Les mathématiques grecques sous le regard de la théorie des types

Jean-Louis Gardies †
Université de Nantes

Philosophia Scientiæ, cahier spécial 5, 2005, 11–26.

Le souci de ne pas étendre abusivement mon sujet m'incite à concentrer mon attention sur cette époque des mathématiques grecques qui va du IVe au IIe siècle av. J.-C. et qu'illustrent essentiellement les grands noms d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius.

Je rappelle d'abord que ce manuel fondamental des mathématiques grecques que sont les *Eléments* d'Euclide embrasse deux sujets bien distincts d'étude : d'une part l'arithmétique, d'autre part la géométrie. L'étude de la géométrie *plane* occupe, à elle seule, les six premiers des treize livres constitutifs des *Eléments*. Les trois livres suivants, VII, VIII et IX sont consacrés à l'arithmétique. Quant à la géométrie dans l'espace, cette *stéréométrie* dont l'auteur de *La République* regrettait qu'à l'époque où il situait son dialogue, elle n'eût pas encore été développée, elle occupe les trois derniers livres, à savoir XI, XII et XIII, de ces *Eléments*. Des ouvrages proprement géométriques, qui nous sont parvenus, d'Archimède et d'Apollonius, on peut admettre qu'ils sont en parfaite conformité avec le fondement théorique sur lequel les livres géométriques des *Eléments* d'Euclide avaient eux-mêmes établi la géométrie.

C'est évidemment une procédure délibérément anachronique que de soumettre, comme je me propose de le faire, la démarche des auteurs grecs aux critères de cette *théorie des types*, dont certains aspects seront ébauchés à la fin du XIXe siècle par des auteurs comme Frege et Peano, et qui ne prendra sa forme à peu près définitive qu'au début du XXe siècle sous la plume de Russell. Je préviens que je ferai recours à la « théorie des types simples », telle qu'on peut la trouver dans la seconde édition des *Principia Mathematica* [Whitehead & Russell 1910] et telle surtout qu'elle a été reprise dans les explications données par David Hilbert, tant de ses *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert & Bernays 1934-39] que de ses *Grundzüge der theoretischen Logik* [Hilbert & Ackermann 1928] ; ceci pour cette raison, que beaucoup ont déjà fait valoir, qu'il suffit de compléter cette forme élémentaire de théorie des types par la distinction entre langage et métalangage, pour qu'elle suffise à surmonter les difficultés auxquelles son élaboration était destinée à répondre.

Comme le faisaient donc Hilbert et Ackermann dans leurs *Grundzüge der theoretischen Logik* [Hilbert & Ackermann 1928, 163], je désignerai le type d'un individu ou d'une variable d'individu par la lettre i, et je désignerai par $(a_1, \ldots, a_n)$ le type d'un prédicat ou d'une variable de prédicat à n places vides, expression où $a_1, \ldots, a_n$ représentent eux-mêmes les types respectifs des n occupants de ces places vides.

* * *

Que signifie alors que le discours tenu par l'auteur des livres proprement géométriques des *Eléments*, et tout autant par les géomètres qui, comme Archimède ou Apollonius, s'attacheront ensuite à prolonger l'œuvre de celui-ci, qu'un tel discours soit fondamentalement un discours du premier ordre ? Ceci signifie que le discours de ces différents auteurs traite d'objets de notre expérience immédiate, la plus élémentaire, d'objets sensibles que la tradition aristotélicienne qualifierait de *substances premières*, pour leur appliquer des prédicats (et je prends ici ce mot de *prédicat* non plus au sens aristotélicien, mais au sens moderne) eux-mêmes pourvus de un, deux, trois, ou, dirai-je plus généralement encore, de n arguments, qui désignent tous des individus.

Ainsi, pour commencer par les *prédicats monadiques*, donc du type (i), Euclide dit de certains de ses objets qu'ils *sont des points*, qu'ils *sont des lignes*, *droites* ou non, qu'ils *sont des surfaces*, *planes* ou non, *des angles*, *droits*, *obtus* ou *aigus* ; qu'ils *sont des cercles*, *des figures rectilignes*, *des triangles*, eux-mêmes *scalènes*, *isocèles*, *équilatéraux*, *rectangles*, *obtusangles*, *acutangles*, etc. Après Euclide, Archimède utilisera les prédicats monadiques de *section de cône rectangle*, *section de cône acutangle*, *section de cône obtusangle* auxquels Apollonius substituera peu après les appellations par lesquelles nous disons encore que telle figure *est une parabole*, *est une ellipse* ou *est une hyperbole*.

Mais l'auteur euclidien ne s'enferme heureusement pas dans les limites d'un simple usage de prédicats monadiques, comme la logique aristotélicienne aurait pu l'y inciter. Il mobilise en particulier toute une gamme de prédicats *binaires* ou *dyadiques*, donc de type (i, i) : … *plus petit que* …, … *plus grand que* …, … *égal à* …, … *perpendiculaire à* …, … *parallèle à* …, etc.

En matière de prédicats *ternaires* ou *triadiques*, donc du type (i, i, i), je me contenterai ici, pour ne pas multiplier les exemples, de mentionner la relation … *est entre* … *et* … appliquée à trois points distincts d'une même droite et déjà au moins implicitement présente dans plusieurs démonstrations du premier livre des *Eléments*.

Il me semble très caractéristique que, lorsque David Hilbert entreprendra, à partir de 1899, dans ses *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899], son œuvre de révision et de réorganisation des bases axiomatiques de la géométrie euclidienne, qui l'amènera à procéder à une vaste reformulation du discours géométrique, à une époque où pourtant il ne peut avoir qu'une familiarité très restreinte avec l'œuvre de Frege, à plus forte raison de Russell, il proposera fondamentalement de substituer une autre gamme de prédicats à celle sur laquelle l'auteur euclidien s'était plus ou moins appuyé. Pour me limiter à un seul exemple, j'ai souligné ailleurs [Gardies 1997, p. 20-23 et 43-46] qu'à la relation binaire, par laquelle s'expriment chez Euclide diverses formes d'*égalité*, Hilbert avait substitué cinq acceptions différentes de la *congruence*, deux admises comme indéfinies entre segments et entre angles, trois définies entre triangles, suites de points et figures, dont les propriétés fondamentales, même si elles se retrouvaient apparemment des unes aux autres, devaient s'établir distinctement. Ce faisant, Hilbert ne met pas en question le discours du premier ordre auquel se tenait l'auteur euclidien ; au contraire, il se maintient lui-même dans le même premier ordre, dont il se contente à cet égard de réformer le vocabulaire, sans mettre en cause le niveau logique auquel ce vocabulaire lui-même se situait.

Pour revenir à l'auteur euclidien, je souligne donc que ses quatre premiers livres ne débordent jamais, ni explicitement, ni implicitement, de ce premier ordre logique, dont la grammaire ne mobilise que ce qu'on appelle aujourd'hui des *prédicats d'individus à n arguments*. L'intérêt de ces quatre premiers livres est même de rassembler le maximum de résultats, en particulier le maximum de théorèmes, qu'on puisse obtenir sur une base logique aussi restreinte. Il est par exemple bien connu que l'auteur euclidien, à l'opposé de la majorité des géomètres modernes, fournit deux versions du classique *théorème* dit *de Pythagore*. On lui a reproché quelquefois naïvement d'avoir démontré le cas particulier, où les figures semblables construites sur les côtés du triangle rectangle sont de simples carrés, dès la fin de son premier livre, sans attendre d'être en état de démontrer le cas général, où les figures semblables sont quelconques, qu'il ne pourra établir qu'à la fin du livre VI. Ce, au contraire, dont il faut louer Euclide, c'est d'avoir essayé de réunir dans ces quatre premiers livres, l'essentiel de ce qu'il pouvait déjà obtenir sur une base logique aussi restreinte, avant d'avoir tenté d'élargir cette base.

L'élargissement de la base axiomatique ne viendra qu'ensuite ; il sera le fait de la *théorie des grandeurs* élaborée au livre V, sur lequel je suis bien obligé de revenir maintenant, bien que j'aie déjà du contenu de ce livre attribué à Eudoxe de Cnide beaucoup traité.

On peut dire d'une certaine manière, du point de vue de la *théorie des types*, que l'auteur du livre V introduit un objet nouveau, qui n'est plus cette fois de ces individus qu'on puisse rencontrer dans la rue et que j'avais désignés par la lettre i ; c'est le *logos*, en français, la *raison*, qu'une grandeur a relativement à une autre grandeur. Cette relation de grandeur à grandeur, donc de type (i, i), dont l'auteur euclidien de la définition 3 du livre V nous dit lui-même qu'elle est la *relation spécifique* *de deux grandeurs homogènes selon leur taille*[1], cet auteur réussit à en donner une définition dont le *definiens* ne déborde pas les limites du premier ordre.

Pour le dire d'une autre manière, quand la définition 5 du livre V énonce que

> Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la deuxième que la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième sont tels relativement à des équimultiples quelconques de la deuxième et de la quatrième que respectivement ils les surpassent à la fois ou leur sont égaux à la fois ou leur sont inférieurs à la fois,

l'identité de *raisons*, dont fait état le *definiendum* exprimé par le début de cette longue phrase porte sur des objets qui sont eux-même du type (i, i), c'est-à-dire qui ne sont pas du premier type, alors que le *definiens* exprimé par la seconde partie de cette phrase (« lorsque des équimultiples quelconques etc. ») porte directement sur des grandeurs, c'est-à-dire sur des objets de type i. Autrement dit, l'auteur de la définition réussit à donner un équivalent de l'égalité de ces objets du deuxième ordre que sont les *raisons* (raisons d'un objet du premier ordre à un autre objet du premier ordre), par recours à un prédicat tétradique, c'est-à-dire à quatre arguments, qui sont eux-mêmes des individus, prédicat qui de ce fait se maintient dans les limites du premier ordre.

Peu importe que cette révolution proprement grammaticale, une des plus grandes révolutions mathématiques qu'on doive mettre au crédit des géomètres grecs, soit l'œuvre d'Eudoxe de Cnide ou d'un autre ; ce qui importe, c'est que, dans la voie ainsi ouverte, se sont engagés non seulement l'auteur des livres proprement géométriques des *Elements* postérieurs au livre V, mais aussi Archimède et Apollonius.

Mais quel intérêt le géomètre grec avait-il donc à pouvoir dépasser, au moins virtuellement, le niveau de raisonnement qui se fût tenu à la considération des grandeurs du premier ordre, pour accéder, au moins en droit, à la considération directe des raisons elles-mêmes que ces grandeurs pouvaient avoir des unes aux autres ?

On l'a dit souvent, et je me contente ici de le répéter, en soulignant seulement qu'un tel propos renvoie en dernier lieu à la *théorie des types* : des grandeurs du premier ordre comme les segments de droite ne pouvaient elles-mêmes se prêter à d'autres opérations internes que l'addition

[1] Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις.
J'emploie ici le mot de *taille*, pour surmonter l'ambiguïté du mot *grandeur*, lequel peut désigner aussi bien la propriété d'un objet que l'objet lui-même considéré sous le rapport de cette propriété.

et la soustraction. Je ne m'attarderai pas ici à montrer dans le détail, parce que je l'ai déjà fait ailleurs [Gardies 1988, p. 49-68], que la *théorie des grandeurs*, établie au livre V, ouvre la voie, notamment par ses propositions 22, 23 et 24, et non sans recourir à des moyens proprement géométriques qui seront mis en œuvre au livre VI, ouvre la voie, dis-je, à une nouvelle forme qu'y prendront les quatre opérations fondamentales ; si bien que l'ensemble des grandeurs, à partir du livre VI, aura les propriétés, sinon de ce que Dedekind appellera un *corps*, du moins d'un semi-corps, propriété dont on ne pouvait trouver aucun équivalent au niveau précédent.

Mais le plus remarquable est que la notion de *raison*, ayant été elle-même introduite par voie strictement définitionnelle, c'est-à-dire par voie d'une définition dont le *definiens* se maintenait lui-même intégralement dans les limites du premier ordre logique, permet ainsi au géomètre grec de ne pas dépasser *en droit* les limites de ce premier ordre, sans pour autant s'enfermer dans les limites des ressources logiques que ce premier ordre, réduit à lui seul, pouvait mettre à sa disposition.

Tel est le miracle logique qui s'opère au livre V et sans lequel non seulement la suite des livres géométriques d'Euclide, mais toute l'œuvre d'Archimède et d'Apollonius n'auraient pas pu ensuite être entreprises. En droit, il n'y est question que d'objets individuels et, à cet égard, toutes les innovations des successeurs d'Euclide ne consisteront jamais qu'à introduire des objets individuels nouveaux, qui n'avaient pas encore été étudiés en tant que tels, comme les sections coniques. De l'objet *raison*, de l'objet *logos*, au niveau duquel s'ouvrent de nouvelles possibilités opératoires, on peut dire qu'il n'est logiquement que suggéré, puisque le *definiens* dans lequel il se laisse définir, donc par lequel nous pouvons toujours le remplacer, peut lui-même se dire sans qu'on ait jamais besoin de sortir du premier ordre.

Je résume ce que je viens de dire dans la première partie de mon article : les livres proprement géométriques des *Eléments*, *en droit*, se maintiennent intégralement dans les limites du premier ordre logique ; *en fait*, ils parviennent à intégrer, par voie strictement définitionnelle, les propriétés de l'objet *logos*, objet pourtant en lui-même inaccessible au premier ordre.

Je n'ai évidemment pas la place de montrer ici comment ce coup de génie d'ordre strictement grammatical rendra possibles les développements qu'Archimède et Apollonius donneront à la géométrie. Je me contente de revenir sur le cas du *théorème de Pythagore* : si sa version la plus générale, où il s'applique, non seulement aux simples carrés, mais à toutes les figures semblables construites sur les côtés du triangle rectangle, n'est établie par Euclide qu'à la fin du livre VI, c'est que la notion de *similitude*, sans laquelle cette version la plus générale ne peut même pas être formulée, implique elle-même la notion de *raison*, dépassant *en fait* les moyens du premier ordre logique, sans les dépasser *en droit.*

* * *

Je passe à l'arithmétique, dont j'ai déjà rappelé qu'elle occupait essentiellement dans la somme euclidienne les livres VII, VIII et IX.

J'ai déjà dit que les objets de la géométrie étaient de ces *substances premières* auxquelles l'auteur euclidien appliquait des *propriétés* ou *relations*, disons, plus généralement, des prédicats qui pouvaient être *monadiques* (... *est un point*, ... *est une droite*), *dyadiques* (... *est perpendiculaire à* ... ou ... *est parallèle à* ...), triadiques (... *est entre* ... *et* ...), voire tétradiques (comme le prédicat qui servait, au livre V, à définir la *proportion*). Les objets de l'arithmétique, en revanche, sont, pour l'auteur euclidien, ce qu'il appelle les *nombres* et que nous appelons les *nombres entiers naturels.*

Que sont ces nombres ? Je veux dire : quel est leur type d'existence ? Platon, dans un passage de l'*Hippias majeur* (300 a9-303 c6) sur lequel Frege lui-même a attiré l'attention, faisait déjà état des absurdités auxquelles eût abouti le parti de considérer les nombres comme des prédicats d'individus. Si l'on admettait en effet, dans une telle perspective, qu'on pût dire que Hippias *est un* et que Socrate lui-même *est un*, ne devrait-on pas en déduire que Hippias et Socrate *ne sont qu'un* ? et, réciproquement, pour s'autoriser à dire que Hippias et Socrate *sont deux*, ne faudrait-il pas admettre que déjà Hippias lui-même *fût deux* et que Socrate lui-même *fût deux* ? Ceci résultait en effet de cette incontestable évidence que, *dans les limites du premier ordre*, on ne peut reconnaître un même caractère à plusieurs individus que si chacun d'eux le possède déjà.

L'erreur serait ici de traiter le nombre comme un prédicat d'individu, ce que l'auteur des livres arithmétiques d'Euclide heureusement ne fait pas. L'auteur euclidien sait-il pour autant ce qu'est un nombre ? Depuis la fin du XIX^{e} siècle, des auteurs comme Cantor ou Frege nous ont appris, chacun à leur manière, qu'un nombre entier était, si on le considérait en extension, un *ensemble d'ensembles* (le nombre *deux* est assimilable à un ensemble de couples) ou, si on le considérait en compréhension, une *propriété de propriétés.* Le nombre s'obtient, semble-t-il, par un processus de thématisation, lequel présuppose, comme pratiquement toute thématisation d'un nouveau concept d'ordre immédiatement supérieur au niveau dont on est initialement parti, la reconnaissance d'une relation d'équivalence, en l'occurrence la relation biunivoque d'équipotence ou d'équinuméricité.

L'auteur euclidien, quoi qu'il en soit, n'accède pas à une telle analyse. mais il se garde bien de l'erreur qui eût consisté à traiter les nombres, au même niveau logique auquel il avait traité les propriétés de la géométrie, comme des propriétés d'individus. Ayant donc la lucidité de ne pas traiter le nombre comme un prédicat d'individu, mais n'ayant pas encore reconnu en lui le prédicat de prédicat que nous reconnaissons en lui depuis un peu plus d'un siècle, il prendra le parti de le considérer lui-même comme un simple individu.

Tel est le sens des deux premières prétendues *définitions* par où s'ouvre le livre VII, premier des livres arithmétiques, des *Eléments* :

1. Est unité ce selon quoi chacune des choses qui sont est dite une,

2. Est nombre la multitude composée d'unités.

L'unité est donc l'objet concret lui-même, qu'on choisit arbitrairement comme unité, ou comme mesure ; peu importe que ce soit un caillou, un jeton, bref un être quelconque, à condition qu'il se laisse en quelque sorte agglomérer avec d'autres objets de même statut. Ces deux définitions enveloppent ainsi une contrainte grammaticale, celle de ne pas considérer le nombre autrement qu'on ne considère un objet singulier, que celui-ci soit simple ou composé.

Dans sa *Métaphysique* (1088 a, 4-9), Aristote justifiait d'avance magnifiquement le parti, ainsi pris par l'auteur euclidien, de considérer le nombre comme une simple chose, et de ne pas considérer l'unité, constitutive de cette chose, elle-même comme un nombre :

> L'un signifie qu'il est mesure de quelque multiplicité, tandis que le nombre signifie qu'il est multiplicité mesurée et multiplicté de mesures (c'est pourquoi aussi en bonne raison l'un n'est pas un nombre ; car la mesure n'est pas des mesures, mais, comme la mesure, l'un est principe). Il faut toujours pour toutes choses que quelque chose qui soit la même chose serve de mesure.

Le logicien observera que les deux prétendues *définitions* qui ouvrent le livre VII reviennent à admettre deux *termes premiers indéfinis* (comme on pouvait s'y attendre, puisqu'enfin on voit mal comment une définition serait réalisable sans admission préalable de quelque indéfini) : d'une part, l'*unité* que je désignerai par le chiffre 1 ; d'autre part, l'opération d'*addition* entre deux nombres, que je désignerai par le signe +. C'est en s'appuyant sur ces deux indéfinis que la seconde de ces deux définitions permet elle-même de définir la suite des *nombres*, dont 2 est le premier :

$$\begin{aligned} 2 &\stackrel{\text{df}}{=} 1+1 \\ 3 &\stackrel{\text{df}}{=} 1+1+1 \\ \text{etc.} & \end{aligned}$$

C'est encore à partir de ces deux termes premiers indéfinis que la définition 16 de ce livre VII :

> Un nombre est dit multiplier un nombre, quand on obtient un nombre en ajoutant autant de fois le second qu'il y a d'unités dans le premier.

construit la *multiplication* d'une manière qui revient à dire :

$$a \times b \stackrel{\text{df}}{=} b_1 + b_2 + \ldots b_a \qquad (b \text{ unités prises } a \text{ fois})$$

sans recourir à quoi que ce soit d'autre que ces b_i additionnés les uns aux autres de la même manière dont chacun avait lui-même été obtenu par addition d'unités.

De façon analogue, et toujours sur la base des deux seuls mêmes termes premiers indéfinis, le contexte de ce début du livre VII montre que la *soustraction* se laisse définir sous la forme :

$$a - b = x \stackrel{\text{df}}{=} x + b = a$$

ce qui présuppose qu'on puisse, pour obtenir a, additionner x et b, c'est-à-dire que

$$\exists x\,(x + b = a)$$

expression qu'on peut à son tour considérer comme le *definiens* du *definiendum* :

$$b < a.$$

Sur la même base se laisse construire la *division* :

$$a : b = x \stackrel{\text{df}}{=} a = x \times b$$

puisqu'on peut encore transcrire cette définition, en ne recourant cette fois qu'aux deux termes premiers indéfinis, sous la forme :

$$a : b = x \stackrel{\text{df}}{=} a = b_1 + b_2 + \ldots + b_x.$$

Ceci présuppose que

$$\exists x\,(a : b = x)$$

c'est-à-dire que

$$\exists x \, (a = b_1 + b_2 + \ldots + b_x),$$

expression qui revêt au livre VII diverses formes équivalentes comme :

b est partie de a
b mesure a
a est un multiple de b.

De ce fait, la définition 12 :

Est nombre premier celui qui est mesuré par la seule unité.

revient à faire correspondre au *definiendum* :

a est premier

l'un quelconque des au moins quatre *definientia* suivants, tous évidemment équivalents entre eux :

$$\begin{array}{rc} \sim \exists x & (x \neq 1 \wedge x \, \textit{mesure} \, a) \\ \forall x & (x \neq 1 \Rightarrow x \, \textit{ne mesure pas} \, a) \\ \forall x & [x \neq 1 \Rightarrow \sim \exists y \, (y \neq 1 \wedge x \times y = a)] \\ \forall x, y & [(x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow x \times y \neq a,] \end{array}$$

expressions dont la pure et simple négation constitue elle-même le *definiens* de la définition 14 de *a est composé* :

Est nombre composé celui qui est mesuré par quelque nombre.

Mon présent propos est ainsi de montrer que l'arithmétique des livres VII, VIII et IX des *Eléments* d'Euclide est intégralement construite sur la double supposition que l'*unité* est elle-même une sorte de *substance première* (pour parler en termes aristotéliciens), une sorte d'*individu* (pour parler en termes de logique moderne), et qu'à partir de telles unités-individus, les autres nombres (les Grecs auraient dit simplement *les nombres*, puisque l'unité elle-même, on l'a vu, n'était pas un nombre) se construisent par une sorte de procédure d'agglomération. Ainsi, les deux premières définitions du livre VII (celle de l'*unité* et celle du *nombre*) envelopperaient une invitation à considérer l'arithmétique elle-même, tout autant que la géométrie, mais pour de tout autres raisons, comme un discours du premier ordre logique.

* * *

Que les nombres entiers naturels fussent ainsi réduits au même statut d'*individus*, qui était déjà celui des objets propres de la géométrie, avait pour première conséquence (conséquence évidemment heureuse) de mettre l'arithmétique euclidienne à l'abri des paralogismes, dont on a vu que Platon, dans son *Hippias majeur*, avait dénoncé l'essentielle possibilité.

Sans doute, avons-nous compris, au moins depuis Cantor et Frege, que les nombres entiers naturels ne sont pas davantage eux-mêmes des individus qu'ils ne sont des prédicats d'individus, parce qu'ils sont des *prédicats de prédicats d'individus*, ou, si l'on préfère le dire dans le vocabulaire de l'extension, des *ensembles d'ensembles*.

Mais le risque de paradoxes dénoncés par Platon ne vient pas tant de la différence de type elle-même que du voisinage de types différents. C'est le voisinage du type entre l'ensemble des individus Hippias et Socrate, d'une part, et ces individus eux-mêmes, d'autre part, qui induisait à attribuer abusivement à chacun de ces individus, le prédicat de prédicat *deux*, qui n'était en droit applicable qu'à leur ensemble. Si, en revanche, on accorde aux nombres eux-mêmes, en lieu et place de leur statut normal de *prédicat de prédicat* ou d'*ensemble d'ensembles*, celui de simples *individus*, l'écart de type devient alors suffisant pour nous mettre à l'abri des confusions imputables à l'ambiguïté du verbe *être*. Je rappelle ce que diront à ce sujet Whitehead et Russell dans les *Principia Mathematica* :

> Nous pouvons remplacer le type des individus par n'importe quel autre type, pourvu nous procédions à un changement correspondant dans tous les autres types qui se présentent dans le même contexte. C'est-à-dire que nous pouvons donner le nom d'« individus relatifs » aux membres d'un type arbitrairement choisi. [Whitehead & Russell 1910, p. 65]

Que les nombres entiers naturels soient en eux-mêmes essentiellement des prédicats de prédicats ne les empêche pas de pouvoir jouer ce rôle d'« individus relatifs », que leur confie implicitement l'auteur grec. Une telle base, simple et solide, suffira à mettre l'ensemble des résultats de l'arithmétique grecque, pris en eux-mêmes, à l'abri de toute contestation possible. L'auteur grec se trouve ainsi par le texte de Whitehead et Russell rétrospectivement justifié.

* * *

Mais alors, si l'on traite les nombres de l'arithmétique, tout aussi bien que les grandeurs de la géométrie, comme des entités les unes et les autres fondamentalement individuelles, le texte de Whitehead et Russell que je viens de citer ne prouve-t-il pas aussi que nous ne serons à l'abri de tout risque logique qu'aussi longtemps que nous maintiendrons un mur entre ces deux domaines d'intelligibilité ? Faute de quoi, c'est-à-dire, pour reprendre les termes de la citation, faute d'avoir « procédé à un changement correspondant dans tous les autres types qui se présentent dans le même contexte », le voisinage des « individus relatifs » de l'arithmétique avec les *individus absolus* de la géométrie nous conduirait à des situations aussi burlesques que celles auquelles l'*Hippias majeur* montrait que conduisait la supposition qu'un nombre fût un simple prédicat d'individus.

Telle est la justification fondamentale de cette apparente anomalie, qu'il y ait, dans la *presque totalité* de la somme euclidienne, une séparation rigoureuse entre le traitement des objets de la géométrie et celui des objets de l'arithmétique. La restriction de mon « presque » tient évidemment à l'existence du livre X des *Eléments*, dont il me suffirait ici de citer les propositions 5, 6, 7 et 8, qui non sans quelques répétitions, reviennent à dire que

> des grandeurs sont commensurables l'une avec l'autre si et seulement si elles ont l'une à l'autre la raison qu'un nombre a à un nombre.

Autrement dit, une *raison*, un *logos* de grandeur à grandeur, pourrait être identique à une *raison*, à un *logos*, cette fois de nombre à nombre. Une telle équivalence peut ainsi, dans ce livre X, tenir lieu de définition de la *commensurabilité*.

Cette définition est d'autant plus étonnante qu'elle vient doubler la définition 1 que ce même livre avait déjà donnée de la même notion :

> On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure ; et incommensurables celles dont il ne peut y avoir aucune commune mesure.

Cette définition, par elle-même, prétendait bien définir la *commensurabilité* sans le moindre recours à la notion arithmétique de *nombre*. Il va de soi que, pour pouvoir établir ce que j'appellerai la *redéfinition arithmétique de la commensurabilité des grandeurs*, ces propositions 5, 6, 7 et 8 étaient bien obligées de recourir aux livres arithmétiques, inaugurant cette coopération des grandeurs et des nombres, qui s'étend à tout le reste du livre X, alors qu'elle était aussi essentiellement étrangère à tous les livres précédents qu'elle le sera aux deux livres suivants XI et XII.

Les conséquences qui sont tirées au livre X d'une telle communication entre grandeurs géométriques et nombres vont encore s'étendre à certains développements, certes très importants, mais logiquement clairement circonscrits, du livre XIII. Ces développements du livre X et du livre XIII, qui présupposent donc une communication entre arithmétique et géométrie, ont à cet égard une situation si exceptionnelle, non seulement dans l'ensemble de la somme euclidienne, mais dans l'ensemble des œuvres postérieures qui nous sont parvenues d'Archimède et d'Apollonius, qu'elles posent un problème d'auteur, sur lequel je veux d'autant moins revenir ici que j'en ai traité ailleurs [Gardies 1997, chapitre IX, p. 219-267].

Cette étanchéité entre arithmétique et géométrie (à l'exception près à laquelle je viens de faire allusion) a cependant été contestée, notamment par un auteur suffisamment considérable pour que je me sente ici obligé de faire état de son objection et d'y répondre. Cet auteur est Frege lui-même, et le texte d'Euclide où il voit une interférence entre l'arithmétique d'une part et la *théorie des grandeurs* d'autre part, dont j'avais souligné qu'elle était, au livre V des *Eléments*, au fondement de la géométrie euclidienne, est celui-là même de cette définition 5, dont j'ai essayé de montrer qu'elle avait permis à l'auteur euclidien d'accéder à la notion de *logos* ou de *raison* sans quitter pour autant *en droit* le premier ordre logique.

Je rappelle l'énoncé, ou du moins le début de l'énoncé, de cette définition 5 :

> Des grandeurs sont dites en même raison, la première à la deuxième que la troisième à la quatrième, lorsque des *équimultiples* quelconques de la première et de la troisième sont tels relativement à des *équimultiples* quelconques de la deuxième et de la quatrième [. . .].

Sur quoi Frege, dans ses *Fondements de l'arithmétique*, réagit de la manière suivante :

> Euclide a besoin du concept d'équimultiple pour définir l'égalité de deux rapports de longueur ; et l'équimultiplicité renvoie à son tour à une égalité de nombres. [Frege 1884, p. 32][2]

Autrement dit, la théorie des grandeurs élaborée au livre V, loin de permettre de fonder la géométrie sur une base indépendante de l'arithmétique, présupposerait l'acquisition de l'arithmétique.

Le propos de Frege montre surtout combien cet auteur, qui est certainement avec Peano, le plus grand précurseur de la *théorie des types*, est encore loin de maîtriser toutes les implications de celle-ci.

Il est certain que le recours de la définition 5 du livre V à la notion d'*équimultiple*, en grec ἰσάχις πολλαπλάσια, c'est-à-dire littéralement *autant de fois aussi grand que*, peut *suggérer* le recours au nombre entier ;

[2]„Euklid braucht den Begriff des Gleichvielfachen um die Gleichheit von zwei Längenverhältnissen zu definiren, und das Gleichvielfache kommt wieder auf eine Zahlengleichheit hinaus."

mais, s'il le suggère métalinguistiquement, il ne l'implique absolument pas au niveau strictement linguistique. La remarque de Frege montre tout au plus que la distinction entre langage et métalangage n'était pas encore totalement évidente à ses yeux.

Je maintiens donc, en dépit de cette déclaration de Frege lui-même, que, pour la géométrie classique des Grecs, celle-là même qui est déjà largement ouverte aux procédures d'intégration, si l'on met de côté le cas du livre X des *Eléments* et des prolongements que ce livre reçoit au livre XIII, les nombres entiers naturels eux-mêmes n'existent pas.

Cette séparation rigoureuse entre l'*arithmétique*, science des nombres, d'une part, et la *théorie des grandeurs*, d'autre part, sur laquelle la géométrie s'appuyait à partir d'un certain niveau, se trouvait d'ailleurs déjà explicitement affirmée par Aristote dans ses *Seconds analytiques* (75 a 38 - 75 b 6) :

> On ne peut passer dans la démonstration d'un genre à un autre, par exemple démontrer le géométrique par l'arithmétique [...]. Il est possible que les axiomes dont procède la démonstration soient les mêmes ; mais, si les genres sont différents, comme pour l'arithmétique et la géométrie, on ne peut appliquer la démonstration arithmétique aux propriétés des grandeurs, à moins d'admettre que les grandeurs soient des nombres.

Les grandeurs ne sont pas plus des nombres que les nombres ne sont des grandeurs. Comme d'ailleurs, les nombres, objets des livres arithmétiques VII, VIII et IX, ne sont introduits dans la somme euclidienne qu'après les grandeurs elles-mêmes, lesquelles, je le rappelle, apparaissent déjà au livre V, c'est abusivement que certains commentateurs ont cru pouvoir chercher dans ces livres proprement arithmétiques des références à ce livre V.

Ayant déjà montré ailleurs [Gardies 1988, p. 10-13] pourquoi ces prétendues références des livres arithmétiques à la théorie des grandeurs, que d'aussi lucides commentateurs que Peyrard ou Heiberg ont cru pouvoir déceler chez Euclide, ne me paraissaient pas fondées, je ne reviendrai pas maintenant sur ce sujet.

* * *

Je résume l'ensemble de mon propos.

La structure de la mathématique grecque, telle qu'elle est exposée dans les *Eléments* d'Euclide et telle qu'elle se prolonge dans les œuvres qui nous sont parvenues d'Archimède et d'Apollonius, s'éclaire par la *théorie* russellienne *des types*.

Si l'on fait exception du livre X des *Eléments* et de certains prolongements que celui-ci reçoit au livre XIII, lesquels, très nettement circonscrits, posent un problème d'attribution, sur lequel je n'ai pas non plus à revenir ici, le reste de la somme euclidienne témoigne d'une rigoureuse séparation entre le traitement de la géométrie et celui-ci de l'arithmétique. En dehors des passages que je viens de mentionner, il n'y a aucun recours chez Euclide et, par le fait même, chez ses successeurs Archimède et Apollonius, ni de la géométrie à l'arithmétique, ni de l'arithmétique à la géométrie.

La géométrie euclidienne, telle qu'elle est développée aux quatre premiers livres des *Eléments*, se maintient rigoureusement dans un discours du premier ordre. Le génie de ces quatre premiers livres est même que l'auteur ait su y regrouper l'essentiel des résultats géométriques qu'on pouvait obtenir sur une base aussi restreinte.

Survient le livre V, dont le génie propre est cette fois de dépasser les possibilités du premier ordre logique, et de le faire par voie strictement définitionnelle : c'est-à-dire qu'à un *definiendum* qui franchit les limites du premier ordre, érigeant en quelque manière la *raison*, le *logos* en entité et permettant ainsi d'accéder aux propriétés opératoires d'un semi-corps, l'auteur du livre V fait correspondre un *definiens* qui lui-même se maintient entièrement dans les limites de ce premier ordre. Nous savons tous, au moins depuis Pascal, qui l'a remarquablement exprimé, ce qu'est une définition. Mais prenons garde : dans le cas le plus classique, comme lorsqu'on définit, en *calcul des propositions*, le connecteur de la *disjonction* à partir du connecteur de l'*implication*, il n'y a aucune différence de type entre *definiens* et *definiendum*. L'originalité fondamentale de la définition 5 du livre V d'Euclide est d'avoir su imaginer un *definiens*, lui-même du premier ordre logique, pour un *definiendum* qui, en évoquant le *logos*, débordait le premier ordre. Là était le coup de génie dont rend compte rétrospectivement la *théorie des types*.

En ce qui concerne, en revanche, l'arithmétique, l'auteur euclidien s'était comporté d'une manière peut-être moins géniale et évidemment intrinséquement au moins discutable, même si elle suffisait à mettre cette arithmétique à l'abri de résultats paradoxaux, à la condition bien sûr qu'elle se tînt à l'écart de la géométrie elle-même. Platon avait déjà expliqué à sa manière que les nombres ne pouvaient pas être des *prédicats d'individus*. Frege et Cantor enseigneront qu'ils sont des *prédicats de prédicats* (en compréhension) ou des *ensembles d'ensembles* (en extension). L'auteur euclidien, comme en témoignent les deux premières définitions de son livre VII, avait pris le parti de traiter les nombres directement comme des choses ; ce qui sans doute en soi-même est fondamentalement faux, mais ne comportait pas plus de danger que n'en comporte l'attitude de chacun d'entre nous quand nous comptons sur nos doigts, ou celle du comptable oriental qui, naguère encore, faisait ses opérations sur son boulier. L'écart de type entre l'objet individuel et le prédicat de prédicat est suffisant pour mettre à l'abri des confusions que l'*Hippias majeur* avait évoquées.

Bilbiographie

Frege, Gottlob

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884 ; cité d'après Hamburg : Felix Meiner, 1988 ; trad. fr. par C. Imbert, Paris : Seuil, 1969.

Gardies, Jean-Louis

1997 *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Paris : Vrin, 1997.

1988 *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Paris : Vrin, 1988.

Hilbert, David & Bernays, Paul

1934-39 *Grundlagen der Mathematik*, Berlin : Springer, vol. 1, 1934, vol. 2, 1939 ; 2ᵉ éd., 1968-1970 ; trad. fr. par F. Gaillard, E. et M. Guillaume, Paris : L'Harmattan, 2001.

Hilbert, David & Ackermann, W.

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin : Springer, 1928, cité d'après la 5ᵉ éd., 1967.

Hilbert, David

1899 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899 ; 2ᵉ éd., Leipzig : Teubner, 1903 ; 7ᵉ éd., Leipzig-Berlin : Teubner ; trad. fr. par P. Rossier, Paris : Dunod, 1971.

Whitehead, Albert North & Russell, Bertrand

1910 *Principia Mathematica*, Cambridge, vol. 1, 1910, vol. 2, 1912, vol. 3, 1913 ; 2ᵉ éd., 1925-1927.