En quoi la crise des fondements des mathématiques est-elle terminée ?

Emmanuel Barot
Département de Philosophie, Université de Toulouse II - Le Mirail (France)

Résumé : La « crise » des fondements des mathématiques (1902-1931) fut l'agent de l'avènement du *paradigme axiomatico-ensembliste* dans lequel la plupart des tensions et stratégies fondationnelles continuent d'être formulées. Au terme d'une synthèse de ces interrogations et de leurs traductions techniques, qui suit le fil conducteur de l'opposition constructif / non-constructif, on montre quelques-unes des subversions, encore minoritaires, que subit ce paradigme. On insiste alors sur les voies possibles de son dépassement, en pointant l'essoufflement conceptuel qui transparaît derrière le dynamisme de l'une de ses branches actuelles, la théorie *descriptive* des ensembles. L'objectif est ainsi de contribuer à l'examen distancié, proprement épistémologique, de la *nature* des étapes du développement des mathématiques au $20^{\text{ème}}$ siècle.

Abstract: The « crisis in the foundations of mathematics » (1902-1931) contributed to the advent of an *axiomatic set-theoretic paradigm* in terms of which the pressing questions of « Foundations of Mathematics » are still treated. Following the opposition between constructive and non-constructive philosophical and technical approaches, we provide the reader with a synthesis of these main questions, and present some minority insights which try to subvert this paradigm. We claim that the fruitful contemporary *descriptive* set theory, for example, actually reveals that this paradigm is getting exhausted conceptually speaking, and must be transcended. We thus hope to contribute towards a properly epistemological task : examining the *nature* of the stages of mathematical developments in 20^{th} century.

« Toute présomption d'existence engage un acte de foi. Le réalisme mathématique n'a pas le privilège de la foi, mais celui de sa visibilité »
Jules Vuillemin [1]

1 Position du problème

On peut faire remonter précisément la naissance de la « crise des fondements » des mathématiques à la lettre que Russell adresse à Frege le16 juin 1902, pour lui exposer la dommageable imprédicativité qui grève son dispositif du paradoxe bien connu. Il est plus malaisé cependant de dire quand cette crise s'est terminée, puisque cela implique l'interprétation de ce qu'est une « crise ». Le concept mériterait une étude autonome, mais, du fait des contraintes matérielles de ce propos, j'en fixe ici un sens étroit et descriptif : période de transition, préparée mais née sous l'impulsion de facteurs déclenchants précis, où des contradictions, exacerbées jusqu'au paroxysme, accélèrent de façon décisive l'état d'un ou plusieurs problèmes, pour laisser des traces durables (habitudes de pensées et de comportements). De ce point de vue le « problème des fondements » tel qu'il est diversement traité aujourd'hui témoigne de telles traces critiques, sans pour autant être encore le centre d'une crise.

Le présent travail, qui questionne la façon dont les traces de cette crise affectent encore aujourd'hui de façon massive les questionnements fondationnels des mathématiques contemporaines, constitue la seconde partie d'une étude qui s'enracine dans une lecture des tendances *localement* révolutionnaires (géométrie, analyse réelle, analyse complexe, algèbre) des mathématiques du 19$^{\text{ème}}$ siècle, étude en laquelle je défends la thèse [Barot 2004] selon laquelle la crise des fondements est une crise *révolutionnaire* (en un sens kuhnien explicitement revisité [Mouloud 1989]), dans la mesure où les redéploiements conceptuels et méthodologiques qu'elle a induits ont abouti à l'avènement d'un authentique paradigme, le paradigme axiomatico-ensembliste dont l'emblème furent les *Eléments de mathématique* de Bourbaki.

Dans des termes et perspectives analogues voire parfois identiques à celles de la belle époque, l'objet de la crise, déjà séculaire, reste fondamentalement le même : nature des objets et procédés logico-mathématiques, présupposés onto-philosophiques des thèses « transcendantes » d'existence, mode de contrôle de ce que celles-ci instituent, consistance et complètude des systèmes formels. La particularité de cette crise tient

1. « Formalisme et réflexion philosophique », *Bulletin de la Société Française de Philosophie*, 25 mars 2000, § 7, page 2.

au caractère *non-finitaire* associé structurellement à cet objet pluriel, comme on va le voir ici. La variété contemporaine accrue des platonismes, constructivismes, et nominalismes qui s'approprient cet objet, témoigne d'approfondissements liés en partie aux enjeux et attendus fondationnels des nombreux résultats techniques récents [Buss & Alii 2001], et du caractère en partie obsolète des visées techniques de consistance absolue. Mais elle montre aussi un renouveau certain : le rejet symptomatique des « idéologies » du mathématique (ainsi formalisme et intuitionnisme dans leurs versions et oppositions scolaires), dépassement typique de la sortie de l'effervescence et de la radicalité, de l'intolérance même, propres aux crises.

Pourtant cette variété conceptuelle reconduit des controverses fondatrices, ainsi celle entre thèses *actualistes* et purement *nominalistes* de l'infini non dénombrable, dans l'actuelle théorie descriptive des ensembles [1], branche dynamique de la théorie moderne des ensembles qui vise à déterminer le continu en se plaçant dans la topologie réelle des espaces polonais (ou encore dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). Sont étudiés et classés, en elle, les ensembles de réels sous formes de hiérarchies extensibles, les *borélienne* et *projective*. ZF ou ZFC constituent un socle axiomatique suffisant pour l'analyse mathématique courante. Mais décider l'hypothèse du continu ou déterminer certaines propriétés naturelles d'ensembles complexes (appartenant à des étages de plus en plus élevés de ces hiérarchies) excède leurs ressources démonstratives, ce qui semble exiger une nécessaire prise de position entre la *stratégie minimaliste* choisissant un univers ensembliste pauvre mais contrôlé, *l'univers constructible*, et la *stratégie maximaliste des grands cardinaux*.

Je rappelle d'abord quelques caractères du débat dans les termes de cette crise, puis tâche de montrer, sur l'exemple principal de cette branche théorique contemporaine comment ces caractères se sont transmis, et comment ils trouvent, malgré une continuité conceptuelle et problématique, de nets infléchissements. De façon nécessairement très générale on dessinera quelques perspectives, en suggérant finalement qu'un programme constructiviste ouvert comme celui de S. Feferman aujourd'hui, va jusqu'à ouvrir à un véritable dépassement dialectique des problèmes qui ont structuré cette crise et ses tendances héritières, c'est-à-dire ouvre à la sortie du paradigme que la crise a instauré.

1. La théorie des ensembles moderne est active principalement dans deux directions : la théorie descriptive ([Kechris 1999] et pour un exposé global [Kuratowski & Mostowski 1976, ch. X-XIV 375–475]) et la théorie combinatoire qui étudie les propriétés des ensembles du point de vue de leur cardinalité. Sur les distinctions historiographiques utiles entre théorie des ensembles, langage ensembliste et ensemblisme *fondationnel*, voir [Ferreiros 1999].

2 L'exigence constructive dans la crise des fondements

L'exigence *constructive* extrêmement présente aujourd'hui [2], est polymorphe parce qu'elle hérite d'une longue tradition également diversifiée. De la construction à la règle et au compas chez Euclide à la constructibilité point par point des courbes géométriques sur la base du référent analytique chez Descartes, puis à l'idée kantienne que la mathématique est connaissance par construction de concepts dans l'intuition pure via le schématisme transcendantal, l'exigence reste celle de l'*effectivité*, quoiqu'elle enveloppe nécessairement, puisque la géométrie mobilise le continu, une dimension non constructive. La perspective proprement *constructiviste* s'est développée ensuite sous l'impulsion de l'intuitionnisme, de l'école française du début du 20$^{\text{ème}}$ siècle (Baire, Borel, Lebesgue, et un peu à part, Poincaré), et surtout de Brouwer. Celui-ci, prenant acte du rôle central de la conception actualiste de l'infini dans l'existence des paradoxes de la théorie naïve des ensembles, a associé à son entreprise critique de la logique et de l'analyse classiques [Largeault 1992] l'élaboration d'un dispositif théorique concurrent.

Le λ-calcul, la théorie des fonctions récursives, et celle des machines de Türing ont constitué diverses formulations équivalentes de cette exigence de procédés *effectifs* de démonstration. Mais le finitisme de Hilbert est aussi une forme de constructivisme : si la sauvegard du « paradis de Cantor » passait par pour lui par l'adjonction d'éléments idéaux, ceux-ci ne sont pas selon lui de même nature que les objets institués en un nombre fini d'étapes ou les démonstrations menées *effectivement* (spécialement dans la visée métamathématique des démonstrations finitistes de consistance). Une démonstration authentique au sens constructif repose sur une activité concrète contrôlée et effectuée en un temps fini ou contrôlant l'infini par des lois formelles : ce dont le raisonnement par récurrence est le paradigme pour Poincaré.

Cette variété des constructivismes, accrue aujourd'hui, montre que la réflexion traditionnelle sur la nature des objets et des axiomes mathématiques, ne peut se permettre l'absence de nuances : l'opposition

2. La version *effective-récursive* de la théorie descriptive des ensembles [Salanskis 1995, 198–200], la fondation constructiviste de l'Analyse non-standard [Salanskis 1999], la théorie initiale des catégories, le système des quantificateurs constructibles [Chihara 1990], le programme des "Reverse Mathematics" de Friedman, la réécriture prédicative de l'arithmétique et de l'analyse [Feferman 1998], la logique IF du premier ordre élaborée comme "framework" anti-ensembliste au titre d'un "constructivism reconstructed" [Hintikka 1996], par exemple, illustrent très diversement cette exigence.

constructif/actualiste n'est pas statique ni même toujours bien délimitée. Weyl, Heyting se sont efforcés de nuancer les thèses de Brouwer, très restrictives ; Gentzen a proposé une interprétation constructive de l'induction transfinie qu'il mobilise dans sa démonstration de consistance de l'arithmétique élémentaire ; Gödel a développé et pratiqué les deux perspectives, pour défendre à partir de 1947 un certain platonisme que l'on dira « intuitiviste » plus qu'intuitionniste, alors qu'il considérait antérieurement n'être pas en opposition au programme hilbertien (bien que le théorème d'incomplétude de 1931 ait pu suggérer le contraire), etc.

Il reste que d'un point de vue constructif au sens le plus consensuel le « passage » de la non-contradiction à l'existence, *i.e.*, en propre le théorème d'existence, ne doit en aucune façon être une pure *thèse* d'existence. De telles thèses d'existence, au contraire prennent un visage métaphysico-religieux : que sont donc ces ensembles, sinon des « entités suspectes », sans aucun référent dans la pratique calculatoire effectuable, et demeurant en un monde éternel à part en lequel il faudrait croire à défaut de le découvrir ? Il faut refuser, *i.e.*, « raser » ces entités suspectes : d'où la forme nominaliste-ockhamienne que prend souvent le constructivisme.

3 Propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et Théorie Descriptive des Ensembles

Si cette crise des fondements est *du passé*, les problèmes, gros d'enjeux, qu'elle a soulevés sont loin d'être aujourd'hui *dépassés*. On s'interroge toujours sur les moyens de s'assurer de certaines propriétés naturelles d'ensembles jugés riches et intéressants, sur comment progresser dans la détermination de l'infini. En particulier se poursuit la recherche de voies « pleines d'avenir » pour la détermination du continu et des infinis que celui-ci révèle, et techniquement des outils mathématiques qu'il faut *assumer* pour *décider HC*. On travaille généralement avec la hiérarchie borélienne instituée à partir des ouverts de $\mathbb{R}$ et la hiérarchie projective instituée à partir des boréliens, et des extensions de celles-ci, dans le cadre de la théorie *descriptive* des ensembles [Jensen 1995]. L'axiomatique ensembliste classique est moins riche en ce sens qu'elle ne fait absolument pas intervenir a priori de considérations topologiques : mais elle reste le socle de la théorie *descriptive*. Celle-ci se place d'emblée dans le corps des réels (ou dans l'espace de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), et travaille généralement sur les espaces *polonais*, espaces vectoriels normés, métrisables, complets pour la métrique qui leur est attribuée, et séparables, autrement dit des espaces possédant des propriétés topologiques bien déterminées. [3] Le théorème de Souslin [Petitot 1995, 164] établit que *la tribu des boréliens est égale à la classe des projectifs* $\triangle^1_1$: cela permet de travailler sur cette classe en en ramenant la construction aux opérations ensemblistes (plus simples que la projection [4]) de la hiérarchie des boréliens, et d'établir un lien profond et simplificateur entre les deux hiérarchies. [5] Les projectifs héritent, par ce théorème de propriétés de *régularité* possédées par les boréliens : par exemple, les analytiques $\sum^1_1$ ont la propriété de l'ensemble parfait, la propriété de Baire, sont lebesgue-mesurables (puisque tout borélien l'est). Mais si le cadre de ZFC suffit ici, ce n'est pas toujours le cas.

4 Insuffisance de ZF et ZFC : autour du continu

Dans l'axiomatique ensembliste classique les ressources démonstratives sont insuffisantes pour démontrer certaines propriétés qualifiables de « naturelles » d'ensembles appartenant à ces hiérarchies. Par exemple, on ne peut pas montrer, dans le cadre de ZF, que les énoncés $\triangle^1_1$ et $\sum^1_2$ ont la propriété de l'ensemble parfait, et dans ZFC, que les $\triangle^1_2$ ont la propriété de Baire ou sont lebesgue-mesurables. On a également des résultats d'indémontrabilité dans ZFC [Maddy 1990, 133], par exemple pour l'existence d'un $\prod^1_1$ non dénombrable sans sous-ensemble parfait. A partir de ce fait là, on peut se donner deux cadres (ou types de cadres) axiomatiques, incarnant deux stratégies opposées : soit on étend ZF/ZFC au minimum en respectant des contraintes de constructivité, donc en limitant l'institution arbitaire d'ensembles très grands, soit on l'étend très largement en se donnant un univers ensembliste très riche mais « suspect » car excédant ces contraintes. Présentons rapidement ces deux perspectives qui visent *également* à déterminer un maximum de ces questions ouvertes :

3. Pour toutes les notions techniques évoquées, voir les exposés épistémologiquement contextualisés [Jensen 1995], [Maddy 1990, 110–6 et 130–9], [Maddy 1997, ch. 5 et 6], [Salanskis 1995, 162–78] et au glossaire terminal de [Salanskis 1999].

4. [Petitot 1995, 163], [Maddy 1990, 113 note 23] où est utilisée l'image suivante (en considérant un ensemble de points du plan, et non de la ligne) : la projection d'un borélien dans le plan est « so to speak », son « ombre » (*shadow*) sur l'axe des abscisses.

5. La théorie de la récursion rejoint la théorie (descriptive) des ensembles via cette théorie des hiérarchies.

4.1 La stratégie minimaliste

On restreint V (l'univers institué par la structure cumulative des rangs jusqu'à un ordinal limite donné) à l'univers constructible L de Gödel dont on classe les modèles : c'est l'axiome de constructibilité. Moyennant le théorème de Löwenheim-Skolem (au premier ordre), l'HGC est vraie dans $ZFC{+}V = L$. Cette perspective permet de *décider* l'existence d'un $\prod_1^1$ non dénombrable sans sous-ensemble parfait dans V, ou encore l'existence d'un $\triangle_2^1$ non lebesgue-mesurable. Cet axiome permet de bien ordonner l'univers V et répond à des questions importantes issues de l'analyse.

Notons que « constructible » ici désigne la définissabilité inductive en termes d'ordinaux [Jensen 1995, 395], et ne fait référence que de façon indirecte et ambiguë à la constructivité intuitionniste, dans la mesure où cette définissabilité n'est *pas* explicitée clairement par Gödel, et où la notion de *vérité* ne trouve pas de formalisation, dans ZF en particulier : ce qui montre la présence implicite et problématique d'une définition ensembliste du concept. De plus avec cette perspective certains résultats apparaissent contre-intuitifs [Petitot 1995, 169], puisque l'axiome de choix AC y reste vrai, alors qu'elle implique de se limiter à des ensembles assez simples (ceux de la hiérarchie projective), contrairement aux ensembles très complexes dont AC implique l'existence.

4.2 La stratégie maximaliste LCA (« Large Cardinals Axioms »)

On institue des propriétés de régularité : pour cela, on doit se donner des axiomes si possible aussi « naturels » que les propriétés qui rendent possible cette régularité. Le théorème de Solovay (1969), par exemple, suppose l'axiome « Il existe un cardinal mesurable » (CM) : il établit que $ZFC + CM \vdash$ tout $\sum_2^1$ est *régulier* (a la propriété de Baire, est mesurable, a la propriété de l'ensemble parfait). Or le théorème de Scott (1961) établit que CM est fausse si l'on se place dans $V = L$. On voit concrètement ici que les deux perspectives sont bel et bien concurrentes. Pour progresser dans la détermination des classes plus complexes de la hiérarchie projective, des axiomes encore plus forts sont nécessaires : la *réflexion* de certaines relations dans certains grands cardinaux, qui permet d'évaluer la grandeur totale de ceux-ci à partir de certains de leurs sous-ensembles, repose sur l'existence de « plongements intérieurs » de cardinaux dans un modèle de ZFC, qui sont dits alors *superforts*. Le superfort (qui fait que dans le modèle considéré vaut l'axiome de *détermination projective*[6] PD) qui est plus petit que le *supercompact* est plus grand que le *de Woodin* qui est plus grand que le *mesurable* qui est plus grand que le (*fortement* ou non) *inaccessible* qui est plus grand que tout *constructible*... (et il y en a d'autres). Les preuves reposant sur l'existence des cardinaux jalonnant cette irreprésentable « montée vers l'infini » sont bien à juste titre qualifiées de « transcendantes » ou « transconstructives ».

Il n'est pas utile d'énumérer plus avant ces axiomes et résultats, d'autres l'ont déjà fait efficacement : je veux interroger ici la problématique portée onto-épistémologique de telles stipulations axiomatiques, puisque tel est le visage actuel du discours fondationnel. Il convient d'abord de rappeler les quatre conceptions principales de ce qu'est un axiome. Outre l'idée d'un énoncé évident par soi, et celle, à l'opposé, d'énoncé ou de convention purement arbitraire, dorénavant non reconnues sérieusement, on peut distinguer les axiomes « locaux », « structurels », des « fondationnels », dans les termes de S. Feferman [Feferman & Alii 2000, 403]. Les premiers sont en fait de simples éléments définitionnels : par exemple, en algèbre linéaire, posséder une loi de composition interne, un élément neutre, et avoir chacun de ses éléments inversible, sont trois propriétés assurant à un ensemble une structure de groupe. On nomme parfois ces propriétés « axiomes du groupe » : ce type d'axiomes n'intéresse pas ici. Ce sont les seconds qui donnent à penser.

L'axiome de constructibilité, AC, les LCA, et même, à rebours, ceux de ZF, sont de cette nature : ils ont un statut hybride dans la mesure où leur position relève fondamentalement d'arguments philosophiques ou épistémologiques, ou de perspectives impliquant de tels arguments, tout en étant devenus, dans la « discipline des fondements » des objets dont on a retiré la garde au philosophe. La mathématique veux s'autofonder (selon l'esprit hilbertien qui animait les visées de démonstration de consistance *absolue* et l'institution de la métamathématique), mais comme la plupart des mathématiciens professionnels pratiquent leur discipline sans s'occuper de cette exigence, c'est en tant que philosophe que l'on cherche à la fonder ainsi - d'où l'impossibilité *de jure* de laisser la « puissance créatrice » de la pratique pour la « réflexion » fondationnelle et réciproquement [Weyl 1953, 267].

6. PD est une formulation équivalente à la régularité en termes de stratégies gagnantes pour des jeux infinis sur une classe d'ensembles.

5 La stratégie LCA, Janus philosophique

Les LCA sont gros d'enjeux philosophiques au premier abord. Leurs formules commencent invariablement par « Il existe... » ou des énoncés comparables. Ce sont des *thèses d'existence*, et non, évidemment des théorèmes d'existence. Les défenseurs des axiomes « forts » se heurtent aux objections qui étaient déjà celles de Brouwer. Quelle contrôle, quel savoir avons-nous de telles « monstruosités » ensemblistes ? Que savons-nous de leurs pathologies éventuelles ? Il existe de ce fait deux orientations de recherche : l'une majoritaire, l'autre minoritaire. La première s'efforce de *répondre* positivement ou négativement, à la question « Does mathematics need new axioms ? » [Feferman & Alii 2000] en partant de l'idée que le *vrai problème*, c'est « pourquoi tel axiome plutôt que tel autre ? » Aucun de ces axiomes, celui de constructibilité ou les LCA n'a d'évidence par soi : pour quelle raison sinon y aurait-il besoin d'en *justifier* l'acceptation ou le rejet ? Leur hypothétique légitimité provient nécessairement d'une référence à un critère de sélection : le problème est donc de savoir quels sont les critères qu'il convient de retenir. Autrement dit, le problème de la légitimité s'est déplacé : des axiomes aux critères de choix des axiomes (puisqu'« il est » convenu qu'approfondir la détermination de l'infini et du continu passe nécessairement par de nouveaux axiomes). Ce déplacement de fait montre qu'il s'agit là non d'un problème « intra-mathématique » ou purement pragmatique, dans la mesure où les mathématiciens de métier, *dans leur pratique*, ne « perdent » pas de temps sur ces questions. De ce fait, « we are left to regard the question : Does Mathematics need new axioms ?, as a philosophical one » d'après S. Feferman [Feferman 1998, 407], qui propose la seconde orientation, très minoritaire (§ 6), selon laquelle le problème véritable ne se pose pas dans ces termes.

La stratégie LCA est rapidement incompatible avec la première (l'existence d'un cardinal mesurable falsifie $V = L$). Elle permet de déterminer les propriétés très partiellement évoquées ci-dessus pour un nombre supérieur d'ensembles « intéressants », mais au point d'avoir un *double visage paradoxal* à cause du non-contrôle associé à la stipulation axiomatique pure. Cette « fuite en avant » [Sureson 1999] dans les vertiges de l'infini retrouve en effet l'aspect quasi-ludique et syntaxique du formalisme intéressé par les extensions et généralisations consistantes (une quasi-linéarité est lisible dans la succession des classes d'ensembles institués) indépendamment d'un univers à *représenter* en tant que tel, puisque la nécessité conceptuelle s'est finalement évanouie. *Mais* elle nie en même temps cet arbitraire relatif, (tout en mettant la consistance presque en péril [Sureson 1999, 131]) via l'affirmation d'une certaine intuitivité ontologique de ces ensembles en tant qu'objectivement pensables et peuplant un univers bien structuré. On retrouve ce balancement entre fiabilité déductive et vérité (ou vraisemblance sémantique) qui animait les programmes concurrents du début du $20^{\text{ème}}$ siècle, dès lors que l'on étudie les deux types de motifs non-techniques militant pour ou contre ces axiomes fondationnels : les « intrinsèques » (caractère intuitif/naturel voire évident de l'axiome), et les « extrinsèques » (efficacité démonstrative, détermination accrue d'affinités entre branches des mathématiques, etc.), plus nombreux que les premiers mais moins puissants philosophiquement.

D'après P. Maddy, poursuivant conjointement l'esprit platonicien gödelien et l'esprit naturaliste quinien, [Feferman & Alii 2000] [Maddy 1997], l'élémentarité intuitive de l'ensemble (originée dans son encodage cérébral sous la forme de « détecteurs » numériques activés à partir de la perception [7] [Maddy 1990, II-2 et 3]), se transmet aux axiomes les plus simples, mais les LCA, contre $V = L$ [Maddy 1993] sont logico-mathématiquement motivés *pour asseoir les résultats intéressants* que ZFC ne permet d'obtenir, *i.e., extrinsèquement* motivés. Le critère utilitaire prédomine chez elle, et c'est pour cela qu'elle accuse S. Feferman de limiter indûment la puissance du mathématique, alors que suivant ce dernier, le critère utilitaire est secondaire dans la mesure où ce sur quoi il porte n'est *pas* un objet mathématique défini.

6 Réduction preuve-théorique de la « stratosphère mathématique » au constructif

Il me semble en effet que P. Maddy se trompe sur la visée et la thèse réelles de S. Feferman (c'est visible dans la controverse [Feferman & Alii 2000]), puisqu'il considère que les *deux* stratégies, maximaliste comme minimaliste, posent philosophiquement problème. Elles recèlent toutes deux du non-constructif, la première explicitement, la seconde implicitement (ainsi la définition ensembliste de la vérité dans l'univers constructible, et le fait que $ZFC + V = L$ prétende représenter adéquatement, malgré tout, un univers ensembliste objectif), et véhiculent donc, quoiqu'inégalement bien sûr, un platonisme discutable pour deux raisons distinctes.

7. Thèse problématique examinée en [Salanskis 1995, 188–190 et 207] auquel nous renvoyons ici.

α) P. Maddy postule un accord inexistant : pour S. Feferman, le continu, de même que l'opération passage à l'ensemble des parties d'un ensembles, *ne sont pas de vrais objets mathématiques* : le continu est un non-objet, un « inherently vague statement » [Feferman & Alii 2000, 405]. De ce fait, le problème ne se pose pas pour lui d'assurer certains résultats techniques, puisqu'on ne sait pas sur quoi ils pourraient précisément porter.

β) De ce fait, Cantor « is not necessary » [Feferman 1998, ch. 1 et 14] parce que cette nécessité de l'infini actuel n'est *pas établie* pour Feferman, indépendamment même du platonisme et des paradoxes que le transfini peut véhiculer.

D'où son programme, néo-weylien [8] (prédicativiste et définitionniste) de fondations dénombrables des mathématiques appliquées opérant par réductions preuve-théorique de l'infini non dénombrable (tout élément de $\mathbb{R}$ est formulable dans les relations *analytiques* $\prod_{\infty}^{1}$ de l'arithmétique PA du second ordre via des coupures de Dedekind ou des limites de suites de rationnels) à l'infini dénombrable (dans les relations *arithmétiques* $\prod_{\infty}^{0}$, formules de PA du premier ordre [9]) d'abord, et de réduction de l'infini dénombrable à la PRA ensuite (« Primitive Recursive Arithmetic »), finitiste en ce qu'elle est intégralement instituée prédicativement à partir de $\mathbb{N}$. Feferman maintient cependant l'ouverture de son programme en le qualifiant de semi-constructif [10] puisqu'il insiste sur l'évidence intuitive associé au caractère fini des entiers naturels qu'il se « donne ».

Mon interprétation de l'orientation philosophique qui anime ce programme de réécriture prédicative de l'arithmétique et de l'analyse, peut se résumer comme suit : si HC et les propriétés ensemblistes « naturelles » que la théorie descriptive des ensembles, notamment, cherche à

8. Procéder ainsi tient d'un « programme de Hilbert relativisé » : « HP » pour la voie de réduction de l'infini au fini, « relativised » en ce que le constructif n'est pas assimilé au finitiste, trop restrictif [Feferman 1998, 190].

9. Le lien entre classes d'*ensembles* arithmétiques/analytiques et classes de *relations* de mêmes noms est ici bien visible.

10. Une définition est *prédicative*, et doit l'être dès qu'on excède $\mathbb{N}$, si elle se réfère à des totalités déjà établies, antérieurement à l'objet défini, ces totalités devant être instituées constructivement à partir des entiers. La *définissabilité* d'un objet tient à ce que l'on peut le définir formellement dans les termes de ceux d'une ensemble déjà donné (du 1^{er} ordre). Concrètement Feferman élabore une théorie réactualisant l'axiomatique weylienne : la théorie W de types flexibles finis, extension conservative de PA suffisante pour les mathématiques appliquées, dont le cadre est l'*Arithmetic - CA Schème* ($\prod_{\infty}^{0} -CA$) (CA pour axiome de compréhension), système d'induction restreinte où $\prod_{\infty}^{0}$ est la classe des formules arithmétiques dans lesquelles la quantification porte sur des fonctions récursives primitives. Voir [Salanskis 1995, 198-200] et avant tout l'importante synthèse [Feferman 1998, ch. 10, 187-208] "What Rests on What ? The Proof-Theoretic Analysis of Mathematics".

déterminer, sont d' « inherently vague statements », sont ou portent sur des *non-objets*, il est pensable de « passer outre » la forme séculaire maintenant ritualisée de la dispute fondationnelle (c'est notamment l'esprit de [Hintikka 1996, 211]). L'idée me semble alors pertinente, d'une *conceptualisation dialectique de cette ouverture constructiviste* : le *dépassement des stratégies contraires* s'opère à partir du caractère philosophiquement indéterminé de leur objet, dans le but de réinscrire le questionnement sur *ce qui fait problème*, la praxis mathématique *in progress* telle qu'elle se pratique et se développe dans le maintien de ses tentions constitutives d'une part. Elle récuse d'autre part les deux oppositions suivantes :

α) celle entre constructif et non-constructif dans sa forme idéologique, puisque la puissance de celui-ci est « récupérable » dans et avec les contraintes effectives de celui-là, sans impliquer d'acte de foi en ce qui est institué comme « existant » ;

β) corrélativement celle entre platonisme et nominalisme. L'objectivité de l'objet mathématique est déterminable dans sa diversité par l'association en un sens non-ontologique d'un réalisme et d'un nominalisme *dialectiques* : l'objet institué est formellement et conceptuellement pensé et maîtrisé et devient dès lors indépendant de sa genèse (versant réaliste), mais selon des procédés qui, *tant qu'ils n'ont pas institué l'objet*, doivent empêcher de statuer sur quoi que ce soit de celui-ci, et obliger de le pré-juger comme un *projet-d'objet purement nominal.*

Cette récurrence du compréhensif dans l'extensif doit montrer le caractère non ontologique mais *symbolique* du problème, avec l'idée essentielle que le *sémantique* du logico-mathématique doit s'enraciner dans l'*opératoire* des procédés constructifs, lequel pour autant présuppose ce sémantique comme horizon justificateur, comme le ce-en-vu-de-quoi il se déploie intentionnellement. Cette circularité interprétée de façon dialectique contient ainsi une proximité « différentielle » avec la conceptualisation *herméneutique* de [Salanskis 1995, 1999]. Il conviendrait dans cette voie de s'intéresser alors avant tout aux *modes d'objectivation* de la pensée mathématique comme *praxis*, comme *pratique théorique*, et de penser l'objectivité construite essentiellement en des termes dés-ontologisants : ceux d'une thèse ramenant cette objectivité à une forme médiate de matérialité, cette matérialité étant celle, encadrée aux extrêmes par des contraintes cognitives d'une part, sociales d'autre part, des séquences codifiées d'écriture et des implémentations informatiques.

7 Perspectives internes au conflit stratégique

Les problèmes conceptuels de la crise du début du $XX^{\text{è}}$ siècle, loin d'êtres réglés, au contraire trouvent encore de nouveaux lieux et modes d'expression, tout en ramenant encore la réflexion sur la nature et les modes d'institution ou d' « accès » aux entités logico-mathématiques, et donc perpétuent le problème du *platonisme* mathématique.

L'alternative entre les deux stratégies domine les débats aujourd'hui, et à n'en pas douter, les avancées et attendus de la théorie descriptive des ensembles vont continuer à les nourrir de façon très dynamique [Buss & Alii 2001, §5 189–193]. L'état global du problème fondationnel est le suivant : les LCA, instituant les ressources jugées indispensables que ZF ou ZFC ne peuvent offrir, sont légitimement exigibles d'après les critères que P. Maddy rappelle dans leur globalité. Mais alors il semble inévitable d'accepter un ontologie ensembliste que les courants nominalistes et constructivistes ne souhaitent pas accepter. Mais même dans la perspective minimaliste, il y a un excès à l'égard du constructif qui montre qu'il n'y a pas exclusion mutuelle des procédés, que *ce n'est pas forcément le rejet ou l'acceptation des méthodes transcendantes apparemment ontologiquement coûteuses qui pose problème, mais plutôt la façon dont celles-ci et les méthodes constructives peuvent s'entre-exprimer d'une part, et d'autre part, l'interprétation de cette entr'expression.*

On peut parler à juste titre de « quasi-ontologie » [Petitot 1995, 178] afin de montrer que le problème n'est pas la nature en soi des ensembles mais celui de leur objectivité formelle et symbolique : par là le cadre de la stratégie maximaliste est infléchi par une « dédramatisation » salutaire de l'enjeu de *l'être* mathématique. De la même façon, dans l'autre stratégie, on peut proposer une thèse minimaliste sous la forme d'un platonisme ockhamien (celui de Jensen [Jensen 1995, 400]) reconnaissant l'être du construit et l'idéalité, voire la stricte nominalité du non-construit, une thèse articulant (de façon dialectique au sens ci-dessus) réalisme de l'accessible et nominalisme du transcendant. Tout ceci ne semble pas donner la possibilité de « trancher » le problème, car on arrive à justifier les deux approches : cela continue de maintenir l'analyse fondationnelle à l'intérieur de son exposition séculaire. Dit autrement, l'ensemble des analyses philo-épistémologiques portant depuis un siècle sur les fondements des mathématiques, est devenu aujourd'hui un carrefour disciplinaire « discipliné » où sont systématiquement convoquées épistémologie philosophique générale et « régionale » du logico-mathématique et théorisations scientifiques. *Si dans ses modalités et lieux d'expression propres aujourd'hui s'exprime la persistance de l'objet de cette crise inaugurale des fondements des mathématiques, l'institutionnalisation, la ritualisation, de son traitement montrent au contraire que la crise est* comme telle *terminée*, et d'autre part, un essoufflement fondationnel révélateur d'un besoin de renouvellement conceptuel.

8 De l'essoufflement du discours fondationnel à la sortie du paradigme axiomatico-ensembliste

La littérature contemporaine regorge d'exposés factuels, historiques et techniques, sur la crise des fondements et sur les enjeux épistémologiques soulevés : si on les relit en considérant que tout ce questionnement fondationnel actuel poursuit tout en le subvertissant ponctuellement le *paradigme axiomatico-ensembliste* dont la crise des fondements a été l'agent de réalisation [Barot 2004], il me semble qu'on peut radicaliser ces subversions, et sortir de ce cadre hérité de la crise du 20$^{\text{ème}}$ siècle.

L'orientation de Feferman ouvre à une *Aufhebung* des stratégies maximaliste et minimaliste concernant les LCA, à une dialectique des orientations épistémologiques. Cette ouverture se fonde sur l'idée que ces stratégies présupposent un objet bien cerné, quoique problématique, alors qu'il est légitime de *remettre en cause* cette idée. Au vu de surcroît des interférences entre voies constructives et non-constructives, au niveau méthodologique comme au niveau des principes, et du caractère parfois approximatif de ce qui les sépare, il serait judicieux d'orienter la recherche sur *l'interprétation*, plus que la légitimité, de ces preuves transcendantes et de cette exigence constructiviste, du point de vue du potentiel d'unification conceptuelle et méthodologique que ces interférences. Outre le fait que la crise des fondements est bel et bien terminée, on perçoit ici une invitation à *modifier la façon même de poursuivre son objet* : si s'assurer constructivement des mathématiques appliquées est légitime, il conviendrait alors de problématiser conceptuellement plus avant cette ouverture, pour voir peut-être que certains des problèmes fondationnels *n'en sont plus véritablement*. Outre bien distinguer la *constructivité* des méthodes utilisées de celle des objets sur lesquelles elles portent, afin de sérier les lieux pertinents du « problème du constructif », sortir définitivement de la formulation *ontologique* du problème de l'idéalité logico-mathématique me semble des plus urgents - les deux aspects étant bien sûr intimement liés, puisque c'est cette ontologisation indue du problème qui suscite l'essentiel de la dramatisation de la question du constructif et du non-constructif.

Un tel programme de refondation ne saurait être animé par une « stratégie de fondement », mais devrait l'être par une « stratégie d'engagement » (au sens de F. Gonseth) ouverte aux tensions et réorganisations récurrentes du logico-mathématique tel qu'il se déploie. Plutôt que de fétichiser l'idéalité, de la figer en objet, on s'attacherait alors avant tout aux modes matériels d'abstraction et d'objectivation propres à sa construction réitérée comme « concret-de-pensée » [11]. On se détacherait ainsi de toute prétention à la fondation ultime, que ce soit dans une immanence intuitive nécessairement restrictive ou dans une transcendance ensembliste nécessairement suspecte.

Références

Barot, Emmanuel

2004 La crise des fondements des mathématiques fut-elle révolutionnaire ? Sur l'avènement du paradigme axiomatico-ensembliste, *Actes des journées d'étude « L'idée de révolution au XXI$^{\text{è}}$ siècle »*, octobre 2003, Paris I - Sorbonne (s. d. O. Bloch et Société Chauvinoise de Philosophie), à paraître.

Buss, S.R., Kechris, A. S., Pillay, A. & Shore, R. A.

2001 The Prospects for Mathematical Logic in the twenty-first Century, *Bulletin of Symbolic Logic*, 7 (2), 169–195.

Chihara, C. S.

1990 *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Oxford University Press - Clarendon Press, 2001.

Feferman, S.

1998 *In the Light of Logic*, New York - Oxford : Oxford University press, 1998.

11. De même qu'aux pistes suggérées en fin de section (7) ci-dessus, c'est à ce programme que je consacre mon ouvrage *L'aventure mathématique de la dialectique*, Paris : Syllepse (collection « Mille marxismes »), à paraître en 2007. Ce livre constituera la poursuite des conclusions de ma thèse *L'aventure mathématique de la dialectique depuis Hegel. Perspectives sur les visages contemporains du « problème de la dialectique »en épistémologie des mathématiques et de leur histoire*, soutenue à l'Université Paris X - Nanterre le 6 novembre 2004.

Feferman, S., Friedman, H. M., Maddy, P. & Steel, J. R.

2000 Does Mathematics need New Axioms?, *Bulletin of Symbolic Logic*, 6 (4), 401–46.

Ferreiros, José

1999 *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel: Science Networks, Historical Studies.

Hintikka, J.

1996 *The Principles of Mathematics revisited*, New York: Cambridge University Press, éd. Paperback, 1999.

Jensen, R.

1995 Inner Models and Large Cardinals, *Bulletin of Symbolic Logic*, 1 (4), 393–407.

Kechris, A. S.

1999 New Directions in Descriptive Set Theory, *Bulletin of Symbolic Logic*, 5 (2), 161–74.

Kuratowski, K. & Mostowski, A.

1976 *Set Theory (with an Introduction to Descriptive Set Theory), Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*, (86), Amsterdam-Ney, York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1re éd., 1968.

Largeault, J. (éd.)

1992 *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Paris : Vrin, 1992.

Maddy P.

1990 *Realism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press / Clarendon Press, 1990.

1993 Does V equal L ?, *Journal of Symbolic Logic*, (58), repris in Tymoczko Thomas (éd.) *New Directions in Philosophy of Mathematic*, Princeton New Jersey: Princenton University Press, éd. revue et augmentée 1998, 357–84.

1997 *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press / Clarendon Press, 1997.

Mouloud, Noël

1989 *Les assises logiques et épistémologiques du progrès scientifique* (posthume), Paris : Presses du Septentrion, 1989.

PANZA, M. & SALANSKIS, J.-M. (ÉDS.)

1995 *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, Paris : Masson, 1995.

PETITOT, J.

1995 Pour un platonisme transcendantal, in [Panza & Salanskis 1995, 147–78].

ROGERS, H. JR

1967 *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1987.

SALANSKIS, J.-M.

1995 Platonisme et philosophie des mathématiques, in [Panza & Salanskis 1995, 179-212].

1999 *Le constructivisme non standard*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion, 1999.

SURESON, C.

1999 Théorie des ensembles ou ensemble de théories ?, *Revue d'Histoire des Sciences*, 52 (1), janv.-mars 1999, 107–39.

WEYL, H.

1953 Comparaison entre procédures constructives et procédures axiomatiques en mathématiques, cité d'après la tr. fr. de Jean Largeault in *Le continu et autres écrits*, Vrin, 1994, 265–79.