H. G. Grassmann et l'introduction d'une nouvelle discipline mathématique : l'*Ausdehnungslehre*

Dominique Flament Maison des Sciences de l'Homme (Paris) ;
CNRS – Archives Poincaré

Résumé : Grassmann n'est pas le premier à *créer* un nouveau *calcul* : Möbius, Hamilton, Bellavitis, Cauchy, et bien d'autres l'ont précédé dans cette voie qui témoigne de toute l'importance des mutations subies par l'algèbre et de l'évolution des rapports complexes entretenus entre ce domaine et son « exacte contrepartie » la Géométrie euclidienne : à l'heure où s'élaborent les premières « structures » et les « morphismes », la géométrie euclidienne perd son statut de « critère de vérité » et d'« existence » des entités algébriques, notamment dénoncé par un prétendu « retour à la *rigueur* ».

L'introduction « philosophique », décriée par ses contemporains ne voyant là que « fausse philosophie », ne pouvait être impunément écartée : la « seconde » *Ausdehnungslehre* de 1862 (A_2) — pourtant proposée telle une nouvelle version rédigée conformément au style « souhaité » par son époque — ne conviendra pas plus à ses trop rares lecteurs. Tout lecteur averti reconnaît que A_2 ne peut être parfaitement entendu sans les nécessaires éclaircissements de A_1.

Trois points nous paraissent aujourd'hui significatifs :

– L'*Ausdehnungslehre* est une *science formelle* qui trouve sa place dans le système mathématique de Grassmann. Ce système « améliore » celui déjà classique (notamment connu du père de Grassmann) qui résulte du croisement entre les deux contrastes *fluants* « continu/discret » et « distinct/égal ».

Philosophia Scientiæ, cahier spécial 5, 2005, 81–141.

– L'*Ausdehnungslehre* admet la *géométrie* comme première « application » remarquable. La *géométrie* [Geometrie] (ou encore la *théorie de l'espace* [Raumlehre]) est devenue une *science réelle* (l'*espace* préexiste), elle ne peut donc légitimement figurer au sein de la *mathématique pure*.
– Une partie précède la séparation en les quatre branches précédentes de la mathématique pure (ou *théorie des formes*). La *théorie générale des formes* présente leurs lois communes, soit cette série de vérités qui, de la même manière se rapportent à toutes les branches des mathématiques et qui ne supposent donc que les concepts généraux d'égalité, de diversité, de liaison et de séparation.

Abstract: Grassmann is not the first to create a new *calculus*: Möbius, Hamilton, Bellavitis, Cauchy, and many others preceded him in this way which shows all the importance of the changes undergone by the algebra and the evolution of complex connections maintained between this field and its "exact counterpart" the Euclidean Geometry: meanwhile the first "structures" and "morphisms" are worked out, the Euclidean geometry loses its statute of "criterion of truth" and "existence" of the algebraic entities, particularly denounced by an alleged "return to rigour".

The "philosophical" introduction, denigrated by contemporaries seeing there only "false philosophy", could not be removed with complete impunity: the "second" *Ausdehnungslehre* published in 1862 (A_2) — however proposed as a new version written in accordance with the style "desired" by its time — will not be more convenient for its too few readers. Any informed reader recognizes that A_2 cannot be perfectly known without the necessary explanations of A_1.

Three observations appear significant to us:

– *Ausdehnungslehre* is a *formal science* which finds its place in the mathematical system of Grassmann. This system "improves" the already traditional one (in particular known of the father of Grassmann) resulting from the crossing between two changing Contrasts, "continuous/discrete" and "distinct/equal".

– *Ausdehnungslehre* admits *geometry* as first remarkable "application". *Geometry* [Geometrie] (or *theory of space* [Raumlehre]), became a *real science* (*space* preexists), cannot thus legitimately appear within *pure mathematics*.

– A part precedes the separation into the four branches of pure mathematics (or *theory of forms*). The *general theory of forms* presents their common laws, that is to say that series of truths which, in the same way refer to all branches mathematics and which thus supposes only the general concepts of equality, diversity, connection and separation.

I. Introduction

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) est aujourd'hui mieux connu ; son œuvre l'est beaucoup moins[1]. De nombreux auteurs nous renvoient à ses écrits, mais ceux-ci sont trop souvent utilisés pour assurer des assertions qui se révèlent hasardeuses, parfois beaucoup trop éloignées des intentions originales de leur prétendu concepteur.

L'œuvre de Grassmann est d'une rare richesse, très diversifiée et en même temps singulière : l'homme sera connu et célébré pour ses écrits en physique[2], pour ses recherches en linguistique[3], pour son activité de réformateur de la langue allemande, pour sa traduction du Rig Veda[4], ... De nombreux domaines sont impliqués, dont la cristallographie [Grassmann, H. G. 1839], l'électromagnétisme, la cinématique, la physiologie, la philologie, la botanique, la musique, ... Ajoutons à cela qu'il sera aussi un temps journaliste[5] et qu'il enseignera à la fois l'allemand[6], le latin [Grassmann, H. G. 1842b], les mathématiques, l'arithmétique pratique, la physique et la religion dans plusieurs écoles avant de devenir en 1852 professeur de mathématiques et de physique au Lycée de Stettin

[1] Cependant, outre les diverses rééditions des œuvres mathématiques et physiques (1969 et 1972), les multiples traductions commentées anglaises [Kannenberg 1995 & 2000] et française [Flament 1994] participent déjà grandement au changement de cette situation, de même que les ouvrages [Boi, L., Flament, D. & Salanskis, J.-M.], [Schubring 1996a] et [Flament 1997].

[2] Plusieurs de ses articles portent sur l'électrodynamique ([Grassmann, H. G. 1845] et [Grassmann, H. G. 1877b]), la théorie des couleurs (Voir [Grassmann, H. G. 1853] ; voir également [Grassmann, H. G. 1877e], l'acoustique, et l'optique élémentaire [Grassmann, H. G. 1854] ; en particulier sa *Vokaltheorie* (voir notamment [Grassmann 1877f]. Ses publications lui ouvriront les portes de la *Leopoldina* (fondée en 1652).

[3] [Grassmann, H. G., 1860], [Grassmann, H. G. 1862a], [Grassmann, H. G. 1860], (voir également l'article de K Elfering, [Elfering 1995], [Grassmann, H. G. 1867], [Grassmann, H. G. 1870a] et [Grassmann, H. G. 1877g]. Rappelons enfin que l'on parle encore aujourd'hui de « loi(s) de Grassmann ».

[4] [Grassmann, H. G. 1877a] (de nombreuses fois réédités, la dernière en 1999, on écrit aujourd'hui encore qu'il est : « even after more than 120 years of its publication in Leipzig in 1873, remained one of the most important tools for anyone who wishes to study the oldest Indian text in the original », *voir* `http ://www.vedamsbooks.com/no14539.htm`). En 1876, Grassmann sera élu membre de l'*American Oriental Society* (fondée en 1842).

[5] Il fonde avec son frère Robert le *Deutsche Wochenschrift für Staat, Kirche und Volksleben* (le 20 mai 1848). C'est une revue hebdomadaire, remplacée en juillet 1848 par le *Norddeutsche Zeitung*, dans laquelle Grassmann s'intéressera principalement aux problèmes de droit constitutionnel ; mais dont il se retirera après la restauration.

[6] Voir [Grassmann, H. G. 1831], [Grassmann, H. G. 1842a] (voir aussi l'article [Hültenschmidt,1996], [Grassmann, H. G. 1846b], [Grassmann, H. G. 1852b] et [Grassmann, H. G. 1870b].

(Szczecin), en succédant à son père Justus Grassmann (1779-1852) ; il le restera jusqu'à la fin de sa vie.

Il cherchera longtemps un poste universitaire qui l'aurait libéré de cette charge trop prenante et lui aurait permis de poursuivre plus activement ses recherches mathématiques ; mais en vain. Il écrivait à la fin de la préface de sa première *Ausdehnungslehre* :

> Je dois demander d'autant plus d'indulgence pour tout ce qui est mon travail dans cette science. Car je suis conscient, malgré tout l'effort porté sur sa présentation, de toute l'imperfection de cet ouvrage. [. . .] Mais convaincu qu'il n'y aura pas de totale satisfaction et que la présentation sera toujours déficitaire vis-à-vis de la simplicité, de la vérité, j'ai décidé de publier la forme qui me semblait actuellement la meilleure. Et j'espère l'indulgence plus particulièrement, parce que mon métier ne me laissait que très peu de temps suivi et ne me donnait pas la possibilité de faire des communications provenant de cette science ou du moins de matières semblables, et de gagner ainsi la fraîcheur vivante qui doit inspirer et vivifier l'ensemble, s'il doit apparaître comme un élément vivant de l'organisme du savoir. Même si j'aspire vivement à une activité professionnelle qui serait basée essentiellement sur ces communications scientifiques, je n'ai tout de même pas cru pouvoir renvoyer l'élaboration de cette science jusqu'à ce que j'aie atteint ce but, d'autant moins que je pouvais espérer que la publication de cette partie pourrait m'approcher de ce but.[7]

C'est le mathématicien autodidacte qui nous intéresse, plus encore l'introduction de son œuvre majeure, l'*Ausdehnungslehre*. Si l'on se réfère une nouvelle fois aux nombreux recours faits à celle-ci, à ses citations ou évocations depuis le dernier tiers du 19^{e} siècle jusqu'à ce jour, on doit convenir qu'il s'agit d'un événement mathématique fondamental et incontournable. Paradoxalement, ce n'est qu'au début des années 1870 que l'on commencera à lui reconnaître enfin une certaine valeur[8] : Alfred Clebsch, Felix Klein, Victor Schlegel[9] font partie de ceux-là, et à un

[7] [Flament 1994, VI-VII].

[8] Bien sûr, dans cette liste d'exemples significatifs, doit avant tout figurer August Ferdinand Möbius ; dès la parution de la première *Ausdehnungslehre* (1844) et par la suite il fera beaucoup pour Grassmann, mais sans réel succès. La première réception, limitée, est surtout due au livre de Hermann Hankel [Hankel 1867a].

[9] Clebsch écrit dans une note :

> Leider sind die schönen Arbeiten dieses höchst bedeutenden Geometers noch immer wenig gekannt; was wohl hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dass in der Darstellung Grassmanns diese geometrischen Resultate als Corollare viel allgemeinerer und sehr abstracter Untersuchungen auftreten, die in ihrer ungewöhnlichen Form dem Leser nicht unerhebliche Schwierigkeiten bereiten. [Clebsch 1872, 8]

Vers 1890, Felix Klein suggéra la réalisation d'une édition des œuvres mathématiques et physiques de Grassmann, ce qui sera fait entre 1894 et 1911 par l'Académie des moindre degré Sophus Lie[10] ; on peut aussi associer à cette toute première reconnaissance les noms de Arthur Cayley[11], James Joseph Sylvester, William K. Clifford[12] et Josiah Willard Gibbs, avant les travaux de Giuseppe Peano (1858-1932)[13], Cesare Burali-Forti (1861-1931)[14], de Élie Cartan(1869-1951)[15] et de bien d'autres[16].

La situation tant mathématique que philosophique de l'époque de Grassmann peut justifier, du moins expliquer, l'avis défavorable porté

Sciences de Saxe sous la direction de Friedrich Engel [Grassmann 1911]. Quant à Schlegel, voir [Schlegel 1875]. Sa bibliographie [Schlegel 1878] et son article [Schlegel 1896] auront une large influence. Au même titre signalons l'article de R. Sturm, E. Schröder, et I. Sohncke, ([Sturm, R.,Schröder, E. & Sohncke, I., 1879], avec une bibliographie de ses travaux).

[10] Sophus Lie fera à plusieurs reprises allusion aux « recherches profondes de Grassmann », notamment dans [Lie 1877]. Il rendra également visite à Grassmann au cours de l'automne 1872.

[11] [Cayley 1898]. En particulier, voir [Cayley 1898, XII, 459-489].

[12] [Clifford 1968, 266-276].

> I may, perhaps, therefore be permitted to express my profound admiration of that extraordinary work, and my conviction that its principles will exercise a vast influence upon the future of mathematical science. [Clifford 1968, 266]

[13] Voir [Peano 1888] et [Peano 1891].

[14] Voir [Burali-Forti 1897], où il écrit notamment (Préface, p. VIII) :

> Aujourd'hui la méthode de Grassmann n'a pas besoin d'être recommandée ; elle n'a besoin que d'être connue et appliquée par tout le monde : c'est par l'application *constante* à toutes les parties de la Mathématique qu'on peut comprendre la puissance et la simplicité de la méthode de Grassmann.

Voir également, [Burali-Forti,C. & Marcolongo, R., 1913]. En particulier, on lit p. VII :

> [. . .] nous avons prouvé combien le calcul des quaternions de Hamilton, bien qu'il soit parfait comme concept et comme notations (l'*original*, bien entendu), est en tous points insuffisant et, par conséquent, il y a lieu de l'exclure, à cause de la complication superflue de son algorithme ; nous avons montré aussi combien le calcul de Grassmann, sous la forme concrète donnée par Peano (et non sous sa forme originale), est au contraire nécessaire ; et enfin combien les autres systèmes, y compris celui de Gibbs, sont absolument à rejeter parce qu'ils sont logiquement défectueux dans les concepts fondamentaux et dans les notations.

[15] Voir [Cartan 1908] et [Cartan 1952].

[16] J. Crowe ([Crowe 1967] ; 1985, 258) relève que vers 1900 sur environ 1000 publications concernées par les vecteurs, 594 étaient « quaternioniques » et 217 « grassmaniennes ». Mais, ainsi que Jean Dieudonné le rappelle,

> c'est seulement après 1930, lorsque l'œuvre de Elie Cartan a commencé à être comprise, que celle de Grassmann a repris la place centrale qui lui revenait dans toutes les applications de l'algèbre linéaire et multilinéaire. [Dieudonné 1978, 1, 111]

dans le rapport de Ernst Kummer (1810-1893) à l'encontre des travaux mathématiques de Grassmann, lors de sa première candidature à un poste de professeur d'université en 1847.

II. Une « tragédie »[17] à reconsidérer ; données, observations.

Le contexte (*Zeitgeist*) mathématique, philosophique et scientifique est propice à une approche telle que celle de Grassmann : des prédécesseurs notables, contemporains ou non, et des choix qui s'inscrivent dans une tradition effective, font concevoir que Grassmann n'est pas un homme de « rupture » ou un savant totalement incompris qui transcenderait son époque, ainsi que nous invite naturellement à le croire une histoire récurrente ; c'est un modeste *Lehrer*[18], devenu *Professor*[19] de lycée, qui avance à sa manière des réponses à des problèmes et à des obstacles déjà existants et en partie déjà compris.

Existence algébrique

La *réalisation* géométrique de l'imaginaire est devenue au début du 19^e siècle une *représentation* géométrique. Cette recherche commencée quelques siècles plus tôt connaît un changement notable ; les mathématiciens qui œuvrent sont de « second plan », dont la réussite n'a pas le succès espéré auprès des maîtres (Gauss, Cauchy, Hamilton, ...).

Pour l'expliquer, on a parlé d'un « retour à la rigueur »[20] très largement suscité par les débordements du 18^e siècle. En fait, la géométrie

[17] Voir J Dieudonné [Dieudonné 1979], A. E.Heath [Heath 1917] et G Schubring [Schubring 1996a, ix-xxix].

[18] Sous le titre de *Lehrer*, à la *Friedrich-Wilhelms-Schule* de Stettin, il publie sa première *Ausdehnungslehre* de 1844 ; le 5 mai 1847 il deviendra *Oberlehrer* au *Vereinigstem Königlichen und Stadt-Gymnasium.*

[19] Il obtiendra en 1852 ce titre dont l'usage est tombé en désuétude sur proposition de E. Kummer, lorsqu'à la suite de la mort de son père (le 9 mars) il entre définitivement au lycée de Stettin. Ce changement lui permet d'avoir un niveau de rémunération plus considérable : c'est beaucoup plus qu'un salaire ordinaire de professeur de lycée, plus que la plupart des salaires des professeurs d'université !

[20] Cette expression n'est pas très flatteuse pour les mathématiques des 17^e et 18^e siècles (notamment pour celles qui sont sous l'emprise de l'"application de l'algèbre à la géométrie", ...). Selon Giorgio Israël [Israël 1981], par mouvement de la « rigueur » on entend le courant de la recherche mathématique au 19^e siècle qui débute avec le « programme d'arithmétisation de l'Analyse » de A. L. Cauchy et que l'œuvre de K. Weierstrass à développé par la suite. Avec raison, Israël réfute la thèse soutenue par une partie de l'historiographie des mathématiques (principalement inspirée

euclidienne y est aussi pour beaucoup : son exclusive perfection est remise en question et fait naturellement douter de son statut de critère d'existence, de critère de vérité, de l'objet algébrique ; qu'elle puisse parvenir à « donner à voir », à « révéler », ne saurait plus suffire à la « réalité » de l'entité algébrique.

Ce qu'il faudrait placer sous la bannière d'un « retour à la rigueur », c'est cette nécessité de critères d'existence de nature « algébrique » qui s'affirme et qui par exemple nous fait mieux entendre qu'un Cauchy puisse à la fois décrier les « quantités imaginaires », faire d'elles des « expressions symboliques », et créer un calcul des résidus qu'on ne saurait concevoir sans ces entités et leur représentation géométrique. Y prennent place également ces travaux par lesquels Hamilton cherche à « fonder » dans le « temps pur » une théorie des couples algébriques qui devait lui permettre de retrouver sans présupposés ni connaissance préalable les « quantités imaginaires » : il conçoit de la sorte l'existence d'une *Science du Temps Pur*, qu'il fait coïncider puis qu'il identifie à *l'Algèbre*. Bien au delà de la simple évocation d'une « suggesting science », ce recours à un *ordre en progrès* trouve sa justification dans l'échec reconnu de la référence à la *grandeur* et permet à Hamilton d'assurer l'*existence* de « nombres complexes » en les identifiant à des « couples algébriques ». S'inscrivent également là les interrogations de Gauss sur la « nature métaphysique de $\sqrt{-1}$ », ainsi que celles de beaucoup d'autres auteurs qu'il serait fastidieux de rappeler ici.

Nouveaux calculs

Au cours de cette période font donc leur apparition de nouveaux « calculs » ; c'est du moins ainsi qu'on perçoit après coup les représentations géométriques des quantités imaginaires. En effet, celles-ci révèlent des « segments » (C. Wessel[21]), des « lignes dirigées », quantités « primes »,

par l'axiomatique) qui établit un lien étroit de continuité entre le mouvement de la « rigueur » et le mouvement « axiomatique », le second étant présenté tel l'accomplissement du premier.

[21] Wessel écrit dans son « Essai » [Wessel 1897] :

> Il y a d'autres quantités que les segments, qui sont susceptibles de relations que je viens d'indiquer. Il ne serait pas inutile d'expliquer ces relations d'une manière générale et d'en faire entrer la notion générale dans la définition des opérations. Mais puisque l'avis des connaisseurs d'une part, de l'autre le cadre du présent Mémoire, et enfin la clarté de l'exposition, exigent qu'on n'embarrasse pas le lecteur de notions si abstraites, je me placerai seulement au point de vue géométrique. (p.7)

« médianes », « intermédianes », « droites de grandeur et de direction » (J. F. Français [Français 1814], J. R. Argand [Argand 1806], ...), « lignes de grandeur et de position » (J. Warren [Warren 1828], des « chemins », « quantités directives », « nombres directifs » (C. V. Mourey[22]), ... qui sont soumis aux règles antérieurement dévolues au seul « nombre »[23].

Grassmann n'est pas le premier, ni le seul, à *créer* un nouveau *calcul* : aux précédents calculs peuvent être associés ceux de nature différente et mieux connus de August Ferdinand Möbius (Calcul barycentrique, 1823-1827), Giusto Bellavitis (calcul des équipollences, 1832–), William Rowan Hamilton (couples algébriques, triplets, n-uplets, 1830-35 ; quaternions, 1843- ; de même que sa *géométrie symbolique*[24], 1846-), Augustin-Louis Cauchy (équivalences algébriques, quantités géométriques, clefs algébriques 1844-1853), ..., qui témoignent de toute l'importance des mutations subies par l'algèbre et de l'évolution des rapports complexes entretenus entre ce domaine et son « exacte contrepartie »[25], la géométrie euclidienne.

Les efforts de Martin Ohm (1828-1829)[26] qui relèvent d'une première ébauche d'axiomatisation[27], ainsi que les travaux de l'*Ecole algébrique anglaise*[28] sur les différentes versions de l'*algèbre symbolique*, *l'algèbre technique*, l'*algèbre logique*, l'*algèbre arithmétique*, sur les *algèbres double*,

[22] Voir [Mourey 1861] :

> [...] avec un nouveau système d'Algèbre que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie, auquel je ne m'attendais pas. *Ce ne sont cependant pas deux sciences : ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique et l'autre géométrique.* C'est une Algèbre émanée de la Géométrie, c'est une Géométrie généralisée et rendue algébrique. (Préface, p. VII)

[23] Dans cette nouvelle voie on relève toute l'importance du passage du « nombre », se référant strictement à la quantité et à la mesure, au « nombre » pris comme l'objet sur lequel porte le « calcul ».

[24] Dans ses articles « On Symbolical Geometry » [110], Hamilton développe notamment une algèbre sur les lignes dirigées, sans faire usage des coordonnées cartésiennes ou de la trigonométrie.

[25] Selon Hamilton dans une lettre datée du 2 juin 1835 et adressée à Francis Edgeworth (Voir R. P. Graves, [Graves 1891, II, 147].

[26] [Ohm 1822]. Voir H. N. Jahnke [Jahnke, H. N. 1987] et B. Bekemeier [Bekemeier 1987].

[27] Contemporain de Grassmann, il ne reconnaît pas comme lui la nécessité d'une théorie générale des formes ni le rôle qu'on lui donne. Contrairement à Grassmann, il marque une différence entre écrire pour des étudiants et écrire pour des mathématiciens.

[28] Voir L. Novy [Novy 1968], D. Clock [Clock 1964], E. Koppelman [Koppelman 1972] (En particulier, § 5 : « The Idea of Abstract Algebra in Great Britain », 217-).

et *triple*, sur les fondements de l'algèbre, menés par G. Peacock[29], A. De Morgan [De Morgan 1841a à 1849] ou G. Boole [Boole 1847 à 1854b], sont également à prendre ici en considération.

Géométrie synthétique — géométrie analytique

Ce que l'on a qualifié de « retour à la géométrie pure », le débat entre géométrie synthétique et géométrie analytique (cette dernière sera encore à la fin du 19^e siècle très largement identifiée à la méthode des coordonnées), constituent aussi un autre élément d'intérêt, proche des précédents aspects.

Au cours du 18^e siècle, l'introduction des coordonnées s'accompagnera d'un grand progrès en analyse, de même qu'en mécanique et en géométrie. Mais, à la fin de cette période, un nombre croissant de gens déplorent les calculs trop longs, souvent maladroits, imposés par la méthode des coordonnées pour démontrer des résultats géométriques de nature très simple.[30] C'est précisément cette insatisfaction analytique en géométrie qui précipitera le retour au « purement géométrique ». Cependant, en revenir à l'ancienne géométrie « hérissée de figures »[31] n'est pas envisageable :

> Ce défaut de la Géométrie ancienne fait un des avantages relatifs de la Géométrie analytique où il se trouve éludé de la manière la plus heureuse. On a dû se demander, après cela, s'il n'était point aussi, en Géométrie pure et spéculative, une manière de raisonner sans l'assistance continuelle de figures, dont un inconvénient réel [. . .] est tout au moins de fatiguer l'esprit et de ralentir la pensée.[32]

Le premier succès de la *Géométrie descriptive* [Monge 1799] de Gaspar Monge (1746-1818), qui fait bien plus que renouer avec la géométrie de perspective de ses prédécesseurs, est d'offrir une alternative : celle de libérer la « Géométrie » de l'emprise excessive de l'analyse. Michel Chasles retire de son enseignement que la Géométrie a pu « contribuer puissamment aux progrès de l'analyse » ; que Monge a pu « ... *faire de l'algèbre avec de la Géométrie* »[33] et qu'on lui doit ainsi qu'à ses

[29] [Peacock 1833 ; 1842 ; 1845]. Signalons encore la thèse de 3ème cycle soutenue le 26 juin 1985 par Mme M.-J. Durand à l'EHESS : *George Peacock (1791-1858) : La synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des réformes* (1830).

[30] Voir G. Bouligand et G. Rabaté [Bouligand, G. & Rabaté, G., 1926, 3].

[31] Voir [Chasles 1837]. À l'occasion d'un concours portant sur les nouvelles doctrines géométriques, ce travail avait été présenté en 1830 devant l'Académie des sciences de Bruxelles. Voir, p. 208

[32] [Chasles 1837, 208].

[33] [Chasles 1837, 210].

disciples un « style sans figures [...] propre à hâter les progrès de la Géométrie. »[34]

Grassmann, mais d'autres déjà avant lui l'avaient tenté, va au delà d'une présentation en parallèle des résultats synthétiques et de leurs pendants analytiques, sa recherche opère dans un seul « calcul » la fusion « intime » des approches synthétique et analytique (alors toujours présentées, sans doute avec une volontaire exagération, comme radicalement opposées). Dans la préface de sa première *Ausdehnungslehre*, il se place ouvertement dans ce dépassement :

> Avec la méthode habituelle à l'ordinaire, l'idée était complètement obscurcie par l'introduction de coordonnées arbitraires qui n'avaient rien à faire avec le sujet, et le calcul consistait en un développement mécanique de formules qui n'apportait rien à l'esprit et qui par conséquent le tuait. Ici en revanche, où l'idée, qui n'était plus troublée par quelque chose d'étranger, transparaissait en toute sa clarté à travers les formules, l'esprit était saisi, même lors de chaque développement de formules, par le développement progressif de l'idée. — Or, par ce succès me semblait justifié l'espoir d'avoir trouvé dans cette nouvelle Analyse, la seule méthode conforme à la nature, selon laquelle devait progresser toute application de la mathématique à la nature et selon laquelle il fallait également traiter la géométrie, si elle devait mener à des résultats généraux et fructueux.[***)] [Note [***)] En effet s'avéra bientôt comment, grâce à cette Analyse, la différence entre les traitements analytique et synthétique de la géométrie disparut totalement.[35]

Calcul direct

Entre analyse et synthèse s'était donc imposée une « troisième voie », celle de pouvoir traiter directement les objets géométriques sans recourir à des « coordonnées » jugées étrangères au problème posé, incongrues, mais également de se libérer des « entraves euclidiennes » (*dixit* J. Dieudonné).

On l'a vu, la chose est partiellement présente chez Monge, Möbius, Hamilton, ...; elle accompagne l'émergence de l'« intrinsèque » — ce qui est propre à l'objet géométrique, indifférent au système de coordonnées utilisé —, vient s'y inscrire naturellement l'idée d'« invariance » et, à un niveau plus abstrait non encore vraiment exprimé, l'idée d'invariance sous l'action d'un « groupe » donné. À ce développement se rattache déjà la considération de plus en plus significative du « qualitatif » (ou du « modal ») en géométrie.

[34] [Chasles 1837, 208].
[35] [Flament 1994, II].

Dans ce sens, une autre certitude est à reconsidérer à propos du calcul direct sur les objets géométriques : celle de la prétendue réalisation par Grassmann de *la Characteristica Universalia* de Leibniz. Le problème a été abordé par plusieurs de nos contemporains, et il a été en partie résolu par Javier Echeverria[36]. Bien que l'on ne puisse nier une influence indirecte de *l'Ecole combinatoire*[37], on n'a pas à l'heure actuelle de certitude sur la connaissance qu'avait ou non Grassmann de cette partie de l'œuvre de Leibniz[38] ; par la suite, elle trouvera sa justification plutôt comme faire valoir de l'*Analyse géométrique*[39] présentée à l'occasion d'un prix[40] que Grassmann remporta le 4 juillet 1846. Après quelques hésitations, à l'occasion du deuxième centenaire de la naissance de Leibniz, la *Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft* de Leipzig proposera comme sujet de « Reconstituer et développer le calcul géométrique inventé par Leibniz, ou instituer un calcul semblable ». Informé par Möbius son premier défenseur, Grassmann sera trop heureux de trouver en Leibniz un illustre prédécesseur pour assurer sa propre création qui, entre temps, avait déjà beaucoup concédé au style en vogue : son *Ausdehnungslehre*, nouvelle discipline mathématique dont la première application est la « théorie de l'espace » (*Raumlehre*), avait déjà été ramenée à un plus modeste « calcul géométrique »[41].

En se reportant à la lettre de Leibniz du 8 septembre 1679 adressée à Huygens, et aux « Anmerkungen zur geometrischen Analyse »[42], on se convainc que l'*Analyse géométrique* de Grassmann n'est pas vraiment la *Caractéristique* imaginée par Leibniz qui devait permettre de

> faire en caractéres, qui ne seront que des lettres de l'alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et meme avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny

[36] [Echeverría 1979] Voir également, [Couturat 1969].

[37] Voir dans cet ouvrage, Ph. Séguin, « La recherche d'un fondement absolu des mathématiques par l'Ecole combinatoire de C. F. Hindenburg (1741-1808) »

[38] Voir [Huygens 1833, I, 7-22] pour la correspondance avec Leibniz (dont la fameuse lettre de Leibniz du 8 septembre 1679), et [Huygens 1833, II, 6-13] pour l'*Essai* de Leibniz. Echeverría est convaincu que Grassmann ignorait le contenu de l'Essai de Leibniz ; il écrit à ce propos que Grassmann est « surpris de trouver, avec presque deux siècles d'avance, un si génial précurseur de ses propres conceptions géométriques » [Echeverría 1979, 224].

[39] [Grassmann 1847].

[40] Annoncé dans le *Leipziger Zeitung*, le 9 mars 1844, p. 977.

[41] Les exigences de clarté de son éditeur, qui lui demandera une présentation de son ouvrage de 1844 (voir [62], puis la volonté de mieux faire passer sa nouvelle théorie, y seront sans doute pour beaucoup.

[42] Voir [Grassmann, H. G, 1911, I, 1, 415-420].

> de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'on se voudroit faire l'interpretation des caractères.
>
> On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par exemple des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leurs pensées ou expériences à la postérité, ce qui ne se scauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures.

Bien sûr, l'*Analyse géométrique* de Grassmann, simple partie de son *Ausdehnungslehre*, n'est pas étrangère à la *Caractéristique* de Leibniz ; elle vise comme elle à « donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse », mais elle n'est pas encore en mesure de — et loin de l'être — « représenter à l'esprit et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui dépend de l'imagination. »

L'influence croisée d'un père et d'un frère

L'œuvre de Hermann, et plus précisément la partie qui nous intéresse ici, ont été très largement influencées par les travaux de Justus et Robert Grassmann. Les réflexions communes, tant mathématiques que philosophiques sont nombreuses[43], elles trouvent un aboutissement dans l'*Ausdehnungslehre* de 1844. Au cours de ces dernières années, plusieurs auteurs ont fait porter leurs efforts sur cette influence de Justus et Robert : c'est le cas de A. C. Lewis [Lewis 1981], M. Otte [Otte 1989], M.-L. Heuser [Heuser 1996], E. Scholz [Scholz 1996], M. Radu[44], P. Cantù [Cantù 2003] et de G. Schubring [Schubring 1996b].

Robert Grassmann (1815-1901)

On savait déjà par Hermann lui-même que son frère Robert avait pris une part active dans ses travaux, mais il ne décrit rien ou presque de leur

[43] À cet égard, parmi les écrits de Justus, on peut plus particulièrement signaler [Grassmann, J. 1817 ; 1824 ; 1829 ; 1835]. Sans oublier bien sûr [Grassmann, J. 1827], sur lequel nous reviendrons plus loin.

[44] Un de ses thèmes de recherche porte sur la transformation de l'axiomatique, depuis Kant jusqu'à Hilbert. Il insiste notamment sur les contributions de Justus, Hermann et Robert Grassmann. (Voir ses contributions [Radu 1998 ; 2000a ; 2000b]

collaboration. Ajoutons que les principaux biographes de Hermann n'en ont pas vraiment tenu compte.[45]

La situation a changé depuis les années 1990, notamment grâce aux précédents auteurs nommés. La contribution de Gert Schubring (1996) est particulièrement significative : il revient sur la trop exclusive influence de Schleiermacher[46], analysée par Albert C. Lewis [1977s], et la ramène à de plus justes proportions ; il aborde par le détail la collaboration entre Hermann et Robert, en essayant à la fois de justifier l'attribution du contenu philosophique de la première *Ausdehnungslehre* à ce dernier et de montrer que d'autres sources d'inspiration pour Hermann étaient concevables : c'est ainsi qu'il introduit les travaux du philosophe Jacob Friedrich Fries (1773-1843), « le seul philosophe contemporain qui a étudié de façon intensive et compétente les mathématiques et leurs analyse et interprétation philosophiques »[47], et qu'il rappelle l'existence des *Grundlinien des typischen Kalküls* (1823) de l'anglais, membre de l'académie de Saint-Petersbourg, Eduard Collins (1791-1840). Effectivement ces deux références notables figurent parmi celles qui conviennent à notre propos. Fries, profondément influencé par l'*école combinatoire* de Hindenburg, est le premier à développer dans son livre *Die mathematische Naturphilosophie*[48] (1822), une branche autonome des *mathématiques pures*[49], la *Syntaktik* ; elle est indépendante des autres branches et constitue leur fondement : « La *Syntactique* renferme l'abstraction la

[45] Le mathématicien Friedrich Engel (1861-1941), éditeur des *Mathematische und physikalische Werke* de Grassmann dans lesquels il a également inséré sa *Grassmanns Leben* [Grassmann, H. G. 1911, III, 2], ne fait guère plus que de modestes allusions au travail de Robert.

[46] A propos duquel Hermann écrivait en 1831 :

> Doch erst im letzten Jahre zog mich Schleiermacher ganz an; und obwohl ich damals schon mich mehr mit der Philologie beschäftigte, so erkannte ich doch nun erst, wie man von Schleiermacher für jede Wissenschaft lernen kann, weil er weniger Positives gibt, als er geschickt macht, eine jede Untersuchung von der rechten Seite anzugreifen und selbständig fortzuführen, und in der Stand setzt, das Positive selbst zu finden. — Zugleich hatten auch seine Ideen selbst mich angeregt, seine Predigten mein Gemüt erweckt, und dies konnte nicht ohne Einfluss auf meine Grundsätze und meine ganze Denkweise bleiben. (Cit. Engel, [Engel 1911, 22]

Entre 1841 et 1842, Hermann et Robert Grassmann travaillerons ensemble la *Dialektik. Aus Schleiermachers handschriftlichem Nachlasse* (éd. L. Jonas, Berlin, G. Reimer, 1839 ; voir [Schleiermacher 1839] ; ce travail a pour résultat une publication de Hermann [Grassmann 1842a], parue en mars 1842 à Stettin et mise au programme de l' *Ottoschule*.

[47] [Schubring 1996b, 65-66].

[48] Voir [Fries 1822].

[49] Dès 1811, dans son *System der Logik*, Fries concevait une « philosophie des mathématiques *pures* » et il s'était attaqué à l'étude des *Verknüpfungsformen*.

plus générale que l'on peut accomplir dans la connaissance mathématique. »[50]

> One can conclude that Fries's conception of syntactic not only constituted the first form of a mathematical logic but that also be seen as a model for H. Grassmann's philosophical introductory part of the A_1.[51]

Bien que convainc, le lien établi par Schubring entre Hermann Grassmann et Fries reste hypothétique : il s'appuie d'une part sur l'effectivité de la collaboration entre les deux frères dès la fin de l'année 1839, elle porte principalement sur les mathématiques[52] et s'étendra aux relations entre mathématiques et philosophie ; d'autre part, sur le fait qu'au moment où Hermann entreprend le développement mathématique de ses idées sur la théorie de l'extension, parallèlement Robert entreprenait à Greifswald, pour sa dissertation de philosophie, de « spécifier et critiquer les raisons de l'affirmation que les mathématiques ne sont pas une science philosophique »[53] ; sujet difficile confie Robert qu'il réduira à la réalisation d'une présentation historique des relations entre philosophie et mathématiques et à l'explication des positions de chaque philosophe, tout en y associant sa propre exposition de cette relation.[54] Schubring en déduit que dans le volumineux manuscrit de Robert, résultat aujourd'hui détruit de ce travail, il devait naturellement s'y trouver aussi une analyse des travaux de Fries.

Un autre élément pour conforter cette hypothèse est fourni par Justus Grassmann : dans son article de 1827, il se démarque explicitement de Fries. En revanche, il n'y a à l'heure actuelle rien qui prouve l'existence d'une influence du travail de E. Collins[55], contrairement à celle

[50] [Fries 1822,70] (note Schubring). Toujours selon Schubring, on relève dans l'ouvrage de Fries que les mathématiques sont « the complete system of the mathematical forms » ; « Among all abstraction processes, pure mathematics finds its ultimate success in detecting "the pure forms of the composition of things" for the mind [Fries 1822, 49-50]. » [Schubring 1996b, 66]

[51] [Schubring 1996b, 67].

[52] L'objet de leur première étude commune est la *Mécanique analytique* (1788) de Joseph Louis Lagrange (1736-1813). On remarquera qu'à la manière de Hermann, Robert à d'abord lu les écrits mathématiques de son père, il a poursuivi sa formation par des ouvrages que lui avait recommandé d'étudier J. A. Grunert (qui occupe alors une chaire de mathématiques à l'université de Greifswald), parmi ceux-ci figurait déjà la *Théorie des fonctions analytiques* (1797) de Lagrange. Ajoutons à cela, pour apprécier ses compétences mathématiques, que Grunert (devenu Rektor de l'université) accordera en 1840 à Robert Grassmann, après avoir réussi modestement ses examens, le plein droit d'enseigner les mathématiques et la physique. Rappelons que c'est en 1841 que Grunert fonde à Greifswald la revue *Archiv der Mathematik und Physik*.

[53] [Schubring 1996b, 64].

[54] Lettre à Grunert du 24 juillet 1840.

[55] Au rang de ces influences non avérées, on pourrait faire figurer aussi celle de

du *System der Mathematik* (1822-) de Martin Ohm (1828-1829), dont l'ouvrage figurait dans la maigre bibliothèque de Hermann[56].

Cependant, on ne peut nier que ce travail de Schubring ouvre bien de nouvelles perspectives pour l'analyse de l'*Ausdehnungslehre* : on sait par exemple que Robert Grassmann écrit que si l'invention de la théorie de l'extension est bien due à son frère Hermann, la première présentation « philosophique » de celle-ci lui doit beaucoup. On sait aussi qu'il participait activement dès 1847 avec son frère à une nouvelle version de celle-ci :

> In the year 1847, the brothers Hermann and Robert Grassmann joined forces in order to rigorously deduce the *Ausdehnungslehre*, independently of the geometry, as a self-standing branch of pure mathematics by development of form and to develop it to the limits of its domain of validity.The manuscript booklet of 132 pages which we then worked out is still in the possession of the author.[57]
>
> It falls to Robert Grassmann's share only to have worked towards the generality of the conception and towards the rigour of the form and to have contributed to the solution of the difficulties.[58]

Cette collaboration entre les frères se fera plus distante, mais ne cessera d'exister. Selon Schubring, cette évolution expliquerait en partie le changement de nature de la seconde *Ausdehnungslehre* (A_2) de 1862, et l'absence de considérations philosophiques. Cependant, le fait que Her-

---

Franz Benedict von Baader (1765-1841) : Gilles Châtelet voit [Châtelet 1993, 186-188], près de dix ans avant Hermann Grassmann, des allusions pénétrantes (notamment en ce qui concerne la signification de l'addition et ce qui deviendra avec Hermann le produit régressif) :

> la multiplication est une 'pénétration réciproque des facteurs' [Wechselseitiger Ingress der Factoren] ; elle produit une 'intériorisation' [Innerung], une 'intensification [Intensirung]. Inversement, la division produit une 'extériorisation'. [Châtelet 1993, 187].

[56] À côté d'ouvrages de Lagrange (*Théorie des fonctions et de la Mécanique analytique),* Poncelet (*Traité des propriétés projectives*), Moigno (*Calcul différentiel et intégral*), Verhulst (*Traité des fonctions elliptiques*), Magnus (*Aufgaben aus der analytischen Geometrie*), Steiner (*Systematische Entwicklung und die geometrischen Konstruktionen mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*) et Möbius (*Der barycentrische Calcul et Mechanik des Himmels*).

[57] [Grassmann, R., 1866]. Robert Grassmann parle longuement de cette collaboration dans la préface de la troisième partie : *Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von die extensiven Grössen. Der niedere Zweig der Synthesis.* Das Gebäude des Wissens. 23. Volume : *Die Formenlehre oder Mathematik, in strenger Formelentwicklung. Dritter Zweig* (Stettin : R. Grassmann 1895).

[58] [Grassmann, R., 1866, VI].

mann Grassmann ne dise rien de son frère dans cet ouvrage reste un problème.[59]

Justus Grassmann (1779-1852)

Nous ne reviendrons pas sur les travaux de Justus déjà évoqués précédemment. C'est dire qu'on laissera ici de côté une part des mathématiques enfouies dans la première *Ausdehnungslehre* (A_1) redevables à Justus, tout ce qui renvoie au produit géométrique, à l'idée de *combinaisons géométriques* (en cristallographie [Grassmann, J. 1829][60]), à l'engendrement et à l'analogie (deux concepts qui traversent les œuvres de Justus et Hermann), à la notion de dimension[61] et à ce que trouve Hermann dans les considérations de Justus qui lui ouvriront la voie pour penser la « géométrie » autrement, notamment d'envisager des « espaces » de « dimension » quelconque[62]. On ne reviendra pas non plus sur l'importance du concept récurrent de *construction* (synthèse) constamment à l'œuvre chez Justus et que reprendra à son compte Hermann, dans un premier temps pour concevoir son produit extérieur :

> C'est essentiellement le rectangle lui-même qui est le vrai produit géométrique [. . .].
>
> Dans sa signification la plus pure et la plus générale le concept de produit renvoie au résultat d'une construction [*Construktion*], qui vient de quelque chose de déjà engendré (construit) [*schon Erzeugten (Construirten)*], de la même façon que le dernier a été engendré à partir du générateur d'origine ; donc la multiplication est seulement une construction d'une puissance supérieure.[63]

Justus limitera par la suite la portée de ces propos, en disant que « le point est l'élément, la synthèse est le déplacement du point selon telle ou telle direction, le résultat, le chemin du point, la ligne . . . Si la surface est mise à la place du point, nait le corps géométrique, comme produit de trois facteurs », mais en ajoutant qu'on ne peut aller plus avant « puisque

[59] D'autant plus qu'il n'hésite pas à reconnaître que son *Lehrbuch* [Grassmann, H. G. 1861] est le résultat d'une étroite collaboration avec son frère Robert (Voir Préface). À propos de cet ouvrage voir également le texte de J.-C. Pont [Pont 2002].

[60] Voir aussi [Scholz 1996, 40-43]. Signalons en particulier que la notion d'extension du n-ième échelon d'un espace vectoriel linéaire [Gebiet], et les notions d'indépendance linéaire et de base, définies par Hermann Grassmann (A_1), correspondent à la combinatoire géométrique de Justus développée dans son texte de 1829.

[61] Voir [Johnson 1979, 116-118].

[62] Le pourquoi de cette extension est abordé par Albert C. Lewis [Lewis 1997].

[63] [Grassmann, J. 1824, 194].

l'espace ne contient que trois dimensions »[64], alors qu'en arithmétique « le nombre de facteurs n'est pas limité. »[65]

On laissera également de côté, en insistant sur leur importance, les rapprochements faits par A. C. Lewis[66] entre les déclarations de Justus et celles de Hermann ; ainsi, à titre d'illustration, on appréciera toute la justesse de la comparaison entre la déclaration de Justus :

> La même relation vaut aussi en arithmétique. Ici le générateur d'origine est l'unité qui pour le nombre doit être simplement considérée comme donnée. De là, en comptant (la construction arithmétique), résulte le nombre. Si le nombre ainsi produit est pris comme base pour un nouveau dénombrement [...] à la place de l'unité, alors le lien arithmétique avec la multiplication est fait ; il n'est par conséquent rien d'autre qu'un nombre d'échelon plus élevé, un nombre dont l'unité est aussi un nombre. Il pourrait donc être dit que le rectangle est une ligne (bornée) dans laquelle la place du point générateur est prise par une ligne (bornée).[67]

et la suivante, extraite de la première *Ausdehnungslehre* :

> La manière de cet engendrement résulte tout de suite, par analogie, de la manière dont l'extension du premier échelon fut engendrée de l'élément, en soumettant maintenant de la même façon tous les éléments d'un segment à un autre engendrement ; pour préciser, la simplicité de la grandeur, qui va être engendrée à nouveau, exige l'égalité de la manière d'engendrer pour tous les éléments, c-à-d. elle exige que tous les éléments de ce segment $\boldsymbol{a}$ décrivent un même segment $\boldsymbol{b}$. Le segment $\boldsymbol{a}$ se présente ici comme celui qui engendre, l'autre segment $\boldsymbol{b}$ comme la mesure de l'engendrement, et le résultat de l'engendrement est, si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des espèces différentes, une partie du système du deuxième échelon, déterminé par $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$, il doit alors être compris comme une extension du deuxième échelon.[68]

Le *Programmschrift* de 1827 [Grassmann, J. 1827] reste encore assez mal connu[69] ; Justus développe des idées qui sont là étroitement reliées au système philosophico-mathématique de H. G. Grassmann. Plusieurs des auteurs déjà cités précédemment ont largement éclairé les influences

---

[64] En revanche, Hermann Grassmann met en avant le geste qui lui fait capturer l'extension et ne pas sans tenir aux trois dimensions de l'espace ; ce saut dans l'abstraction est sans commune mesure avec celui antérieur et inspirateur de son père, celui de « construction » (engendrement).

[65] [Grassmann, J. 1835, 9-10].

[66] Voir par exemple son article [Lewis 1981].

[67] [Grassmann, J. 1824, 195].

[68] [Flament 1994, 35].

[69] Et ce en dépit de l'article de A.C.Lewis [Lewis 1981] et de la récente contribution très détaillée de M. Radu [Radu 1998].

reçues par Justus ; certaines ont été évoquées, provenant de l'*Ecole* combinatoire de Hindenburg[70] et plus généralement des *Naturphilosophen* (notamment J.G. Fichte (1762-1814) et F. W. J. Schelling (1775-1854)), la plupart se concentrent dans cet écrit et dans son ouvrage *Zur Mathematik und Naturkunde*[71].

Les idées de Hindenburg, en particulier celles de fonder les mathématiques sur une *analyse combinatoire*, sont bien reçues chez les mathématiciens au début du 19^e siècle ; elles laisseront des traces durables dans les programmes scolaires (jusqu'aux réformes entreprises par Felix Klein à la fin du 19^e siècle).

Cette croyance de Hindenburg, que les opérations sur les combinaisons pourraient avoir la même importance que celle sur les nombres, influencera Justus, puis Hermann, à faire de la théorie des combinaisons une discipline des *mathématiques pures* à l'égal de l'*arithmétique*. Père et fils, les Grassmann voulaient que toutes les branches des mathématiques aient des « analogies »[72] entre-elles, définies entre leurs relations ou opérations, d'où l'idée de concevoir l'existence d'une discipline dont le rôle sera celui de la future « théorie des formes ».

On le sait, une telle idée n'était pas nouvelle : elle est déjà présente chez Fries, directement inspirée par *l'Ecole combinatoire de* Hindenburg, elle-même est inscrite dans la tradition du *De arte combinatoria* de Leibniz ; on la retrouve donc, tout aussi naturellement, chez Justus qui a suivi à l'université de Halle entre 1799 et 1801, en plus des cours de théologie, les cours de mathématiques professés par Georg Simon Klügel (1739-1812), un promoteur convaincu des idées de Hindenburg. Durant cette courte période on assiste à un épanouissement considérable de la *Naturphilosophie*, qui sera également très bien reçue dans les universités

[70] C'est en 1776 que Hindenburg produit ses premiers articles de mathématiques (sur l'étude des séries) ; ses premiers écrits sur la combinatoire mathématique (probabilité, séries et formules pour les différentielles plus élevées) datent de 1778. En 1781 il est professeur de philosophie de l'Université de Leipzig (la même année il publie son célèbre *Novi systematis permutationum...* [Hindenburg 1781]. En 1785 (après une dissertation sur les pompes à eau) il devient professeur de physique de l'Université de Leipzig, un poste qu'il occupera jusqu'à la fin de sa vie.

[71] Voir [Grassmann, J. 1829] ; il s'agit du premier volume, le seul publié de son ouvrage *Zur Mathematik und Naturkunde*.

[72] C'est ainsi qu'ils les nomment. Justus usait déjà de l'analogie dans sa *Raumlehre* de 1817 (p.x-xi) ; il compare la géométrie avec la théorie des combinaisons [*Combinationslehre* « ou » *Verbindungslehre*] ; dans sa préface pour l'enseignant, il considère que cette dernière est la base la plus générale de son enseignement de la géométrie élémentaire. Selon Scholz [Scholz 1994], ses idées de base et la terminologie de son traité de 1829 peuvent être définitivement vues comme « rejetons » de l'école de *Naturphilosophie* “dynamiste” de Schelling, qui fut la force dominante de la pensée philosophique en Allemagne de 1790 à 1830.

allemandes[73].

Dans la réforme du système éducatif prussien, largement inspirée des idées de Pestalozzi et menée dès 1809 par Wilhelm von Humboldt (1767-1835)[74], Justus est un réformateur très actif ; c'est dans cet esprit que le texte de 1827 doit être interprété comme la poursuite de réflexions déjà très largement avancées dans de premiers écrits, notamment sa *Raumlehre*[75].

> Plus la science s'accroît, plus il est nécessaire d'organiser la masse de ses données, non seulement afin de faciliter l'entrée du débutant, mais plutôt, et plus important, d'élever l'information brute à une connaissance véritablement ordonnée, dans laquelle la position, les liaisons, la fonction de chaque partie est distinctement perçue par rapport au tout, et de la sorte ce dernier peut paraître tel un organisme, comme la manifestation d'un intellect infini à mesure qu'il devient clair pour nous dans une sphère particulière.[76]

Les remarques introductives de l'article de 1827 sont principalement destinées à la « science pure », et particulièrement aux mathématiques dont on constate l'accroissement considérable et le développement dans les directions les plus diverses. Justus redoute avant tout que l'excès du nombre de leurs présentations ne fasse courir aux mathématiques le danger de ne plus être que des « instruments aveugles », tout juste bons pour les applications. Le manque d'organisation est non seulement notable pour les relations que les disciplines mathématiques entretiennent entre elles, mais il existe également à l'intérieur de chacune de ces disciplines.

[73] Du moins de façon évidente en Thuringe, où, à l'université de Iéna, Fichte, Schelling, G. W. Hegel (1770-1831), ... enseignaient la philosophie. Halle, à quelques kilomètres de là, était complètement dans la zone d'influence de ces nouveaux systèmes philosophiques. Voir [Heuser 1996], qui, de plus, reconnaît vouloir montrer dans cet article que la « théorie combinatoire » de Justus Grassmann a quelque chose à voir avec la philosophie spéculative de l'école de pensée de Schelling [Heuser 1996, 57].

[74] Le 28 février 1809 il est nommé directeur du département du culte et de l'éducation au ministère de l'intérieur. Fichte (« Deduzierter Plan einer zu Berlin, zu errichtenden höheren Lehranstalt », 1807) et Schleiermacher (« Gelegentliche Gedanken über Universitäten in deutschem Sinn. Nebst einem Anhang über eine zu errichtende », 1808) contribuèrent au projet de création de l'université de Berlin, mais c'est à Wilhelm von Humboldt qu'en revient le mérite : devenue l'Université Humboldt, elle a été fondée par le roi de Prusse Friedrich Wilhelm suivant les plans de Humboldt (1809-10) ; Fichte en sera le premier recteur. Le projet éducatif élaboré par Humboldt n'aura pas en son temps de réel succès ; sa réforme de l'enseignement secondaire n'a pas vu le jour : « J'avais conçu un plan général qui englobait de la plus petite école à l'université et dans lequel tout était imbriqué [...] » (Voir [Freese 1953, 662-].). Voir également [Humboldt 1936].

[75] [Grassmann J. 1817] et, plus particulièrement, dans la préface de la deuxième partie (1824).

[76] [Grassmann, J. 1827, 1].

> Les mathématiques engendrent leurs concepts par une synthèse qui leur est caractéristique (que l'on appelle *Construction* au sens large) dans laquelle elles renoncent totalement au contenu de ceux qui sont liés. Mais leur objet n'est pas la forme de cette synthèse, mais le produit lui-même, et ainsi elle se distingue de la logique, laquelle présuppose en effet un contenu en général, mais dont elle s'abstrait, tandis que dans la construction mathématique résulte un contenu du fait qu'on considère ceux à unir comme vides.[77]

Une telle définition le conduira à énoncer que « *Les mathématiques sont la science de la synthèse selon des relations extérieures,c-à-d. comme égal ou comme inégal.* » [78]

Justus refuse de complètement justifier cette conception des mathématiques, parce que cela l'entraînerait trop loin ; il s'en tient à son application à la géométrie. De plus :

> Le fait que, une fois que nous avons enlevé le contenu de ceux à lier, nous puissions les considérer non pas uniquement comme égaux, mais également comme inégaux, et ensuite les lier, semble immédiatement être clair, puisque l'inégalité est donnée en même temps que l'égalité. Seulement, il ne faut pas penser ici à n'importe quelle inégalité qualitativement définie, mais seulement à une différence en général, dépourvue de contenu. Mais la liaison, considéré l'inégal, produit la théorie des combinaisons. Généralement, où les choses sont inégales, elles peuvent être utilisées comme éléments d'une combinaison et peuvent être liés en des complexes ; dans la théorie des combinaisons pures on considère les éléments comme inégaux mais sans aucun contenu défini.[79]

Une « heureuse circonstance » pour les mathématiques, dit-il, est que leur contenu est complètement indépendant de l'expression du concept, et qu'il est défini par le domaine lui-même[80]. Il n'y aucune définition des mathématiques qui, d'après lui, ne prenne en compte dans sa « totale pureté » la théorie des combinaisons, « isolée du mélange d'autres disciplines mathématiques » ; cependant « aucun mathématicien ne doute que c'est une partie parfaitement propre et intégrante des mathématiques pures, quoique la théorie pure des combinaisons ne suppose rien du tout de la grandeur en tant que telle » (p.3). Pire encore que le manque de définition satisfaisante pour les mathématiques, est le manque de distinctions précises entre les différentes disciplines qui les constituent :

> [. . .] l'arithmétique, la géométrie, la théorie des combinaisons ont toutes une partie complètement définie qui est complètement indépendante de tout

[77] [Grassmann J. 1827, 3] (voir [Radu 1998, 18].
[78] C'est lui qui souligne.
[79] [Grassmann, J. 1827, 4-5] (voir [Radu 1998, 19].
[80] [Grassmann, J. 1827, 3].

> le reste ; cette partie doit être précisément définissable, et il est nécessaire qu'elle soit définie pour que l'on ait une claire perception générale dans quel domaine on se trouve, où sont ses frontières, et où elles sont franchies. (p. 5)

L'approche méthodologique de Justus, lui permet ainsi non seulement d'inclure la théorie des combinaisons au sein des mathématiques pures, mais également de caractériser chacune de ses disciplines :

> Les mathématiques comme science de la synthèse selon les relations extérieures, c-à-d., comme égal et inégal, se décomposent d'après cette définition en théorie des grandeurs [Grössenlehre] et en théorie des combinaisons [Combinationslehre]. La synthèse des semblables nous donne la grandeur ; elle est *discrète si avec son engendrement d'être uni* (par cette synthèse résulte la grandeur) *est considéré comme donné* ; d'autre part elle est *continue si ce qui est à unir est seulement produit par la synthèse elle-même.* Les mathématiques des grandeurs continues sont la géométrie, non seulement parce que des grandeurs spatiales peuvent seulement être produites en tant que grandeurs continues, puisqu'il est clair que la même chose est vraie aussi bien des grandeurs temporelles que des grandeurs intensives ; c'est plutôt par ce qu'elle inclut déjà toutes les autres et se prolonge bien au delà d'elles. (p. 5-6)

Cependant, cette approche n'a pas raison de toutes les difficultés, le système n'est pas entièrement satisfaisant pour Justus qui reconnaît que « la combinaison ne se décompose en discret et continu de la même manière que la grandeur », que « les combinaisons sont essentiellement discrètes » (p. 6). Ce faisant, la caractérisation disciplinaire des mathématiques pures selon la division

égal	distinct
discret	continu

est défectueuse, dans la mesure où elle met en évidence la possibilité d'une quatrième discipline résultant des synthèses « continu » et « inégal » ; une quatrième discipline que Justus n'envisage pas, et ne peut envisager. De plus, il observe la part d'« arbitraire » de son approche : selon que l'on divise les mathématiques en « théorie des grandeurs » et en « théorie des combinaisons », où la première se partage en arithmétique et en géométrie, ou que l'on divise les mathématiques en « mathématiques discrètes » et « mathématiques continues », « où la théorie des combinaisons apparaît alors comme une subdivision des mathématiques discrètes. » (p. 4) Cependant, dans l'un ou l'autre cas, en résulte une classification des disciplines mathématiques assez satisfaisante. De plus, ce qui semble essentiel pour Justus, dans l'une ou l'autre division la « théorie des combinaisons » est sur un pied d'égalité avec l'« arithmétique ».

Dans une longue note pour sa défense, il écrit que

> La théorie des combinaisons est toujours dans sa petite enfance, comme si en arithmétique on n'avait pas eu d'autre procédé que l'addition. [. . .] Mais le jour viendra où la bellefille apparaîtra dans sa beauté dévoilée, et sera reconnue, et alors qu'on ne lui demandait rien, qu'on ne lui assignait aucun devoir, de son innocente présence elle jettera ses rayons sur toutes les sciences. [. . .]
>
> Je suis convaincu qu'un jour la théorie des combinaisons sera pour l'histoire naturelle et la chimie ce que la théorie des grandeurs est pour la physique. (p. 6)

Un bilan contrasté

On peut comprendre, à partir de ces quelques éléments épars extraits des écrits de Justus, que s'il y a bien eu une influence directe et notable du système proposé par Justus sur celui de son fils Hermann, il ne saurait être question de réduire ce dernier au précédent ; de même qu'il serait excessif de dire que Hermann Grassmann « complète » le système de Justus. L'approche de Hermann est certes parente de celle de Justus, mais s'en distingue fortement. Ainsi, par exemple, on pourra observer que :

- Justus et Hermann ne considérent pas du tout de la même manière les « oppositions » continu-discret, égal-distinct ;
- la géométrie n'a pas le même rôle ; dans le système de Hermann, elle disparaît des mathématiques pures pour ne plus figurer que comme application d'une science formelle, l'*Ausdehnungslehre*, qui sera précisément cette quatrième discipline que ne peut concevoir Justus ;
- la théorie des combinaisons est certes une branche des mathématiques pures figurant dans les deux systèmes, mais son statut ne fait plus problème dans le système de Hermann où les mathématiques pures sont identifiées à une *Formenlehre* ;
- il n'y a pas dans le système de Justus de place reconnue pour une « théorie générale des formes ».

Les évocations qui précèdent nous aident à mieux entendre l'attitude de Kummer, ou d'autres encore moins favorables. Elles nous permettent aussi de relativiser cette « tragédie » dénoncée par Dieudonné à la fin des années 1970 et reprise depuis sans plus de discernement par de nombreux auteurs.

Il est clair que le « message » de l'œuvre magistrale de Grassmann que l'histoire a retenu diffère en grande partie de celui attendu et reçu à son époque, comme le montrent les extraits suivants de l'« expertise » de Kummer (12 juin 1847) :

> Le premier ouvrage de M. Grassmann : la Science de la grandeur extensive ou l'*Ausdehnungslehre*, 1^{re} partie, s'annonce comme une nouvelle discipline mathématique qui veut prendre sa place entre l'analyse et la géométrie sans être un lien entre ces deux disciplines mathématiques, telle la géométrie analytique. L'idée de base pour ceci — savoir que dans la géométrie à la fois la grandeur et la position des formations spatiales doivent être prises en considération, et que se fait sentir le besoin de représenter la position non seulement comme d'habitude, à l'aide des grandeurs, mais aussi immédiatement au moyen de formules symboliques — était déjà auparavant souvent exprimée et était appliquée de plusieurs manières, sans que l'on ait trouvé nécessaire pour cela de créer une nouvelle discipline mathématique.
>
> La tentative d'élaborer un système de telles expressions symboliques — comme l'auteur des traités l'a fait — ne peut être *a priori* dite heureuse ou fausse [. . .]
>
> En ce qui concerne d'abord la forme ou la représentation du traité, alors il faut en général convenir d'un échec ; car bien que le style soit bon et fait montre d'esprit, il manque partout un regroupement convenable de la matière où les points principaux se distingueraient clairement des choses de moindre importance [. . .]
>
> Après un examen minutieux de plusieurs points, j'ai trouvé que ce traité offrait vraiment des points de vue nouveaux et intéressants, je peux donc faire un vrai éloge de la valeur scientifique du contenu bien que les méthodes de l'auteur n'aient pas encore soutenu l'épreuve la plus élevée et la plus sûre de leur valeur, savoir que des problèmes quelconques de géométrie, irrésolus jusqu'à présent auraient trouvé une solution satisfaisante.
>
> Le second traité du même auteur : *Analyse géométrique*. . . s'occupe presque des mêmes objets que celui cité plus haut, et doit être aussi jugé pareillement, à savoir que son contenu est digne d'être reconnu et sous une forme insuffisante.

Kummer retiendra défavorablement les « éclaircissements »[81] apportés par August Ferdinand Möbius (1790-1868) à ce dernier texte :

> Si on compare maintenant le travail de Grassmann au mémoire explicatif [. . .] de Möbius, alors la forme obscure et abstruse de Grassmann s'oppose de façon remarquable à la représentation simple et claire de Möbius.

[81] Voir [Möbius 1847].

Ce jugement, qui s'apparente à celui porté par un Maître sur un élève doué, est négatif : Kummer déconseillera au ministre d'accorder à Grassmann un poste de professeur d'université ; Grassmann manque de clarté et ses connaissances mathématiques sont trop restreintes à un seul domaine, de plus d'autres jeunes mathématiciens sont bien mieux préparés et plus méritants.

III. La « lineale[82] Ausdehnungslehre »

Bien que nous puissions parler ici de l'élaboration d'une « théorie de l'extension », on conservera l'expression *Ausdehnungslehre* pour évoquer la « discipline mathématique » proposée par Grassmann[83]. Ce choix est dicté par la « nouveauté » de celle-ci, mais surtout pour signaler que de la sorte on respecte l'approche particulière de l'auteur qui, outre le fait de créer des mots précis, souhaite épurer le plus possible la langue allemande de ses racines étrangères. Cette exigence, manifeste dans la première version de sa théorie (A_1), perdra toute sa rigueur dans la seconde version (A_2) ; à seul titre d'exemples, les expressions « Ausdehnungsgröße », « eingeordnet » et « eingewandtes Produkt » présentes dans A_1, seront remplacées respectivement dans A_2 par « extensive Größe », « incident » et « regressives Produkt ».

Selon Grassmann, les premiers éléments significatifs de l'ébauche d'une telle théorie remontent à 1832 :

> Comme je lisais l'extrait de votre mémoire sur les sommes et les différences géométriques publié dans les *Comptes rendus* [Tome 21 1845], je fus frappé par la ressemblance merveilleuse, qu'il y a entre les résultats, qui y

[82] C'est bien l'adjectif « lineale » qu'utilise Grassmann, pas « lineare ». Ce premier se rapporte au mot « Lineal » (la « règle »), et laisse supposer l'existence d'une seconde partie à venir qui se rapportera à la « rotation » et à l'angle. Ce renvoi aux modes de construction classiques, « à la règle » et « au compas », est largement occulté par les traductions anglaise et espagnole de cette œuvre de Grassmann dans lesquelles à été préféré l'adjectif « linéaire » ; à tort nous semble-t-il, à cause de sa connotation très spécifique actuelle. Aujourd'hui, le mot lineale dans ce sens précis est pratiquement tombé en désuétude.

[83] L'intitulé général de cette œuvre est *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert*, dont *Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert* constitue la première partie. Felix Müller [Müller 1900] propose la traduction la plus courante suivante pour « Ausdehnungslehre » (Grassmann 1844) : *algèbre extensive, théorie des grandeurs extensives.*

> sont communiqués et les découvertes faites par moi-même depuis l'année 1832 ;[. . .] J'ai conçu la première idée de la somme et de la différence géométriques de deux ou plusieurs lignes et du produit géométrique de deux ou trois lignes dans l'année nommée, idée en tout égard identique à celle qui est représentée dans l'extrait de votre mémoire.
>
> [. . .] C'est, aussi, vers 1832 que m'est venue l'idée d'étendre l'emploi des signes algébriques à ces opérations géométriques que l'on est dans le cas de faire en mécanique sur des lignes ou des aires, mais je n'ai rien publié avant 1845.[84]

On en retrouve des traces en 1839 dans son article [Grassmann, H. G. 1839], mais ces recherches seront surtout reprises à l'occasion de son étude sur la théorie des marées. En effet, dans sa *Theorie der Ebbe und Flut*[85] il utilise des méthodes et de nombreuses notions qui ne seront pleinement explicitées et justifiées que dans l'*Ausdehnungslehre* de 1844. La raison invoquée par Grassmann, de pas l'avoir fait dans de ce premier écrit, est qu'il s'agissait d'un *Prüfungsarbeit* : il ne pouvait donc être question de déborder les limites de ce devoir d'étudiant et d'exposer des résultats en faisant usage d'une méthode qui lui était propre, déduite de son *analyse géométrique* et selon des principes définis par lui seul. Bien qu'il sache son calcul beaucoup plus simple à appliquer et complètement indépendant des lois de l'analyse algébrique usuelle, il s'en remettra néanmoins à elles pour développer ses résultats. Dans la préface de A_1, il voit ce travail comme un pas décisif dans le développement de ses idées mathématiques, où son « vieux calcul géométrique » de 1832 est enfin devenu une analyse géométrique qui non seulement réduit considérablement l'exposé de la mécanique analytique de Lagrange[86], mais qui également permet de simplifier les résultats obtenus par Laplace sur la théorie des marées.

Dans sa lettre à Saint-Venant, il précise encore que

> Les idées de la somme et du produit géométriques des lignes ne suffisent pas pour soumettre toute la mécanique au calcul géométrique, et j'ai appliqué dans le traité cité [Theorie der Ebbe und Flut] deux autres idées non moins

[84]Lettre à Adhémar Barré de Saint-Venant datée du 18 avril 1847 (Voir [Engel 1911, 121-122].

[85]Ce texte déjà très riche et pratiquement inconnu, et dont l'analyse se révélerait très instructive, est rédigé dans un style plus en conformité avec celui des mathématiciens de son époque ; il ne sera édité qu'en 1911 (voir [Grassmann, H. G. III, 1, 3-238].

[86]« Grâce aux principes de cette nouvelle analyse, les développements de cet ouvrage se transformèrent d'une façon si simple que, souvent, le calcul était dix fois plus court qu'il ne l'avait été dans cette œuvre [. . .] » [Flament 1994, II]

> fécondes, ce sont l'idée du produit linéaire et celle de l'analyse des angles [. . .].[87]

Cette première réussite le fera se détourner de la théologie, à l'avantage des mathématiques.

À la suite de ces premiers travaux, s'imposera à lui la nécessité de définir rigoureusement une « nouvelle discipline mathématique », qui deviendra son *Ausdehnungslehre*.

Plusieurs textes font suite à cette première publication ; ils doivent être pris comme autant de tentatives de faire connaître sa théorie au travers d'applications et de clarifications. De nombreuses concessions les accompagnent, faites à l'encontre de premières exigences d'abstraction et de rigueur et à l'avantage d'un style plus communément accepté ; cependant, elles ne lui vaudront finalement pas plus de succès que son premier écrit qui fut presqu'unaniment négligé, tant de la part des mathématiciens que des philosophes (dont il redoutait beaucoup moins la critique) : ses attentes seront effectivement déçues ; le seul résultat sera une absence presque totale de réaction, notamment de la part de ceux qui seront sollicités.

Les raisons de ce rejet sont multiples ; l'introduction « philosophique » et la nature des mathématiques développées ne pouvaient à elles seules expliquer une aussi piètre réception de l'œuvre. On l'a vu précédemment, son époque déjà instruite dans ce sens, n'est pas sourde à ce genre de publication qui, à la réflexion, n'a pas un caractère aussi radicalement exceptionnel qu'il n'y paraît.

Les difficultés qui se greffent aux deux précédentes font sans doute mieux comprendre ce relatif insuccès : à savoir une surabondance de mots nouveaux, de définitions nouvelles, des choix souvent instables, mais plus encore une forme d'exposition « euclidienne », qualifiée de « rigoureusement scientifique », qui oblige le lecteur, page après page, à suivre pas à pas chaque étape de l'ouvrage pour en saisir complètement toute la légitimité et la justesse de son contenu ; une manière de faire qui condamne presque toute possibilité d'accéder directement aux seules parties qui suscitent le réel intérêt du lecteur. En procédant de la sorte, on perçoit sans doute mieux le caractère « naturel » des enchaînements et des propositions, et on peut même être éventuellement conduit à admettre l'idée qu'une telle théorie puisse faire l'objet d'un « enseignement élémentaire ». Cependant, on comprend en même temps que le « message » ainsi délivré par un mathématicien « autodidacte », dans un style

[87] Voir [Engel 1911, 121-122].

qui n'est pas celui convenu, exige beaucoup trop d'un lecteur potentiel qui ne voit pas *a priori* pourquoi il aurait à s'engager dans une telle épreuve, aux résultats incertains autres que ceux de pure simplification des acquis[88] !

On a donc bien affaire à une œuvre abstraite dont une part de la réelle originalité est aussi d'emblée là où on ne l'attend pas ; c'est une œuvre mal perçue. Les déclarations suivantes illustrent assez bien cette situation :

> [. . .] je vois bien que pour découvrir la quintessence propre de votre Ouvrage, il sera nécessaire de se familiariser d'abord avec votre terminologie caractéristique.[89]
>
> Avez-vous lu la Bizarre *Ausdehnungslehre* de Grassmann ? [. . .] il me semble qu'une fausse philosophie des mathématiques est à la base. Le caractère essentiel de la connaissance mathématique, l'intuition, en semble être complètement bannie. Une telle *Ausdehnungslehre* 'abstraite', telle qu'il l'a cherche, pourrait être développée uniquement à partir des concepts. Mais la source de la connaissance mathématique ne repose pas sur des concepts mais sur l'intuition.[90]

Malgré la parenté reconnue de part et d'autre, entre le calcul barycentrique et A_1, Möbius opposera un refus à la demande de compte rendu que lui fera Grassmann : bien que défenseur de l'œuvre de Grassmann, il ne souhaite pas se prononcer ; il reconnaît qu'après plusieurs tentatives, il s'en est tenu aux premières pages de l'ouvrage et à la « reconnaissance » de concepts et de généralisations vraiment prometteurs, mais il reste trop conscient de son manque de compétence sur le plan philosophique pour porter un jugement pertinent[91]. Il suggérera à Grassmann

[88] Kummer de même que Möbius dénoncent le manque d'applications nouvelles et pertinentes de cette théorie.

[89] Lettre de C. F. Gauss à H. G. Grassmann (Göttingen, 14 décembre 1844)

[90] Dans une lettre adressée le 3 septembre 1845 à A. F. Möbius par Ernst Friedrich Apelt (1812-1859), professeur de philosophie de l'université de Iéna.

[91] Cependant, dans son article « Die Graßmannsche Lehre von den Punktgrößen und den davon abhängigen Größenformen » [Möbius 1847] publié comme « erläuternden Abhandlung de la *Geometrische Analyse* [Grassmann, H. G. 1847] de Grassmann, il fait observer que les difficultés sont essentiellement dues au fait que

> der Verfasser seine neue geometrische Analysis auf eine Weise zu begründen sucht, welche- dem bisher bei mathematischen Betrachtungen gewohnten Gange ziemlich fern liegt, und dass er nach Analogieen mit arithmetischen Operationen Objecte als Grössen behandelt, die an sich keine Grössen sind, und von denen man sich zum Theil keine Vorstellung bilden kann. (p. 63)

Möbius a la volonté de clarifier la partie du texte de Grassmann qui s'étend du §14 à la fin, et de montrer « wie jene Scheingrössen als abgekürzte Ausdrücke wirklicher Grössen angesehen werden können. » (p. 63) de s'adresser à Drobisch, à la fois mathématicien et philosophe érudit, mais ce dernier ne dira mot. Baltzer confie à Möbius son incapacité à pénétrer les idées de Grassmann et être pris de « vertige »[92]. Grunert lui fera part de son incompétence en la matière, tant sur plan mathématique que sur le plan philosophique, mais l'invitera à écrire lui-même un résumé de sa théorie.[93]

On a déjà pu apprécier ce qu'écrivait Kummer dans son rapport de 1847 ; ajoutons qu'il critique également dans ce rapport l'habitude qu'a Grassmann d'inventer des mots nouveaux : la lecture est ainsi rendue difficile, et on peut donc s'attendre à ce que l'ouvrage soit ignoré des mathématiciens.

Dans une lettre plus tardive, datée du 14 juin 1853, Baltzer informera Möbius de l'existence de l'article de Cauchy sur les « clefs algébriques », lui fera observer leur ressemblance avec les grandeurs de Grassmann, et reviendra à nouveau sur la « représentation maudite » choisie par ce dernier pour exposer sa théorie[94].

Au début des années 1850, alors qu'il prépare en collaboration avec A. DeMorgan la préface de ses *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853), Hamilton prendra connaissance du travail de Grassmann ; à travers quelques lettres on peut suivre l'évolution de son appréciation :

> ... Grassmann's *Ausdehnungslehre*, a *very* original work, [...] — which work, if any, the Germans, if they think *me* worth noticing, will perhaps set up in rivalship with mine [...] (26 Octobre 1852)[95]
>
> I have recently been *reading* [...] more than a hundred pages of Grassmann's *Ausdehnungslehre*, with great admiration and interest. Previously I had only the most slight and general knowledge of the book, and thought that it would require me to learn to *smoke* in order to read it. If I could hope to be put in rivalship with Des Cartes on the one hand, and with Grassmann on the other, my scientific ambition would be fulfilled! But it is curious to see how narrowly, yet how completely, Grassmann failed to hit off the Quaternions. He published in 1844, a little later than myself, but with the most abvious and perfect independence. (28 Janvier 1853)[96]

[92] Lettre du 26 octobre 1846 : « ... es ist mir jetzt nicht möglich, in dessen Gedanken einzugehen, mir schwindelt der Kopf und wird himmelblau vor den Augen, wenn ich drin lese. » (Voir [Engel 1911, 102].

[93] Qui sera précisément son *Kurze Uebersicht* ... [Grassmann, H. G. 1845a].

[94] [Engel 1911, 231]. À propos de la « présentation » faite par Grassmann de la seconde *Ausdehnungslehre* (A_2), Engel parlera d'une « Kodifikation » ; il dira de la « forme euclidienne » encore présente qu'elle était une « erreur funeste » dont il ne parvenait pas à s'expliquer pourquoi Grassmann persistait à faire un tel choix.

[95] Lettre à A. De Morgan (Voir [Graves 1891, III, 424].

[96] Lettre à A. De Morgan (Voir [Graves 1891, III, 421].

> I am not quite so enthusiastic to-day about Grassmann as I was when I last wrote. But I have read through nearly all of what I could procure of his writings, including a subsequent commentary (in German) by Möbius. Grassmann is a great and most german genius; his view of *space* is at least as new and comprehensive as mine of *time*, [...] I must say that I should not fear the comparison. (2 Février 1853)[97]

Dans sa lettre datée du 9 février 1853[98], il donnera suite au mot d'esprit fait par De Morgan[99] et restreindra encore plus l'importance de la contribution de Grassmann :

> To the public I am likely to say but *little* at present about Grassmann; for I find that beyond the rule for adding lines, which he seems to have independently worked out, [...] we have scarcely a result in common, except one thing which is (in my view) important, namely, the interpretation of $B - A$, where A and B denote points, as the *directed line* AB. He comes to this, in his page 139 of the *Ausdehnungslehre*, after *long* preparations, and ostrich-stomach-needing iron previous doses.

Enfin, dans deux lettres plus tardives, Hamilton se rapporte encore à Grassmann ; la première est adressée le 30 septembre 1856 à son ami John Graves :

> [...] *Ausdehnungslehre* [...] that obscure, but highly original, work [...]. I know that you have the almost equally interesting, and to me far more pleasing book, the [*Der Barycentrische Calcul*] of Möbius...[100]

La seconde lettre, datée 23 juin 1857, est destinée à George Salmon :

> It is fair to say that (when too late) I found that Grassmann had independently (but perhaps not quite so soon — still is not a matter worth contesting) arrived at the same conception and notation, respecting the difference of two points (b-a), regarded as their *directed distance* — what he calls '*strecke*' and I '*vector*'. But this is merely a *preparation for quaternions*, and not as yet *in any degree* the Doctrine of the Quaternions themselves. I admire Möbius very much indeed, but he has (I think in his *Barycentric Calculus*, etc.) approached *less nearly* to the quaternions than Grassmann in his *Ausdehnungslehre*.[101]

---

[97] Lettre à A. De Morgan (Voir [Graves 1891, III, 442].

[98] Lettre à A. De Morgan (Voir [Graves 1891, III, 444].

[99] Lettre du 29 octobre 1852 (Voir [Graves 1891, III, 425].

[100] Voir [Graves 1891, III, 70].

[101] Voir [Graves 1891, III, 87]. Il est piquant de voir Hamilton, alors qu'il reconnaît avoir lu l'*Ausdehnungslehre*, identifier le « Strecke » de Grassmann à son « vector », plus encore à une « directed distance » entre deux points !

On peut s'étonner que Hamilton n'ait pas perçu toute la richesse de l'œuvre de Grassmann qui, en bien des points, surpasse considérablement la sienne ; le style « obscur » et la forme d'exposition « euclidienne » décriée ne peuvent à eux seuls justifier son attitude !

Plus tard, on retrouvera encore des avis voisins de ceux qui précèdent, mais cette fois ils sont beaucoup plus étonnants :

> Grassmann, comme s'il prenait à tâche de vous décourager, procède de l'abstrait au concret, de la convention au fait naturel. Il déploie un volume de puissants efforts pour établir un calcul en apparence arbitraire sur des symboles dénués de signification, et cela avec quel luxe de mots nouveaux ! Par miracle, ce calcul s'applique à la Géométrie.[102]
>
> La forme d'exposition choisie par Grassmann est une méprise qui doit être mise sur le compte de ses études antérieures en philosophie. C'est une erreur, [. . .] il le reconnut trop tard [. . .] Il aurait dû donner en première ligne des applications, des explications par des exemples, de nouveaux résultats auxquels conduit son calcul ; mais il ne se résolut à les indiquer que quelques années plus tard.[103]

Dès 1844, Grassmann est conscient des difficultés. La préface de A_1 est éloquente : non seulement il reconnaît les imperfections de son ouvrage, mais il sait aussi que son introduction « philosophique » pourra poser problème au lecteur mathématicien. Conciliant, il anticipe la réaction de ce lecteur en l'invitant à ne pas en tenir compte : elle peut très bien être sautée, dit-il, « sans nuire *beaucoup* à la compréhension de l'ensemble »[104]. Bien sûr, cette invitation n'est pas complètement légitime du côté de l'intelligibilité du texte, mais elle s'explique quand il rappelle la défiance que peut avoir le mathématicien à l'égard du philosophe qui s'occupe de son art :

> Par la nature des choses, elle [l'introduction] est plutôt philosophique, et si je l'ai isolée de l'ensemble de l'œuvre c'est pour ne pas effrayer tout de suite les mathématiciens par la forme philosophique.
>
> Il y a en effet toujours, et en partie pour cause, parmi les mathématiciens une certaine réticence à l'égard d'études philosophiques de sujets mathématiques et physiques. La plupart de ces études, notamment celles de Hegel et de son école, souffrent en fait d'un manque de clarté et d'un arbitraire qui détruisent le résultat de telles recherches. ([46], p. VI)

Cependant, Grassmann maintiendra cette approche en quelque sorte imposée par la nécessité d'attribuer à la « nouvelle science » sa place dans le domaine du savoir, au sein des mathématiques pures.

---

[102] [Carvallo 1892, 8-9]. Son appréciation porte essentiellement sur A_2 !

[103] [Jahnke, Eng. 1909, 419].

[104] [Flament 1994, VI]. C'est nous qui soulignons.

De fait, l'introduction « philosophique » dénoncée par ses contemporains, philosophes et mathématiciens, ne pouvait être impunément négligée ; en témoigne la « seconde » *Ausdehnungslehre* de 1862 (A_2) qui ne conviendra pas plus à ses rares lecteurs, alors qu'elle a été conçue comme une nouvelle version rédigée selon un style conforme à celui « souhaité » par son époque, et vidée de toute référence philosophique.

Cependant, l'intérêt croissant pour l'*Ausdehnungslehre* imposera la nécessité d'une réédition de A_1, qui entretemps avait été mise au pilon[105] ; elle paraîtra en 1878 : c'est une version pratiquement inchangée[106] de 1844.

Dans la nouvelle préface, Grassmann revient une fois de plus sur les difficultés de sa théorie et sur les raisons de son insuccès, cependant il reconnaît comme toujours justifiée la façon de la traiter, qui dit-il « plaira aux lecteurs ayant une formation plutôt philosophique certainement davantage que la présentation de *l'Ausdehnungslehre* de 1862, qui était plus adaptée aux mathématiciens ». Il espère cette fois que ceux-ci trouveront enfin le « calme » et le « loisir » pour entrer dans cette « construction cohérente. »

Tout lecteur averti reconnaîtra que A_2 ne peut être parfaitement entendu sans les nécessaires éclaircissements de A_1.

La *Mathématique pure* comme « théorie des formes »

L'ampleur de la tâche entreprise est considérable ; Grassmann entend y consacrer sa vie ([46], p. II.) :

> Pendant que je me mettais alors à retravailler les résultats ainsi obtenus dans leur ordre d'idées, depuis le début me proposant de ne faire appel à aucun théorème démontré dans n'importe quelle branche de la mathématique, il apparut que l'Analyse que j'avais découverte ne se situait pas seulement, comme il me semblait au début, dans le domaine de la géométrie ; mais j'aperçus bientôt que j'avais atteint là le terrain d'une nouvelle science, dont la géométrie elle-même n'est qu'une application particulière. [...] qu'il devait y avoir [...] une branche de la mathématique qui tire d'elle-même de façon purement abstraite des lois semblables comme celles

[105] OttoWigang écrit dans une lettre adressée à Preyer qui lui demandait un exemplaire de A_1 : « Comme l'œuvre ne s'écoulait presque pas du tout, en 1864, six cents exemplaires étaient mis au pilon ; le reste de quelques exemplaires est maintenant vendu, à l'exception d'un exemplaire conservé dans notre bibliothèque d'édition. ».

[106] « Zweite im Text unveränderte Auflage », augmentée de quelques appendices, dont trois annexes de circonstance : « Über das Verhältnis der nichteuklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre », « Über das eingewandte Produkt » et son « Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre » de 1845.

> qui, en géométrie, semblent reliées à l'espace. La possibilité de développer une telle branche purement abstraite de la mathématique était donnée par la nouvelle analyse ; mieux, cette analyse, lorsqu'elle fut développée indépendamment de tout théorème démontré ailleurs et purement dans l'abstraction, fut cette science elle-même. L'avantage essentiel obtenu par cette interprétation était, pour la forme, que tous les principes qui exprimaient les visions de l'espace disparaissaient complètement de cette façon et qu'ainsi le début devenait aussi évident que celui de l'arithmétique ; en revanche, mais pour le contenu, l'avantage était que la limitation à trois dimensions devenait caduque. [Flament 1994, III]

Une telle branche *abstraite*, selon Grassmann, n'existait pas encore ; sa première tâche sera donc de la définir. C'est essentiellement cette partie introductive de l'ouvrage qui se dressera tel un obstacle décourageant le lecteur ordinaire et qui, pour d'autres plus instruits, justifiera sa déconsidération. Singulièrement, on a là affaire à une des parties les plus riches du travail de Grassmann.

Sans chercher à entrer dans les détails de cette construction annoncée[107], on peut cependant en rappeler ici quelques traits saillants.

Première division

Grassmann commence par une « division » considérée comme la plus élevée [« die oberste Theilung »] de toutes les sciences, celle entre les *sciences réelles* et les *sciences formelles* :

> Les premières figurent l'être dans la pensée, un être lui-même indépendant de cette pensée, et leur vérité est donnée par la concordance de la pensée avec cet être ; les secondes, [. . .] ont pour objet ce qui est posé par la pensée elle-même, et leur vérité est donnée par la concordance entre eux des processus de pensée. [Flament 1994, VIII].

Ainsi, dans les sciences réelles, l'*être* existe par lui-même, en dehors de la pensée ; alors que dans les sciences formelles, il est *posé* par la pensée qui, à son tour, fait maintenant elle-même face, en tant qu'être, à un second acte de pensée ; la « vérité » repose, en particulier, « sur une concordance du second acte de pensée avec l'être posé par le premier acte, c'est-à-dire sur la concordance des deux actes de pensée. » (ibid. p. VIII)

> Ainsi, dans les sciences formelles, la démonstration ne dépasse pas la pensée, elle-même dans une autre sphère, mais reste purement dans la combinaison des divers actes de pensée.

[107] À ce propos, se reporter aux articles [Lewis 1977], [Flament 1992], [Otte 1989] et aux thèses [Radu 2000b] et [Cantù 2003].

Contrairement aux sciences réelles, les sciences formelles ne doivent pas partir d'*axiomes*, mais de *définitions*. Dans une première note[108], il rappelle que l'on a néanmoins introduit des axiomes dans les sciences formelles, en arithmétique par exemple, mais qu'il s'agit là d'un « abus » ; « l'absence d'axiomes dans les sciences formelles est nécessaire ». Dans le chapitre premier de son livre, il reviendra sur cette nécessité à l'heure d'introduire de façon « purement scientifique » la géométrie elle-même qui « manque toujours d'un début scientifique » et dont le fondement défectueux « menace de bouleverser l'édifice consacré depuis des millénaires » :

> Ces causes résident dans la conception insuffisante des axiomes géométriques. Il faut d'abord remarquer que souvent, au côté des vrais axiomes qui expriment des intuitions géométriques, le même nom est donné à des théorèmes tout-à-fait abstraits tels que : 'si deux grandeurs sont égales à une troisième, elles sont égales entre elles', qui ne méritent pas du tout ce nom si on entend une fois pour toutes par axiomes des vérités supposées.
>
> Euclide lui-même reste à l'abri du reproche de mélanger des axiomes avec des concepts supposés ; il comptait les premiers parmi ses postulats [...], tandis qu'il séparait les derniers en tant que concepts généraux [...] ; un procédé qui n'était déjà plus compris par ses commentateurs et qui aussi a été peu imité chez les nouveaux mathématiciens, au détriment de la science. [...] les disciplines abstraites des mathématiques ne connaissent pas du tout les axiomes [...]
>
> Dans la géométrie il ne reste donc comme axiomes que les vérités qui sont tirées de l'intuition de l'espace. Ces axiomes seront alors pris correctement s'ils donnent dans leur totalité l'intuition complète de l'espace, et si aucun axiome est posé qui ne contribuerait pas à compléter cette intuition. Ici apparaît maintenant la vraie cause du début défectueux de la géométrie dans sa présentation jusqu'à aujourd'hui ; à savoir, en partie des axiomes sont oubliés qui expriment des intuitions spatiales d'origine et qui doivent alors être après tacitement supposés lorsque leur application devient nécessaire, en partie des axiomes sont posés qui n'expriment pas une intuition fondamentale de l'espace et qui se révèlent donc, après une considération plus détaillée, superflus ; et dans tous les cas les axiomes donnent dans leur totalité l'impression d'un agrégat de phrases les plus claires qui sont ainsi arrangées qu'on peut démontrer d'une manière la plus commode possible. Les axiomes de la géométrie comme nous devons les supposer expriment par contre les propriétés fondamentales de l'espace comme celles-ci sont données à notre imagination à l'origine ; à savoir, ils expriment la simplicité et la restriction relative de l'espace. — La simplicité de l'espace est exprimée dans l'axiome :

[108] [Flament 1994, VIII, note 9].

> 'L'espace est constitué de la même manière en tous lieux et en toutes directions ; c-à-d. en tous lieux et en toutes directions les mêmes constructions peuvent être exécutées'.

> Cet axiome se divise déjà d'après son énoncé en deux axiomes dont l'un pose la possibilité du déplacement et l'autre la possibilité de la rotation, à savoir :
>
> 1) 'qu'une égalité est imaginable si le lieu est différent,'
> 2) 'qu'une égalité est imaginable si la direction est différente, et notamment aussi si les directions sont opposées.'
>
> En appelant égales et synchrones des constructions qui s'effectuent tout-à-fait de la même manière en des lieux différents, qui ne se distinguent donc que par rapport à leurs lieux, en appelant absolument égales des constructions qui ne se distinguent que par rapport à leurs lieux et leurs directions et surtout en appelant égales et allant en des sens opposés (ou tout simplement opposées) les constructions qui s'effectuent en des lieux différents de la même manière dans des directions opposées, et en gardant ces appellations aussi pour les résultats des constructions, nous pouvons exprimer d'une manière plus décisive ces deux axiomes, si nous faisons encore ressortir de la deuxième partie :
>
> 1) 'Ce qui s'effectue par des constructions égales et synchrones est lui-même égal et synchrone.'
> 2) 'Ce qui s'effectue par des constructions opposées est lui-même opposé.'
> 3) 'Ce qui s'effectue par des constructions absolument égales (même en des lieux différents et en des directions différentes) est lui-même absolument égal.'
>
> Les deux premiers de ces trois axiomes constituent la condition positive pour la partie de la géométrie qui correspond à la première partie de notre science. La restriction relative de l'espace est représentée par l'axiome :
>
> 'L'espace est un système du troisième échelon.'
>
> [Flament 1994, 23-24]

Ce dernier « axiome » ne peut être entendu sans avoir au préalable introduit *la science abstraite* dont la géométrie ne sera plus qu'une *forme concrète*, une simple *application.*

La géométrie [*Geometrie*], ou *théorie de l'espace* [*Raumlehre*], est une « application de la théorie des formes aux intuitions fondamentales de l'espace » (i.e. « quelque chose qui est déjà donné dans la nature »).

> La place de la géométrie vis-à-vis de la théorie des formes dépend du rapport de l'intuition de l'espace avec la pensée pure. Bien que nous disions qu'une telle intuition fait face à la pensée d'une manière indépendante, nous n'avons pourtant pas de la sorte affirmé que l'intuition de l'espace ne nous vient que par la contemplation des choses spatiales ; mais c'est une

> intuition fondamentale qui nous est donnée *a priori* par le fait que notre sens est ouvert au monde sensible et qui nous est originellement inhérente de la même manière que le corps l'est à l'âme.[109]

Seconde division

Elle est opérée au sein même des sciences formelles qui examinent soit « les lois *générales* de la pensée », on a alors affaire à la *dialectique* (logique[110]) ; soit « le *particulier* posé par la pensée », qui concerne la *mathématique pure* :

> Le contraste entre le général et le particulier exige alors le partage des sciences formelles en dialectique et mathématique. La première, pour sa recherche de l'unité en toute pensée, est une science philosophique ; en revanche, la mathématique suit une direction opposée en prenant pour particulier tout ce qui est pensé isolé. [Flament 1994, VIII]

Il résulte précisément de ce contraste une nouvelle définition proposée par Grassmann pour remplacer la précédente définition qui réduisait les mathématiques pures à n'être qu'une peu satisfaisante *Größenlehre* :

> [. . .] la mathématique pure est la science de l'être *particulier* en tant que *devenu* [*né*] par la pensée [« ... durch das Denken *gewordenen* »]. Nous appelons l'être particulier, pris dans ce sens, une forme de pensée ou tout simplement une *forme*. Ainsi, la mathématique pure est *théorie des formes* [*Formenlehre*]. [Flament 1994, VIII]

La « déduction » [« Ableitung »] du concept de l'*Ausdehnungslehre* qui fait immédiatement suite à la « déduction » du concept de la « mathématique pure » ; objet de nouvelles divisions :

> Tout ce qui est devenu par la pensée [. . .] peut l'avoir été de deux manières : soit par un *acte* simple *générateur* [« Akt des *Erzeugens* »], soit par un acte double de *pose* et de *liaison* [« Akt des *Setzens* und *Verknüpfens* »]. Ce qui est devenu de la première manière est la *forme continue* [« die *stetige Form* »] ou la *grandeur* au sens étroit ; ce qui est devenu de la seconde manière est la *forme discrète* ou *forme-liaison* [« die *Verküpfungs-Form* »]. [Flament 1994, IX]

---

[109] [Flament 1994, IX].

[110] Dans une note ajoutée à la réédition de 1878, on peut lire (trad. libre) : « la logique offre un côté mathématique pur, que l'on peut désigner comme logique formelle, et dont le contenu a été développé en collaboration avec mon frère Robert, et qui a été présenté par lui sous forme originale dans le second livre de la *Formenlehre*, Stettin 1872 » (1877) [Nouvelle édition en deux volumes, *Logik und Formenlehre*. Stettin, 1890 et 1891]

et

> Chaque particulier [. . .] devient tel par le concept du *distinct*, par lequel il est coordonné à un autre particulier, et par le concept d'*égal*, par lequel il est sub-ordonné avec d'autres particuliers à un général commun. Nous pouvons appeler *forme algébrique* ce qui est devenu par l'égal et *forme combinatoire* ce qui est devenu par le distinct. [Flament 1994, X]

Les quatre genres de formes et les branches associées de la théorie des formes résultent du croisement [« Durchkreuzung »] de ces deux « contrastes » [« Gegensatz »] classiques, « fluides », mouvants [« Fliessender »] : le *continu-discret*, se rapportant à la manière d'engendrer (« die Art der Erzeugung »), et l'*égal-distinct*, se rapportant aux éléments de l'engendrement (« die Elemente der Erzeugung »).

Forme discrete	**Théorie des combinaisons, des liaisons** Combinaison = forme combinatoire-discrète (signes différents (par exemple des lettres)) Rassemblement de ce qui est "posé" comme distinct
	Théorie des nombres nombre = forme algébrique-discrète (désigné par un seul signe (1 par exemple)) Rassemblement de ce qui est "posé" comme égal
Forme continue ou «grandeur»	**Théorie des fonctions, calcul intégral et différentiel** Grandeur intensive = forme algébrique-continue (on ne distingue pas les éléments par des signes particuliers) ce qui est devenu par la génération de l'égal
	Ausdehnungslehre Grandeur extensive ou Extension = forme combinatoire-continue ce qui est devenu par la génération du distinct

Dans le « système mathématique » de Grassmann, on aura donc les quatre branches suivantes :

DISCRET/DISTINCT (COMBINAISON)	**CONTINU/DISTINCT** (GRANDEUR EXTENSIVE)
DISTINCT/ÉGAL (NOMBRE)	**CONTINU/ÉGAL** (GRANDEUR INTENSIVE)

Cette dernière, dans sa « forme abstraite », est la branche la plus récente des mathématiques (« tandis que son image concrète (bien que restreinte), la théorie de l'espace, appartenait déjà au temps le plus ancien ») ; elle retiendra principalement l'attention de Grassmann, qui cependant aura d'abord soin de préciser que selon les principes exposés[111] l'observation vaut également pour la forme continue ou « grandeur » ; mais elle exigera plus car, dit-il, ordinairement il arrive que l'on « subordonne » [Unterordnung] la théorie des fonctions (le calcul différentiel et intégral) à la théorie des nombres prise comme « branche supérieure » : il est donc nécessaire d'expliquer l'*Ausdehnungslehre*, une « branche jusqu'à présent inconnue » dont la considération est rendue difficile par la donnée du concept d'écoulement continu.

> Comme l'unification ressort dans le nombre et comme la séparation de ce qui est pensé ensemble paraît dans la combinaison, ainsi ressort-il aussi dans la grandeur intensive l'unification des éléments qui [...] sont encore séparés conceptuellement, mais qui ne forment la grandeur intensive qu'en étant essentiellement égaux entre eux ; en revanche, dans la grandeur extensive il y a séparation des éléments qui sont [...] unis lorsqu'ils forment une grandeur, mais qui ne constituent cette grandeur que par leur mutuelle séparation. La grandeur intensive est alors, pour ainsi dire, le nombre fondu ; la grandeur extensive est la combinaison fondue. La dispersion des éléments est essentielle à la grandeur extensive ainsi que l'est la fixation de cette grandeur comme étant séparée ; l'élément générateur se présente ici comme

[111] Voir [Flament 1994, XI] :

> On n'a guère besoin d'une autre mise en évidence pour montrer que le concept de nombre est ainsi complètement épuisé et exactement circonscrit et ainsi en va-t-il de même du concept de combinaison. Et comme les contrastes desquels ces définitions ont résulté sont les plus simples et immédiatement donnés dans le concept de forme mathématique, la déduction susmentionnée semble ainsi suffisamment justifiée.

À la suite de cette remarque, Grassmann rappelle que son père, dix-sept ans plus tôt [Grassmann, J. 1827] avait déjà développé de manière « entièrement semblable » les concepts de « nombre » et de « combinaison ».

quelque chose qui se change, c-à-d. comme quelque chose qui traverse une diversité d'états, et l'ensemble de ces états différents constitue précisément le domaine de la grandeur d'extension. Cependant, pour la grandeur intensive c'est sa génération qui fournit une série continue d'états qui restent égaux entre eux et dont la quantité est précisément la grandeur intensive. [Flament 1994, XI-XII]

Il aura recours à la géométrie pour clarifier son propos :

Comme exemple pour la grandeur extensive, le meilleur est celui d'une ligne finie (Strecke) dont les éléments sont par essence dispersés et c'est précisément de la sorte qu'ils constituent la ligne comme extension. Comme exemple de grandeur intensive peut être pris un point muni d'une certaine force, parce qu'ici les éléments ne se défont pas mais ne se représentent que dans l'accroissement, ils forment donc un certain échelon de l'accroissement. [. . .] Aussi est clair comment toute grandeur réelle peut être regardée d'une manière double, comme intensive et extensive ; à savoir, la ligne est aussi regardée comme grandeur intensive si l'on fait abstraction de la manière dont ses éléments sont séparés et si l'on ne prend que la quantité des éléments, et, pareillement, le point muni d'une force peut être pensé comme grandeur extensive en imaginant la force sous la forme d'une ligne. [Flament 1994, XII]

L'Ausdehnungslehre

Succinctement, on peut lire que :

Le devenir continu, séparé en ses moments, paraît telle une formation continue [littéralement : tel un engendré continu] en fixant ce qui est déjà devenu [né, gewordenen]. Pour la forme d'extension [Ausdehnungsform] ce qui est en train de se former [de devenir] est chaque fois posé comme [un] distinct [« ein verschiedenes »] ; si maintenant nous ne fixons pas ce qui est chaque fois devenu, nous parvenons au concept de changement continu [« Begriffe der stetigen Aenderung »]. Nous appelons élément générateur [« erzeugende Element »] ce qui subit ce changement, et quelque soit l'état [Zustand] que prend dans son changement l'élément générateur, il est un élément de la forme continue [der stetigen Form]. Par conséquent, la forme d'extension est l'ensemble de tous les éléments en lesquels se transforme l'élément générateur par changement continu. [Flament 1994, XII-XIII]

Le distinct [das Verschiedene] doit se développer selon une loi pour que l'engendré [Erzeugniss] soit fixé [déterminé, ein bestimmtes]. Pour la forme simple [der einfachen Form], cette loi doit être la même pour tous les moments du devenir. La forme d'extension simple est alors la forme qui naît d'un changement de l'élément générateur suivant toujours la même loi ; nous appelons système [System] ou domaine [Gebiet] l'ensemble de tous

> les éléments qui peuvent être engendrés par la même loi... [Flament 1994, XIII]
>
> Si on applique deux lois différentes du changement [« zwei verschiedenene Gesetze der Aenderung »], alors l'ensemble des éléments qui peuvent être engendrés forme un système du deuxième échelon [« ein System zweiter Stufe »]. Les lois du changement, par lesquelles les éléments de ce système peuvent résulter les uns des autres, sont dépendantes des deux premières lois ; si on y ajoute encore une troisième loi indépendante, on arrive alors à un système du troisième échelon, et ainsi de suite [« und so fort »]. [Flament 1994, XIII]

Grassmann tiendra à chaque fois à ce que ses différents énoncés soient illustrés, pour ne pas dire clarifiés, par un recours systématique à la théorie de l'espace. Ainsi, à la suite du dernier énoncé, il écrit :

> La théorie de l'espace pourrait encore une fois servir d'exemple. Ici tous les éléments d'un plan sont engendrés à partir d'un seul élément par deux directions [Richtungen], l'élément générateur progressant à volonté dans les deux directions l'une après l'autre, et la totalité des points (éléments) ainsi engendrés font un [plan]. Le plan est alors le système du deuxième échelon ; une infinité de directions, qui dépendent des deux premières, y est contenue. Si on y ajoute une troisième direction indépendante, alors tout l'espace infini est engendré (comme système du troisième échelon) au moyen de ces trois directions ; et ici on ne peut pas aller au delà de trois directions indépendantes (lois du changement [Aenderungsgesetzen], tandis que dans l'*Ausdehnungslehre* pur le nombre de directions peut croître à l'infini. [Flament 1994, XIII]

Théorie Générale des Formes[112]

Cette partie, d'emblée la plus difficile à l'époque à cause de sa nouveauté et de son haut degré d'abstraction, doit précéder la séparation en les quatre branches qui viennent d'être définies. Elle présente les lois de liaison générales ; celles qui s'appliquent également à toutes les branches de la mathématique pure conçue comme théorie des formes. Dans cette partie, Grassmann s'occupe de formes vides de tout contenu, objets de liaisons [Verknüpfungen]. On n'a pas affaire ici à une description visant

[112] Dans l'édition de 1844, cette théorie générale est plus clairement distinguée que dans [Grassmann, H. G. 1911, I, 1] : elle débute la pagination en chiffres arabes et est insérée entre la préface (pagination en chiffres romains) et la première partie consacrée aux « grandeurs d'extension » [Die Ausdehniungsgrösse] (qui poursuit la pagination en chiffres arabes). Le présent rappel de cette théorie reprend en partie un précédent exposé publié dans un ouvrage aujourd'hui épuisé (voir [Boi, L., Flament, D. & Salanskis, J.-M., 1992, 215-219].

l'élaboration d'un système d'« axiomes »[113]. Ce que cherche Grassmann n'est pas un ensemble d'« énoncés non démontrés »[114] ; en fait dans cette partie sont symbolisés des principes de liaison, exprimés au moyen des concepts généraux d'égalité et différence, de liaison et séparation.

> Nous comprenons par théorie générale des formes la série de vérités qui, de la même manière se rapportent à toutes les branches des mathématiques et qui ne supposent donc que les concepts généraux d'égalité [Gleichheit], de diversité [Verschiedenheit], de liaison [Verknüpfung] et de séparation [Sonderung]. Ainsi, la théorie générale des formes devrait précéder toutes les branches particulières des mathématiques ; mais comme cette branche générale en tant que telle n'existe pas encore, [...] il ne nous reste alors qu'à la développer. [Flament 1994, 1]

Sa première préoccupation sera de sauver la simplicité de la relation la plus fondamentale pour lui, l'égalité. Ce concept, à cause de l'étroite relation qu'on lui fait maintenir avec la nature des objets considérés, paraît être sous la menace d'une complexité croissante. Pour lui, cette dépendance vis-à-vis de la nature des choses comparées n'est pas propre au concept d'égalité. L'égalité reste, ce qui change, ce sont les relations entre les objets considérés. Le concept d'égalité conservera toute sa simplicité et sa généralité, si il est déterminé comme suit :

> [...] égal est ce dont on peut toujours dire la même chose, ou, plus généralement, égal est ce qui peut être mutuellement substitué dans chaque jugement [i.e. proposition]. [...] Il est évident qu'on a dit ici à la fois que si deux formes sont égales à une troisième, elles le sont entre elles, et que ce qui est engendré de la même manière à partir de ce qui est égal est encore égal. [Flament 1994, 1]

Le second contraste qui aura besoin d'être reconsidéré est celui de séparation et de liaison ; il sera l'occasion de nouvelles définitions.

Soient deux formes a et b [Form, expression préférée à celle de Denkform]. Une fois liées, deviennent membres de la liaison ; la forme prise par cette dernière est son résultat.

Soit $\frown$ le signe général de la liaison. Le résultat de la liaison, $(a \frown b)$, est constitué d'un membre antécédent a, d'un membre conséquent b ; le choix ainsi fait des parenthèses est pour accentuer qu'on a affaire ici à quelque chose qui ne fait qu'un ; c-à-d. que la forme résultante ne doit pas être vue en tenant compte de ses membres. Il s'agit d'une forme qui à son tour peut être liée à une autre forme pour en donner une nouvelle, et ainsi de suite.

[113] Voir ce qui a été écrit plus haut.
[114] Voir [Lewis 1977].

Par simplification et par commodité Grassmann supprime les parenthèses lorsque celles-ci renferment en totalité une expression ou lorsqu'elles sont situées à la suite d'un autre signe d'ouverture de parenthèse [(] ; on écrira par exemple :

$$a \frown b \frown c \text{ au lieu de } ((a \frown b) \frown c)$$

Une espèce particulière de liaison est maintenant déterminée par ce qui est fixé comme résultat par la liaison ; c-à-d. sous quelles conditions et dans quelle étendue le résultat reste inchangé. Les seules modifications que l'on peut faire, sans toucher aux formes elles-mêmes qui sont liées, sont le changement de parenthèses et la réorganisation des membres.

Grassmann relevait que la liaison devait satisfaire les deux équations suivantes :

$$a \frown b = b \frown a \text{ (commutativité [« Vertauschbarkeit »]}$$

et

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c \quad \text{(associativité [« Vereinbarkeit »].}$$

Une fois ces équations posées pour un nombre quelconque de formes liées, alors on peut toujours ré-arranger les membres et omettre les parenthèses ; ce que Grassmann rassemblait dans les deux théorèmes suivants :

> Si une liaison est d'une espèce telle que pour trois membres la façon suivant laquelle les parenthèses sont disposées ne cause pas une réelle différence, alors cela est vrai pour un nombre quelconque de membres. [Flament 1994 2]

et

> Si une liaison est d'une espèce telle qu'on a le droit, sans modifier le résultat, de disposer à volonté les parenthèses pour trois membres et de modifier l'ordre pour deux membres, alors la position des parenthèses et l'ordre pour un nombre quelconque de membres sont aussi indifférents pour le résultat. [Flament 1994, 3]

Une telle liaison originaire est dite synthétique ; elle est définie comme simple si elle vérifie les conditions précédentes, c-à-d. si elle est à la fois associative et commutative. Il est impossible, dit-il, d'avoir une détermination plus détaillée de la liaison, à moins de revenir à la nature des formes liées et donc d'aborder une des branches de la mathématique pure.

Le procédé analytique consiste en la « recherche d'un membre de la liaison, la liaison et son autre membre étant donnés » [Flament 1994, 2] ; chaque liaison synthétique en possède donc deux.

La liaison analytique est désignée par $\smile$. Elle est telle que si la forme qui résulte est synthétiquement liée à l'une des deux formes prises comme membres originaires, elle a l'autre pour résultat ; c-à-d. : si a et b sont les deux formes de la liaison analytique, et que nous lions leur résultat, $(a \smile b)$, synthétiquement à b, on a alors par définition :

$$(a \smile b) \frown b = a.$$

Grassmann montre que $a \smile b \smile c$ désigne :
— la forme qui devient a si elle est synthétiquement liée avec b, puis avec c ;
— la forme qui, dans l'ordre inverse d'après ce qui précède, donne a si elle est synthétiquement liée avec c, puis avec b ;
— ou, enfin, la forme qui donne a si elle est synthétiquement liée à la forme $b \frown c$; soit

$$a \smile b \smile c = a \smile c \smile b = a \smile (b \frown c).$$

> [...] comme la même conclusion est vraie pour un nombre quelconque de membres, il s'ensuit également que l'ordre des membres qui contiennent des signes analytiques est aussi indifférent et que l'on a le droit d'inclure ces membres entres parenthèses si seulement on inverse les signes qui sont inclus dans les parenthèses. [Flament 1994, 3]

On a également :

$$a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \frown c$$

En effet, d'après la définition de la liaison analytique

$$a \smile (b \smile c) = a \smile (b \smile c) \smile c \frown c.$$

Or, d'après la loi démontrée précédemment, cette expression est égale à

$$a \smile (b \smile c \frown c) \frown c.$$

Cette forme, toujours d'après la définition de la liaison analytique, est égale à $a \smile b \frown c$.

Ces résultats sont réunis dans le théorème suivant :

> Si la liaison synthétique est simple, alors l'ordre dans lequel on lie synthétiquement ou analytiquement n'a pas d'importance pour le résultat ; aussi

> a-t-on le droit de mettre ou d'omettre les parenthèses après un signe synthétique si celles-ci ne renferment que des membres synthétiques ; cependant, après un signe analytique, on a toujours le droit de mettre ou d'omettre les parenthèses si seulement on inverse ici les signes entre parenthèses, c-à-d. si on change un signe analytique en un signe synthétique, et inversement. [Flament 1994, 4]

Une nouvelle fois, Grassmann fait observer qu'un tel résultat est le plus général que l'on peut obtenir, compte tenu des hypothèses faites : si l'on veut aller plus loin, on cesse alors d'être général, on définit quelque chose qui n'est pas commun à toutes les branches particulières des mathématiques.

Il faut cependant rajouter à ces hypothèses celle de l'unicité du résultat de la liaison analytique, afin de pouvoir omettre les parenthèses lorsqu'elles sont précédées d'un signe synthétique et renferment un signe analytique. D'où le théorème et la définition clarifiante suivants :

> Si la liaison synthétique est simple, et si la liaison analytique correspondante est unique, on peut mettre ou omettre à volonté les parenthèses après un signe synthétique. Nous appelons alors (si cette unicité à lieu de façon générale) addition la liaison synthétique simple, et soustraction la liaison analytique correspondante. [Flament 1994, 4]

Le procédé analytique permet l'introduction de nouvelles formes, la *forme indifférente* (« Indifferente Form » ; l'identité) et la *forme analytique.*

La forme indifférente résulte de la liaison analytique d'une forme quelconque, a, à elle-même, $a \smile a$, ou de deux formes égales. Cette forme est indépendante de la valeur de a.

Soient a et b deux formes quelconques, on a $a \smile a = b \smile b$. En effet, cette égalité résulte du fait que $b \smile b$ est la forme qui synthétiquement liée avec b donne b et de l'égalité $b \frown (a \smile a) = b \frown a \smile a = b$. Grassmann fixe la valeur unique de cette liaison en introduisant le signe $\backsim$; la forme $(\backsim\smile a)$ est désignée par $(\smile a)$ et appelée *forme analytique pure.*

Si la liaison synthétique était l'addition, cette forme s'appellerait alors la *forme négative* ; la forme indifférente s'appellerait *zéro.* De là s'ensuivent directement les équations

$$(a \frown\backsim) = (a \backsim\frown) = a, \quad \frown(\smile a) = \smile a \quad \text{et} \quad \smile(\smile a) = \frown a.$$

Dans une seconde étape, Grassmann introduit la considération de la relation entre deux types différents de liaison synthétique ; il suppose de plus que le concept de l'une des liaisons doit être déterminé par l'autre.

Ainsi qu'il l'a fait précédemment, il observe d'abord que la détermination conceptuelle dépend de la manière dont une expression, qui renferme deux espèces de liaison, peut être modifiée sans altérer son résultat final.

Soient $\frown$ et $\frown\!\!\!\!\frown$ les signes des deux liaisons ; et soit l'expression $(a \frown b) \frown\!\!\!\!\frown c$.

Si la deuxième liaison doit se rapporter d'une manière égale aux deux membres de la première, alors

> la modification la plus simple se présente comme étant celle qui soumet à la deuxième liaison chaque membre de la première et qui permet ensuite de prendre ces résultats particuliers comme membres de la première liaison. ([46], p. 6.)

Si une telle modification laisse inchangé le résultat final, on a alors :

$$(a \frown b) \frown\!\!\!\!\frown c = (a \frown\!\!\!\!\frown c) \frown (b \frown\!\!\!\!\frown c).$$

Cette « distributivité » caractérise la seconde liaison, qui est appelée la « liaison d'échelon plus élevé suivant » [« nächst höherer Stufe »].

Si la première liaison synthétique est simple et si sa liaison analytique correspondante est unique, la seconde liaison, qui satisfait la relation précédente est alors appelée « multiplication ». Ce faisant, on constate que, pour lui, toute opération distributive est une multiplication. Bien sûr, à ce second type de liaison synthétique devait correspondre une liaison analytique ; elle est appelée division dans le cas d'une liaison synthétique multiplicative.

La fin de l'exposé de Grassmann se trouve grandement facilitée par un retour aux signes usuels d'opération : ainsi, il reprend les expressions

$$(a+b)c = ac + bc \quad \text{et} \quad c(a+b) = ca + cb$$

pour désigner les relations qui établissent le concept de multiplication ; la loi correspondante pour la relation de la multiplication avec la soustraction, est exprimée par la relation :

$$(a-b)c = ac - bc.$$

D'où le théorème :

> Si les facteurs d'un produit sont articulés par l'addition et la soustraction, alors sans changement du résultat final on peut multiplier chaque terme d'un facteur par chaque terme de l'autre et lier les produits ainsi obtenus en les faisant précéder des signes d'addition et de soustraction suivant que les signes de leurs facteurs étaient ou non les mêmes. [Flament 1994, 7]

Enfin, il établit la loi du partage du dividende qui, que le résultat de la division soit unique ou non, est généralement vérifiée :

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}.$$

La multiplication n'étant pas en général supposée commutative, deux sortes de division doivent être considérées, selon que l'on recherche l'antécédent ou le conséquent de la liaison multiplicative. Ainsi, par exemple, $\frac{a+b}{\cdot c}$ désigne la forme qui, en tant qu'antécédent, donne $a + b$ lorsqu'elle est multipliée par c.

Grassmann a ainsi présenté toutes les lois qui expriment « la relation générale de la multiplication et de la division avec l'addition et la soustraction », tout en déterminant formellement le concept de multiplication, auquel correspond un concept réel, une fois donnée la nature des grandeurs qui seront liées.

Grassmann achève son aperçu de la théorie générale des formes en disant que « les lois générales de liaison présentées [. . .] suffisent en substance pour la représentation de notre science. . . ». Une façon de souligner une nouvelle fois que cette théorie, en dépit de sa nature et ainsi isolée de la préface et du reste de l'ouvrage, ne faisait pas totalement partie intégrante de cette introduction « philosophique » qui pouvait être sautée sans beaucoup nuire. Dans le cas contraire, on ne tarde pas à découvrir que les nombreux renvois qu'en fait Grassmann rendent difficile, voire impossible, toute perception de l'étonnante richesse de sa nouvelle science.

Cette approche abstraite, « purement scientifique », et la méthode philosophique qui l'accompagne, dont sa justification de la nécessaire considération n'est pas sans rappeler les exigences du pédagogue, ont ouvert à Grassmann la voie à de nombreuses idées de valeur, où le sens précis des concepts rencontrés au cours des pages précédentes (commutativité, associativité, distributivité, . . .) ne constitue que la part la plus modeste de sa contribution.

Après coup et malgré toute la prudence à laquelle invitaient nos propos introductifs, force est de constater qu'en 1844, Grassmann est un de ces très rares érudits qui parviennent à une profonde compréhension de la nature des mathématiques, dont l'œuvre foisonnante participe à l'ouverture d'un Nouveau Monde mathématique et nous interpelle plus que jamais aujourd'hui.

Bibliographie

Argand, J. R.

1806 *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, (2^e éd., Paris : Gauthier-Villars, 1874 ; nouveau tirage de la 2^e éd., Paris : A. Blanchard, 1971.

Bekemeier, B.

1987 *Martin Ohm (1792–1872) : Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform*, Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, *Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik*, 4, 1987.

Bell, E.T.

1945 *The Development of Mathematics*, New York — London, 1945.

Boi, L., Flament D., Salanskis, J.-M.

1992 *1830-1930 : a Century of Geometry*, Lectures Notes in Physics, Berlin/Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.

Boole, G.

1847 *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Cambridge : Macmillan, Barclay, and Macmillan / London : George Bell, 1847.

1848 The Calculus of Logic *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 3, 183–198.

1854a *An Investigation of Laws of Though, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London : Walton & Maberly, 1854.

1854b On a General Method in Analysis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year MDCCCXLIV*, 1, 225–282.

Bouligand, G. & Rabaté, G.

1926 *Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques et dynamiques de l'analyse*, Paris : Librairie Vuibert, 1926 (1re éd.) ; 1953 (6^e éd.).

Bourbaki, N.

1947 *Eléments de mathématique*, livre II, (Algèbre), chapitre II : Algèbre linéaire, *Actualités scientifiques et industrielles*, 1032-1236 ; (2^e éd. revue et augmentée de deux appendices, Paris : Hermann, 1953.

1948 *Eléments de mathématiques*, livre II (Algèbre), chapitre III : Algèbre multilinéaire", *Actualités scientifiques et industrielles*, 1044, Paris : Hermann.

BURALI-FORTI, C.

1897 *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris : Gauthier-Villars, 1897.

BURALI-FORTI, C. & MARCOLONGO, R.

1913 *Analyse vectorielle générale.*, II, *Applications à la mécanique et à la physique*, Pavie : Mattei.

BURAU, W. & SCRIBA, C.J.

1990 Grassmann, Hermann Günther, *Dictionary of Scientific Biography*, 192-199, New York, 1970-1990.

CANTÙ, P.

2003 *La Matematica da Scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'*Ausdehnungshlehre *di H. Graßmann* ; tesi di dottorato di Ricerca in Filosofia (Filosofia della Scienza), Università degli Studi di Genova, 2003.

CARTAN, E.

1952 *Œuvres complètes*, 6 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1952.

1908 Les nombres complexes. Exposé d'après l'article allemand de E. Study, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. 1, vol. I, fascicule 3, 5, 329-468.

1922 *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris : Hermann, 1922.

CARVALLO, M. E.

1892 La méthode de Grassmann, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3^{e} série, 8-37.

CASPARY, F.

1887 Über der Erzeugung algebraischer Raumkurven durch veranderliche Figuren, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 100, 405-412.

1889 Sur une méthode générale de la géométrie, qui forme le lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2^{e} série, 13, 202-240.

CAUCHY, A. L.

1974 *Œuvres complètes*, 27 vol. (2 séries), Paris : Gauthier-Villars, 1882-1974. (En particulier, voir : le vol. XII (1^{e} série, 1899), 439-445, le vol. XII (1^{e} série, 1900), 12-30 ; 46-63, et le vol. XIV (2^{e} série), 1938, 417-466).

1853 Sur les clefs algébriques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 36, 70-75, 129-136, 161-169.

Cayley, A.

1898 *Collected Mathematical Papers*, 13 vol., New-York : Cambridge Univ. Press, 1889-98.

Chaboud, M.

1996 Girard Desargues, bourgeois de Lyon, Mathématicien, Architecte, Irem de Lyon, Lyon : Aléas, 1996.

Chasles, M.

1837 *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles : M. Bayez, imprimeur de l'Académie royale, 1837 ; Sceaux : Editions Jacques Gabay, 1989.

Châtelet, G.

1992 Capture de l'Extension comme Dialectique Géométrique : Dimension et Puissance selon l'Ausdehnung de Grassmann, in [Boi, L., Flament, D., Salanskis, J.-M. 1992], 222-244.

1993 *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*, Paris : Vrin, 1993.

1994 Ambiguïté et engendrement des dimensions selon Grassmann ; balances dialectiques, in [Flament, D., Garma, S. & Navarro, 1994] 257-286.

Clock, D.

1964 *A New Concept of Algebra : 1825-1850*, Ph. D. dissertation ; Univ. Wisconsin, 1964.

Clebsch, A.

1872 Zum Gedächniss an Julius Plûcker, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 16.

Clifford, W. K.

1968 *Math. Papers*, London : Macmillan and Co., 1882 ; New York : Chelsea, 1968.

1878 Application of Grassmann's Extensive Algebra, *American Journal of Mathematics*, 1, 350-358.

Collins, J. V.

1899a An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VI, 10, 193-198 (October, 1899).

1899b An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VI, 11, 261-266 (November, 1899).

1899c An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VI, 12, 297-301 (December, 1899).

1900a An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VII, 2, 31-35 (February, 1900).

1900b An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VII, 6-7, 163-166 (June-July, 1900).

1900c An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VII, 8-9, 181-187 (August-September, 1900).

1900d An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VII, 10, 207-214 (October, 1900).

1900e An Elementary Exposition of Grassmann's 'Ausdehnungslehre', or Theory of Extension, *The American Mathematical Monthly*, VII, 11, 281-285 (November, 1900).

Couturat, L.

1969 *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1969.

Crowe, M. J.

1967 *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, New York : Dover Publications, Univ. of Notre Dame Press, Indiana, 1967 (rééd. 1985).

De Morgan, A.

1841a On the Foundation of Algebra, 1, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,* , VII, part. II, 173-188.

1841b On the Foundation of Algebra, 2, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,*, II, part. III, 267-300.

1844 On the Foundation of Algebra, 3, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,*, VIII, part. I, 139-143.

1847a On the Foundation of Algebra, 4, On the triple Algebra, *Trans. of the Camb. Philos. Soc.,*, VIII, part. III, 241-254.

1847b *Formal Logic*, London, 1847.

1849 *Trigonometry and double Algebra*, London, 1849.

Dhombres, J. & Sakarovitch, J.

1994 *Desargues en son temps*, Paris : A. Blanchard, 1994.

Dieudonné, J.

1978 *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, 2 vol., Paris : Hermann, 1978.

1979 The Tragedy of Grassmann [Séance du 19 février 1979 du *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, Ecole Normale Supérieure, *Philosophie et Mathématiques*, 65, Paris : I.R.E.M. Paris-Nord, Université Paris XIII, *Linear and Multilinear Algebra* 8, 1, 1-14, 1979/80.

Dixon, E. T.

1891 *The Foundations of Geometry*, Cambridge, 1891.

Echeverría, J.

1979 L'Analyse géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz, *Studia Leibnitiana*, vol. XI/2, 223-273.

Elfering, K.

1995 Über die sprachwissenschaftlichen Forschungen und das Aspiratengesetz von Hermann Günther Grassmann, in *Hermann Grassmann*, Greifswald, 1995, 33-36.

Engel, F.

1909 H. Grassmann, *Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung*, 18, 344-356.

1911 Grassmanns Leben, in [Grassmann, H. G. 1911, Livre II, partie 3]

Flament, D.

1992 La 'lineale Ausdehnungslehre' (1844) de Hermann Günther Grassmann, in [Boi, L., Flament, D., Salanskis, J.-M.], 205-221.

1997 *Le nombre une hydre à n visages ; entre nombres complexes et vecteurs*, Paris : Ed. Maison des Sciences de l'Homme, 1997.

Flament, D. (avec B. Bekemeier)

1994 *Hermann Günther Grassmann. La science de la grandeur extensive. La lineale Ausdehnungslehre*, Paris : Blanchard, 1994.

Flament, D., Garma, S., Navarro, V. (éds.)

1994 *Contra los titanes de la rutina / Contre les titans de la routine*, Madrid : Comunidad de Madrid / C.S.I.C, 1994.

Forder, H. G.

1941 *Calculus of Extension*, Cambridge, 1941 ; rééd., New York : Chelsea, 1960.

Français, J. F.

1814 Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires, *Annales de Mathématiques*, IV (1813-1814), 61-71 (voir aussi [Argand 1971], 63-74).

Freese, R. von

1953 *Wilhem von Humboldt, Sein Leben und Wirken dargestellt in Briefen, Tagebüchern und Dokumenten seiner Zeit*, 1953 (en particulier, 662 et suiv).

Fries, J. F.

1822 *Die mathematische Naturphilosophie, nach philosophischer Methode bearbeitet*, Heidelberg : Mohr, 1822.

Granger, G. G.

1968 *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Armand Colin, 1968.

Grassmann, H. (fils)

1909a *Projektive Geometrie der Ebene, unter Verwendung der Punktrechnung dargestellt*, 2 vol., Leipzig, 1909-1923.

1909b Über die Verwertung der Streckenrechnung in der Kreiseltheorie, *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, 8, 100-114.

Grassmann, H. G.

1911 *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 vol., Leipzig : B. G. Teubner, 1894-1911 ; rééd. New York : Chelsea Publ. Comp., 1969 ; New York : Johnson Reprint Corporation, 1972.

1831 *Die Lehre vom Satze*, 1831.

1839 *Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung.*, Programm der Ottoschule, Stettin, 1839 ; [Grassmann 1911], vol. II, 2, 115-146.

1840 *Theorie der Ebbe und Flut*, 1840 ; [Grassmann 1911], vol. III, 1, 1-238.

1842a *Grundriß der deutschen Sprachenlehre*, Programm der Ottoschule, Stettin : H. G. Effenbart's Ebinn, 1842.

1842b *Leitfaden für den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache*, Stettin, 1842 ; seconde édition, Stettin : H. G. Effenbart's Ebinn, 1846.

1843 *Leitfaden für den ersten Unterricht in der deutschen Sprache* (avec Robert Grassmann), Stettin, 1843 ; 2nde éd. 1848.

1844 *Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Leipzig : Verlag von Otto Wigand, 1844 ; rééd. Leipzig : Otto Wigand, 1878 ; [Grassmann 1911], vol. I, 1, 2-292.

1845 Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre, *Ar-*

chiv der Mathematik und Physik, 6, 337-350 ; [Grassmann 1911], vol. I, 1, 297-312.

1845 Neue Theorie der Elektrodynamik, *Annalen der Physik und Chemie*, 64, 1-18 ; [Grassmann 1911], vol. II, 2, 147-160.

1846a Grunzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven, mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse (15 avril 1845), *Journal fûr die reine und angewandte Mathematik*, 31, 11-132 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 49-72.

1846b *Deutsches Lesebuch für Schüler von 8-12 Jahren* (avec W. Langbein), Berlin : L. Oehmigke, 1846 (il y aura six autres éditions).

1847 *Die Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, Leipzig, 1847 ; [Grassmann 1911], vol. I, 1, 322-399.

1848 Über die Erzeugung der Kurven dritter Ordnung durch gerade Linien und über geometrische Definitionen dieser Kurven(28 novembre 1847), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 36, 177-184 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 73-79.

1851a Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischer Kurven durch Bewegung gerader Linien, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 42, 187-192 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 80-85.

1851b Die höhere Projektivität und PerspektivitÄt in der Ebene ; dargestellt durch geometrische Analyse, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 42, 193-203 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 86-98.

1851c Die höhere Projektivität in der Ebene ; dargestellt durch Funktionsverknüpfungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 42, 204-212 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 99-108.

1852a Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 44, 1-26 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 109-135.

1852b *Leitfaden der deutschen Sprache, mit zahlenreichen Übungen versehen* (avec Robert Grassmann), Stettin, 1852.

1853 Zur Theorie der Farbenmischung (19 février 1853), *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, 89 : 69-84.

1854 Übersicht der Akustik und der niedern Optik, *Programm des Königlichen und Stadtgymnasiums zu Stettin*, Stettin, 1854.

1855a Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49, 1-9 : [Grassmann 1911], vol. II, 1, 136-144.

1855b Grundsätze der stereometrischen Multiplikation, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49, 10-20 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 145-154.

1855c Über die verschiedenen Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49, 21-36 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 155-169.

1855d Die stereometrische Gleichung zweiten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49, 37-46 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 170-179.

1855e Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 49, 47-65 ; [Grassmann 1911], vol.II, 1, 180-198.

1855f Sur les différents genres de multiplication, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 44, 123-141 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 199-217.

1856 Die lineale Erzeugung von Kurven dritter Ordnung, *Journal fûr die reine und angewandte Mathematik*, 52, 254-275 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 218-238.

1860 Ueber die Verbindung der stummen Konsonanten mit folgenden v und die davon abhängigen Erscheinungen, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 9, 1-35.

1861 *Lehrbuch der Arithmetik für höhereLehranstalten*, Berlin : Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin (Adolph Enslin), 1861.

1862a Ueber die Verbindung der Konsonanten mit folgenden j und die davon abhängigen Erscheinungen, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 11, 1-52 ; 81-103.

1862b *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin, 1862 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1-382.

1863 Ueber die Aspiraten und ihr gleichzeitiges Vorhandensein im An- und Auslaute der Wurzeln, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 12, 2, 81-138.

1867 Die italischen Götternamen, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 16, I. Namen, die auf italischem Boden neugebildet sind, 101-119 ; II. Lateinische und oskische Namen, die aus der indogermanischen Urzeit stammen, 161-182 ; III. Die Götternamen des umbrischen Gebietes, 182-196.

1870a Feihoss, *τοιχοσ*, dehas, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 19, 309-310.

1870b *Deutsche Pflanzennamen*, Stettin, 1870.

1872a Zur Theorie der Kurven dritter Ordnung, *Göttinger Nachrich-*

ten, 26 (18 nov. 1872), 505-509 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 247-249.

1872b Über zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Produkte, *Göttinger Nachrichten*, 28 (25 déc. 1872), 567-576 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 250-255.

1873 *Wörterbuch zum Rig-Veda*, Leipzig, 1873 (nombreuses rééditions, la dernière en 1999).

1874 Die neuere Algebra und Ausdehnungslehre, *Mathematischen Annalen*, 7, 538-548 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 258-267.

1877a *Rig-Veda, Übersetzt und mit kritischen und erläuternden Anmerkungen*, Leipzig : F. A. Brockhaus, 2 vols., 1876-7.

1877b Zur Elektrodynamik, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 83, 57-64 ; [Grassmann 1911], vol. II, 2, 203-210.

1877c Die Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre, *Mathematischen Annalen*, 12, 222-240 ; [Grassmann 1911], vol. II, 2, 46-72.

1877d Der Ort der *Hamilton*schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre, *Mathematischen Annalen*, 12, 375-386 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 268-282.

1877e Bemerkungen zur theorie der Farbenempfindungen, en annexe aux *Elementen der reinen Empfindungslehre* de W. Preyer, Jena : Dufft, 1877.

1877f Über die physikalische Natur der Sprachlaute, *Wiedemanns Ann.*, 1, 606-629.

1877g Ursprung der Präpositionen im Indogermanischen, *Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, 23, 559-579.

1878 Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zussammenhang algebraischer Gebilde, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, 273-283 ; [Grassmann 1911], vol. II, 1, 283-294.

Grassmann, J. G.

1817 *Raumlehre fuer Volksschulen, Ebene raeumliche Verbindungslehre*, Berlin, 1817.

1824 *Raumlehre fuer die untern Klassen der Gymnasien, und fuer Volksschulen, Ebene raeumliche Groessenlehre*, Berlin, 1824.

1827 *Über den Begriff und Umfang des reinen Zahlenlehre, Programmschrift*, Stettin, 1827.

1829 *Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre*, Stettin : bei Friedr. Heinr. Morin, 1829.

1835 *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, Berlin, 1835.

1836 Combinatorische Entwicklung der Krystallgestalten, *Annalen der Physik und Chemie*, 30 (Ergaenzungsband), 1-43.

Grassmann, R.

1866 *Die Formenlehre oder Mathematik*, Stettin, 1872 ; rééd. Hildesheim : Georg Olms.

Graves, R. P.

1891 *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vol., Dublin, 1882-1889 ; *Addendum to the life Sir W. R. Hamilton*, Dublin, 1891.

Hamilton, W. R.

1849 On Symbolical Geometry, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1846-1849.

1853 *Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853.

1866 *Elements of Quaternions*, Dublin, 1866.

Hankel, H.

1867a *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung*, Leipzig : Leopold Voss, 1867.

1867b *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leipzig, 1867.

1885 *Esquisse historique sur la marche du développement de la nouvelle géométrie*, (Trad. fr. de M. Dervuff), Paris : Gauthier-Villars, 1855.

Heath, A. E.

1917 Hermann Grassmann. The Neglect of His Work. The Geometric Analysis and Its Connection with Leibniz 'Characteristic', *The Monist*, 27, 1-56.

Hestenes, D.

1996 Grassmann's Vision, in [Schubring 1996a], 243-254.

Heuser, M.-L.

1996 Geometrical Product — Exponentiation-Evolution. Justus Günther Grassmann and Dynamist *Naturphilosophie*, in [Schubring 1996a], 47-58.

Hindenburg, F.

1781 *Novi systematis permutationum...*, Leipzig, 1781.

Hoüel, J. T.

1874 *Théorie élémentaire des quantités complexes*, Paris, 1874.

HUYGENS, CH.

1833 *Christian Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, Uylenbroek, 2 vol., Hagae comitum 1833.

HÜLTENSCHMIDT, E.

1996 Hermann Grassmann's Contribution to the Construction of a German "Kulturation". Scientific School Grammar between Latin Tradition and French Conceptions, in [Schubring 1996a], 87-113.

HUMBOLDT, W. VON

1936 *Gesammelte Schriften. Ausgabe der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Werke* Berlin, 17 vol., 1903 — 1936.

ISRAËL, G.

1981 'Rigor' and 'Axiomatics' in Modern Mathematics, *Fundamenta Scientia*, 2, 205-219.

JAHNKE, ENG.

1909 La science extensive de Grassmann (*Ausdehnungslehre*), trad. fr. de J. Rose, *l'enseignement mathématique*, 417-429.

JAHNKE, H. N.

1987 Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts — Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm, *Archive for History of Exact Sciences*, 37, 101–182.

JOHNSON, D.

1979 The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. I, *Archive for History of Exact Sciences*, 20, 2, 97-188.

KANNENBERG, LL. C.

1995 *Hermann Grassmann. A New Branch of Mathematics ; The* Ausdehnungslehre *of 1844, and Other Works*, Chicago and La Salle : Open Court, 1995.

2000 *Extension Theory. Hermann Grassmann* (Translated by Lloyd C. Kannenberg), *History of mathematics* Sources, 19, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2000.

KLEIN, F.

1928 *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin : Julius Springer, 1928.

KOPPELMAN, E.

1972 Calculus of Operations and Abstract Algebra, *Archiv. for History of Exact Sciences*, 8 (En particulier, § 5, The Idea of Abstract

Algebra in Great Britain).

KRAFT, F.

1893 *Abriss des geometrischen Calculs nach H. G. Grassmann*, Leipzig, 1893.

LANIER, D. ET LE GOFF, J.-P.

1991 L'héritage arguésien, *Les Cahiers de la Perspective, points de vue*, 43-116.

LEWIS, A. C.

1977 Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, *Annals of Science*, 34, 103-162.

1981 Justus Grassmann's school programms as mathematical antecedents of Hermann Grassmann's 1844, in *Ausdehnungslehre, Epistemological and Social Problems of the Sciences in the early 19th Century*, Jahnke, N. and Otte, M. (eds.), Dordrecht/Boston/London : Kluwer, 255-267.

1997 Graßmann's *n*-dimensional Vector Concept, in [Flament 1997], 139-148.

LIE, S.

1877 Theorie des Pfaffschen Problems, *Arch. for Math. og Nat.*, II, 338-379.

LOTZE, A.

1922 *Die Grundgleichungen der Mechanik, neu entwickelt mit Grassmanns Punktrechnung*, Leipzig, 1922.

1929 *Punkt- und Vektorenrechnung*, Berlin-Leipzig, 1922.

MEHMKE, B.

1880 *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene*, Stuttgart, 1880.

1913 *Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung*, I. Leipzig-Berlin, 1913.

MÖBIUS, A. F.

1887 *Gesammelte Werke*, 4 vol., Leipzig, 1885-1887.

1827 *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig : Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1827 ; rééd. Hildesheim-New York : Georg Olms, 1976.

1847 Die Grassmann'sche Lehre von Punktgrössen und den davon abhängigen Grössenformen, in [Grassmann 1911], vol. I, 2, 613-633.

MONGE, G.

1799 *Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales, an*

III de la République, Paris : Baudouin, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national, 1799.

MOUREY, C. V.

1828 *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédiée aux amis de l'évidence*, 1828 ; 2^e^ éd., Paris : Bachelier, 1861.

MÜLLER, F.

1900 *Mathematisches Vokabularium. Französisch-Deutsch und Deutsch-Französisch*, Leipzig : Verlag von B. G. Teubner et Paris : Gauthier-Villars, 1900 ; 2^e^ éd. 1901.

NOVY, L.

1968 L'Ecole algébrique anglaise, *Revue de synthèse*, 3^e^ série, 49-52 (janv-déc. 1968), 211-221.

1973 *Origins of Modern Algebra*, Leyden : Noordhoff International Publishing, 1973.

OHM, M.

1822 *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, 1 : Arithmetik und Algebra enthaltend, 2 : Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend*, Berlin : Reimer, 1822 ; Berlin : Jonas : (1822) 1828/1829.

OTTE, M.

1989 The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz, *Historia Mathematica*, 16, 1-35.

PEACOCK, G.

1833 Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, *Brt. A. A. S.* (1833), 185-352.

1842 *A Treatise on Algebra, vol. I : Arithmetical Algebra*, Cambridge, 1842 ; réimp. New York, 1940.

1845 *A Treatise on Algebra, vol. II : On symbolical Algebra and its applications to the geometry of Position*, Cambridge, 1845 ; réimp. New York, 1940.

PEANO, G.

1888 *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino, 1888.

1891 Gli elementi di calcolo geometrico, *Opere Scelte*, vol. III, opuscolo 30, 41-69.

1895 Elenco bibliografico sull' 'Ausdehnungslehre' di H. Grassmann, *Rivista di matematica*, 5, 179-182.

1896 Saggio di calcolo geometrico, *Opere Scelte*, vol. III, opuscolo 90, 167-186.

Poincaré, H.

1956 *Œuvres*, 11 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1916-1956.

Pont, J.-C.

1999 Le nombre et son statut vers le milieu du XIXe siècle à la lumière de quelques traités", *Actes du Colloque de Peyresq, 7 - 10 septembre 1999*, Carlos Alvarez, Jean Dhombres, Jean-Claude Pont (éds.), `www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Pont.pdf`, 2002.

Preyer, W.

1877 *Elementen der reinen Empfindungslehre*, Jena : Dufft, 1877.

Radu, M.

1998 *The Concept of Construction in Justus Grassmann's Mathematical Writings : Between Kant and Schelling*, Occasional Paper 172, Bielefeld : Institut für Didaktik der Mathematik, 1998.

2000a Justus Grassmann's Contributions to the Foundations of Mathematics : Mathematical and Philosophical Aspects, *Historia Mathematica*, 27, 4-35.

2000b *Nineteenth Century Contributions to the Axiomatization of Arithmetic — A Historical Reconstruction and Comparison of the Mathematical and Philosophical Ideas of Justus Graßmann, Hermann and Robert Graßmann, and Otto Hölder.*, Dissertation, Bielefeld, 2000.

Rota, G-C., Barnabei, M. & Brini, A.

1985 On the Exterior Calculus of Invariant Theory, *Journal of Algebra*, 96, 1, 120-160.

Rowe, D.

1996 On the Reception of Grassmann's Work in Germany during the 1870's, in [Schubring 1996a] 131-145.

Saint Venant, Barré de

1845 Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, XXI, 621.

Sarton, G.

1944 Grassmann-1844, *Isis*, 35, 326-330.

Schleiermacher, F. D. E.

1839 *Dialectique*, présentation, traduction de l'allemand et notes par Christian Berner et Denis Thouard avec la collaboration scientifique de Jean-Marc Tétaz, Paris : Les Editions du Cerf, 1997.

Schlegel, V.

1875 *System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Graßmannschen Ausdehnungslehre*, 2 vol., Leipzig : Teubner, 1872-75.

1878 *Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke*, Leipzig, 1878.

1896 *Die Graßmannsche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzen 50 Jahren*, Leipzig, 1896.

Scholz, E.

1994 Schelling und die dynamische Kristallographie, *Selbstorganisation. Jahrbuch für Komplexität in der Natur- Sozial- und Geisteswissenschaften*, 5, 219-230.

1996 The influence of Justus Grassmann's crystallographic works on Hermann Grassmann, in [Schubring 1996a], 37- 45.

Schröder, E.

1873 *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig : Teubner, 1873.

1966 *Die Algebra der Logik*, 3 vols., New York : Chelsea, 1966.

Schubring, G.

1996a *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, Dordrecht/ Boston/London : Kluwer, 1996.

1996b The cooperation between Hermann and Robert Grassmann on the foundations of mathematics, in [Schubring 1996a], 59-70.

Sturm, R., Schröder, E. & Sohncke, I.

1879 H. Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten, *Mathematische Annalen*, 14, 1-45.

Taton, R.

1988 *L'œuvre de G. Desargues*, Paris : J. Vrin, 1988.

Torretti, R.

1984 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel, 1984.

Van der Waerden, B. L.

1931 *Modern Algebra*, 2 vol., Berlin : Springer, 1930-31.

Warren, J.

1828 *Treatise on the geometrical interpretation of the square roots of negative quantities*, Cambridge, 1828.

Wessel, C.

1799 *Om Direktionens analytiske betegning, et forsög anvendt formemmelig til plane og sphaeriske polygoners oplösning. Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,* *Femte Del Kjobenhavn*, 1799 ; trad. fr. de Zeuthen, *Essai sur la représentation analytique de la direction*, préfaces de H. Valentiner et T. N. Thiele, Copenhagen, 1897.

WHITEHEAD, A. N.

1897 *A Treatise on Universal Algebra with Applications*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1897 ; rééd. New York : Hafner, 1960.

WILSON, E. B.

1901 *Vector Analysis Founded Upon the Lectures of J. Willard Gibbs*, New York, 1901.

ZADDACH, A.

1994 *Grassmanns algebra in der Geometrie, mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen*, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich : BI Wissenschaftsverlag, 1994.

ZIWET, A.

1885 A Brief Account of H. Grassmann's Geometrical Theories, *Annals of Mathematics*, II, 1, 1-11.

1886 A Brief Account of H. Grassmann's Geometrical Theories, *Annals of Mathematics*, II, 2.