Le Replacement du référent dans les pratiques de l'analyse issues de E. Nelson et de G. Reeb

Yves Péraire
Université Blaise Pascal (Clermont II)

Résumé : L'histoire récente des mathématiques non standard est mise en perspective de manière à faire apparaître une modification dans le langage utilisé et dans la pratique de la référentiation des énoncés qui pourrait conduire, si on le souhaitait à rapprocher la langue mathématique d'une langue de communication. La profusion des constructions ensemblistes peut être limitée grâce à un vocabulaire un peu plus riche permettant de « dire l'indétermination », l'indiscernabilité, l'inaccessibilité ... quand cela est nécessaire et d'explorer plus finement par le langage mathématique, par une sorte de traduction du langage courant, des concepts sur lesquels le langage des mathématiques conventionnelles est presque muet : concepts de point, de grandeur infinie ou infinitésimale etc ...

Abstract: The recent history of nonstandard mathematics is displayed so as to reveal a modification in the used language as well that in the way the referentiation of the statements is done. These changes could lead to bring the mathematical language closer to a language of communication. The profusion of constructions of sets can be limited thanks to a little richer vocabulary making it possible "to express the indetermination", indiscernibility, inaccessibility ... when it is necessary, and permit also to explore more precisely with the mathematical language, using a sort of translation of the ordinary language, some concepts about which the language of conventional mathematics is almost dumb such as concepts of point, infinity or infinitesimality.

Philosophia Scientiæ, cahier spécial 5, 2005, 257–273.

La question suivante, posée dans les premières lignes de l'annonce du Congrès : « *La possibilité d'une traduction dans le langage de la théorie des ensembles est-elle la forme exclusive de justification et de rigueur en mathématiques ?* » soulève deux questions, celle de la *traduction* et celle de la *justification* des énoncés mathématiques. Concernant la traduction, j'étudierai la possibilité d'une traduction des énoncés mathématiques non pas dans le langage de la théorie des ensembles mais dans une langue naturelle de communication. Le succès de cette entreprise devra alors être considéré comme un élément important de justification de ces énoncés. Avant d'aller plus loin, je soulignerai que ces questions, celle de la traduction comme celle de la justification, sont toutes les deux liées à celle de la *signification*. Le lien est particulièrement étroit en ce qui concerne la traduction, du moins si on définit le mot « traduction » par « transposition d'une langue dans une autre qui préserve le *sens*. » La liaison est plus faible pour le second terme, d'autres éléments pouvant entrer en ligne de compte pour justifier un ensemble de propositions mathématiques, tels que la *non contradiction* ou l'*utilité*. La définition précédente de la traduction peut être discutée ; elle semble parfaitement pertinente quand on parle des langues naturelles de communication mais on a le droit de penser que les langues mathématiques sont d'une autre espèce. Je crois pourtant qu'aujourd'hui la langue mathématique peut bel et bien, si on le souhaite, et si on parvient à s'affranchir de certains automatismes de pensée, commencer à se rapprocher d'une langue de communication. Quelques pas ont déjà été réalisés dans cette direction.

J'argumenterai à partir de l'histoire récente des mathématiques non standard des années 1960 à 2002. Je montrerai que celle-ci peut être mise en perspective, le choix de l'axe de la perspective étant évidemment personnel et partisan, de manière à faire apparaître une évolution

(a) dans le matériel linguistique, la langue mathématique s'est enrichie d'autres prédicats que le prédicat d'appartenance,

(b) dans le mode de référentiation des énoncés mathématiques,

qui conduit à « naturaliser » la langue mathématique. Le progrès le plus significatif (et le plus signifiant philosophiquement) vient du changement dans la référentiation. Cette évolution va à l'encontre d' une position un peu fataliste concernant le langage qui est assez répandue dans le monde scientifique. Ainsi dans l' ouvrage de vulgarisation de Etienne Klein [Klein 1996] on peut lire :

> La physique quantique s'appuie sur un formalisme mathématique extrêmement puissant, mais très aride qu'il est impossible de transposer en des phrases appartenant à la langue commune.

Cette phrase constate un état de choses, que l'auteur semble accepter, et ne laisse pas espérer une amélioration de la situation. Je voudrais être moins pessimiste et j'aimerais dire, en calquant ma formulation sur celle de Etienne Klein, que

> La physique quantique doit pouvoir être décrite en une langue mathématique, expressive bien que syntaxiquement non ambiguë, traduisible en des phrases appartenant à la langue commune.

Il suffit de mettre en relation deux à deux les mots employés dans les phrases précédentes

FORMALISME	LANGUE
PUISSANT	EXPRESSIF
ARIDE	SYNTAXIQUEMENT NON AMBIGUË
IMPOSSIBLE DE TRANSPOSER	TRADUISIBLE

pour mesurer la longueur du chemin à parcourir. Je ne sais pas si ce projet est réalisable en ce qui concerne la physique quantique. Cependant les résultats obtenus aujourd'hui grâce à ces nouvelles méthodes dans certaines branches des mathématiques, ainsi que dans l'enseignement des mathématiques élémentaires pour physiciens et ingénieurs — calcul de Dirac, calcul formel etc ... — sont réellement encourageants.

Avant de décrire ce chemin, donnons un rapide aperçu de ce qu'est la mathématique non standard. Cette pratique a été abondamment discutée et commentée dans un certain nombre de lieux dont le Colloque de Cerisy de 1992, et rapportée dans des ouvrages dont : [Barreau 1989], [Salanskis & Sinaceur 1992], [Salanskis 1999].

Pour ce qui concerne le cadre théorique de cette activité, je m'appuierai sur deux piliers dans l'histoire récente, deux approches significatives : *Celle de A.Robinson*, qui est décrite dans [Robinson 1966] mais surtout celle qui utilise des élargissements, développée dans [Robinson & Zakon 1967] qui a donné naissance à toute une école de mathématiques représentée par N.J. Cutland, C.W. Henson, J.Keisler, W.A.J. Luxemburg, D. Laugwitz, Peter Loeb pour n'en citer que quelques-uns.

Celle de E.Nelson, exposée dans [Nelson 1977], qui a donné naissance en particulier à l'école française de mathématiques non standard autour de Georges Reeb.

En réalité il existe un nombre considérable de travaux sur les fondements des mathématiques non standard comme on pourra le constater à la lecture de l'article de synthèse de M. Dinasso [1999]. Je rappelle que ces méthodes ont été élaborées pour donner un *fondement solide* (c'est le problème de la justification qui est encore posé) au calcul infinitésimal de Leibniz.

Décrivons très brièvement ces deux démarches.

La stratégie des adeptes de Robinson consiste à *construire* un « hyper-paradis » au dessus du paradis des nombres réels dans lequel — affirme t-on — vivent des nombres infinitésimaux et des nombres infiniment grands. Celle de Edward Nelson consiste à étendre les possibilité d'*expression* du langage mathématique en introduisant un prédicat unaire non défini — le prédicat « $\mathbf{st}(\cdot)$ » — à côté du prédicat d'appartenance « $\cdot \in \cdot$ » du langage de ZF. Le nouveau prédicat permet de définir l'infinitésimalité à partir d'une classification des nombres, les infinitésimaux non nuls devront être *non standard*.

Les deux approches conduisent, chacune à sa manière, à *poser l'existence* de nombres infinitésimaux et de nombres infiniment grands et de développer un discours similaire à celui de Leibniz mais qui échappe aux contradictions immédiates. Cela nous ramène à nouveau à la signification. En effet, si on utilise la théorie de Nelson il faut dire ce qu'exprime le nouveau prédicat. Quant à l'approche Robinsonienne, tout prosaïque que puisse paraître le verbe « construire », il ne parvient pas à cacher que le statut et la signification des hyper-entités reste à comprendre. A ce propos nous citerons une réaction de Erret Bishop, s'exprimant au Congrès de Boston l'été 1974 sur l'analyse non standard Robinsonienne (IST n'était pas encore née).

> Une approche plus récente des mathématiques par raffinement formel est l'analyse non standard. J'apprend de sources diverses qu'elle a rencontré un certain succès, et je ne saurait dire si c'est au prix de preuves sensiblement plus dépourvues de sens. Ce qui m'intéresse dans l'analyse non standard, c'est qu'on fait des essais de calcul infinitésimal. Il est difficile de croire que le mépris pour le sens puisse aller aussi loin. [Bishop 1975, 514]

C'est donc du sens que je traiterai en premier. Ici, le sens sera identifié à la *référence*.

Je prendrai les deux langages, celui de ZFC (le *zèdef*) et celui de IST (l'*ièstais*) comme langues objet, le français interviendra alors comme métalangage (avant d'apparaître comme *langue source* ou comme *langue cible* dans une traduction). J'essaierai ensuite de rendre compte de pratiques observées en matière de référentiation.

Description matérielle des langues

La langue écrite

Le zèdef (resp. l'ièstais) s'écrit en respectant les règles de syntaxe habituelles, à l'aide du prédicat « $\cdot \in \cdot$ » (resp. des prédicats « $\cdot \in \cdot$ » et « $\mathbf{st}(\cdot)$ »), des connecteurs logiques et des quantificateurs.

La langue orale

Si le zèdef et l' ièstais s'écrivent, ils « se parlent » aussi. Ainsi l'énoncé

$$\exists y \; \forall x \; (x \in y \Rightarrow \exists t \; (t \in x \wedge \; t \in y) \tag{1}$$

peut s'oraliser

« Il existe un ensemble y tel que,
pour tout élément x de y ... etc » (1′)

ou d'une manière plus imagée

« Il existe un ensemble y dont tout élément rencontre y » (1″)

cependant les oralisations (1′) et (1″) ne sont pas des traductions de (1). Ces deux énoncés ne sont pas vraiment distincts de (1), pas plus qu'une reécriture de (1) qui utiliserais des caractères de couleur.

La langue commune apparaît aussi ailleurs, dans les démonstrations, avec des formulations comme : « *de "F" et de "G" on peut déduire "E"* ». On peut éviter, à l'écrit, cette utilisation en recourant à des tableaux de preuves, mais il faudra malgré tout oraliser d'une manière ou d'une autre la lecture de ces tableaux.

Après ces remarques qui ne visent qu'à opérer un tri entre les usages, distincts et imbriqués, que l'on fait de la langue commune, abordons la sémantique.

La pratique ordinaire de la référentiation du discours en zèdef

On rencontre deux types de référence.

1- La référence directe : elle est rarement explicite, c'est la référence au concepts naturels de nombre, de fonction, d'espace, ... subsumés tous au concept d'ensemble. Un énoncé en zèdef structure ces concepts naturels, qui constituent la matière des mathématiques.

2- La référence reconstruite : on constate qu'il est fait une reconstruction « sur mesure » de la référence qui intègre les pratiques décrites ci-dessous.

(a) Éjection des constantes : les axiomes de ZFC sont des formules closes sans paramètres, les constantes sont introduites le plus souvent par la médiation d'une phrase en langue naturelle. Par exemple à partir de l'axiome :$\exists x\ \forall t\ (\neg(t \in x)$ (1), qui structure le concept d'ensemble vide, on introduit une constante par le truchement de l'énoncé : « *nous noterons* $\emptyset$ *cet ensemble* ».

Après l'énonciation de l'axiome

$$\exists \omega\ (\ On(\omega) \wedge \forall \alpha\ (\ \alpha \in \omega \Leftrightarrow (On(\alpha) \wedge fin(\alpha))\ )\ ) \qquad (2)$$

qui structure le concept d'ensemble des entiers naturels, on introduit de la même manière la constante $\mathbb{N}$. C'est ainsi que sont éjectées les constantes fondamentales des mathématiques, directement à partir des axiomes pour $\emptyset,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \mathbb{N}\ \cdots$, en faisant usage de définitions en zédef pour $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2,\ \pi,\ \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ etc ...

Cette pratique des mathématiques ordinaires peut être précisée par une théorie des définitions comme dans [Pabion 1976] au chapitre V. On est ainsi assuré que la production des constantes se fait d'une manière non ambiguë.

On pourrait en rester là et faire le choix, formaliste, que les énoncés mathématiques ne parlent que des constantes, ou même que les mathématiques ne sont qu'une manipulation de symboles suivant des règles. On peut constater cependant que ce choix, qui a sa logique, n'est jamais complètement assumé.

(b) L'introduction des « entités », l'attribution du nom : la référence aux concepts naturels ayant été abandonnée, on est amené, par un processus inverse de celui qui conduit habituellement à la création des langages, à vouloir bâtir un « univers » auquel le discours mathématique s'appliquerait parfaitement. Pour cela, on associe aux constantes des « entités », simples représentations mentales ou « objets existant quelque part », selon les goûts, ainsi qu'un nom pour ces entités. Ces représentations possèdent une très forte cohésion interne, (que ne possèdent pas les concepts naturels) due au fait qu' elles sont « l'ombre sur la pensée », en empruntant le style de Max Müller, d'un discours ayant une syntaxe non ambiguë. Cela justifie leur introduction ... si nous savons résister à la fascination exercée par des objets de pensée tellement parfaits ... Ainsi après avoir introduit la constante $\mathbb{N}$, on pose l'existence d'une entité à laquelle on attribue le plus souvent, mais pas toujours, le statut d'un objet transcendant ou idéal. C'est à cette entité que l'on accroche maintenant le label : « ensemble des entiers naturels ». Ici le label est emprunté à celui du concept naturel d'origine. Le choix du nom et la motivation de ce choix sont moins clairs quand on s'éloigne des concepts de base. C'est ainsi qu'une extension très idéale du concept de nombre se verra mystérieusement très prosaïquement désignée par l'expression : « ensemble des nombres réels » ; une extension supplémentaire conduit à l'ensemble des nombres non standard de Robinson, qui sont parfois appelés aussi « hyper-réels » (« au delà des réels »).

Si les entités ensemblistes résistent bien à une exploration interne, elles supportent moins bien la confrontation avec les concepts naturels qui leur ont donné naissance. Ainsi dès les premières briques de la construction, on constate que le langage zèfef et les axiomes exprimés dans cette langue ne capturent pas entièrement les concepts naturels. Ainsi en est-il du concept élémentaire d'ensemble fini : Après avoir introduit en zédef une définition des ordinaux finis, on peut constater qu'un ordinal fini peut être décrit, toujours en zèdef, qui possède une quantité intuitivement infinie d'éléments. On peut déduire de ce fait que l'univers des ordinaux (pour cette définition des ordinaux) intuitivement finis n'est pas définissable en zédef[1].

L'existence de cette « capture incomplète » des concepts par la langue, pourtant clairement reconnue et admise à plusieurs reprise par Jean Louis Krivine, parfois trop rapidement évoquée dans les manuels de logique, n'a aucune influence sur la pratique des « mathématiciens purs » classiques. Elle est mieux prise en compte par les mathématiques appliquées, mais on la voit alors comme une

[1] Voir [Krivine 1972, 44], et le lien fait avec la mathématique non standard par Georges Reeb dans [Reeb 1979].

imperfection du modèle mathématique, copie dans le monde des ensembles de la réalité extra-mathématique.

Quelques pratiques de la référentiation pour le discours en ièstais

IST est une extension conservative de ZFC. Les énoncés sans occurence du prédicat « **st**( ) » peuvent être interprétés selon le mode de référence reconstruite indiqué plus haut. Il y a cependant des différences pour les énoncés utilisant le nouveau prédicat.

1 - On constate l'absence d'une interprétation directe explicite *précise* et *unique* pour le prédicat « $\mathbf{st}(\cdot)$ ». Il transparait parfois qu'un statut ontologique spécial est attribué aux constantes non standard, celui d'objets encore plus idéaux que les objets standard. Cela signifierait-il qu'ils sont encore « plus transcendants » ? Cette idée d'une graduation de la transcendance me donnerait personnellement un sentiment de vertige.

2 - La reconstruction de la référence pour le discours en ièstais se heurte à des limites : il y a un défaut de collectivisation, le shéma d'axiome de compréhension ne s'applique pas dans sa généralité aux formules de IST, une sous-collection définie en ièstais d'un ensemble donné peut n'être pas un ensemble. C'est le cas de la collection des entiers standard.

Cette limitation, qui est parfois exploitée pour modéliser les situations de « transition floue » (on peut représenter la liste des ancêtres humains de Darwin par une collection de ce type), alourdit un peu la difficulté à donner un sens au mot « standard », on ne peut pas caractériser les nombres standard par leur appartenance à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, obtenu par une construction et ayant acquis ainsi le statut d'objet.

Nous sommes ramenés à la case départ, à Leibniz et à la complexité contradictoire de son discours sur les infinitésimaux : tantôt *quantités* incomparablement petites, tantôt *fictions* utiles comme nos *nombres* non standard.

3 - Le retour aux grandeurs et aux ordres de grandeur comme référence du discours mathématique est une particularité de l'école Georges Reeb. Des formulations apparaissent qui font référence *directement* à des objet extérieurs aux entités ensemblistes. On dira par exemple, en se référant à une expérimentation numérique particulière que « 10^{-2} *est infiniment petit.* » Cela peu surprendre car l'énoncé « $10^{-2} \sim 0$ » est un énoncé en ièstais faux. On pourra entendre aussi « *Les valeurs*

appréciables de la variable t (celles qui ne sont ni infiniment petites ni infiniment grandes) sont celles que je peux voir sur l'écran de mon ordinateur. » Ce qui surprend ici, c'est l'apparition de l'ordinateur. En juin 2002, au Congrès de Pise, Francine Diener déclarait :

> ... the point of view of non standard asymptotic allows to consider the discrete model as the reality, complex but more pertinent, whereas the continuous models are just its first approximation. [Diener 2002]

Je ne crois pas que cela soit l'idée que les mathématiciens se font classiquement du continu. Le rapport approximant/approximé apparaît ici inversé. La réalité dont il est question ici est celle du continu empirique, celui que l'on rencontre quand on ne sait (ou ne peut) pas organiser les observations attachées à l'expérimentation, de manière à pouvoir discerner pour un évènement élémentaire donné l'évènement élémentaire le plus proche dans le temps ou dans l'espace. Le modèle continu dont parle Francine Diener, c'est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réel. Ce modèle est, dans l'approche classique, muet sur l'indiscernabilité que je viens d'évoquer.

Une courte réflexion nous convaincra que chacun des trois exemples qui précèdent, est un discours sur l'indiscernabilité. La traduction mathématique de ces discours (que je ne réaliserai pas ici) se fait par le biais d'une métaphore dans laquelle

- les nombres jouent le rôle des grandeur physiques,
- la relation d'équivalence infinitésimale $\sim$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall^{st} \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star |x - y| < \varepsilon$$

celui de la propriété d'indiscernabilité.

Des énoncés en ièstais, vrais dans IST mais d'apparence paradoxale, font aussi leur apparition. C'est ainsi que la formulation :

> il existe un ensemble fini contenant tous les ensembles standard

une fois *traduite* en iestais devient un théorème de IST. Il est clair pourtant que la liste des seuls entiers standard 0, 1, 2 ... 1646 ... 1789 ... est intuitivement potentiellement infinie. Cela indique que la langue ièstaise, avec les axiomes exprimés dans cette langue, ne permet pas plus que le zèdef de capturer le concept naturel d'ensemble fini. Le problème subsisterait même si l'on n'acceptait que les entiers standard comme « représentants légitimes » des entiers naïfs car, comme l'écrivait Georges Reeb dans [Reeb 1979], « les entiers naïfs n'épuisent pas les entiers standard ».

Ce fait apparait plus clairement que pour le zèdef, tellement clairement qu'il est impossible de le dissimuler. En effet la mise en évidence de l'ordinal fini intuitivement infini dont parles Jean Louis Krivine nécessite une construction, qui n'est d'ailleurs pas donnée dans le livre [Krivine 1972], alors que l'affirmation de l'existence d'ensembles finis intuitivement infinis est une des toutes premières conséquences des axiomes de IST[2]

Cette capture incomplète par le langage du concept d'ensemble fini semble bien acceptée et prise en compte par les disciples de Nelson et Reeb. La voie est donc ouverte à une compréhension plus profonde de ce fait.

On voit donc que, pour qui travaille avec IST, la question de la référence se pose d'elle même. Cette question est aussi posée dans les 4 « thèses principales » de Hartong et Reeb dans [Barreau 1989, 213]. Dans ce document la référentiation est vue comme une mise en relation de la *réalité mathématique* et de la *réalité extérieure*. On comprendra que pour mettre en évidence des éléments pouvant rapprocher langue mathématique et langue naturelle il est préférable de mettre au centre le rapport

[MONDE DES FAITS] / [LANGAGE MATHÉMATIQUE]

plutôt que l'opposition

[RÉALITÉ EXTÉRIEURE]/[RÉALITÉ MATHÉMATIQUE].

Une pratique ouverte de la référentiation : la référence directe élargie.

Une pratique ouverte de la référentiation doit contribuer à naturaliser la langue mathématique. Cette pratique nécessite une définition assez large de ce qu'est un fait. On ne peut en effet pas limiter l'usage du langage à la simple description qualitative ou quantitative des phénomènes ; les concepts aussi doivent être décrits. Nous devrons tenir compte aussi du style contemporain d'expression mathématique, style qui se caractérise par un usage important de la « métaphore des ensembles ». C'est ce statut de métaphores — métaphores cohérentes, mais métaphores quand même — que je donnerai au recours aux « entités ensemblistes ». Cependant, si il faut prendre en compte la culture dominante, il faut aussi en souligner les obstacles qu'elle peut engendrer : principalement les

[2] Voir l'annexe mathématique.

blocages dus à l'invasion du champ sémantique par les représentations ensemblistes.

La reconnaissance de la capture incomplète comme évidence est une attitude qui se rapproche de l'usage des langues naturelles. L'acceptation également de la coexistence des modes de référentiations, directs et reconstruits, et même une imbrication des deux pratiques, va dans la même direction.

Ces choix sont faits implicitement chez les adeptes de IST, il faut les expliciter et certainement aller plus loin.

C'est la raison pour laquelle dans [Péraire 1991], j'ai bâti une théorie des ensembles « à la Nelson » (**R**elative **S**et **T**heory) avec un prédicat non défini *à deux places*, « $\cdot\, \mathcal{SR}\, \cdot$ » en remplacement du prédicat unaire « **st**· » de Nelson. Dans un article récent [Péraire 2005], je mets en œuvre les idées exposées précédemment sur la référentiation. Dans ce texte, un calcul analogue à celui de Paul Dirac (voir [Dirac 1927]) est développé dans lequel toutes les multiplications faisant intervenir les fonctions delta et leurs dérivées sont « légitimées ». Rappellons que dans cet article, Dirac introduit une fontion δ, telle que :

$$\delta(x) = 0 \ si \ x \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty, \quad \int \delta = 1.$$

Ces propriétés sont contradictoires car une fonction intégrable, en un sens ou un autre, si elle vérifie les deux premières conditions à nécessairement une intégrale égale à 0. Il faut donc analyser plus avant le texte de Dirac pour comprendre pourquoi cette définition, bien que mathématiquement contradictoire ne conduit pas à des contradictions physiques.

Dès le début du texte, Paul Dirac donne des éléments sur le statut de sa fonction δ quand il écrit :

> Strictly of course, $\delta(x)$ is not a PROPER function of x, . . . $\delta'(x)$, $\delta''(x)$ . . . are even more discontinuous and LESS PROPER than $\delta(x)$ itself.

Une lecture un peu plus attentive du texte, pas seulement des formules mathématiques qui y figurent, nous fait découvrir que les concepts d'égalité et de point matériel utilisés par l'auteur, diffèrent des notions mathématiques de même nom.

Dans ce travail le référent est l'ensemble des faits observés et *discutés par Dirac*. La philosophie de l'article repose

1 - sur la *reconnaissance d'une signification* naturelle « qui marche » pour le mot « improper », celui de « non complètement déterminé »

2 - sur une *traduction* dans le langage de RST de l'affirmation par Dirac de l' *impropriété* de la fonction δ et de l'encore plus grande impropriété de ses dérivées.

Bien sur, la signification donnée au mot « impropre » n'est peut-être pas celle à laquelle pensait Dirac, mais il apparait que si on adopte ce choix de signification, alors le texte « tient debout ». D'autres traductions du mot « impropre » ont été données ailleurs. Ainsi dans la traduction française [Dirac 1931] le mot a été traduit par « anormal », ce qui coupe court à toute discussion.

Une grand attention est apportée dans ce travail à la description des concepts naturels pour : LE POINT MATÉRIEL, LES GRANDEURS INFINIES OU INFINITÉSIMALES, L'ÉGALITÉ PHYSIQUE.

Ces différents concepts se décrivent chacun de plusieurs manières : Il y a plusieurs formes conceptuelles (descriptions en une langue mathématique) pour le point matériel, qui n'est plus assimilé à un nombre, plusieurs formes conceptuelles pour l'infini. L'égalité n'est plus un simple avatar de l'équivalence logique dans le monde des ensembles, mais elle se laisse raconter de manière nuancée. On peut alors définir, dans les termes mêmes employés par Paul Dirac (à peu de choses près), une fonction δ nulle hors du point origine (avec une bonne définition du point) infinie dans ce point (avec un concept convenable d'infinité) et d'intégrale égale à 1. Avec une nouvelle définition naturelle de la dérivée et de l'égalité la plupart des « formules de physiciens », par exemple :

$$\frac{(-1)^p}{p!}x^p + \delta^{(p+1)} + \delta^2 = \frac{p+1}{2}\,\delta',$$

qui sont interdites dans les mathématiques classiques deviennent admissibles et peuvent se démontrer en appliquant un calcul des dérivées tout à fait similaire aux calcul habituel et compatible avec ce dernier.

Nous remarquerons que dans cette approche *la sortie de l'irrationnel évoquée dans [Granger 1998], ne se fait pas par l' introduction d'un espace fonctionnel. Elle consiste plutôt*

- en un travail de clarification des termes : reconnaissance d'un sens puis traduction dans la langue mathématique pour le mot « impropre »,

- en un approfondissement des concepts par le langage : développement de formes conceptuelles multiples pour le point, structurations plus nuancées des concepts d'infinité et d'infinitésimalité etc ...

Nous avons choisi, pour parler d'un phénomène incomplètement déterminé, d'affirmer directement cette indétermination en langue mathématique, plutôt que de bâtir un petit paradis, comme l'espace des distributions, dans lequel tout est parfaitement déterminé.

Remarques finales.

Ce changement de perspective doit s'accompagner d'un changement de terminologie. On doit pouvoir se débarrasser maintenant de la dénomination « mathématique non standard », avec son désagréable privatif. En l'absence de sémantique pour le mot « standard », on ne voyait pas trop comment faire et la présence trop pesante des entités ensemblistes a beaucoup entravé cette réflexion sur les mots. Dans l'approche Reebienne, l'analyse non standard semble être un occupation opportuniste d'interstices dans ces objets que sont les ensembles. Georges Reeb aimait répéter à l'envi : « les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ » et cela semblait une justification suffisante (qui m'a suffi dans un premier temps) à introduire des « entiers non naïfs » ou « non standard » Mais alors ou mettre les entiers « encore moins standard » dont je commençais à introduire l'usage ? La réalité c'est qu'il n'y a pas de brèche parce qu'il n'y a ni muraille ni forteresse[3]. L'introduction de nouveaux prédicats, et de sémantiques pour ces prédicats, est en fait un processus de libre création de langage en fonction des nécessités de l'expression. Quant à la définition du rapport à la langue mathématique des représentations ensemblistes, elle me fait penser à ce que disait Max Müller en 1900, [Müller 1871], à propos de la pensée en général — nous nous sommes bornés aux mathématiques.

> La mythologie est inévitable, elle est naturelle, elle est une nécessité inhérente au langage pour autant que nous reconnaissions dans la langue la forme externe de la pensée, la pensée dans sa manifestation : en réalité, elle est l'ombre obscure que la langue projette sur la pensée, et qui ne disparaîtra pas avant que la langue ne vienne à se confondre entièrement avec la pensée — ce qui ne se produira évidemment jamais. (...) La mythologie, au sens le plus élevé, est le pouvoir qu'exerce la langue sur la pensée dans chacune des sphères de l'activité mentale, et je n'hésite pas à envisager l'histoire entière de la philosophie — de Thalès à Hegel — comme un combat ininterrompu contre la mythologie, une protestation constante de la pensée contre la langue[4]

Je suggère enfin de remplacer le label « mathématiques non standard » par la dénomination plus positive de « mathématiques relatives » ;

[3] Dans [Wallet 1992], Wallet dit « Il n'y a rien a remplir ».

[4] La citation est tirée de l'article de Paul Jorion, [Jorion 1990].

les mathématiques conventionnelles devenant alors du même coup non relatives !

Annexe mathématique

Grandes lignes[5]de la « construction » d'un ordinal fini ayant un nombre intuitivement fini d'éléments.

Si on accepte l'axiome de fondation, alors α est un ordinal si et seulement si

$$\forall t \in \alpha \, [\, \forall s \in \alpha \, (\, t \in \; s \; \vee \; s \in t \; \vee \; s = t \,) \wedge \forall u \, (u \in t \Rightarrow s \in \alpha \,) \,] \quad (1)$$

Un ordinal α est dit fini (en langage zèdef) si il est égal à $\emptyset$ ou si

$$\forall \beta [\, (\, \beta \in a \; \vee \beta = \alpha \,) \Rightarrow \exists \mu \, \forall t \, (\, t \in \beta \Leftrightarrow (t \in \mu \vee t = \mu) \,) \,] \quad (2)$$

ce qui peut se lire « *α et chacun de ses élément a un prédécesseur* ».

Soit ω le premier ordinal limite et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant le complémentaire des parties finies de ω. On définit ensuite sur l'ensemble ω^ω une relation d'équivalence $\equiv$ en posant $\alpha \equiv \beta \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in \omega : \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{U}$. On note ${}^\star\omega$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation. On définit ensuite une relation $\overline{\in}$ sur ${}^\star\omega$ en posant, si $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont respectivement les classes d'équivalence de α et β : $\overline{\alpha} \in \overline{\beta} \;\Leftrightarrow\; \{i \in \omega : \alpha(i) \in \beta(i)\} \in \mathcal{U}$.

On peut démontrer en utilisant les propriétés de l'ultrafiltre que si $\overline{\alpha} \in^\star \omega$ et $\overline{\alpha} \neq \emptyset$ alors

$$\forall \overline{t} \,\overline{\in}\, \overline{\alpha} \, [\forall \overline{s} \,\overline{\in}\, \overline{\alpha} \, (\, \overline{t} \,\overline{\in}\, \overline{s} \; \vee \; \overline{s} \,\overline{\in}\, \overline{t} \vee \; \overline{s} = \overline{t}) \; \wedge \; \forall \overline{u} \, (\overline{u} \; \in \; \overline{t} \Rightarrow \overline{u} \; \in \; \overline{\alpha})] \quad (\overline{1})$$
$$\forall \overline{\beta} \, [\, (\, \overline{\beta} \,\overline{\in}\, \overline{\alpha} \; \vee \overline{\beta} = \overline{\alpha} \,) \Rightarrow \exists \overline{\mu} \, \forall \overline{t} \, (\, \overline{t} \,\overline{\in}\, \overline{\beta} \Leftrightarrow (\overline{t} \,\overline{\in}\, \overline{\mu} \; \vee \; \overline{t} = \overline{\mu} \,) \,) \,] \quad (\overline{2})$$

Un opération assez technique, le *collapsing*, permet d'associer les $\overline{\alpha}$ de $\overline{\omega}$ à des parties de ${}^\star\omega$ de telle sorte que les relations $\overline{\in}$ entre éléments de $\overline{\omega}$ se transforment en relation $\in$. Les énoncés de la forme $(\overline{1})$ ou $(\overline{2})$ se transforment alors en énoncés de la forme (1) ou (2). Soit la fonction $\alpha \in \omega^\omega$ telle que $\alpha(i) = i$ pour tout i. Pour n = 1, 2, … on désignera encore par n la fonction constante de valeur n il découle des définitions que $\overline{n} \,\overline{\in}\, \overline{\alpha}$ pour tout n et que toutes les classes $\overline{n}$ sont distinctes. On en

[5]On peut consulter par exemple [Robinson & Zakon 1967] pour plus de détails techniques.

déduit que leurs images dans le *collapsing* sont des éléments distincts de l'image a de α. Comme a vérifie (1) et (2), c'est un ordinal fini. On a donc « fabriqué » un ordinal fini ayant un nombre intuitivement infini d'éléments.

Quelques particularités de IST.

Un principe de compréhension incomplet.

Le shéma de compréhention de IST est incomplet, si $\Phi(x)$ est une formule de IST et si E est un ensemble donné, on ne pas affirmer l'existence d'un ensemble F ayant pour éléments les éléments de E qui satisfont la formule Φ.

Exemple. Il n'existe pas d'ensemble constitué par les nombres entiers standard et seulement eux, ni par les nombres entiers non standard. En effet, supposons qu'un tel ensemble H existe. Alors il serait non vide et comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$, il posèderait un plus petit élément $n_0 > 1$ Le nombre $n_0 - 1$ étant strictement inférieur au premier et n_0 étant le plus petit élément de H alors $n_0 - 1 \notin H$. On en déduit que $n_0 - 1$ est standard. Mais cela implique que n_0 est standard car ajouter 1 à un nombre standard produit encore un nombre standard. On a donc une contradiction. La collection, des entiers standard n'est donc pas un ensemble. La preuve dans [Krivine 1972] du fait que les entiers intuitifs ne constituent même pas une collection définissable dans ZF utilisent des arguments similaires.

L'évidence de la capture incomplète.

La capture incomplète de la finitude apparait en pleine lumière dans l'approche de Nelson. En effet, si N est un nombre entier infiniment grand, on peut former l'ensemble $F_N = \{n \in N : n \leqq N\}$ le shéma de compréhension s'appliquant à toute formule sans occurence du prédicat **st**( ) (pouvant avoir des paramètres non standard). Cet ensemble est fini au sens des définitions classiques Mais tous les nombres entiers qui peuvent potentiellement être écrits sont dans F_N.

Bibliographie

Barreau, Hervé

1989 *La mathématique non standard*, Élaboré par la section "Mathématiques pures et appliquées " de l' unité du CNRS "Fondement des sciences" dirigée par Hervé Barreau. Éditions du CNRS (1989).

Salanskis, J.M. & Sinaceur, Houria (eds.)

1992 *Le Labyrinthe du continu*, Colloque de Cerisy, J.M. Salanskis et Houria Sinaceur (Edts) (1992).

Bishop, E.

1975 The crisis of contemporary mathematics, Proceeding of the American Academy Workshop in the Evolution of Modern Mathematics, in *Historia Mathematica* 2 pp 505-517 (1975).

Cohen-Tannoudji, C.

1994 B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, TII, Hermann, (1994).

Diener, F.

2002 *Nonstandard tree model for financial mathematics : beyond the continuous Black-Scholes approximation for vanilla and barrier options.* Special sessions of the AMS-UMI jointmeeting "nonstandard methods and applications in mathematics", Juin 10-16, 2002 Pise.

Dinasso, M.

1999 On the foundations of nonstandard mathematics, in *Mathematica Japonica*, Vol.50, N° 1, (1999).

Dirac, P.A.M.

1927 The physical interpretation of the quantum dynamics, in *Proc. of the Royal Society*, London, (1927).

1931 *Les principes de la mécanique quantique* (1931), Paris, Jacques Gabay, (1990).

Granger, G.G.

1998 *L'irrationnel*, Editions Odile Jacob, (1998).

Hartong, J. & Reeb, G.

1989 Intuitionisme 84 dans [Barreau 1989].

Jorion, Paul

1990 Physique contemporaine et pathologie de la langue, in *La Revue du MAUSS*, n.s., 8, (1990) 137-141.

Krivine, J. L.

1972 *Théorie axiomatique des ensembles*, Paris 1972.

KLEIN, E.

1996 *La physique quantique.* Collection dominos, Flammarion (1996).

MÜLLER, F. MAX

1871 On the Philosophy of Mythology <1871>, in *Chips from a German Workshop*, vol. IV. Essays on Mythology and Folklore, London : Longmans, Green and Co, 168-169.

NELSON, E.

1977 Internal Set Theory : a new approach to nonstandard analysis, in *Bull. A.M.S.* 83 (1977), 1165-1198

PABION, J.F.

1976 *Logique Mathématique*, Editions Hermann, collection Méthodes, (1976).

PÉRAIRE, Y.

1991 Théorie Relative des Ensembles, *Osaka Journal of Math.* (1991).

2005 A mathematical framework for Dirac's calculus. A paraître dans *Bul. of Belgian Math. Soc. Simon Stevin.*

REEB, G.

1979 La mathématique non standard vieille de 60 ans ?, Strasbourg, IRMA, (1979). Reédité dans [Salanskis 1999]

ROBINSON, A.

1966 *Non-standard Analysis*, North-Holland (1966).

ROBINSON, A. & ZAKON, E.

1967 A set theorical Characterization of enlargements, in *Proceedings Pasadena Symposium* (1967).

SALANSKIS, J.M

1999 *Le constructivisme non standard*, Éditions du Septentrion, Histoire des Sciences, (1999).

SCHWARTZ, L.

1954 Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, in *C.R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 847-848.

WALLET, G.

1992 Reflexions sur l'objectivité en Mathématiques, dans [Salanskis & Sinaceur 1992].