La *no-class theory* de Stanisław Leśniewski *

Pierre Joray
Université de Neuchâtel

Résumé : Insatisfait du calcul des classes et des relations de Whitehead et Russell, Leśniewski élabora en 1919-20 une théorie extensionnelle des noms qu'il nomma *Ontologie*. Sans entrer dans une description technique du formalisme de Leśniewski, nous montrons dans cet article que l'Ontologie permet un traitement général du distributif qui ne s'appuie à aucun moment sur une notion de classe. Nous illustrons enfin cette particularité importante du système de Leśniewski en proposant une définition logiciste de la notion de cardinalité qui répond d'une manière radicale aux impératifs d'une *no-class theory*.

Abstract: Leśniewski was not satisfied by Whitehead and Russell's calculus of classes and relations. In 1919-20, he elaborated an extensional theory of names he called *Ontology*. Without a description of the full technical apparatus of Leśniewski's formalism, I show here that Ontology gives rise to a general treatment of distributive predication which makes no use of the notion of class. In order to illustrate the importance of this peculiarity, I will give a logicist definition of cardinality which is radically conform with the requierments of a no-class theory.

∗. Cet article s'inscrit dans le programme de recherche *Construction de l'arithmétique dans le cadre et l'esprit évolutif et catégoriel de l'Ontologie de S. Leśniewski* (101411-100748/1) financé par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

1 Préambule : collectif et distributif

Comme pour beaucoup des recherches logiques menées dans la première partie du 20e siècle, l'élaboration par Stanisław Leśniewski de son édifice logique a été essentiellement motivée par la recherche d'une résolution de l'antinomie russellienne des classes. Dans cette perspective, Leśniewski ne put se satisfaire des solutions dont il avait pris connaissance par ses lectures des textes de B. Russell. Il reprochait en effet à la *théorie des types* de ne fournir au problème qu'une sorte d'outil palliatif. Celui-ci imposait dans l'usage des idéographies logico-mathématiques des interdits de nature thérapeutique dont la motivation manquait, selon lui, d'une source recherchée en profondeur puisqu'elle se réduisait à protéger le logicien de la formation des énoncés problématiques. L'idée de Leśniewski était alors qu'on ne pouvait se contenter d'une telle situation. Il était nécessaire, pour disposer d'une base logique solide dans la visée des fondements des mathématiques, non seulement d'être capable de contourner l'apparition de la contradiction, mais aussi d'offrir une véritable explication de celle-ci, de manière à ce qu'on puisse en saisir les causes avec précision. Suite à une analyse détaillée des présupposés caractéristiques des travaux des logicistes et de la théorie des ensembles de G. Cantor, Leśniewski mit en évidence que l'antinomie pouvait être comprise comme la conséquence d'une confusion dans la compréhension du mot 'classe' entre deux conceptions différentes. Tantôt la classe était-elle entendue en un sens dit *distributif*, tantôt en un sens dit *collectif*. Or, selon Leśniewski, seule l'acception collective pouvait répondre à l'idée liminaire qu'une classe C est une entité qui se compose littéralement et concrètement des objets a, b, c, ... qui en sont les éléments. Il critiqua alors, avec une véhémence qui lui était toute particulière, la conception distributive, qui manquait pour lui de tout fondement intuitif solide [Leśniewski 1989, 53-66]. Que ce soit, à la manière de G. Frege, la classe entendue comme *extension de concept* ou, avec A. N. Whitehead et B. Russell, comme *commodité symbolique* ne dénotant rien dont il soit nécessaire de supposer l'existence, toutes ces caractérisations relevaient pour Leśniewski de l'invention de 'spécimens mythiques' qui ne répondait en rien à l'idéal d'une conception concrète et par là même maîtrisable de la classe. Fort de cette conviction, Leśniewski décida de réserver dans ses travaux de logique l'utilisation du mot 'classe' à la désignation des entités collectives dont il donna une axiomatisation dès 1916 dans une théorie nommée *Méréologie* [1]. Contrairement aux classes distributives, qui sont des entités abstraites générées par une propriété caractéristique, les classes de la

1. Cf. [Leśniewski 1989, 77–97], [Miéville 1984, 375–443], [Sobociński 1949-50].

Méréologie sont des entités concrètes à comprendre littéralement comme des collections ou des agrégats d'objets. Une telle conception, que Russell qualifiait volontiers de *classe comme 'tas'*[2], ne pouvait évidemment conduire à l'acceptation ni de l'idée d'une classe vide, ni de celle d'une distinction entre un objet et la classe constituée de ce seul objet. En outre, comme le montra Leśniewski, dans la Méréologie toute classe est elle-même un de ses éléments [cf. Leśniewski 1989, 51, thèses 10-12]. La contradiction n'y est ainsi pas dérivable puisque la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes n'existe tout simplement pas. On comprend dès lors que la Méréologie devenait une pièce maîtresse du dispositif mis en place par Leśniewski dans sa résolution de l'antinomie russellienne. Pourtant, contrairement à une image souvent invoquée, mais erronée, des travaux du logicien polonais, la Méréologie ne devait en aucun cas constituer l'unique instrument dans sa recherche d'un fondement des mathématiques. La classe collective n'était pas destinée à venir remplacer purement et simplement la classe distributive des logicistes. Leśniewski reconnut en effet explicitement l'importance du point de vue distributif dans la conception d'un langage logique fondationnel. Mais, farouchement hostile à l'idée d'ériger au statut d'*entités logiques* des notions abstraites ou fictives, il prit le parti de proposer un traitement du distributif qui excluait radicalement toute notion de classe. Notre but dans ces pages est de montrer comment Leśniewski conçut, sous le nom d'*Ontologie*, un langage fondationnel de pure logique qui constitue à proprement parler, et pour reprendre la célèbre dénomination de Whitehead et Russell, une *no-class theory*. Si une description complète de cette logique, qui diffère profondément du calcul classique des prédicats, sortirait du cadre de cet article, nous expliciterons ici les principes et les instruments originaux qui permirent à Leśniewski de disqualifier les classes distributives au profit d'une conception élargie des noms logiques. Nous montrerons en particulier le rôle important qu'a eu dans cette démarche la notion de *catégorie sémantique*, qui constitue le pendant de la notion de *type* dans le cadre de l'Ontologie. Enfin, nous terminerons en exhibant, à titre d'exemple d'application, une définition de la notion de cardinalité.

---

2. Russell [1921, 339] parle en effet des classes comme tas ou agrégats (*heaps or conglomeration*) lorsqu'il veut désigner des extensions purement concrètes.

2 Les catégories sémantiques

Elaborée par Leśniewski en 1922 puis formalisée par K. Ajdukiewicz [1935], la *théorie des catégories sémantiques* est aujourd'hui principalement connue pour avoir donné lieu au paradigme linguistique des grammaires catégorielles. Dans les travaux logiques de Leśniewski, celle-ci avait cependant pour but, comme le mentionne explicitement Ajdukiewicz, de garantir aux langages logiques une stricte compositionnalité des rapports entre syntaxe et sémantique. Visant ainsi à se prémunir, cette fois-ci dans le traitement à venir du distributif, de toute formation d'énoncés antinomiques, la théorie leśniewskienne devait remplir une tâche comparable à celle de la théorie des types simple de Russell[3]. Il convient dès lors de se demander en quoi Leśniewski, qui jugeait cette dernière inacceptable, pouvait considérer sa propre théorie comme meilleure. On trouve une partie de la réponse dans un texte consacré à l'Ontologie écrit en 1929 :

> En 1922, j'ai esquissé une conception des 'catégories sémantiques' destinée à remplacer telle ou telle 'hiŐrarchie des types' qui manquait à mon avis de tout fondement intuitif. A vrai dire, je me sentirais aujourd'hui obligé de l'adopter même s'il n'existait aucune 'antinomie' dans le monde. Alors que ma conception des 'catégories sémantiques' restait formellement en étroite relation avec les 'théories des types logiques' connues quant à ses conséquences théoriques, elle se rapprochait plutôt de la tradition des 'catégories' d'Aristote, des 'parties du discours' de la grammaire traditionnelle et des 'catégories de signification' d'Edmund Husserl quant Ĺ son aspect intuitif [1929, 14, nous traduisons].

Si le recours à l'évaluation intuitive invoquée dans ce passage reste difficilement mesurable et demeure à vrai dire proprement subjectif, il convient de retenir ici que ce qui rend sa théorie préférable aux yeux de Leśniewski réside dans le fait qu'elle ne constitue pas un outillage à caractère *ad hoc*. D'une part, Leśniewski insiste bien sur le fait qu'il l'adopterait même en l'absence d'antinomie, d'autre part, l'indication de la proximité avec la grammaire pure de Husserl ainsi qu'avec la grammaire traditionnelle en parties de discours n'a pour but que de relever qu'il s'agit d'une théorie dont l'utilité ne se réduit pas à la résolution du problème très spécifique

3. Pour la conformité historique, notons que la distinction entre une théorie simple (introduisant uniquement les *types*) et une théorie ramifiée (incluant également les *ordres*) n'a pas été faite par Russell, mais par F. P. Ramsey.

des antinomies. De fait, on sait aujourd'hui que les développements ultérieurs des grammaires catégorielles apportent sur ce point une confirmation claire de l'intuition du Polonais. En outre, si l'on se place dans un cadre strictement logique, on remarque que les catégories peuvent être amenées à jouer un rôle de régulateur sémantique omniprésent dans la constitution des langages formels. L'exemple le plus remarquable en ce sens est sans doute la manière dont les catégories sémantiques permettent de régler le jeu sémantique des quantificateurs. Tout d'abord, comme nous allons le voir, elles donnent lieu à une version particulièrement générale de l'interprétation des quantificateurs. Enfin, comme nous l'avons montré ailleurs [Joray & Godart-Wendling 2002], la théorie catégorielle permit à Ajdukiewicz d'être un des premiers à avoir analysé les quantificateurs et tous les lieurs de variables comme relevant de la combinaison d'une fonction et d'une opération d'abstraction. Grâce à la notation fractionnelle d'Ajdukiewicz, il est très aisé d'expliciter ce qu'il convient d'appeler la *cohérence catégorielle*[4] des expressions d'un langage formel. Tout d'abord, il s'agit de spécifier quelles sont les catégories primitives du langage en question. Leśniewski en pose deux : il y a tout d'abord la catégorie s des propositions, enfin la catégorie n des noms logiques. On accède alors à l'ensemble complet des catégories (primitives et dérivées) par le biais de la définition inductive suivante :

1. s et n sont des catégories.
2. Si $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ sont des catégories, alors $(C/C_1C_2\cdots C_n)$ est une catégorie.
3. Rien sinon n'est une catégorie.

La catégorie $(C/C_1C_2\cdots C_n)$ est à comprendre comme celle des foncteurs formateurs d'un résultat de catégorie C et qui, pour être saturés, demandent n arguments, respectivement des catégories $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Enfin, on pose encore la règle de simplification suivante, dite aussi *règle d'application* :

$Ra : X/Y\ Y \longrightarrow X$ (où Xest une catégorie et Y une catégorie ou suite de catégories)

Voyons maintenant sur un exemple comment va s'appliquer le contrôle de la cohérence catégorielle :

$$(\varphi x \wedge \psi xy) \supset \sim \varphi y$$

4. L'expression '*syntaktische Konexität*' adoptée par Ajdukiewicz est selon nous malheureuse car elle occulte le contrôle toujours conjoint de la syntaxe *et de la sémantique* opéré par la théorie catégorielle.

On attribue à chacun des symboles en présence sa catégorie spécifique :

x, y	:	n	(nom logique)
$\sim$	:	s/s	(opérateur propositionnel unaire)
$\wedge, \supset$	:	s/ss	(opérateur propositionnel binaire)
φ	:	s/n	(prédicat unaire)
ψ	:	s/nn	(prédicat binaire)

Après s'être débarrassé des parenthèses en écrivant l'expression selon le principe de la notation polonaise préfixée, on applique autant de fois qu'il est possible la règle d'application Ra sur la suite des index catégoriels correspondante. Lorsque cette procédure, comme dans notre exemple, conduit à obtenir l'unique index s, on sait enfin que l'expression de départ possède une cohérence catégorielle :

$$\supset \wedge \varphi x \; \psi xy \sim \varphi y$$

1.	$s/ss\ s/ss\ s/n\ n\ s/nn\ n\ n\ s/s\ s/n\ n$	(Suite relative à l'expresssion)
2.	$s/ss\ s/ss\ s\ s\ s/s\ s$	1, Ra $(3fois)$
3.	$s/ss\ s\ s$	2, Ra (2 fois)
4.	s	3, Ra (1 fois)

Le principe mis en oeuvre est très simple : si chacun des foncteurs en présence se trouve saturé par les arguments qu'il requiert, alors l'expression est cohérente. Mais voyons désormais en quoi cette méthode donne lieu à un cadre très général pour l'interprétation des quantificateurs.

3 La quantification catégorielle

Ni *objectuelle*, puisqu'elle n'a pas recours à la notion classique de satisfaction des fonctions propositionnelles, ni *substitutionnelle* puisqu'elle ne nécessite pas de classe d'expressions substituables, la quantification catégorielle se distingue par la possibilité qu'elle offre de déterminer des domaines de quantification relatifs à des variables de catégories quelconques. Rappelons que toute interprétation d'expressions quantifiées telles que $(\forall x)A(x)$ ou $(\exists x)A(x)$ nécessite l'explicitation d'un domaine non vide des valeurs susceptibles d'être endossées par la variable liée x. C'est bien en ce sens que doit être entendue la validité logique du théorème suivant de la logique du premier ordre :

$$\models (\exists x)x = x$$

Or, si la lecture standard de cette formule a conduit à en faire une affirmation à la nature non logique patente (celle du caractère non vide de l'univers du discours) cela ne tient proprement qu'au privilège accordé à la lecture *objectuelle* des quantificateurs et à la décision de ne retenir comme domaines de quantification que des ensembles d'*objets* dont il convient de présumer l'existence. La notion de catégorie sémantique permet précisément d'éviter une telle limitation [cf. Joray 1999 ; 2004a]. Dans la version catégorielle de la quantification, c'est en effet à la catégorie sémantique de la variable qui se trouve liée qu'échoit le rôle de fournir à l'interprétation un domaine de quantification. Or la catégorie ne se présente pas comme une classe ou un ensemble d'entités d'un certain *type*, mais comme la caractérisation linguistique des *possibilités sémantiques* d'un genre d'expressions. Afin de spécifier ces possibilités sémantiques relativement à chacune des catégories, il convient de procéder en deux étapes. La première consiste à assigner à chaque catégorie primitive un ensemble de significations élémentaires et ceci par une application Ψ. Sur la base de l'édifice catégoriel précédemment défini, on posera par exemple :

$$\begin{array}{lllll} \Psi(s) & = & S & = & \{1,0\} \\ \Psi(n) & = & N & & \end{array}$$

L'ensemble S associé à la catégorie s des propositions traduit ici notre choix d'une interprétation bivalente. Quant à N, il s'agit d'un ensemble non vide de significations nominales. Nous ne précisons pourtant, pour l'instant, ni la nature spécifique de ses éléments, ni sa cardinalité. La seconde étape consiste à expliciter une procédure *Dom* permettant d'associer à chaque catégorie un domaine de quantification et ceci en s'appuyant sur les assignations faites relativement aux catégories de base. La procédure *Dom* est déterminée par les deux clauses suivantes :

(1) Si C est une catégorie primitive, alors $Dom(C) = \Psi(C)$.

(2) $Dom(C/C_1C_2\cdots C_n) =$
$\{\varphi|\varphi : Dom(C_1) \times Dom(C_2) \times \cdots \times Dom(C_n) \longrightarrow Dom(C)\}$.

La clause (2) confère explicitement aux catégories dérivées leur caractère fonctionnel. Contrairement aux primitives, une catégorie $C/C_1C_2\cdots C_n$ se voit en effet associée non pas à un ensemble de significations élémentaires, mais à un ensemble de fonctions [5]. Voici quelques exemples de domaines de quantification ainsi obtenus :

5. Par l'écriture $\{\varphi|\varphi : Dom(C_1) \times Dom(C_2) \times \cdots \times Dom(C_n) \longrightarrow Dom(C)\}$, il faut comprendre l'ensemble de toutes les fonctions φ qui associent à chacun des n-uples de $Dom(C_1) \times Dom(C_2) \times \cdots \times Dom(C_n)$ une image dans $Dom(C)$.

$$\begin{array}{lcl} Dom(n) & = & N \\ Dom(s) & = & \{1,0\} \\ Dom(s/s) & = & \{\varphi|\varphi : \{1,0\} \longrightarrow \{1,0\}\} \\ Dom(s/ss) & = & \{\varphi|\varphi : \{1,0\} \times \{1,0\} \longrightarrow \{1,0\}\} \\ Dom(s/n) & = & \{\varphi|\varphi : N \longrightarrow \{1,0\}\} \\ Dom(s/nn) & = & \{\varphi|\varphi : N \times N \longrightarrow \{1,0\}\} \end{array}$$

L'application de la quantification dans un langage L à une quelconque de ses catégories sémantiques est désormais rendue possible dès lors que L dispose de symboles de variables pour cette catégorie. Il suffit pour cela de s'appuyer, dans la sémantique de L, sur des clauses relatives à l'interprétation catégorielle des quantificateurs qui prendront la forme suivante :

> $(\forall)$: $Val((\forall v)A(v)) = 1$ *ssi* $Val(A(v)) = 1$ quelle que soit la signification $\alpha \in Dom(C)$ assignable dans l'interprétation à la variable v de catégorie C.
>
> $(\exists)$: $Val((\exists v)A(v)) = 1$ *ssi* $Val(A(v)) = 1$ pour l'une au moins des significations $\alpha \in Dom(C)$ assignables dans l'interprétation à la variable v de catégorie C.

Remarquons que ces clauses sont parfaitement compatibles avec une caractérisation standard des quantificateurs en théorie de la preuve. Cependant, cette caractérisation peut désormais être étendue soit aux ordres supérieurs entendus en un sens habituel (c'est-à-dire à des catégories telles que s/n, s/nn, $s/(s/n)$, $s/(s/nn)$, $s/(s/(s/n))$, etc), soit à des catégories propositionnelles (s, s/s, s/ss, etc) [6]. Ajoutons enfin qu'on retrouve aisément l'interprétation objectuelle classique du premier ordre comme un cas particulier du cadre général proposé ici. Il suffit en effet pour ce faire de restreindre l'application des quantificateurs à la catégorie n et de donner pour ensemble N de significations nominales un ensemble constitué d'objets (généralement l'univers du discours). Faire un tel choix pour la catégorie n consiste, comme on le sait, à se doter d'une théorie purement référentielle de la signification. Il n'est cependant pas le seul possible et nous allons voir maintenant comment Leśniewski fit un choix différent dans la constitution de son calcul des noms.

6. Le système de Leśniewski nommé *Protothétique* est un exemple de logique des propositions quantifiées de ce genre, cf. [Miéville 2001]. A noter aussi que la version décrite ici de la quantification convient parfaitement à la logique des propositions décrite dans la thèse de doctorat de Tarski [1923] ; thèse où il est démontré que l'unique opérateur de biconditionnelle $\equiv$, associé à une quantification sur les catégories s et s/s, permet le développement d'une logique complète des propositions, et ceci sans recours à un symbole métalinguistique de définition comme $=_{df}$.

4 Le calcul des noms (Ontologie)

Dans le cadre général de l'interprétation catégorielle de la quantification décrite ci-dessus, la version spécifique de Leśniewski, qualifiée par Lejewski [1954] de '*unrestricted quantification*', peut être exposée par le truchement d'une illustration sémantique très simple. Soit Ω un univers du discours fini, constitué de trois objets graphiques :

$$\Omega = \{\bigoplus, \bigotimes, \bigodot\}$$

Dans une perspective classique (objectuelle), il n'y a que trois possibilités d'assignation d'une valeur à un nom logique a : celles qui associent respectivement à a un et un seul des trois objets de Ω. Or, sans modifier l'univers du discours, on obtient la version du calcul des noms par un élargissement des possibilités sémantiques relatives à la catégorie n. Il suffit pour cela d'admettre conventionnellement qu'un nom logique puisse recevoir non seulement une signification *singulière*, mais aussi une signification *plurielle* et une signification *vide*. Relativement à un représentant a de la catégorie n, on dénombre dans notre exemple non pas trois, mais huit possibilités d'assignation : trois d'entre elles font de a un nom *singulier* (où a a pour signification une dénotation unique, comme dans la perspective classique), quatre en font un nom *pluriel* (où a a pour signification une double ou triple dénotation), enfin une en fait un nom *vide* (où a a pour signification l'absence de dénotation). On notera dès lors le domaine de quantification relatif à la catégorie n de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Dom(n) \quad = \quad & \{|\bigoplus|, |\bigotimes|, |\bigodot|, |\bigoplus\bigotimes|, \\ & |\bigoplus\bigodot|, |\bigotimes\bigodot|, |\bigoplus\bigotimes\bigodot|, ||\} \end{aligned}$$

Il convient cependant ici de prendre quelques précautions. Tout d'abord, et même si la proximité structurelle est frappante, il ne faut pas confondre l'ensemble ci-dessus avec $P(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Un nom associé à la signification que nous notons $|\bigoplus\bigotimes|$ n'est pas le nom de l'entité singulière notée généralement $\{\bigoplus, \bigotimes\}$, c'est-à-dire le nom d'un ensemble ou d'une classe d'objets. Il est au contraire tout à la fois le nom de $\bigoplus$ et le nom de $\bigotimes$. L'idée que nous adoptons ici conventionnellement, et qui fait apparaître le parti pris fermement nominaliste de Leśniewski (cf. [Woleński 1986]), est qu'un nom peut se rapporter à plusieurs objets sans qu'il soit pour cela nécessaire de supposer un quelconque intermédiaire qui rassemblerait les objets concernés en une entité singulière [7]. C'est ici le point crucial dans l'obtention d'une *no-class theory* et l'on voit que la disqualification des classes distributives est le fruit d'un convention dans l'usage des signes qui n'a aucune conséquence sur l'univers du discours. Quant aux domaines respectifs des autres catégories, il est intéressant d'examiner le cas des prédicats unaires s/n :

$$Dom(s/n) = \{\varphi | \varphi : Dom(n) \longrightarrow \{1, 0\}\}$$

Il s'agit d'un ensemble de 256 fonctions dont certaines conviennent à l'expression de propriétés d'objets au sens usuel mais d'autres correspondent à ce qu'il convient d'appeler des *propriétés de noms* (cf. [Joray 2001, 187-190]). Parmi ces dernières, on retiendra en particulier celles qui se caractérisent comme expression de la cardinalité des noms. Au nombre de quatre dans notre exemple, ce sont les fonctions qui associent le vrai aux ensembles de valeurs nominales suivants :

$$\begin{array}{rl}
\{||\} & \text{[être un nom vide,} \\
 & \text{un nom de 0 objet]} \\
\{|\oplus|, |\otimes|, |\odot|\} & \text{[être un nom singulier,} \\
 & \text{un nom de 1 objet]} \\
\{|\oplus\otimes|, |\oplus\odot|, |\otimes\odot|\} & \text{[être un nom de 2 objets]} \\
\{|\oplus\otimes\odot|\} & \text{[être un nom de 3 objets]}
\end{array}$$

L'esquisse sémantique que nous venons de tracer est déjà de nature à nous informer sur deux points importants quant à la future définition des nombres naturels dans le système de l'Ontologie [Joray 2002a]. Tout d'abord, c'est dans la catégorie s/n et en particulier parmi les propriétés de noms que se trouveront les nombres. Enfin, il est clair qu'il sera impossible d'exprimer une cardinalité supérieure à celle de l'univers du discours adopté. Une définition des nombres naturels devra donc s'appuyer sur un axiome de l'infini. Mais avant d'en venir à une définition de

7. On retrouve ici un des avatars modernes de la querelle des universaux. La position de Leśniewski est à notre sens à rapprocher de celle d'Ockham ; au chapitre 64 de sa *Summa totius logicae*, on trouve par exemple le passage suivant : 'Dans *omnis homo est animal*, *homo* suppose pour ses signifiés parce que *homo* n'a été créé par imposition que pour signifier les hommes ; il ne signifie pas à proprement parler quelque chose qui leur est commun mais les hommes eux-mêmes' [Ockham 1488, 201]. Sur cette question, cependant, nous revendiquons le droit à un agnosticisme ontologique du logicien et demandons à ce que les systèmes de logiques soient jugés sur leurs qualités instrumentales et explicatives, leur caractère économique et peut-être aussi leur élégance.

la cardinalité, il nous faut maintenant poser les principes selon lesquels est construit le système de l'Ontologie. Le calcul des noms qu'est l'Ontologie s'appuie sur une base de logique des propositions quantifiée ainsi que sur la caractérisation axiomatique d'un unique relateur primitif de catégorie s/nn : l'epsilon ϵ. Cette constante, que l'on peut assimiler à ce que la tradition nommait une *copule* apparaît dans des propositions dites *singulières* de la forme :

$$a \ \epsilon \ b$$

où les arguments a et b sont tous deux de la catégorie n des noms. Leśniewski parvint à fonder son système sur la base d'un unique axiome propre qui dans une écriture classique prend la forme :

$$\text{Ax} : (\forall ab)[a\epsilon b \equiv .$$
$$(\exists c)(c\epsilon a) \wedge (\forall dc)((d\epsilon a \wedge c\epsilon a) \supset d\epsilon c) \wedge (\forall d)(d\epsilon a \supset d\epsilon b)]$$

Cet axiome répond aux intentions de Leśniewski, qui voulait caractériser la proposition singulière de manière à ce qu'elle réponde aux conditions de vérité suivantes :

$a \ \epsilon \ b$ est vraie *ssi* :
i. a est un nom singulier
ii. ce qui est dénoté par a est aussi dénoté par b.

Voyons maintenant trois thèses significatives :

T1. $(\forall ab)(a\epsilon b \supset a\epsilon a)$
T2. $\sim (\forall a)(a\epsilon a)$
T3. $(\forall abc)(a\epsilon b \wedge b\epsilon c \ .\!\supset a\epsilon c)$

L'Ontologie n'introduit aucun des interdits grammaticaux ni les distinctions de niveaux caractéristiques de la relation d'appartenance ensembliste. Comme le montrent les thèses T1 et T2, l'Ontologie n'exclut pas des expressions douées de signification les formules réflexives de la forme :

$$a \ \epsilon \ a$$

Celles-ci ne sont pourtant pas vraies pour un quelconque argument a, mais seulement lorsqu'il s'agit d'un nom singulier. Enfin la thèse T3 exprime la *transitivité* de la copule epsilon. La base axiomatique étant donnée, on pose généralement les définitions [8] suivantes, en vue de disposer d'un calcul complet du distributif :

8. Il convient d'indiquer que les définitions de l'Ontologie ne sont pas métalinguistiques, mais constituent des thèses biconditionnelles du langage objet. Sur cet important aspect des systèmes de Leśniewski que nous ne pouvons détailler ici, cf. [Miéville 1984 ; 2001] et [Joray 2004 ; 2004b].

D1.	$(\forall a)(\,!\{a\} \equiv (\exists b)(b\epsilon a))$	[être un nom dénotant s/n]
D2.	$(\forall a)(0\{a\} \equiv \sim !\{a\})$	[être un nom vide s/n]
D3.	$(\forall a)(1\{a\} \equiv a\epsilon a)$	[être un nom singulier s/n]
D4.	$(\forall ab)(a = b \equiv .\ a\epsilon b \wedge b\epsilon a)$	[identité singulière s/nn]
D5.	$(\forall ab)(a \approx b\ .\!\equiv\!.\ (\forall c)(c\epsilon a \equiv c\epsilon b))$	[identité générale s/nn]
D6.	$(\forall ab)(a \subset b\ .\!\equiv\!.\ (\forall c)(c\epsilon a \supset c\epsilon b))$	[inclusion nominale s/nn]
D7.	$(\forall a)(a\epsilon\wedge \equiv .\ a\epsilon a \wedge \sim (a\epsilon a))$	[nom vide n]
D8.	$(\forall a)(a\epsilon\vee \equiv a\epsilon a)$	[nom universel n]

On peut également introduire sans difficulté les opérations booléennes qui forment ici le pendant nominal des opérations usuelles sur les classes [9] :

D9.	$(\forall abc)(a\epsilon(b \cup c) \equiv .\ a\epsilon b \vee a\epsilon c)$	[réunion n/nn]
D10.	$(\forall abc)(a\epsilon(b \cap c) \equiv .\ a\epsilon b \wedge a\epsilon c)$	[intersection n/nn]
D11.	$(\forall abc)(a\epsilon(b\backslash c) \equiv .\ a\epsilon b \wedge \sim (a\epsilon c))$	[différence n/nn]
D12.	$(\forall ab)(a\epsilon C(b) \equiv a\epsilon(\vee\backslash b))$	[complémentaire n/n]

Bien entendu, ce premier développement de l'Ontologie ne peut suffire à en montrer toutes les potentialités. On notera cependant que la définition D4 permet d'accéder à la relation d'identité singulière sans qu'il soit pour cela nécessaire de s'appuyer sur une quantification allant au-delà du premier ordre [10]. De plus, cette définition permet la preuve de la thèse suivante, qui exprime l'antisymétrie de la copule epsilon :

T4. $(\forall ab)(a\epsilon b \wedge b\epsilon a\ .\!\supset a = b)$

5 Où il est question de cardinalité

Pour terminer, il nous reste à mettre en évidence le caractère opératoire de la base logique esquissée. Pour ce faire, nous allons montrer comment il est possible de construire une définition de la cardinalité et ceci, une fois encore, sans faire appel à la notion de classe. La démarche empruntée

9. On démontre aisément que ces opérations possèdent les propriétés usuelles, en particulier $\cap$ et $\cup$ sont idempotentes, commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre.

10. Une telle définition de l'identité n'est possible dans le calcul classique qu'à partir du deuxième ordre. Son introduction en logique du premier ordre ne peut en effet se faire qu'à titre de symbole primitif et par l'adjonction d'axiomes propres. Cf. [Joray 2002].

est parallèle à celle des logicistes classiques. Elle passe par une définition préalable de la relation d'*équinuméricité*. On commence par poser les trois définitions suivantes, qui inscrivent la *biunivocité* ainsi que les notions de *domaine* et *codomaine* d'une relation nominale s/nnÊ :

D13. $(\forall R)[\text{Biuni}\{R\} \equiv$
$(\forall abc)(((R\{ac\} \wedge R\{bc\}) \vee (R\{ca\} \wedge R\{cb\})) \supset a = b)]$
[R est une relation biunivoque]

D14. $(\forall Ra)(\text{Dom}(aR) \equiv (\forall b)((\exists c)R\{bc\} \equiv b\epsilon a))$
[a est le domaine de R]

D15. $(\forall Ra)(\text{Codom}(aR) \equiv (\forall b)((\exists c)R\{cb\} \equiv b\epsilon a))$
[a est le codomaine de R]

On obtient alors la relation s/nn d'*équinuméricité* nominale en posant :

D16. $(\forall ab)(a\infty b \equiv (\exists R)(\text{Biuni}(R) \wedge \text{Dom}(aR) \wedge \text{Codom}(bR)))$
[a et b sont équinumériques]

Enfin, on dispose de la notion de *cardinalité nominale* en inscrivant les trois définitions suivantes, où l'argument f est un foncteur de catégorie s/n :

D17. $(\forall f)(\text{Num}(f) \equiv (\forall ab)((f\{a\} \wedge a\infty b) \supset f\{b\}))$
[f est numérique]

D18. $(\forall f)(\text{Quant}(f) \equiv (\forall ab)((f\{a\} \wedge f\{b\}) \supset a\infty b))$
[f est quantitatif]

D19. $(\forall f)(\text{Card}(f) \equiv. \text{Num}(f) \wedge \text{Quant}(f) \wedge (\exists a)f\{a\})$
[f est un cardinal]

Un prédicat unaire f, de catégorie s/n, est donc un cardinal lorsqu'il répond aux trois conditions du *definiens*. Il doit être numérique et quantitatif ; le troisième terme de la conjonction vise à exclure des cardinaux les prédicats vides, qui ne sont satisfaits par aucun nom. En outre, l'outillage catégoriel de caractérisation des domaines de quantification est ici déterminant puisqu'il autorise l'usage nécessaire d'une quantification qui s'étend cette fois-ci aux catégories s/n et s/nn. Sur cette base, on obtient en particulier les deux thèses suivantes, qui montrent que les constantes 0 et 1 (définitions D2 et D3) sont bien des cardinaux. En ce qui concerne 1, pourtant, ce résultat est conditionné par la présence dans l'univers du discours d'au moins un objet [11].

11. Cette condition est nécessaire puisqu'une interprétation de l'Ontologie sur un univers vide est parfaitement possible. Notons simplement que, dans un tel cas de figure, les domaines de quantification ne sont pas pour autant vides puisque $Dom(n) = \{||\}$. La condition est cependant caduque dès lors que l'on adjoint à l'Ontologie un axiome de l'infini.

T5. Card(0)
T6. $(\exists a) a \epsilon a \supset \text{Card}(1)$

6 Epilogue

La théorie des catégories sémantiques ainsi que les conventions linguistiques de l'Ontologie relatives à la catégorie n des noms logiques rendent donc parfaitement possible un traitement général du distributif qui ne s'appuie à aucun moment sur une notion de classe. Les intérêts d'un tel calcul, qui peut être qualifié de *no-class theory* en un sens radical de l'expression, ont été largement examinés par Leśniewski ainsi que par les logiciens issus de l'Ecole de Varsovie [12]. De notre côté, nous travaillons à la reprise du programme logiciste dans le cadre du calcul des noms. Ce développement, qui n'avait pas été suivi par Leśniewski, puisqu'il lui préférait une construction de l'arithmétique par l'ajout des propositions de Peano comme axiomes propres, a été partiellement étudié par Canty [1967 ; 1969]. Nous montrons dans une autre étude [Joray 2002a] qu'il permet des améliorations substantielles de la démarche classique des *Principia Mathematica*. Indiquons en particulier qu'il permet d'échapper au dilemme auquel se sont trouvés confrontés Whitehead et Russell concernant la question des fonctions *imprédicatives*. Russell écrit en effet :

> Il n'y a aucun avantage à postuler que les classes existent réellement (. . .). Je crois que les classes sont principalement destinées à fournir une méthode pour réduire l'ordre des fonctions propositionnelles : c'est aussi la principale utilité du langage des classes. Je refuse donc toutes les assomptions qu'accomplit le sens commun en posant l'existence des classes, hormis celle-ci : toute fonction propositionnelle est équivalente, pour toutes ses valeurs, à une certaine fonction prédicative [1908, 331].

Le dilemme est donc posé : il faut accepter, sous forme d'un axiome, la possibilité de réduire les fonctions propositionnelles, ou bien abandonner l'idée de la *no-class theory*. L'Ontologie fournit pourtant un cadre où le dilemme s'efface puisqu'il permet de construire l'arithmétique sans axiome de réductibilité tout en disqualifiant les classes au profit d'une conception élargie du nom logique.

12. On se repportera en particulier aux articles consacrés à l'Ontologie de [Srednicki *et al.* 1984].

Références

AJDUKIEWICZ, KAZIMIERZ

1935 Die syntaktische Konnexität, *Studia Philosophica*, 1, 1–27. Trad. angl. dans Mc Call S. (éd). *Polish Logic, 1920-1939.* Oxford : Clarendon, 1967, 207–231.

CANTY, JOHN THOMAS

1967 *Leśniewski's Ontology and Gödel's Incompleteness Theorem*, Thèse de doctorat, University of Notre Dame, Indiana.

1969 The Numerical Epsilon, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 10, 47–63.

JORAY, PIERRE

1999 Domaines de quantification et catégorie syntaxico-sémantiques, dans *Rôle et enjeux de la notion de catégorie en logique. Travaux de logique du CdRS*, 13, Université de Neuchâtel, 43–62.

2001 *La subordination logique. Une étude du nom complexe dans l'Ontologie de S. Leśniewski*, Berne : Peter Lang.

2002 L'identité est-elle relative ? Remarques sur une illusion logique, *Revue de Théologie et de Philosophie*, 134, 1–14.

2002a Logicism in Leśniewski's Ontology, *Logica Trianguli*, 6, 3–20.

2004 What is Wrong with Creative Definitions ?, *Logika (Wrocław)*, 23.

2004a La quantification catégorielle, dans Joray, P. (éd.), *La quantification dans la logique moderne*, Paris : L'Harmattan (coll. Epistémologie et philosophie des sciences), 233–260.

2004b Axiomatique et définition dans les systèmes logiques de Leśniewski, Tarski et Łukasiewicz, dans Pouivet, R. (éd.), *Actes du colloque 'Philosophie et logique en Pologne 1918-1939', Nancy, 20–22 nov. 2003*, à paraître.

JORAY, PIERRE & GODART-WENDLING, BÉATRICE

2002 De la théorie des catégories sémantiques à l'analyse de la quantification dans la syntaxe d'Ajdukiewicz, *Langages*, 148, 28–50.

LEJEWSKI, CZESŁAW

1954 Logic and Existence, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 5 : 104-119. Repris dans [Srzednicki *et al.* 1984, 45–58].

Leśniewski, Stanisław

1929 Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, *Fundamenta Mathematicae*, 14 : 1-80. Trad. angl. dans [Leśniewski 1992, 410–492].

1989 *Sur les fondements des mathématiques*, Trad. fr. par Kalinowski, G., Paris : Hermès.

1992 *Collected Works*, Surma, J. T. (éds). 2 vol. Dordrecht : Kluwer.

Miéville, Denis

1984 *Un développement des systèmes logiques de Stanisław Leśniewski : Protothétique-Ontologie-Méréologie*, Berne : Peter Lang.

2001 *Introduction à l'oeuvre de Leśniewski I : la Protothétique, Travaux de logique du CdRS*, Hors série, Université de Neuchâtel.

Ockham, Guillaume

1488 *Summa totius logicae.* Cité dans *Somme logique I*, trad. fr. Biard, J., Mauvesin : Trans-Europ-Repress, 2e édition, 1993.

Russell, Bertrand

1920 *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. fr. Rivenc, F., Paris : Payot, 1991.

Sobociński, Boleslaw

1949-50 L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśnievski, *Methodos*, vol. I, 94–107, 220-228 ; vol. II, 237–257.

Srzednicki, J. T. J., Rickey V. F. & Czelakowski J. (éds)

1984 *Leśnievski's Systems. Ontology and Mereology*, La Hague : Nijhoff.

Tarski, Alfred

1923 Sur le terme primitif de la logistique, dans *Logique, sémantique, métamathématique I*, trad. fr. Granger, G.-G., Paris : A. Colin, 1972, 1–25.

Woleński, Jan

1986 Reism and Leśnievski's Ontology, *History and Philosophy of Logic*, 7, 167–176.