${}_{(l^n)}G$, pour $n \to +\infty$. Lorsque G est une variété abélienne, on retrouve la construction du « groupe de Tate » $T_l(G)$, cf. Lang [9], chap. VII, § 1. Ce groupe joue le rôle d'un « groupe d'homologie l-adique de dimension 1 »; son caractère fonctoriel conduit immédiatement aux matrices l-adiques de Weil, cf. [9], *loc. cit.*

Soit maintenant G un groupe proalgébrique tel que $n : G \to G$ soit surjectif pour *tout* $n \geqslant 1$; en vertu du lemme 2, il revient au même de dire que G est *connexe* et que $p : G \to G$ est surjectif. Soit $\mathbf{N}_+$ l'ensemble des entiers $\geqslant 1$, ordonné par la relation de divisibilité. Si $n \in \mathbf{N}_+$, posons $G_n = G$, et, si n divise m, soit $f_{nm} : G_m \to G_n$ la multiplication par m/n. Les (G_n, f_{nm}) forment un système projectif, dont nous désignerons la limite par $G(\infty)$.

PROPOSITION 9. *Le groupe* $G(\infty)$ *est le revêtement universel du groupe* G.

La démonstration est la même que celle du cor. 5 à la prop. 8. Puisque les f_{nm} sont surjectifs, et de noyau de dimension zéro, le groupe $G(\infty)$ s'applique *sur* G, et le noyau de $G(\infty) \to G$ est de dimension zéro. D'autre part, la construction de $G(\infty)$ montre que

$$n : G(\infty) \to G(\infty)$$

est bijectif pour tout $n \in \mathbf{N}_+$. D'après le cor. 1 à la prop. 8, le groupe $G(\infty)$ est simplement connexe, et c'est donc bien le revêtement universel de G.

La proposition précédente s'applique notamment aux *variétés abéliennes et au groupe* G_m.

§ 7. GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF

7.1. Définitions.

Soit G un groupe quasi-algébrique. Nous dirons que G est *de type multiplicatif* s'il est produit de groupes isomorphes à G_m et d'un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique. D'après Borel (cf. [2], exposé 4, par exemple), il revient au même de dire que G admet une représentation linéaire fidèle par des matrices *semi-simples*. Les groupes quasi-algébriques de type multiplicatif forment une sous-catégorie $\mathcal{QM}$ de $\mathcal{Q}$; cette sous-catégorie est *épaisse* : tout sous-groupe, tout quotient, et toute extension de groupes appartenant à $\mathcal{QM}$ appartient encore à $\mathcal{QM}$.

Soit maintenant $G \in \mathcal{P}$. Nous dirons que G est *de type multiplicatif* si $G/H \in \mathcal{QM}$ pour tout sous-groupe de définition H de G; ces groupes forment une sous-catégorie épaisse $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}$, stable par limite projective. La catégorie $\mathcal{M}$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Pro}(\mathcal{QM})$; cela se démontre comme la prop. 12 du nº 2.6.

7.2. Dualité.

PROPOSITION 1. *L'anneau* $\Lambda = \mathrm{Hom}(G_m, G_m)$ *est isomorphe à l'anneau de fractions de* $\mathbf{Z}$ *par rapport à la partie multiplicative formée des puissances de* p.

On a $\Lambda = \varinjlim \mathrm{Hom}_a(G_m, (G_m)^{p^k})$, cf. nº 3.6, prop. 13. Comme tout morphisme (algébrique) de G_m dans lui-même est de la forme $x \to x^n$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (cf. [2], *loc. cit.*), on en déduit que tout morphisme (quasi-algébrique) de G_m dans lui-même est de la forme $x \to x^{n/p^k}$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 1$, d'où la proposition.

[En caractéristique zéro, l'exposant caractéristique p est égal à 1, et l'on a $\Lambda = \mathbf{Z}$.]

Soit $G \in \mathcal{M}$. Nous poserons :

$$X(G) = \mathrm{Hom}(G, G_m).$$

Le groupe $X(G)$ est muni de façon naturelle d'une structure de Λ-module (noter d'ailleurs qu'un Λ-module n'est rien d'autre qu'un groupe abélien dans lequel la multiplication par p est bijective). Nous l'appellerons le *groupe des caractères* de G. C'est un foncteur contravariant additif de G.

PROPOSITION 2. *Le foncteur* X *définit une équivalence de la catégorie duale de* $\mathcal{M}$ *(resp.* $\mathcal{QM}$*) avec la catégorie* $\mathcal{C}_\Lambda$ *(resp.* $\mathcal{F}_\Lambda$*) des* Λ*-modules (resp. des* Λ*-modules de type fini).*

Montrons d'abord que X est un foncteur *exact*, autrement dit que G_m est *injectif* dans $\mathcal{M}$. D'après [2], *loc. cit.*, on a $\mathrm{Ext}_a(G_m, G_m) = 0$, et $\mathrm{Ext}_a(N, G_m) = 0$ si N est fini puisque G_m est divisible; on en tire $\mathrm{Ext}(G_m, G_m) = \mathrm{Ext}(N, G_m) = 0$ (cf. nº 3.6), d'où $\mathrm{Ext}(G, G_m) = 0$ pour $G \in \mathcal{QM}$, puis, par passage à la limite (nº 3.4, prop. 7), pour tout $G \in \mathcal{M}$, ce qui prouve bien que G_m est injectif dans $\mathcal{M}$.

Soient maintenant $G, G' \in \mathcal{QM}$. Le foncteur X définit un homomorphisme

$$\theta : \mathrm{Hom}(G, G') \to \mathrm{Hom}(X(G'), X(G)).$$

Si l'on décompose G et G′ en produits de groupes G_m et de groupes cycliques finis, on constate que θ est un isomorphisme, et que $X(G)$ et $X(G')$ sont des Λ-modules de type fini. Comme tout Λ-module de type fini est somme directe de modules isomorphes soit à Λ, soit à $\Lambda/n\Lambda$ (avec $(n, p) = 1$), donc est de la forme $X(G)$ avec $G \in \mathcal{QM}$, on en conclut que $X : (\mathcal{QM})^* \to \mathcal{F}_\Lambda$ *est une équivalence.*

Comme X transforme $\varprojlim$ en $\varinjlim$ (nº 2.7, prop. 14), et que $\mathrm{Pro}(\mathcal{QM})$ est équivalente à $\mathcal{M}$, on voit que X définit une équivalence de $\mathcal{M}^*$ avec la catégorie des limites inductives des objets de $\mathcal{F}_\Lambda$, catégorie qui est équivalente à $\mathcal{C}_\Lambda$, c.q.f.d.

Remarques. 1) Le groupe G_m est injectif dans $\mathcal{M}$, mais pas dans $\mathcal{P}$: si A est une variété abélienne non nulle, on a en effet $\mathrm{Ext}(A, G_m) \neq 0$, cf. nº 9.1. On peut d'ailleurs montrer que *la catégorie $\mathcal{P}$ ne contient aucun objet injectif non nul*.

2) Signalons, d'après Tate, une construction directe du groupe $G \in \mathcal{M}$ admettant un groupe de caractères X donné : on considère l'algèbre $k^{(X)}$ du groupe abélien X sur le corps k, et l'on définit G comme la « variété affine » dont l'anneau de coordonnées est $k^{(X)}$; l'homomorphisme de $k^{(X)}$ dans $k^{(X)} \otimes k^{(X)} = k^{(X \times X)}$ induit par l'application diagonale $X \rightarrow X \times X$ définit sur G la structure de groupe cherchée.

3) La proposition précédente peut aussi se déduire d'un résultat général sur les équivalences de catégories, en tenant compte de ce que G_m est un *cogénérateur injectif et artinien* de $\mathcal{M}$; voir une note récente de B. M. Mitchell, *Amer. Math. Soc. Notices*, 7, 1960, p. 199, nº 566-29.

7.3. Connexion et simple connexion.

Proposition 3. *Soit* $G \in \mathcal{M}$, *et soit* X *son groupe des caractères. Alors* :

(i) G *est de dimension zéro* $\Leftrightarrow$ X *est un groupe de torsion.*

(ii) G *est connexe* $\Leftrightarrow$ X *est sans torsion.*

(iii) G *est connexe et simplement connexe* $\Leftrightarrow$ X *est sans torsion et divisible (i.e. est un* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel).*

Le foncteur X transforme groupes finis en groupes finis, d'où (i). Pour prouver (ii) on remarque que « G est connexe » équivaut à « tout quotient fini de G est nul », d'où, par dualité, à « tout sous-groupe fini de X est nul », ce qui signifie bien que X est sans torsion.

Supposons maintenant que G soit connexe et simplement connexe, et soit $X' = X \otimes_\Lambda \mathbf{Q}$; puisque X est sans torsion, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow X \rightarrow X' \rightarrow T \rightarrow 0$$

où T est un Λ-module de torsion. Par dualité, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow N \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 0, \text{ avec } X(G') = X' \text{ et } X(N) = T.$$

D'après (i) et (ii) le groupe G' est connexe, et le groupe N de dimension zéro. Puisque $\pi_1(G) = 0$, on en conclut que $N = 0$ (nº 6.1, prop. 1), d'où $X = X'$, ce qui montre bien que X est divisible. Inversement, si X est sans torsion et divisible, pour tout nombre premier l, le morphisme $l : G \rightarrow G$ a un transposé $l : X \rightarrow X$ qui est bijectif, et il est donc lui-même bijectif; d'après la prop. 8 du nº 6.5, il s'ensuit que $\pi_1(G)_l = 0$, et G est bien simplement connexe. [On pourrait aussi montrer directement que G n'a pas de « revêtement » connexe.]

Corollaire 1. *Soit* $\overline{G}$ *le revêtement universel d'un groupe* $G \in \mathcal{M}$. *On a alors* $\overline{G} \in \mathcal{M}$ *et* $X(\overline{G}) = X(G) \otimes_\Lambda \mathbf{Q}$.

Soit $G' \in \mathcal{M}$ tel que $X(G') = X(G) \otimes_\Lambda \mathbf{Q}$; d'après (iii), le groupe G' est connexe et simplement connexe. D'autre part, l'application canonique de $X(G)$ dans $X(G)\otimes_{\Lambda}\mathbf{Q}$ définit un morphisme

$$u : G' \to G.$$

On constate tout de suite (en appliquant (i)) que le noyau et le conoyau de u sont de dimension zéro; le groupe G' est donc bien le revêtement universel de G.

Corollaire 2. *Le groupe des caractères du groupe* $\overline{G_m}$ *est égal à* $\mathbf{Q}$.

Cela résulte du cor. 1.

Corollaire 3. *Pour qu'un groupe* $G \in \mathcal{M}$ *soit connexe et simplement connexe, il faut et il suffit qu'il soit produit de groupes isomorphes à* $\overline{G_m}$.

La condition est évidemment suffisante. D'autre part, si G est connexe et simplement connexe, $X(G)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel (d'après (iii)), donc est somme directe de groupes isomorphes à $\mathbf{Q}$; par dualité, on voit que G est produit de groupes isomorphes à $\overline{G_m}$, c.q.f.d.

7.4. Résultats auxiliaires sur les variétés abéliennes.

Proposition 4. *Soit* A *une variété abélienne et soit* G *un groupe algébrique. Le groupe* $\mathrm{Ext}_a(G, A)$ *est un groupe de torsion.*

(Rappelons que Ext_a est relatif à la catégorie des *groupes algébriques*, cf. n° 3.6.)

La proposition est évidente si G est fini, car il existe alors un entier $n \geqslant 1$ qui annule G, donc $\mathrm{Ext}_a(G, A)$. La suite exacte des Ext_a nous permet donc de nous ramener au cas où G est *connexe*.

Soit $\widetilde{H}^1(G, A)$ le groupe des classes d'espaces fibrés principaux (localement isotriviaux) de base G et de groupe structural A (cf. [3], exposé 1). On a un homomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}_a(G, A) \to \widetilde{H}^1(G, A).$$

Cet homomorphisme est *injectif*. En effet, si une extension E de G par A est triviale comme espace fibré, il existe un morphisme de variétés $f : E \to A$ qui est l'identité sur A. D'après une propriété fondamentale des variétés abéliennes, f est aussi un morphisme pour les structures de groupe de E et de A, ce qui montre que l'extension E est triviale.

Comme G est une variété non singulière, on sait que $\widetilde{H}^1(G, A)$ est un groupe de torsion ([3], p. 1-27, lemme 7), d'où la proposition.

Corollaire 1. *Si* A *est une variété abélienne et* G *un groupe proalgébrique, le groupe* $\mathrm{Ext}(G, A)$ *est un groupe de torsion.*

Si $G \in \mathcal{Q}$, on a $\mathrm{Ext}(G, A) = \varinjlim \mathrm{Ext}_a(G, A^{p^k})$, d'où la proposition dans ce cas. Le cas général s'en déduit par passage à la limite.

Corollaire 2. *Si* A *est une variété abélienne et* G *un groupe proalgébrique connexe et simplement connexe, on a* $\mathrm{Ext}(G, A) = 0$.

Soit n un entier $\geqslant 1$. On a la suite exacte :

$$0 \to {}_n\mathrm{A} \to \mathrm{A} \xrightarrow{n} \mathrm{A} \to 0$$

où ${}_n\mathrm{A}$ est un groupe fini. On en déduit la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{G}, {}_n\mathrm{A}) \to \mathrm{Ext}(\mathrm{G}, \mathrm{A}) \xrightarrow{n} \mathrm{Ext}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$$

Comme $\pi_0(\mathrm{G}) = \pi_1(\mathrm{G}) = 0$, on a $\mathrm{Ext}(\mathrm{G}, {}_n\mathrm{A}) = 0$, cf. nº 6.1, prop. 1. La multiplication par n est donc injective dans $\mathrm{Ext}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$, ce qui signifie que $\mathrm{Ext}(\mathrm{G}, \mathrm{A})$ est sans torsion. Comme d'autre part c'est un groupe de torsion (cor. 1), ce groupe est nul.

7.5. Objets projectifs dans $\mathscr{M}$.

PROPOSITION 5. *Le groupe* $\overline{\mathrm{G}_m}$ *est projectif dans* $\mathscr{P}$, *et c'est l'enveloppe projective de* G_m.

Il est clair que $\overline{\mathrm{G}_m}$ est une extension *essentielle* de G_m, et il nous suffit donc de prouver que $\overline{\mathrm{G}_m}$ est projectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{G}_m}, \mathrm{B}) = 0$ pour tout groupe élémentaire B (cf. nº 3.4, prop. 9). Lorsque $\mathrm{B} = \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$, cela résulte de ce que $\overline{\mathrm{G}_m}$ est connexe et simplement connexe ; lorsque $\mathrm{B} = \mathrm{G}_m$, de ce que G_m est injectif dans $\mathscr{M}$; lorsque $\mathrm{B} = \mathrm{G}_a$, de ce que $\mathrm{Ext}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_a) = 0$ pour tout $\mathrm{G} \in \mathscr{M}$, en vertu de la décomposition des groupes linéaires commutatifs en partie semi-simple et partie unipotente ([2], *loc. cit.*); enfin, lorsque B est une variété abélienne, cela résulte du corollaire 2 à la prop. 4.

PROPOSITION 6. *Soit* G *un groupe de type multiplicatif, et soit* X *son groupe des caractères. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) G *est projectif dans* $\mathscr{P}$.

b) G *est projectif dans* $\mathscr{M}$.

c) X *est divisible.*

d) G *est produit de groupes isomorphes à* $\mathbf{Z}_l$ $(l \neq p)$, *ou à* $\overline{\mathrm{G}_m}$.

Il est trivial que *a)* $\Rightarrow$ *b)*. On voit par dualité que *b)* équivaut à *c)*, et les théorèmes de structure sur les Λ-modules divisibles (Bourbaki, *Alg.*, VII, § 2, exer. 3) montrent que *c)* $\Leftrightarrow$ *d)*. Enfin, *d)* entraîne *a)* puisque $\mathbf{Z}_l$ est projectif (nº 4.3, prop. 4), de même que $\overline{\mathrm{G}_m}$ (prop. 5).

COROLLAIRE. *La dimension projective d'un groupe de type multiplicatif est* $\leqslant 1$.

Cela résulte de la prop. 6 et du fait que tout Λ-module admet une résolution injective de longueur 1.

Exemple. La suite exacte $0 \to \Lambda \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\Lambda \to 0$ donne par dualité la suite exacte :

$$0 \to \prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l \to \overline{\mathrm{G}_m} \to \mathrm{G}_m \to 0$$

qui est une résolution projective de longueur 1 du groupe élémentaire G_m. On retrouve le fait que $\pi_1(\mathrm{G}_m)_l = \mathbf{Z}_l$, cf. nº 6.5, cor. 2 à la prop. 8.

§ 8. GROUPES UNIPOTENTS

8.1. Définitions.

Soit G un groupe quasi-algébrique. Nous dirons que G est *unipotent* s'il admet une représentation linéaire fidèle par des matrices unipotentes, ou, ce qui revient au même d'après Borel ([2], exposé 4), s'il admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes, soit au groupe additif G_a, soit au groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Un groupe proalgébrique G est dit *unipotent* si G/H est unipotent pour tout sous-groupe de définition H de G; ces groupes forment une sous-catégorie épaisse $\mathscr{U}$ de $\mathscr{P}$, stable par limite projective. Tout groupe proalgébrique *linéaire* (c'est-à-dire limite projective de groupes linéaires) se décompose de façon unique en produit d'un groupe unipotent par un groupe de type multiplicatif; on peut dire, en un sens évident, que la catégorie des groupes linéaires est équivalente au *produit* des catégories $\mathscr{M}$ et $\mathscr{U}$.

8.2. Caractéristique zéro.

Supposons que la caractéristique soit zéro, et soit G un groupe algébrique unipotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un isomorphisme, comme on le voit aussitôt. On en conclut que le foncteur $T(G) = \mathrm{Hom}(G, G_a)$ définit une équivalence de la catégorie duale de $\mathscr{Q} \cap \mathscr{U}$ avec la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie (cela résulte également du corollaire à la prop. 8 de [13], p. 172). En passant à la limite on obtient :

Proposition 1. *En caractéristique zéro, le foncteur* $T(G) = \mathrm{Hom}(G, G_a)$ *définit une équivalence de la catégorie duale de* $\mathscr{U}$ *avec la catégorie des k-espaces vectoriels.*

Corollaire. *En caractéristique zéro, tout groupe unipotent est produit de groupes isomorphes à* G_a.

Proposition 2. *En caractéristique zéro, tout groupe unipotent est projectif dans* $\mathscr{P}$.

Vu le corollaire à la prop. 1, on peut se borner à prouver que G_a est projectif. D'après la prop. 1 (ou d'après [13], *loc. cit.*), on a $\mathrm{Ext}(G_a, G_a) = 0$; d'après le théorème de Borel souvent cité, on a $\mathrm{Ext}(G_a, G_m) = 0$; puisque $n : G_a \rightarrow G_a$ est inversible pour tout n, on a $\mathrm{Ext}(G_a, N) = 0$ pour tout groupe fini N; il s'ensuit que G_a est simplement connexe, et le cor. 2 à la prop. 4 du nº 7.4 montre alors que $\mathrm{Ext}(G_a, A) = 0$ pour toute variété abélienne A. Le groupe G_a est donc bien projectif (nº 3.4, prop. 9).

8.3. Le groupe $\pi_1(G_a)$.

A partir de maintenant, et jusqu'à la fin du paragraphe, on suppose que la caractéristique du corps de base k est $\neq 0$.

Nous allons déterminer le groupe $\pi_1(G_a)$, ou, ce qui revient au même, son groupe *dual* $\pi_1(G_a)^\vee = \mathrm{Hom}(\pi_1(G_a), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, cf. nº 4.2. Comme G_a est annulé par la multiplication par p, il en est de même de $\pi_1(G_a)$, et l'on a :

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(G_a), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(G_a), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

cf. nº 6.3.

Considérons alors la suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to G_a \xrightarrow{\wp} G_a \to 0$$

où $\wp : G_a \to G_a$ est le morphisme d'Artin-Schreier, défini par la formule :

$$\wp(x) = x^p - x$$

Cette suite définit un élément canonique $\varepsilon \in \mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. Si $t \in G_a$, nous noterons encore $t : G_a \to G_a$ l'homothétie $x \to tx$. Puisque $\mathrm{Ext}(A, B)$ est contravariant en A, cette homothétie applique $\mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ dans lui-même; nous noterons ξt l'image d'un élément $\xi \in \mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ par cette application, cf. [13], p. 164. En particulier, εt est défini.

Proposition 3. *L'application* $t \to \varepsilon t$ *est un isomorphisme du groupe abélien* G_a *sur le groupe* $\mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

Il est clair que $t \to \varepsilon t$ est un homomorphisme. De plus, puisque G_a est connexe, l'extension $(*)$ est non triviale, et l'on a $\varepsilon \neq 0$; si $t \neq 0$, le morphisme $t : G_a \to G_a$ est un isomorphisme, et l'on a $\varepsilon t \neq 0$. L'application :

$$G_a \to \mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$$

est donc *injective*.

Avant de prouver qu'elle est surjective, établissons un lemme :

Lemme 1. *Soient* a, b, c *trois scalaires non nuls vérifiant la relation* $ac^p + bc = 0$. *Posons* $\varphi(n) = cn$, $\psi(x) = ax^p + bx$. *La suite*

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \xrightarrow{\varphi} G_a \xrightarrow{\psi} G_a \to 0$$

est alors exacte ; si l'on désigne par (a, b, c) *l'élément de* $\mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ *qu'elle définit, on a :*

$$(a, b, c) = \varepsilon t \qquad \textit{avec} \qquad t = 1/ac^p = -1/bc.$$

L'exactitude de la suite en question est immédiate. Posons $u = c^{-1}$, et considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} & \xrightarrow{\varphi} & G_a & \xrightarrow{\psi} & G_a & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id.} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle t} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} & \longrightarrow & G_a & \xrightarrow{\wp} & G_a & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

On a $u\varphi(n) = n$ et $t\psi(x) = \wp(ux)$; le diagramme est donc commutatif, ce qui prouve bien que $(a, b, c) = \varepsilon t$, cf. [13], chap. VII, nº 1.

Revenons à la démonstration de la prop. 3. Soit :

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} G_a \to 0$$

une extension de G_a par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Comme $\mathrm{Ext}(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}_a(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ (n° 3.6, cor. à la prop. 13), on peut supposer qu'il s'agit d'une extension de *groupes algébriques*; si elle est triviale, elle est de la forme εt, avec $t=0$. Supposons donc qu'elle soit non triviale, c'est-à-dire que E soit connexe. Comme il est unipotent de dimension 1, on peut alors l'identifier à G_a; l'homomorphisme $\psi : G_a \to G_a$ définit une extension de corps de degré p, et est donc de la forme $x \to ax^p + bx$, avec $a \neq 0$; comme il est séparable, on a $b \neq 0$; quant à l'homomorphisme φ, il est de la forme $n \to cn$, avec $c = \varphi(1)$. En appliquant le lemme 1, on voit alors que l'extension considérée est de la forme εt, pour t convenable, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Le groupe* $\pi_1(G_a)$ *est isomorphe au groupe* $\mathrm{Hom}(k, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, *muni de la topologie de la convergence simple.*

Cela résulte de la proposition par dualité.

Remarque. On peut également démontrer la prop. 3 en utilisant la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}_a(G_a, G_a) \to \mathrm{Hom}_a(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_a(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to \mathrm{Ext}_a(G_a, G_a) \to \mathrm{Ext}_a(G_a, G_a)$$

ainsi que la détermination de $\mathrm{Ext}_a(G_a, G_a)$ effectuée dans [13], chap. VII, n$^{\text{os}}$ 7 et 9. De toutes façons, le lemme 1 est utile lorsque l'on veut calculer des « symboles locaux ».

8.4. Le groupe $\pi_1(W_n)$.

Rappelons (n° 2.1, exemple 3) que W_n désigne le groupe des *vecteurs de Witt* $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ *de longueur n.* C'est un groupe unipotent, annulé par p^n, et qui se réduit à G_a pour $n=1$. On définit des morphismes :

$$F : W_n \to W_n, \quad V : W_{n-1} \to W_n, \quad R : W_n \to W_{n-1}$$

par les formules :

$$\begin{aligned} F(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= (x_0^p, \ldots, x_{n-1}^p) \\ V(x_0, \ldots, x_{n-2}) &= (0, x_0, \ldots, x_{n-2}) \\ R(x_0, \ldots, x_{n-1}) &= (x_0, \ldots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Ces morphismes commutent, et leur produit est égal à p (cf. Witt [15], ainsi que [13], chap. VII, n° 8).

D'autre part, si U est un groupe unipotent quelconque, nous poserons :

$$U^* = \mathrm{Ext}(U, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

Comme $\pi_1(U)$ est un p-groupe, le groupe U^* s'identifie au dual de $\pi_1(U)$, cf. n° 5.4, cor. à la prop. 7. C'est un foncteur additif et contravariant en U; on notera $f^* : U_2^* \to U_1^*$ l'homomorphisme défini par un morphisme $f : U_1 \to U_2$.

Ceci s'applique en particulier à W_n; comme p^n annule W_n, on a

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(W_n), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p) = \mathrm{Hom}(\pi_1(W_n), \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$W_n^* = \mathrm{Ext}(W_n, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

Considérons alors la suite exacte :

$$0 \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \to W_n \xrightarrow{F-1} W_n \to 0$$

Elle définit un élément $\varepsilon_n \in \mathrm{Ext}(W_n, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Si t est un élément de W_n, l'homothétie de rapport t dans W_n transforme ε_n en un élément $\varepsilon_n t$ de $\mathrm{Ext}(W_n, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) = W_n^*$. On obtient ainsi un homomorphisme

$$t \to \varepsilon_n t$$

de W_n dans W_n^*, homomorphisme que l'on notera θ_n.

Proposition 4. *L'homomorphisme* $\theta_n : W_n \to W_n^*$ *est un isomorphisme.*

Établissons d'abord un lemme :

Lemme 2. *On a les formules de commutativité :*

1) $\theta_n \circ t = t^* \circ \theta_n$ ($t \in W_n$ *étant identifié à l'homothétie correspondante*).

2) $\theta_n \circ F^{-1} = F^* \circ \theta_n$.

3) $\theta_n \circ FV = R^* \circ \theta_{n-1}$.

4) $\theta_{n-1} \circ FR = V^* \circ \theta_n$.

Soit $x \in W_n$. On a $\theta_n \circ t(x) = \theta_n(tx) = \theta_n(xt) = \varepsilon_n xt = t^*(\varepsilon_n x) = t^* \circ \theta_n(x)$, ce qui démontre 1).

Vu la définition de ε_n, on a $\varepsilon_n(F-1) = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon_n F = \varepsilon_n$. Si $x \in W_n$, on a alors $\theta_n \circ F^{-1}(x) = \varepsilon_n F^{-1}(x) = \varepsilon_n F \circ F^{-1}(x)$; mais comme $F \circ F^{-1}(x) = x \circ F$, on trouve $\varepsilon_n x \circ F = F^* \circ \theta_n(x)$ ce qui démontre 2).

Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "R"] & W_n \arrow[r, "F-1"] \arrow[d, "R"] & W_n \arrow[r] \arrow[d, "R"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}/p^{n-1}\mathbf{Z} \arrow[r] & W_{n-1} \arrow[r, "F-1"] & W_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que $p\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}R$. Soit alors $x \in W_{n-1}$, et choisissons $y \in W_n$ tel que $R(y) = x$. On a évidemment $x \circ R = R \circ y$. D'où :

$$R^* \circ \theta_{n-1}(x) = \varepsilon_{n-1} x \circ R = \varepsilon_{n-1} R \circ y = \varepsilon_n p y = \varepsilon_n FVR(y) = \varepsilon_n FV(x) = \theta_n \circ FV(x)$$

ce qui démontre 3).

On pourrait démontrer 4) par un raisonnement analogue. Mais on peut aussi le déduire de 2) et 3). En effet, puisque RF est surjectif, et à noyau connexe, la suite exacte des Ext montre que F^*R^* est injectif, et il suffit d'établir la formule :

$$F^*R^* \circ \theta_{n-1} \circ FR = F^*R^*V^* \circ \theta_n$$

Or, d'après 2) et 3), le membre de gauche est égal à $\theta_n \circ VFR$, qui est égal à $p\theta_n$ puisque $VFR = p$; de même, le membre de droite est égal à $p\theta_n$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Passons maintenant à la démonstration de la prop. 4. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n=1$ n'étant autre que la prop. 3. Supposons donc $n \geqslant 2$. La suite exacte :

$$0 \to W_{n-1} \xrightarrow{V} W_n \xrightarrow{R^{n-1}} G_a \to 0$$

donne par transposition la suite exacte :

$$0 \to G_a^* \xrightarrow{(R^*)^{n-1}} W_n^* \xrightarrow{V^*} W_{n-1}^*$$

D'après le lemme 2, on a le diagramme commutatif :

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & G_a \arrow[r, "(VF)^{n-1}"] \arrow[d, "\theta_1"] & W_n \arrow[r, "RF"] \arrow[d, "\theta_n"] & W_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G_a^* \arrow[r, "(R^*)^{n-1}"] & W_n^* \arrow[r, "V^*"] & W_{n-1}^* & \end{tikzcd}$$

Vu l'hypothèse de récurrence, les deux homomorphismes θ_1 et θ_{n-1} sont des isomorphismes; il en est donc de même de θ_n, c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. *L'homomorphisme* $V^* : W_n^* \to W_{n-1}^*$ *est surjectif.*

Cela résulte de la commutativité du diagramme $(**)$ ci-dessus, et du fait que θ_{n-1} est surjectif.

COROLLAIRE 2. *Le groupe* $\pi_1(W_n)$ *est canoniquement isomorphe au groupe des homomorphismes de* W_n *dans* $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, *muni de la topologie de la convergence simple.*

Cela résulte de la proposition par dualité.

Remarque. L'isomorphisme $\theta_n : W_n \to W_n^*$ permet de munir le groupe abélien W_n^* d'une structure canonique de groupe quasi-algébrique. C'est là un fait général : si U est un groupe unipotent connexe quasi-algébrique, il y a sur U^* une structure *canonique* de groupe unipotent connexe quasi-algébrique; la correspondance $U \Rightarrow U^*$ jouit de propriétés analogues à celles que l'on rencontre dans la dualité des variétés abéliennes; on a $U^{**} = U$, etc. Je reviendrai peut-être là-dessus à l'occasion.

8.5. Le groupe de Witt.

Soit $W = \varprojlim W_n$ le groupe de Witt; ses éléments sont les vecteurs de Witt de longueur infinie $x = (x_0, x_1, \ldots)$. Les morphismes F et V appliquent W dans lui-même, et vérifient la formule $FV = p$; de plus, F est un isomorphisme.

PROPOSITION 5. *Le groupe* $\pi_1(W)$ *est un* p*-groupe sans torsion.*

Il est clair que $\pi_1(W)$ est un p-groupe, puisque c'est la limite projective des $\pi_1(W_n)$. Montrons que $p : \pi_1(W) \to \pi_1(W)$ est injectif. Puisque $p = FV$, et que F est un isomorphisme, il suffit de prouver que $V : \pi_1(W) \to \pi_1(W)$ est injectif. Mais le cor. 1 à la prop. 4 montre que, pour tout $n \geqslant 2$, $V : \pi_1(W_{n-1}) \to \pi_1(W_n)$ est injectif; en passant à la limite sur n, on obtient le résultat cherché, c.q.f.d.

Remarque. La suite exacte $0 \to W \xrightarrow{p} W \to G_a \to 0$ montre que $\pi_1(W)/p\pi_1(W)$ s'identifie à $\pi_1(G_a)$.

Théorème 1. *On a* $\mathrm{Ext}^1(W, G_a) = 0$.

Démontrons d'abord quelques résultats auxiliaires :

(i) Considérons la suite strictement exacte de groupes algébriques :

$$0 \to W_1 \xrightarrow{V} W_2 \xrightarrow{R} G_a \to 0$$

Elle donne naissance à deux homomorphismes

$$d'_a : \mathrm{Hom}_a(W_1, G_a) \to \mathrm{Ext}_a(G_a, G_a)$$
$$d' : \mathrm{Hom}(W_1, G_a) \to \mathrm{Ext}(G_a, G_a).$$

Lemme 3. *Les homomorphismes* d' *et* d'_a *sont des isomorphismes.*

Pour d'_a c'est fait dans [13], p. 174, lemme 3. On passe de là à d' en utilisant les isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(W_1, G_a) = \varinjlim \mathrm{Hom}_a(W_1, G_a^{p^n}), \quad \mathrm{Ext}(G_a, G_a) = \varinjlim \mathrm{Ext}_a(G_a, G_a^{p^n})$$

ainsi que le fait que G_a^q est isomorphe à G_a.

(ii) Considérons la suite exacte :

$$0 \to W \xrightarrow{V} W \to G_a \to 0$$

Elle donne naissance à un homomorphisme

$$d' : \mathrm{Hom}(W, G_a) \to \mathrm{Ext}(G_a, G_a)$$

Lemme 4. *L'homomorphisme* d' *est un isomorphisme.*

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & W & \xrightarrow{V} & W & \longrightarrow & G_a & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id.} & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \xrightarrow{V} & W_2 & \longrightarrow & G_a & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne naissance à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(W_1, G_a) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Ext}(G_a, G_a) \\
{\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id.} \\
\mathrm{Hom}(W, G_a) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Ext}(G_a, G_a)
\end{array}$$

Comme G_a est annulé par p, tout homomorphisme de W dans G_a est nul sur $pW = V(W)$, ce qui prouve que α est un isomorphisme, et le lemme 4 résulte alors du lemme 3.

(iii) Considérons la suite exacte :

$$(***) \qquad 0 \to W \xrightarrow{p} W \to G_a \to 0$$

et l'homomorphisme $d' : \mathrm{Hom}(W, G_a) \to \mathrm{Ext}(G_a, G_a)$ qu'elle définit.

LEMME 5. *L'homomorphisme d' est un isomorphisme.*

Cela résulte du lemme 4 et du fait que $p = \mathrm{VF}$, où $\mathrm{F} : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ est un isomorphisme.

(iv) Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. La suite exacte des Ext associée à l'extension (***) donne une suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) \xrightarrow{d'} \mathrm{Ext}(\mathrm{G}_a, \mathrm{G}_a) \to \mathrm{Ext}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) \xrightarrow{p} \mathrm{Ext}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a)$$

Compte tenu du lemme 5, il s'ensuit que

$$p : \mathrm{Ext}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) \to \mathrm{Ext}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a)$$

est injectif. Mais, puisque G_a est annulé par p, cet homomorphisme est nul. On a donc bien $\mathrm{Ext}(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) = 0$, c.q.f.d.

8.6. Le revêtement universel du groupe de Witt.

PROPOSITION 6. *Soit* G *un groupe unipotent connexe et simplement connexe. Si* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{G}, \mathrm{G}_a) = 0$, *le groupe* G *est projectif dans la catégorie* $\mathscr{P}$.

Puisque G est connexe et simplement connexe, on a $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{G}, \mathrm{B}) = 0$ si B est un groupe fini (nº 6.1, prop. 1) ou une variété abélienne (nº 7.4, cor. 2 à la prop. 4); puisque G est unipotent, on a $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{G}, \mathrm{G}_m) = 0$. La proposition résulte de là et de la prop. 9 du nº 3.4.

THÉORÈME 2. *Le revêtement universel* $\overline{\mathrm{W}}$ *du groupe de Witt* W *est projectif dans* $\mathscr{P}$; *c'est l'enveloppe projective du groupe additif* G_a.

Considérons la suite exacte :

$$0 \to \pi_1(\mathrm{W}) \to \overline{\mathrm{W}} \to \mathrm{W} \to 0$$

Elle donne naissance à la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(\overline{\mathrm{W}}, \mathrm{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1(\pi_1(\mathrm{W}), \mathrm{G}_a)$$

D'après le théorème 1, on a $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{W}, \mathrm{G}_a) = 0$. D'autre part, la prop. 5 montre que $\pi_1(\mathrm{W})$ est un groupe sans torsion, donc projectif dans $\mathscr{P}$ (nº 4.4, prop. 5), et l'on a $\mathrm{Ext}^1(\pi_1(\mathrm{W}), \mathrm{G}_a) = 0$. On en conclut que $\mathrm{Ext}^1(\overline{\mathrm{W}}, \mathrm{G}_a) = 0$, et $\overline{\mathrm{W}}$ est bien projectif en vertu de la proposition 6.

Par ailleurs, puisque $\overline{\mathrm{W}}$ est un « revêtement » de W, c'est une extension essentielle de W; le groupe W lui-même est extension essentielle de G_a (cela se voit en remarquant que les seuls sous-groupes connexes non nuls des W_n sont les $\mathrm{V}^i\mathrm{W}_n$). Donc $\overline{\mathrm{W}}$ est extension essentielle de G_a.

COROLLAIRE 1. *Le groupe* $\overline{\mathrm{W}}$ *est un projectif indécomposable.*

On applique le th. 2 du nº 3.2.

COROLLAIRE 2. *On a* $\pi_i(\mathrm{G}_a) = 0$ *pour* $i \geqslant 2$.

Pour $i \geqslant 2$, on a $\pi_i(\mathrm{W}) = \pi_i(\overline{\mathrm{W}}) = 0$. La suite exacte d'homotopie définie par la suite exacte :

$$(***) \qquad 0 \to \mathrm{W} \xrightarrow{p} \mathrm{W} \to \mathrm{G}_a \to 0$$

montre alors bien que $\pi_i(G_a)=0$ (pour $i=2$ il faut également utiliser le fait que $\pi_1(W)$ est sans torsion).

Corollaire 3. *La dimension projective du groupe* W *est égale à* 1.

En effet, la suite exacte

$$0 \to \pi_1(W) \to \overline{W} \to W \to 0$$

est une résolution projective de longueur 1, et le groupe W n'est pas projectif, puisque $\pi_1(W)$ n'est pas nul.

Corollaire 4. *La dimension projective du groupe additif* G_a *est égale à* 2.

Le corollaire 3, joint à la suite exacte

$$(***) \qquad 0 \to W \xrightarrow{p} W \to G_a \to 0$$

montre que cette dimension est $\leqslant 2$. Cette même suite exacte montre d'ailleurs que $\mathrm{Ext}^2(G_a, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(W, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, lui-même isomorphe à $\mathrm{Hom}(\pi_1(W), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, qui est différent de zéro. La dimension projective de G_a est donc bien égale à 2.

Corollaire 5. *Si* B *est un groupe quasi-algébrique connexe, on a* $\mathrm{Ext}^2(G_a, B)=0$.

On peut évidemment supposer que B est un groupe élémentaire. Si $B=G_a$, la suite exacte (***) montre que $\mathrm{Ext}^2(G_a, G_a)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(W, G_a)$ qui est nul; si B est une variété abélienne, ou le groupe G_m, la suite exacte

$$0 \to {}_pB \to B \xrightarrow{p} B \to 0$$

montre que $\mathrm{Ext}^2(G_a, B)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Ext}^3(G_a, {}_pB)$, qui est nul d'après le cor. 4.

Remarque. Dans le cor. 5, l'hypothèse « B est quasi-algébrique » ne peut pas être supprimée; on peut montrer en effet que $\mathrm{Ext}^2(G_a, \overline{G_a})$ est non nul.

8.7. Résolution projective de G_a.

Nous venons de voir que le groupe G_a possède une résolution projective de longueur 2. Nous allons construire explicitement une telle résolution.

Pour simplifier les notations, nous poserons $N=\pi_1(W)$; nous noterons $i: N \to \overline{W}$ l'injection de N dans $\overline{W}$, $\pi: \overline{W} \to W$ la projection de $\overline{W}$ sur W, $\rho: W \to G_a$ celle de W sur G_a. Définissons des morphismes

$$\begin{aligned}
\alpha &: N \to N \times \overline{W}, \quad \text{par} \quad \alpha(n) = (-pn, i(n)),\\
\beta &: N \times \overline{W} \to \overline{W}, \quad \text{par} \quad \beta(n, x) = i(n) + px,\\
\gamma &: \overline{W} \to G_a, \quad \text{par} \quad \gamma = \rho \circ \pi.
\end{aligned}$$

Proposition 7. *La suite* :

$$0 \to N \xrightarrow{\alpha} N \times \overline{W} \xrightarrow{\beta} \overline{W} \xrightarrow{\gamma} G_a \to 0$$

est une résolution projective de longueur 2 *du groupe* G_a.

Cela résulte facilement du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & o & & o & & o & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
o & \to & N & \xrightarrow{p} & N & \to & N/pN & \to & o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
o & \to & \overline{W} & \xrightarrow{p} & \overline{W} & \to & \overline{G_a} & \to & o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
o & \to & W & \xrightarrow{p} & W & \to & G_a & \to & o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & o & & o & & o & &
\end{array}$$

8.8. Groupes unipotents projectifs.

PROPOSITION 8. *Soit* G *un groupe unipotent connexe. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) G *est projectif.*

(ii) G *est produit de groupes isomorphes à* $\overline{W}$.

(iii) G *est simplement connexe et sans torsion.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du théorème de structure des objets projectifs de P dû à Gabriel (cf. n° 3.2). L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale. Montrons enfin que (iii) $\Rightarrow$ (i). Soit $H = G/pG$. La suite exacte $o \to G \xrightarrow{p} G \to H \to o$ donne naissance à la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^1(G, G_a) \xrightarrow{p} \mathrm{Ext}^1(G, G_a) \to \mathrm{Ext}^2(H, G_a)$$

et comme G_a est annulé par p, on voit que $\mathrm{Ext}^1(G, G_a)$ se plonge dans $\mathrm{Ext}^2(H, G_a)$. Mais on sait que $\mathrm{Ext}^2(G_a, G_a) = o$ (cor. 5 au th. 2) ; on en déduit que $\mathrm{Ext}^2(K, G_a) = o$ si K est unipotent connexe quasi-algébrique, puis que $\mathrm{Ext}^2(H, G_a) = o$ si H est unipotent connexe (par passage à la limite). Comme le groupe $H = G/pG$ est bien unipotent connexe, on en tire que $\mathrm{Ext}^1(G, G_a) = o$, ce qui montre que G est projectif (prop. 6).

Remarque. D'après le théorème de structure de Gabriel, les groupes unipotents projectifs (non nécessairement connexes) sont des produits de groupes isomorphes à $\overline{W}$ ou à $\mathbf{Z}_p$.

§ 9. VARIÉTÉS ABÉLIENNES

9.1. Détermination de certains Ext.

Soit A une variété abélienne de dimension n. Le groupe $\mathrm{Ext}_a(A, G_a)$ a été déterminé par Rosenlicht (cf. [13], chap. VII, th. 7 et th. 10) : il est isomorphe à $H^1(A, \mathcal{O}_A)$, et c'est un espace vectoriel de dimension n sur k. Le groupe $\mathrm{Ext}_a(A, G_m)$ a été déterminé par Weil et Barsotti (cf. [13], chap. VII, th. 6) : il est isomorphe au groupe additif des points de la variété de Picard A^* de A.

Proposition 1. *On a* $\mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{G}_m) = \mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_\pi$, A^*_π *désignant le sous-groupe de* A^* *formé des éléments x tels qu'il existe une puissance q de p vérifiant* $qx = 0$.

On utilise la formule $\mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{G}_m) = \varinjlim \mathrm{Ext}_a(\mathrm{A}, \mathrm{G}_m^q)$, en tenant compte de ce que G_m^q est isomorphe à G_m, l'isomorphisme transformant l'application $\mathrm{G}_m^q \to \mathrm{G}_m$ en $q : \mathrm{G}_m \to \mathrm{G}_m$. Le groupe $\mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{G}_m)$ est donc limite inductive du système :

$$\mathrm{A}^* \xrightarrow{p} \mathrm{A}^* \xrightarrow{p} \mathrm{A}^* \to \dots$$

Comme $p : \mathrm{A}^* \to \mathrm{A}^*$ est surjectif (A^* étant une variété abélienne), on trouve bien $\mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_\pi$.

Remarque. On peut montrer que $\mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{G}_a)$ s'identifie à la « composante semi-simple » de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A}, \mathcal{O}_\mathrm{A})$ vis-à-vis de l'endomorphisme de Frobenius, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait.

Proposition 2. *Soit* $\overline{\mathrm{A}}$ *le revêtement universel de* A. *Alors :*

(i) $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_m) = \mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_f$, A^*_f *désignant le sous-groupe des éléments d'ordre fini de* A^*.

(ii) *En caractéristique zéro,* $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_a)$ *est un k-espace vectoriel de dimension* $n = \dim(\mathrm{A})$.

(iii) *En caractéristique* $\neq 0$, *on a* $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_a) = 0$.

D'après la prop. 9 du n° 6.5, dont nous conservons les notations, le groupe A est limite projective du système (A_n, f_{nm}). Pour tout groupe quasi-algébrique B, on a donc

$$\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{B}) = \varinjlim(\mathrm{Ext}(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}), f^*_{nm}),$$

où f^*_{nm} désigne le transposé de f_{nm}, c'est-à-dire la multiplication par m/n. Lorsque $\mathrm{B} = \mathrm{G}_m$, on a $\mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_\pi$ et les f^*_{nm} sont surjectifs; il s'ensuit que $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{B})$ s'identifie au quotient de $\mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_\pi$ par le sous-groupe des éléments d'ordre fini, quotient lui-même isomorphe à $\mathrm{A}^*/\mathrm{A}^*_f$. Lorsque $\mathrm{B} = \mathrm{G}_a$ et que la caractéristique est zéro, les f^*_{nm} sont des isomorphismes, et l'on trouve $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_a) = \mathrm{Ext}(\mathrm{A}, \mathrm{G}_a) = \mathrm{Ext}_a(\mathrm{A}, \mathrm{G}_a)$. Lorsque $\mathrm{B} = \mathrm{G}_a$ et que la caractéristique est non nulle, les homomorphismes f^*_{nm} sont nuls si p divise m/n; on a donc $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_a) = 0$ dans ce cas.

Corollaire. *Si le corps de base k est la clôture algébrique du corps premier* $\mathbf{F}_p$, *le groupe* $\overline{\mathrm{A}}$ *est projectif dans* $\mathcal{P}$.

En effet, dans ce cas, la variété A peut être définie sur un corps fini, de même que sa duale A^*. Tout point de A^* rationnel sur k est rationnel sur un corps fini convenable $\mathbf{F}_q$; or, pour q fixé, les points rationnels sur $\mathbf{F}_q$ forment un groupe fini. On a donc $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^*_f$, d'où $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_m) = \mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_a) = 0$. D'autre part, puisque $\overline{\mathrm{A}}$ est connexe et simplement connexe, on a $\mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{B}) = 0$ si B est un groupe fini (n° 6.1, prop. 1), ou une variété abélienne (n° 7.4, cor. 2 à la prop. 4). Il en résulte bien que $\overline{\mathrm{A}}$ est projectif (n° 3.4, prop. 9).

9.2. L'enveloppe projective d'une variété abélienne.

Dans tout ce numéro, A désigne une variété abélienne de dimension n, et $\overline{\mathrm{A}}$ son revêtement universel.

PROPOSITION 3. *Soit* $u : X \to \overline{A}$ *l'enveloppe projective de* $\overline{A}$ (cf. nº 3.2), *et soit* R *le noyau de* u.

1) *Le groupe* R *est un groupe connexe* ; *il est produit d'un groupe de type multiplicatif* T, *et d'un groupe unipotent* U.

2) *Le groupe* $\mathrm{Hom}(T, G_m)$ *des caractères de* T *est isomorphe à* $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_m) = A^*/A_t^*$.

3) *En caractéristique zéro, le groupe* U *est un k-espace vectoriel de dimension n* ; *en caractéristique* $\neq 0$, *on a* $U = 0$.

On sait (nº 4.4, cor. 1 à la prop. 5) que X est connexe. La suite exacte

$$\pi_1(\overline{X}) \to \pi_0(R) \to \pi_0(X)$$

montre alors que R est *connexe*.

Soit H un sous-groupe fermé de R tel que $R/H = B$ soit une variété abélienne; nous allons prouver que $B = 0$. En effet, X/H est une extension de $\overline{A}$ par B; d'après le cor. 2 à la prop. 4 du nº 7.4, cette extension est triviale; il existe donc un sous-groupe fermé Y de X, tel que $Y \cap R = H$, et qui se projette sur $\overline{A}$; puisque X est extension essentielle de $\overline{A}$, on a $Y = X$, d'où $H = R$ et $B = 0$. Soit maintenant H un sous-groupe de définition quelconque de R. Ce qui précède montre que le quotient R/H est un groupe *linéaire*, donc se décompose de façon unique en produit d'un groupe de type multiplicatif T_H et d'un groupe unipotent U_H; en passant à la limite sur H, on voit que $R = T \times U$, avec $T = \varprojlim T_H$, $U = \varprojlim U_H$, ce qui démontre l'assertion 1).

On a $\mathrm{Hom}(X, G_m) = 0$. C'est immédiat à partir du théorème de structure de Gabriel (nº 3.2). Donnons-en tout de même une démonstration directe : si $f : X \to G_m$ est un homomorphisme non nul, de noyau Y, le groupe $X/Y = G_m$ s'applique sur $\overline{A}/f(Y)$, qui est une variété abélienne, ce qui entraîne $f(Y) = \overline{A}$, et X ne serait pas extension essentielle de $\overline{A}$.

Ceci étant, la suite exacte des Ext montre que $\mathrm{Hom}(R, G_m)$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_m)$, et comme $\mathrm{Hom}(R, G_m) = \mathrm{Hom}(T, G_m)$, on obtient 2).

En remplaçant G_m par G_a dans le raisonnement précédent, on voit que $\mathrm{Hom}(U, G_a)$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_a)$. En caractéristique zéro, ceci prouve que U est le dual de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_a)$ qui est de dimension n d'après la prop. 2. En caractéristique $\neq 0$, on obtient $\mathrm{Hom}(U, G_a) = 0$, ce qui prouve que U est nul, c.q.f.d.

COROLLAIRE. *Le groupe* R *est projectif.*

Le groupe A^*/A_t^* est divisible; comme c'est le groupe des caractères de T, il s'ensuit que T est projectif (nº 7.5, prop. 6). D'autre part, la prop. 2 du nº 8.2 montre que U est projectif. Le groupe $R = T \times U$ est donc bien projectif.

Passons maintenant au groupe A lui-même :

PROPOSITION 4. *Le groupe* X *est l'enveloppe projective de* A. *Le noyau* S *de* $X \to A$ *est isomorphe à* $T \times U \times \pi_1(A)$, *et la suite exacte*

$$0 \to S \to X \to A \to 0$$

est une résolution projective de longueur 1 *de* A.

Puisque $\overline{A}$ est un revêtement de A, c'est une extension essentielle de A, et l'application composée $X \to \overline{A} \to A$ fait de X une extension essentielle de A; comme X est projectif, c'est donc l'enveloppe projective de A. On a $S/R = \pi_1(A)$. D'après le cor. 3 à la prop. 8 du n° 6.5, le groupe $\pi_1(A)$ est produit de groupes isomorphes à $\mathbf{Z}_l$, donc est projectif dans $\mathscr{P}$ (n° 4.3, prop. 4). L'extension $S/R = \pi_1(A)$ est donc triviale, ce qui prouve que S est isomorphe à $R \times \pi_1(A) = T \times U \times \pi_1(A)$. Enfin, puisque $\pi_1(A)$ et R sont projectifs, il en est de même de S, c.q.f.d.

Remarque. Si l'on veut simplement démontrer que A possède une résolution projective de longueur 1, on n'a pas besoin des déterminations des Ext effectuées au n° 9.1. En effet, pour prouver que R est projectif, on s'est appuyé sur les deux faits suivants :

a) Le groupe $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_m)$ est divisible.

b) En caractéristique $\neq 0$, le groupe $\mathrm{Ext}(\overline{A}, G_a)$ est nul.

Or, par construction même de $\overline{A}$, les morphismes $n : \overline{A} \to \overline{A}$ sont des isomorphismes. Il en est donc de même des morphismes $n : \mathrm{Ext}(\overline{A}, B) \to \mathrm{Ext}(\overline{A}, B)$ pour tout groupe B, ce qui démontre à la fois *a)* et *b)* [dans le cas *b)* il faut remarquer en outre que $p : \mathrm{Ext}(\overline{A}, G_a) \to \mathrm{Ext}(\overline{A}, G_a)$ est nul].

§ 10. CONCLUSION

10.1. Dimension projective.

THÉORÈME 1. *Soit* $G \in \mathscr{P}$. *La dimension projective de* G (cf. n° 3.4) *est* $\leqslant 2$; *en caractéristique zéro, elle est même* $\leqslant 1$.

D'après le corollaire à la prop. 9 du n° 3.4, il suffit de vérifier le th. 1 lorsque G est un groupe *élémentaire*. Or, si G est un groupe fini, on a $dp(G) \leqslant 1$, cf. n° 4.4, cor. 2 à la prop. 5; si $G = G_m$, on a $dp(G) = 1$, cf. n° 7.5; si $G = G_a$, et si la caractéristique est zéro, on a $dp(G) = 0$, cf. n° 8.2, prop. 2; si $G = G_a$, et si la caractéristique est $\neq 0$, on a $dp(G) = 2$, cf. n° 8.6, cor. 4 au th. 2; enfin, si G est une variété abélienne, on a $dp(G) \leqslant 1$, cf. n° 9.2, prop. 4.

Lorsque A et B sont deux groupes élémentaires, on constate facilement que $\mathrm{Ext}^2(A, B) = 0$, sauf, en caractéristique $\neq 0$, lorsque $A = G_a$ et $B = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Remarque. Rosenlicht m'a signalé avoir obtenu un résultat analogue au th. 1, mais portant sur les $\mathrm{Ext}^i_a(A, B)$, où A et B sont des groupes *algébriques*, et où Ext^i_a est défini à la Yoneda, par des classes d'extensions multiples.

10.2. Groupes d'homotopie.

THÉORÈME 2. *On a* $\pi_i(G) = 0$ *pour tout* $i \geqslant 2$ *et tout* $G \in \mathscr{P}$.

Comme π_i commute aux limites projectives (n° 5.1, prop. 2), il suffit de démontrer le théorème lorsque G est quasi-algébrique, et même, par dévissage, lorsque G est *élémentaire*, ce qui a été fait dans les numéros précédents [pour G fini, cf. n° 5.3, prop. 4; pour $G=G_m$, cf. n° 6.5, cor. 2 à la prop. 8; pour $G=G_a$, cf. n° 8.2, prop. 2 et n° 8.6, cor. 2 au th. 2; pour G variété abélienne, cf. n° 6.5, cor. 3 à la prop. 8].

COROLLAIRE 1. *Pour toute suite exacte :*

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

de groupes proalgébriques, on a la suite exacte d'homotopie :

$$0\to\pi_1(A)\to\pi_1(B)\to\pi_1(C)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A)\to\pi_0(B)\to\pi_0(C)\to 0$$

Cela résulte du fait que $\pi_2(C)=0$.

COROLLAIRE 2. *Tout sous-groupe d'un groupe simplement connexe est simplement connexe.*

10.3. Le revêtement universel.

THÉORÈME 3. *Le foncteur « revêtement universel » est un foncteur exact.*

Cela résulte du th. 2 ci-dessus, compte tenu de la prop. 5 du n° 6.2.

Remarque. Comme me l'a signalé J. Tate, on peut utiliser le th. 3 pour donner une nouvelle interprétation de la suite exacte d'homotopie :

Soit $A\in\mathscr{P}$; soit K_A le complexe égal à A en dimension zéro, à $\overline{A}$ en dimension 1, nul en dimensions $\neq 0,1$, et où l'opérateur bord : $(K_A)_1\to(K_A)_0$ est égal au morphisme canonique $\overline{A}\to A$. Il est clair que l'on a :

$$H_0(K_A)=\pi_0(A)\qquad H_1(K_A)=\pi_1(A)$$

De plus, soit $0\to A\to B\to C\to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{P}$. D'après le th. 3, on a une suite exacte de complexes :

$$0\to K_A\to K_B\to K_C\to 0$$

La remarque du n° 6.2 montre alors que *la suite exacte d'homologie associée à cette suite exacte de complexes s'identifie à la suite exacte d'homotopie :*

$$0\to\pi_1(A)\to\pi_1(B)\to\pi_1(C)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A)\to\pi_0(B)\to\pi_0(C)\to 0$$

10.4. Revêtement universel et localisation.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie abélienne, et soit $\mathscr{D}$ une sous-catégorie de $\mathscr{C}$. Lorsque le couple $(\mathscr{C},\mathscr{D})$ vérifie certaines hypothèses qu'il est inutile de rappeler ici, Gabriel a montré que tout objet $M\in\mathscr{C}$ admet une « $\mathscr{D}$-enveloppe » $M_{\mathscr{D}}$ unique, dépendant fonctoriellement de M (cf. [6], chap. I, n° 4). Le foncteur $\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ ainsi obtenu est appelé le foncteur *localisation* (par rapport à $\mathscr{D}$); il se factorise en

$$\mathscr{C}\xrightarrow{D}\mathscr{C}/\mathscr{D}\xrightarrow{S}\mathscr{C}$$

où $D:\mathscr{C}\to\mathscr{C}/\mathscr{D}$ est le foncteur canonique, et où S est un foncteur que Gabriel appelle « foncteur section ». Lorsque le foncteur S (ou $S\circ D$, cela revient au même) est *exact*, le foncteur S définit une équivalence de la catégorie $\mathscr{C}/\mathscr{D}$ avec la sous-catégorie de $\mathscr{C}$ formée des objets « $\mathscr{D}$-fermés » (c'est-à-dire égaux à leur $\mathscr{D}$-enveloppe).

Il se trouve que les hypothèses *duales* de celles de Gabriel sont vérifiées par la catégorie $\mathscr{P}$ et sa sous-catégorie $\mathscr{P}_0$, ce qui permet d'appliquer au couple $(\mathscr{P}, \mathscr{P}_0)$ les résultats précédents (dualisés, bien entendu). Le foncteur localisation (ou mieux « co-localisation ») correspondant n'est autre que le *revêtement universel*, les objets $\mathscr{D}$-fermés étant les groupes connexes et simplement connexes. Compte tenu du th. 3, on obtient donc :

THÉORÈME 4. *Le foncteur « revêtement universel » définit par passage au quotient une équivalence de la catégorie quotient* $\mathscr{P}/\mathscr{P}_0$ *avec la catégorie* $\mathscr{S}$ *des groupes connexes et simplement connexes.*

Exemple. On a vu au nº 7.2 que la catégorie duale de la catégorie $\mathscr{M}$ des groupes de type multiplicatif est équivalente à celle des Λ-modules, Λ désignant un certain anneau de corps des fractions $\mathbf{Q}$. Le foncteur « revêtement universel » est transformé par cette équivalence en le foncteur « produit tensoriel avec $\mathbf{Q}$ », cf. nº 7.3, c'est-à-dire justement en un foncteur « localisation », au sens usuel de ce terme en algèbre commutative.

Remarque. On peut montrer que les catégories $\mathscr{P}/\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{S}$ sont de *dimension projective égale à* 1 (noter que, en caractéristique $\neq 0$, le groupe $\overline{\mathrm{G}_a}$ admet la résolution projective :

$$0 \to \overline{\mathrm{W}} \xrightarrow{p} \overline{\mathrm{W}} \to \overline{\mathrm{G}_a} \to 0$$

qui est de longueur 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Math. Series, n° 19, Princeton, 1956.

[2] C. Chevalley, Séminaire 1956-1958, *Classification des groupes de Lie algébriques.*

[3] C. Chevalley, Séminaire 1958, *Anneaux de Chow et applications.*

[4] B. Eckmann et A. Schopf, *Ueber injektive Moduln*, Archiv der Math., *4*, 1953, p. 75-78.

[5] P. Gabriel, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes*, Sém. Dubreil-Pisot, 1958-1959, n° 17.

[6] P. Gabriel, *La localisation dans les anneaux non commutatifs*, Sém. Dubreil-Pisot, 1959-1960, n° 2.

[7] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., *9*, 1957, p. 119-221 (*cité* T).

[8] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique* : II. *Le théorème d'existence en théorie formelle des modules*, Sém. Bourbaki, 1959-1960, n° 195.

[9] S. Lang, *Abelian varieties*, Interscience Tracts, n° 7, New York, 1959.

[10] M. Rosenlicht, *Some basic theorems on algebraic groups*, Amer. J. of Maths., *78*, 1956, p. 401-443.

[11] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Maths., *61*, 1955, p. 197-278 *(cité FAC)*.

[12] J.-P. Serre, *Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p*, Amer. J. of Maths., *80*, 1958, p. 715-739.

[13] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Act. Sci. Ind., n° 1264, Paris, Hermann, 1959.

[14] J.-P. Serre, *Corps locaux et isogénies*, Sém. Bourbaki, 1959, n° 185.

[15] E. Witt, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^m*, J. Crelle, *176*, 1936, p. 126-140.

LISTE DES PRINCIPALES CATÉGORIES

$\mathscr{A}$	:	catégorie des groupes algébriques (commutatifs), n° 1.2.
$\mathscr{C}_{\Lambda}$	:	— Λ-modules, n° 7.2.
$\mathscr{F}_{\Lambda}$	:	— — de type fini, n° 7.2.
$\mathscr{G}$	:	— groupes, n° 2.7.
$\mathscr{M}$	:	— — de type multiplicatif, n° 7.1.
$\mathfrak{P}$	:	— — proalgébriques, n° 2.1.
$\mathfrak{P}_0$	:	— — de dimension zéro, n° 4.1.
Pro($\mathfrak{Q}$)	:	— pro-objets de $\mathfrak{Q}$, n° 2.6.
$\mathfrak{Q}$	:	— groupes quasi-algébriques, n° 1.2.
$\mathfrak{Q}\mathscr{M}$	:	— — — de type multiplicatif, n° 7.1.
$\mathscr{S}$	:	— — connexes et simplement connexes, n° 6.1.
$\mathscr{T}$	:	— — de torsion, n° 4.2.
$\mathscr{U}$	:	— — unipotents, n° 8.1.

TABLE DES MATIÈRES

Reçu le 2 mai 1960.