Logiques dialogiques 'multivalentes'

Helge Rückert
Université de Mannheim

Résumé : Le but de cet article est de montrer comment les logiques dites multivalentes peuvent être formulées dans le cadre de la logique dialogique. Pour formuler les règles de particule pour ces logiques on introduit l'idée de différents modes d'assertion. En donnant ensuite les règles de particule et les règles structurelles appropriées, on peut reconstruire dialogiquement les systèmes standards de logiques multivalentes. Cela est fait explicitement pour la logique à trois valeurs de Łukasiewicz ($\mathrm{L}_{\mathbf{3c}}$). En remplaçant la règle structurelle classique par sa contrepartie intuitionniste on obtient des versions intuitionnistes de systèmes multivalents (par exemple $\mathrm{L}_{\mathbf{3i}}$). Les systèmes dialogiques multivalents $\mathrm{L}_{\mathbf{3c}}$ et $\mathrm{L}_{\mathbf{3i}}$ sont illustrés par quelques exemples et pour conclure on formule les tableaux stratégiques correspondants.

Abstract: Aim of this paper is to show how so-called multi-valued logics can be formulated within the framework of Dialogical Logic. In order to formulate the particle rules for multi-valued logics the concept of different assertion modes is introduced. Then, by giving appropriate particle and structural rules standard systems of multi-valued logics can be reconstructed dialogically. This is done explicitly for Łukasiewicz' logic with three values ($\mathrm{L}_{\mathbf{3c}}$). By replacing the classical structural rule by its intuitionistic counterpart one obtains intuitionistic versions of the multi-valued systems (for example $\mathrm{L}_{\mathbf{3i}}$). The dialogical multi-valued systems $\mathrm{L}_{\mathbf{3c}}$ and $\mathrm{L}_{\mathbf{3i}}$ are illustrated with some examples and finally strategic tableaux for them are formulated.

Philosophia Scientiæ, 8 (2), 2004, 59–87.

1 Introduction

La logique dialogique fut suggérée à la fin des années 1950 par Paul Lorenzen, puis élaborée par Kuno Lorenz[1]. Dans le contexte de *l'Ecole d'Erlangen* il était habituel d'essayer de justifier la logique intuitionniste et de défendre le constructivisme. Pendant longtemps l'approche dialogique fut ainsi étudiée uniquement pour les logiques classique et intuitionniste du premier ordre, à quelques exceptions près[2]. Mais plus récemment il a été montré que la logique dialogique fournissait aussi un cadre très souple permettant de donner une sémantique pragmatique claire pour plusieurs autres logiques non classiques[3].

Un trait intéressant de la logique dialogique est que les systèmes logiques y sont caractérisés par certains ensembles de règles, à savoir les règles structurelles et les règles de particule[4]. Et parfois deux systèmes logiques ne se différencient que par une seule règle. En particulier, les formulations dialogiques de la logique classique du premier ordre standard et de la logique intuitionniste du premier ordre standard diffèrent seulement sur une règle structurelle. (Les règles de particule sont les mêmes. On pourrait dire que les deux logiques classique et intuitionniste traitent des mêmes particules.) Ensuite quand on formule par exemple des systèmes dialogiques pour une logique non classique en modifiant ou en introduisant de nouvelles règles de particules, c'est dans la plupart des cas compatible avec l'usage de la règle structurelle classique ou de la règle structurelle intuitionniste. On obtient donc automatiquement une version classique et une version intuitionniste du système.

---

[1] Quelques-uns des premiers textes les plus importants sur la logique dialogique sont rassemblés dans [Lorenzen & Lorenz 1978].

[2] Une de ces exceptions est [Fuhrmann 1985] qui présente un système dialogique de logique de pertinence.

[3] Ont été publiés entre autres des articles comportant des formulations dialogiques pour la logique modale [Rahman & Rückert 2001b], les logiques modales non-normales [Rahman 2004], la logique hybride [Blackburn 2001a], la logique libre [Rahman, Rückert & Fischmann 1997], la logique connexe [Rahman & Rückert 2001c] et la logique paraconsistante [Rahman & Carnielli 2000], [Van Bendegem 2001]. [Rückert 2001] est un tour d'horizon et une courte introduction générale à la logique dialogique. (Voir aussi [Rahman & Keiff 2004] pour une présentation et une défense générales de la logique dialogique). Pour un aperçu de l'arrière-plan historique et de quelques développements plus récents concernant la logique dialogique et des approches liées comme la GTS de Hintikka, voir [Rahman & Rückert 2001b].

[4] Une conséquence intéressante de cet aspect est que dans l'approche dialogique il est relativement facile de combiner les idées sous-jacentes à différentes logiques non classiques et de les intégrer dans un nouveau système dialogique. Pour une combinaison des logiques intuitionniste, libre et paraconsistante, voir [Rahman 2001].

Venons-en aux logiques multivalentes. D'un côté l'idée de formuler des systèmes dialogiques de logiques multivalentes est très naturelle : comme des formulations dialogiques ont été données pour de nombreuses autres logiques non classiques, pourquoi ne pas en donner une également pour les logiques multivalentes ? Mais d'un autre côté, cette idée paraît aussi un peu étrange puisque dans l'approche dialogique il n'y a pas place pour les valeurs de vérité. Il ne s'agit pas d'assigner des valeurs de vérité aux formules, mais de jouer des jeux d'argumentation idéalisée avec ces formules. Cependant cette objection n'est pas sérieuse : de même qu'il y a des formulations dialogiques pour la logique bivalente on en peut donner pour les logiques multivalentes. Et de même que dans la formulation dialogique de la logique à deux valeurs les valeurs de vérité « vrai » et « faux » ne jouent aucun rôle, les multiples valeurs de vérité des logiques multivalentes ne jouent aucun rôle dans leur formulation dialogique[5]. Mais ce dont on a besoin est quelque chose dans le cadre dialogique qui corresponde aux valeurs de vérité dans d'autres cadres. Les modes d'assertion feront l'affaire. Avec leur aide, il sera possible de formuler les règles de particule appropriées de manière à reconstruire les systèmes bien connus de logiques multivalentes. Mais ce n'est pas tout. Il sera ensuite possible de remplacer la règle structurelle classique par la règle structurelle intuitionniste pour obtenir une version intuitionniste de la logique multivalente en question.

Cet article est organisé comme suit. Premièrement l'approche dialogique est présentée en donnant les formulations dialogiques habituelles pour les logiques classique et intuitionniste du premier ordre standard. En donnant les règles de particule, on les comparera aux définitions vérifonctionnelles bien connues des connecteurs. Cela sera utile pour pouvoir trouver plus tard les règles de particules adéquates pour les connecteurs multivalents. Ensuite, en introduisant le concept de mode d'assertion il sera possible de donner les règles de particule pour les connecteurs des logiques multivalentes. On le fera explicitement pour la logique à trois valeurs de Łukasiewicz, mais la procédure pour d'autres systèmes devrait apparaître clairement aussi. Après ajustement des règles structurelles nous aurons les systèmes dialogiques $L_{\mathbf{3c}}$ et $L_{\mathbf{3i}}$. On les illustrera par quelques exemples de dialogues. Finalement, un traitement plus systématique des stratégies gagnantes sera donné, résultant de la formulation de tableaux stratégiques pour $L_{\mathbf{3c}}$ et $L_{\mathbf{3i}}$.

[5]C'est pourquoi le titre de cet article est *Logiques dialogiques 'multivalentes'* et non pas *Logiques dialogiques multivalentes*.

2 La logique dialogique : rapide aperçu

Dans un dialogue deux parties argumentent à propos d'une thèse en respectant certaines règles données. Le défenseur de la thèse est appelé Proposant (**P**), son adversaire qui attaque la thèse est appelé Opposant (**O**). Chaque dialogue se termine après un nombre fini de coups, avec un joueur qui gagne tandis que l'autre perd. Les règles sont divisées en règles structurelles et règles de particule. Les règles structurelles déterminent le cours général d'un jeu dialogique, tandis que les règles de particule indiquent quels coups sont autorisés pour attaquer les coups de l'autre joueur ou pour défendre ses propres coups.

2.1 Les règles structurelles

`SR 0` **(règle de commencement) :** La formule initiale est énoncée par **P**. Elle fournit le sujet de l'argumentation. Les coups sont alternativement énoncés par **P** et **O**. Chaque coup suivant la formule initiale est soit une attaque, soit une défense.

`SR 1` **(règle contre les tactiques dilatoires) :** **P** et **O** doivent chacun jouer exclusivement des coups qui modifient la situation[6].

`SR 2` **(règle formelle) :** **P** ne peut pas introduire de formule atomique, toutes les formules atomiques doivent être préalablement posées par **O**.

`SR 3` **(règle de victoire) :** **X** gagne ssi c'est le tour de **Y** mais que celui-ci ne peut pas jouer (ni attaquer ni se défendre).

`SR 4i` **(règle intuitionniste) :** A chaque coup, chaque joueur peut attaquer une formule complexe assertée par son adversaire ou se défendre contre la dernière attaque à laquelle il n'a pas encore répondu.

ou

`SR 4c` **(règle classique) :** A chaque coup, chaque joueur peut attaquer une formule complexe assertée par son adversaire ou se défendre contre n'importe quelle attaque (y compris celles qui ont déjà été défendues)[7].

---

[6]Cette règle remplace les *Angriffsschranken* de Lorenz. Il faut encore la clarifier sur une base formelle.

[7]Dans `SR 4i` comme dans `SR 4c`, nous avons donné la version dite symétrique des règles. Il est possible de diminuer les droits de **O** sans aucun changement au niveau

2.2 Les règles de particule

Maintenant nous pouvons aborder les règles de particule. Pour chaque connecteur nous allons comparer la règle de particule à la définition vérifonctionnelle correspondante. Cela nous aidera à voir certaines connexions qui seront utiles plus tard pour la formulation des règles de particule pour les connecteurs multivalents.

Règle de particule pour la disjonction :

	Attaque	**Défense**
$A \vee B$	?	A ——— B (Le défenseur choisit)

De même qu'une disjonction (en logique classique) est vraie ssi au moins l'un de ses termes est vrai, dans un dialogue un joueur qui a asserté une disjonction est capable de la défendre ssi il est capable de défendre au moins l'un des deux termes. Ainsi l'attaquant attaque en demandant « Lequel ? » (ou « ? » pour abréger) et on doit s'en défendre en assertant l'un des termes (le défenseur a le droit de choisir lequel).

Règle de particule pour la conjonction :

	Attaque	**Défense**
$A \wedge B$	?L(eft) [à gauche] ——— ?R(ight) [à droite] (L'attaquant choisit)	A ——— B

De même qu'une conjonction (en logique classique) est vraie ssi les deux termes sont vrais, dans un dialogue un joueur qui a asserté une conjonction est capable de la défendre ssi il est capable de défendre

des stratégies de la manière suivante : pour **P** la règle reste inchangée mais **O** est seulement autorisé soit à se défendre contre le dernier coup de **P**, soit à attaquer ce coup. Ces versions des règles `SR 4i` et `SR 4c` sont appelées asymétriques, puisque maintenant **P** a plus de droits que **O**.

les deux termes. Ainsi l'attaquant attaque en demandant l'un (celui de gauche) ou l'autre (celui de droite) des deux termes (il choisit lequel) et le défenseur doit asserter le(s) terme(s) correspondant(s).

Règle de particule pour la subjonction :

	Attaque	**Défense**
$A \rightarrow B$	A	B

De même qu'une subjonction (en logique classique) est fausse ssi l'antécédent est vrai et le conséquent est faux, dans un dialogque un joueur qui a asserté une subjonction ne peut être attaqué que si l'attaquant concède l'antécédent en l'assertant. C'est alors au défenseur de se défendre en assertant le conséquent (ou bien il peut bien entendu contre-attaquer l'antécédent qui vient d'être affirmé par l'attaquant).

Règle de particule pour la négation :

	Attaque	**Défense**
$\neg A$	A	$\otimes$ (Pas de défense, seule la contre-attaque est possible)

De même qu'une négation (en logique classique) est fausse ssi la formule niée est vraie, dans un dialogue un joueur qui a asserté une négation ne peut être attaqué que si l'attaquant concède la formule niée en l'assertant. Ensuite d'autre part, le défenseur ne peut pas se défendre. (La seule chose qu'il lui reste à faire est d'engager une contre-attaque contre la formule niée qui vient d'être assertée par l'attaquant).

Comme cet article se concentre sur le fragment propositionnel de la logique du premier ordre, nous ne discuterons pas ici du traitement des quantificateurs.

2.3 Validité

Les règles structurelles et de particules que nous venons de donner définissent les jeux dialogiques intuitionnistes (avec `SR 4i`) et classiques (avec `SR 4c`). La validité logique est définie comme suit :

Définition 1. *Validité logique :*
*Une formule est logiquement valide dans un système dialogique donné ssi **P** a une stratégie gagnante formelle pour cette formule. (Avoir une stratégie gagnante formelle signifie que pour n'importe quel coup choisi par votre opposant vous avez au moins un coup possible à votre disposition tel que finalement vous puissiez gagner.)*

On peut montrer qu'avec ces règles et cette définition de la validité logique les formules valides obtenues sont les mêmes que celles obtenues par les approches standard de la logique. (Pour obtenir la logique intuitionniste employez la règle intuitionniste, et pour obtenir la logique classique utilisez la règle classique[8].)

2.4 Exemples

Exemple 1 *(avec* `SR 4i` *ou* `SR 4c`*)* :

	O			P	
				$((a \to b) \wedge a) \to b$	(0)
(1)	$(a \to b) \wedge a$	0		b	(8)
(3)	$a \to b$		1	?L	(2)
(5)	a		1	?R	(4)
(7)	b		3	a	(6)

P gagne.

Exemple 2 *(avec* `SR 4c`*)* :

	O			P	
				$a \vee \neg a$	(0)
(1)	?	0		$\neg a$	(2)
(3)	a	2		$\otimes$	
(1')	?	0		a	(4)

P gagne.

[8]On peut trouver de telles preuves par exemple dans [Barth & Krabbe 1982], dans [Krabbe 1985], et dans [Rahman 1993].

Remarques concernant les exemples :

Pour l'exemple 1, le fait d'utiliser `SR 4i` ou `SR 4c` ne fait pas de différence, mais l'exemple 2 n'est valide qu'en logique classique.

Explication de la notation :

Les coups de **O** sont écrits dans la colonne de **O**, et de manière équivalente pour **P**. Les nombres entre parenthèses dans les marges à gauche et à droite indiquent l'ordre dans lequel les coups sont exécutés. Le coup numéro (0) est la thèse sur laquelle on argumente dans le dialogue. Les attaques sont caractérisées par des nombres sans parenthèses qui montrent quel coup de l'adversaire est attaqué. Les défenses sont toujours écrites sur la ligne de l'attaque correspondante.

(Comme vous pouvez le voir dans l'exemple 2, quand on joue suivant la règle classique il est possible pour **P** de se défendre à nouveau contre une attaque à laquelle il a déjà été répondu auparavant. Pour noter cette défense renouvelée nous répétons l'attaque correspondante, et il faut garder à l'esprit que ce n'est pas un coup dans le dialogue mais seulement une convention de notation qui est indiquée par une apostrophe comme dans (1') de l'exemple 2.)

3 Dialogues pour logiques 'multivalentes' : règles de particule

D'un point de vue technique les systèmes de base de logiques multivalentes sont de simples généralisations des logiques bivalentes. Au lieu des deux valeurs de vérité '`t`' (ou '1') et '`f`' (ou '0'), on utilise trois valeurs ou plus. Alors bien entendu, il y a plus de fonctions de valeurs de vérité, et donc plus de connecteurs logiques.

Ainsi si nous voulons donner une formulation dialogique des systèmes de base de logiques multivalentes nous devons demander quel type de généralisations doivent être faites dans ce cadre pragmatique où les valeurs de vérité ne jouent pas un rôle essentiel. Une première suggestion naturelle pourrait être qu'au lieu de deux partenaires pour l'argumentation (**P** et **O**), il nous en faut trois pour formuler les logiques trivalentes, quatre pour les logiques quadrivalentes, et ainsi de suite. Mais dans ce qui suit je vais proposer une autre généralisation pour reformuler les logiques multivalentes dans le cadre dialogique[9].

[9]Bien sûr je ne peux pas exclure qu'il soit aussi possible de donner des formulations

Pour motiver ma solution nous allons tout d'abord observer les dialogues dits matériels. En général, la logique dialogique n'est pas basée sur l'hypothèse que toutes les formules ont une valeur de vérité définie, soit vrai soit faux. Mais si nous pouvons supposer cela, alors il y a une autre manière de reformuler la logique classique dans le cadre dialogique. Pour les dialogues matériels, nous remplaçons la règle structurelle formelle par la suivante :

Règle structurelle pour les dialogues matériels : Les formules atomiques vraies peuvent être assertées (que ce soit par **P** ou **O**), mais il ne faut pas asserter de formule atomique fausse.

Ensuite on peut définir la validité logique comme étant l'existence de stratégies gagnantes dans les dialogues matériels pour toutes les possibilités d'assignations de valeurs de vérité aux formules atomiques. Nous avons donc trouvé un lien entre le concept de valeur de vérité et un authentique concept dialogique, celui d'assertion. A partir de ce lien, la généralisation qui suit est relativement directe : la transition de l'ensemble de deux valeurs de vérité $\{1, 0\}$ à des ensembles à trois valeurs ou plus dans le cadre dialogique correspond à la transition de l'ensemble {assertable, non assertable} vers des ensembles à plus de deux modes d'assertion.

Dans les dialogues pour logiques multivalentes les formules ne sont donc pas assertées *simpliciter* mais de différentes manières. Dans ce qui suit nous allons noter cela en préfixant les formules par le signe d'assertion de Frege[10] et en utilisant des indices pour différencier les différents modes d'assertion. Ainsi pour les logiques trivalents la table suivante montre les correspondances entre l'approche dénotationnelle avec ses valeurs de vérité, et l'approche dialogique avec sa notion pragmatique de mode d'assertion :

Valeurs de vérité		*Modes d'assertion*
1	$\approx$	$\vdash_1$
$1/2$	$\approx$	$\vdash_{1/2}$
0	$\approx$	*non assertable*

dialogiques de logiques multivalentes basées sur l'idée qui vient d'être mentionnée, à savoir en introduisant plus de deux joueurs dans les dialogues.

[10] Frege a introduit le signe d'assertion '$\vdash$' dans sa *Begriffsschrift* (voir [Frege 1967]). Même si nous employons le symbole de Frege cela ne signifie pas nécessairement que nous acceptions tout ce qu'il en a dit. C'est pour nous un simple moyen de notation.

En général nous aurons besoin de n signes d'assertion différents pour formuler la reconstruction dialogique d'une logique à $n+1$ valeurs de vérité (parce que la valeur de vérité 0 correspond toujours au fait que la formule n'est pas du tout assertable dans un dialogue).

A partir de ces considérations nous sommes maintenant capables de formuler des règles de particule adéquates pour les connecteurs des logiques multivalentes. Dans ce qui suit nous le ferons explicitement pour une logique de Łukasiewicz à trois valeurs de vérité, mais cela devrait faire clairement apparaître comment obtenir également des règles dialogiques pour d'autres logiques multivalentes.

La disjonction

Table de vérité pour la disjonction de L_3 :

A	B	$A \vee_{L_3} B$
1	1	1
1	$1/2$	1
1	0	1
$1/2$	1	1
$1/2$	$1/2$	$1/2$
$1/2$	0	$1/2$
0	1	1
0	$1/2$	$1/2$
0	0	0

Règles de particule pour la disjonction de L_3 :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_1 A \vee_{L_3} B$	?	$\vdash_1 A$ ——— $\vdash_1 B$ (Le défenseur choisit)

Cette règle correspond exactement à la règle de particule pour la disjonction standard, et ne nécessite pas d'explication supplémentaire. Mais comme dans L_3 on peut aussi asserter une disjonction suivant le mode $\vdash_{1/2}$, nous devons aussi déterminer comment de tels coups peuvent être attaqués et défendus :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_{1/2} A \vee_{L_3} B$	?	$\vdash_{1/2} A$ ——— $\vdash_{1/2} B$ (Le défenseur choisit)
	$\vdash_1 A$	$\otimes$
	$\vdash_1 B$	$\otimes$
	(L’attaquant choisit entre les trois attaques à sa disposition)	

Du fait que (dans l’approche dénotationnelle) une disjonction n’a la valeur de vérité $1/2$ que si au moins l’un de ses termes a cette valeur, une disjonction ne peut être assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ que si le défenseur est capable d’asserter au moins un des termes de la disjonction suivant ce mode d’assertion. Comme d’autre part (dans l’approche dénotationnelle) une disjonction ne peut pas avoir la valeur de vérité $1/2$ si au moins un de ses termes est vrai, une disjonction assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ pourra également être attaquée en assertant l’un de ses termes suivant le mode d’assertion $\vdash_1$. Il n’y a alors pas de défense possible, mais seulement une contre-attaque.

Généralisation des règles pour la disjonction : supposons qu’au lieu d’une logique de Łukasiewicz à trois valeurs nous ayons une logique à n valeurs de vérité 0, $1/(n-1)$, $2/(n-1)$, $\ldots$, 1. La disjonction est définie par la clause suivante :

$$\mathrm{V}(A \vee_{L_n} B) = \max(\mathrm{V}(A)\,;\, \mathrm{V}(B))$$

Ce qui signifie que la valeur de vérité de la disjonction est la valeur de vérité maximale de ses deux termes. Maintenant, à quoi ressemblent les règles de particule pour $\vee_{L_n}$? Si $A \vee_{L_n} B$ est établie suivant un mode d’assertion donné $\vdash_x$, l’attaquant a le choix suivant :

1. Il attaque en demandant ‘ ?’. Alors le défenseur doit établir l’un des termes de la disjonction suivant le mode d’assertion $\vdash_x$, ou bien
2. Il attaque en affirmant l’un des termes de la disjonction suivant le mode d’assertion $\vdash_y$ avec $y > x$. Il n’y a alors pas de défense pour contrer cette attaque.

La conjonction

Table de vérité pour la conjonction de L_3 :

A	B	$A \wedge_{L_3} B$
1	1	1
1	$1/2$	$1/2$
1	0	0
$1/2$	1	$1/2$
$1/2$	$1/2$	$1/2$
$1/2$	0	0
0	1	0
0	$1/2$	0
0	0	0

Règle de particule pour la conjonction de L_3 :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_1 A \wedge_{L_3} B$	?L(eft) [à gauche]	$\vdash_1 A$
	?R(ight) [à droite] (L'attaquant choisit entre les deux attaques à sa disposition)	$\vdash_1 B$

Cette règle correspond parfaitement à la règle de particule pour la conjonction standard et n'exige pas plus d'explication.

	Attaque	**Défense**
$\vdash_{1/2} A \wedge_{L_3} B$	?	$\vdash_{1/2} A$ $\vdash_{1/2} B$ (Le défenseur choisit)
	?L(eft)	$\vdash_1 A$ $\vdash_{1/2} A$ (Le défenseur choisit)
	?R(ight)	$\vdash_1 B$ $\vdash_{1/2} B$ (Le défenseur choisit)
	(L’attaquant choisit entre les trois attaques à sa disposition)	

Comme (dans l’approche dénotationnelle) une conjonction n’a la valeur de vérité $1/2$ que si au moins l’un de ses termes a cette valeur de vérité, une conjonction ne peut être assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ que si le défenseur est capable d’asserter au moins l’un de ses termes suivant ce mode. D’autre part, du fait que (dans l’approche dénotationnelle) une conjonction n’a la valeur de vérité $1/2$ que si chacun de ses termes a au moins la valeur $1/2$, une conjonction assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ peut aussi être attaquée en lui demandant chacun de ses termes. La défense consiste alors à asserter le terme demandé suivant le mode $\vdash_{1/2}$ ou $\vdash_1$.[11]

Généralisation des règles pour la conjonction : supposons qu’au lieu d’une logique de Łukasiewicz à trois valeurs nous ayons une logique à n valeurs de vérité 0, $1/(n-1)$, $2/(n-1)$, …, 1. La conjonction est définie par la clause suivante :

$$\mathrm{V}(A \wedge_{L_n} B) = \min(\mathrm{V}(A)\,;\,\mathrm{V}(B))$$

Ce qui signifie que la valeur de vérité de la conjonction est la valeur de vérité minimale de ses deux termes. A quoi ressemblent alors les règles de

[11] Même s’il est permis au défenseur de se défendre contre l’attaque ‘ ?L(eft)’ avec $\vdash_1 A$ et contre ‘ ?R(ight)’ avec $\vdash_1 B$, il ne doit pas le faire car il perdrait alors contre l’attaque ‘ ?’. Donc, s’il se défend en affirmant l’un des termes de la conjonction suivant le mode $\vdash_1$, il faut toujours qu’il se défende en affirmant l’autre terme suivant le mode $\vdash_{1/2}$.

particule pour $\wedge_{L_n}$? Si $A \wedge_{L_n} B$ est établie suivant un mode d'assertion donné $\vdash_x$, l'attaquant a le choix suivant :

1. Il attaque en demandant '?'. Alors le défenseur doit établir l'un des termes de la conjonction suivant le mode d'assertion $\vdash_x$, ou bien
2. Il attaque en demandant le terme de gauche par '?L(eft)'. La défense consiste alors à affirmer le terme de gauche suivant le mode d'assertion $\vdash_y$ avec $y \geq x$.
3. Il attaque en demandant le terme de droite par '?R(ight)'. La défense consiste alors à affirmer le terme de droite suivant le mode d'assertion $\vdash_y$ avec $y \geq x$.

La subjonction
Table de vérité pour la subjonction de L_3 :

A	B	$A \to_{L_3} B$
1	1	1
1	$1/2$	$1/2$
1	0	0
$1/2$	1	1
$1/2$	$1/2$	1
$1/2$	0	$1/2$
0	1	1
0	$1/2$	1
0	0	1

Règle de particule pour la subjonction de L_3 :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_1 A \to_{L_3} B$	$\vdash_1 A$ $\vdash_{1/2} A$ (L'attaquant choisit entre les deux attaques à sa disposition)	$\vdash_1 B$ $\vdash_1 B$ ——— $\vdash_{1/2} B$ (Le défenseur choisit)

La première paire d'attaque et défense correspond parfaitement à la règle de particule pour la subjonction standard et ne nécessite pas plus d'explication. Mais il y a une autre possibilité d'attaque : du fait que (dans l'approche dénotationnelle) si l'antécédent a la valeur de vérité $1/2$, une subjonction est vraie ssi le conséquent est vrai ou a la valeur $1/2$, une subjonction assertée suivant le mode d'assertion $\vdash_1$ peut aussi être attaquée en assertant l'antécédent suivant le mode $\vdash_{1/2}$. La défense consiste alors à asserter le conséquent soit suivant le mode $\vdash_{1/2}$, soit suivant le mode $\vdash_1$.

	Attaque	**Défense**
$\vdash_{1/2} A \rightarrow_{L_3} B$	$?_A$	$\vdash_1 A$ —— $\vdash_{1/2} A$ (Le défenseur choisit)
	$\vdash_1 B$	$\otimes$
	$\vdash_{1/2} B$	$\vdash_1 A$
	(L'attaquant choisit entre les trois attaques à sa disposition)	

Comme (dans l'approche dénotationnelle) une subjonction ne peut pas avoir la valeur $1/2$ si l'antécédent a la valeur 0, une subjonction assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ peut être attaquée par la demande '$?_A$' de l'antécédent, le défenseur devant alors concéder que l'antécédent est assertable en l'affirmant suivant le mode d'assertion $\vdash_1$ ou $\vdash_{1/2}$. D'autre part, du fait que (dans l'approche dénotationnelle) si le conséquent d'une subjonction a la valeur de vérité 1, la subjonction elle-même ne peut pas avoir la valeur $1/2$, une subjonction avancée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ peut aussi être attaquée en affirmant le conséquent suivant le mode $\vdash_1$. Il n'y a alors pas de défense. Pour finir, comme (dans l'approche dénotationnelle) quand le conséquent d'une subjonction a la valeur $1/2$ cette subjonction n'a elle-même la valeur de vérité $1/2$ que si l'antécédent a la valeur 1, une subjonction assertée suivant le mode $\vdash_{1/2}$ pourra aussi être attaquée par l'assertion du conséquent suivant le mode d'assertion $\vdash_{1/2}$. La défense consiste alors à asserter l'antécédent suivant le mode d'assertion $\vdash_1$.

Généralisation des règles pour la subjonction : supposons qu'au lieu d'une logique de Łukasiewicz à trois valeurs nous ayons une logique à n

valeurs de vérité 0, $^1\!/_{(n-1)}$, $^2\!/_{(n-1)}$, ..., 1. La subjonction est définie par la clause suivante :

$$\mathrm{V}(A \rightarrow_{L_n} B) = \min(1\,;\, 1 - \mathrm{V}(A) + \mathrm{V}(B))$$

Ce qui signifie que la valeur de vérité de la conjonction est 1 si la valeur de vérité du conséquent est supérieure ou égale à celle de l'antécédent ; et si la valeur de l'antécédent est supérieure à celle du conséquent, la valeur de vérité de la subjonction est la différence des deux valeurs.

A quoi ressemblent alors les règles de particule pour $\rightarrow_{L_n}$? Si $A \rightarrow_{L_n} B$ est établie suivant un mode d'assertion donné $\vdash_x$, nous devons distinguer les cas suivants :

1. Si $x = 1$, l'attaquant attaque en affirmant l'antécédent suivant le mode d'assertion $\vdash_y$ qu'il souhaite, et le défenseur doit affirmer le conséquent suivant le mode d'assertion $\vdash_z$ avec $z \geq y$.
2. Si $x < 1$, l'attaquant peut attaquer :
   (a) Soit en affirmant le conséquent suivant le mode $\vdash_y$ qu'il souhaite. Pour la défense, il nous faut à nouveau considérer deux cas :
      i. Si $x + y \leq 1$, alors le défenseur doit affirmer l'antécédent suivant le mode $\vdash_z$, avec $z = x + y$.
      ii. Si $x + y > 1$, il n'y a alors pas de défense (seule une contre-attaque est possible).
   (b) Soit en demandant '$?_A$'. On peut se défendre contre cette attaque en affirmant l'antécédent suivant le mode $\vdash_y$, avec $y \geq x$.

La négation

Table de vérité pour la négation de L_3 :

A	$\neg_{L_3} A$
1	0
$^1\!/_2$	$^1\!/_2$
0	1

Règles de particule pour la négation de L_3 :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_1 \neg_{L_3} A$	$\vdash_1 A$ $\vdash_{1/2} A$ (L’attaquant choisit entre les deux attaques à sa disposition)	$\otimes$ $\otimes$ (Aucune défense, seule la contre-attaque est possible)

Du fait que (dans l’approche dénotationnelle) une négation est vraie ssi la formule niée n’est ni vraie ni n’a la valeur $1/2$, une négation assertée suivant le mode $\vdash_1$ peut être attaquée par l’assertion de la formule niée soit suivant le mode d’assertion $\vdash_1$, soit suivant le mode $\vdash_{1/2}$. Dans les deux cas, aucune défense n’est possible, seule une contre-attaque est possible.

	Attaque	**Défense**
$\vdash_{1/2} \neg_{L_3} A$	?	$\vdash_{1/2} A$

Comme (dans l’approche dénotationnelle) une négation a la valeur de vérité $1/2$ ssi la formule niée a la valeur $1/2$, une négation assertée suivant le mode d’assertion $\vdash_{1/2}$ ne peut être défendue que si l’on est capable d’asserter la formule niée suivant le mode d’assertion $\vdash_{1/2}$.

Généralisation des règles pour la négation : supposons qu’au lieu d’une logique de Łukasiewicz à trois valeurs nous ayons une logique à n valeurs de vérité 0, $1/(n-1)$, $2/(n-1)$, …, 1. La négation est définie par la clause suivante :

$$\mathrm{V}(\neg_{L_n} A) = 1 - \mathrm{V}(A)$$

Ce qui signifie que la valeur de vérité de la négation est 1 moins la valeur de vérité de la formule niée.

A quoi ressemblent alors les règles de particule pour $\neg_{L_n}$? Si $\neg_{L_n} A$ est avancée suivant un mode d’assertion donné $\vdash_x$, nous devons distinguer les deux cas suivants :

1. Si $x = 1$, l’attaquant attaque en affirmant la formule niée dans le mode d’assertion qu’il souhaite, et il n’y a pas de défense (seule la contre-attaque est possible).

2. Si $x < 1$, l'attaquant demande '?' et le défenseur doit affirmer la formule niée suivant le mode $\vdash_y$, avec $y = 1 - x$.

4 Dialogues pour logiques 'multivalentes' : validité et règles structurelles

Dans la section précédente nous avons donné les règles de particule pour L_3. Pour pouvoir jouer les jeux dialogiques on a encore besoin de formuler les règles structurelles pour L_3. Celles-ci ne sont pas très différentes des règles structurelles correspondante pour la logique du premier ordre standard, classique et intuitionniste. Mais avant d'ajuster ces règles structurelles en fonction des besoins des logiques multivalentes, nous devons tout d'abord traiter le concept de validité dans les logiques multivalentes.

Dans l'approche dénotationnelle standard la validité pour les logiques multivalentes est définie à l'aide des valeurs de vérité dites désignées (*designated truth-values*). Ces valeurs de vérité désignées forment un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les valeurs de vérité d'une logique multivalente donnée[12]. Ensuite, dans la définition de la validité dans le cadre dénotationnel standard les valeurs de vérité désignées remplacent la valeur de vérité '1' de la logique bivalente :

Définition 2. *Validité pour les logiques multivalentes (définition standard) :*
Une formule A est logiquement valide ssi pour toute fonction de valuation V : V(A) est une valeur de vérité désignée.
Une inférence de B_1, B_2, B_3... à A est logiquement valide ssi pour toute fonction de valuation V telle que $V(B_1)$, $V(B_2)$, $V(B_3)$... sont des valeurs de vérité désignées : V(A) est une valeur de vérité désignée.

Dans L_3 il y a seulement une valeur de vérité désignée, à savoir '1', mais dans d'autres systèmes de logiques multivalentes il pourrait y avoir plus d'une valeur de vérité désignée.

La manière de procéder pour définir la validité pour les logiques multivalentes dans le cadre dialogique est claire : en correspondance avec le concept de valeur de vérité désignée nous avons évidemment besoin du concept de mode d'assertion désigné. L'ensemble des modes d'assertion

[12] Voir par exemple [Gottwald 1989], 19f et [Rosser & Turquette 1952].

désignés pour L_3 est $\{\vdash_1\}$, mais il pourrait y avoir des systèmes dialogiques de logiques multivalentes avec plus d'un mode d'assertion désigné. Afin de préparer la définition dialogique de la validité pour les logiques multivalentes nous introduisons tout d'abord un nouveau moyen. Dans un dialogue de recherche de la validité **P** doit soutenir qu'il y a au moins un mode d'assertion désigné suivant lequel il est capable d'asserter et donc de défendre sa thèse principale A. Ce premier coup d'un dialogue de vérification de la validité sera donné par la notation suivante : $\vdash_{desig}$ A. Une expression de cette forme peut alors être attaquée par '?' et doit être défendue en remplaçant $\vdash_{desig}$ par un mode d'assertion désigné spécifique du système de logique multivalente considéré. Dans un dialogue avec des hypothèses, quand la validité d'une inférence est en jeu, les hypothèses qui doivent être concédées par **O** au commencement du dialogue sont : $\vdash_{desig} B_1, \vdash_{desig} B_2, \vdash_{desig} B_3 \ldots$

Maintenant nous sommes prêts pour formuler les règles structurelles et la notion de validité pour notre système dialogique L_3.

`SR 0-`L_3 **(règle de commencement) :** Le dialogue débute par l'affirmation de $\vdash_{desig} A$ par **P**, A étant ainsi sa thèse. Cela fournit le sujet de l'argumentation. Les coups sont alternativement joués par **P** et **O**. Chaque coup qui suit l'affirmation initiale est soit une attaque, soit une défense. (Dans les dialogues avec des hypothèses **P** n'affirme sa thèse qu'après que **O** a concédé certaines hypothèses par $\vdash_{desig} B_1, \vdash_{desig} B_2, \vdash_{desig} B_3 \ldots$ au début du dialogue.)

La règle de commencement a été ajustée en fonction des considérations que nous venons de faire. Elle est ici formulée en toute généralité, mais comme dans L_3 il n'y a qu'un seul mode d'assertion $\vdash_{desig}$ peut toujours être immédiatement remplacé par $\vdash_1$. Dans les exemples donnés plus bas les dialogues débuteront donc directement avec l'assertion de la thèse (et des hypothèses) suivant le mode $\vdash_1$.

`SR 1-`L_3 **(règle contre les tactiques dilatoires) :** **P** et **O** doivent chacun jouer exclusivement des coups qui modifient la situation.

Il n'y a aucun besoin de changer cette règle.

`SR 2-`L_3 **(règle formelle) :** **P** ne peut pas introduire de formule atomique suivant un certain mode d'assertion. Il peut uniquement le faire après que **O** a asserté la même formule atomique suivant le même mode d'assertion. **O** ne doit pas affirmer une formule atomique suivant plus d'un mode d'assertion[13].

La règle structurelle formelle doit être légèrement adaptée parce qu'ici les formules atomiques ne sont plus assertées *simpliciter*, mais toujours suivant un certain mode d'assertion.

SR 3-L_3 **(règle de victoire) :** **X** gagne ssi c'est le tour de **Y** mais que celui-ci ne peut pas jouer (ni attaquer ni se défendre).

Pas de changement ici.

SR 4-L_{3i} **(règle intuitionniste) :** A chaque coup, chaque joueur peut attaquer une formule (complexe) assertée suivant un certain mode d'assertion par son adversaire ou se défendre contre la dernière attaque à laquelle il n'a pas encore répondu.

ou

SR 4-L_{3c} **(règle classique) :** A chaque coup, chaque joueur peut attaquer une formule (complexe) assertée suivant un certain mode d'assertion par son adversaire ou se défendre contre n'importe quelle attaque (y compris celles qui ont déjà été défendues).

Les dialogues peuvent être joués avec l'une ou l'autre des deux règles structurelles, la règle intuitionniste ou la règle classique. Quand on utilise cette dernière on obtient une version dialogique du système standard de logique trivalente de Łukasiewicz. Avec la première règle, on en obtient une version intuitionniste[14]. De même que l'ensemble des formules valides de L_{3c} est un sous-ensemble propre de l'ensemble des formules valides de la logique classique bivalente, l'ensemble des formules valides de L_{3i} est un sous-ensemble propre de l'ensemble des formules valides de la logique intuitionniste standard du premier ordre.

[13] Cette règle dit seulement que **O** n'est pas habilité à établir des formules atomiques suivant plus d'un mode d'assertion. **O** pourrait ainsi théoriquement décider d'affirmer une formule complexe suivant plusieurs modes d'assertion pendant un jeu dialogique. Mais il est clair que cela ne serait pas très sage car il perdrait alors le jeu.

[14] Il faut ici faire attention : nous parlons de la version intuitionniste d'une logique trivalente. Cela ne doit pas être confondu avec le fait qu'il y a des reconstructions de la logique intuitionniste du premier ordre dans un cadre à trois valeurs !

Définition 3. *Validité logique pour les logiques dialogiques 'multivalentes' :*
Une formule A est logiquement valide dans un système dialogique de logique multivalente donné ssi ***P*** *a une stratégie formelle gagnante pour $\vdash_{desig} A$.*
Une inférence de B_1, B_2, $B_3 \ldots$ à A est logiquement valide dans un système dialogique de logique multivalente donné ssi ***P*** *a une stratégie formelle gagnante pour $\vdash_{desig} A$ dans un dialogue où les hypothèses B_1, B_2, $B_3 \ldots$ ont été concédées par* ***O*** *en assertant $\vdash_{desig} B_1$, $\vdash_{desig} B_2$, $\vdash_{desig} B_3 \ldots$ au début du dialogue.*

Nous allons maintenant illustrer les systèmes dialogiques L_{3i} et L_{3c} à l'aide de quelques exemples de dialogues.

5 Dialogues pour logiques 'multivalentes' : exemples

Commençons par un dialogue avec la formule que nous connaissons déjà par l'exemple 1.

Exemple 3 *(dans L_{3c} et L_{3i})* :

	O			**P**	
				$\vdash_1 ((a \rightarrow_{L_3} b) \wedge_{L_3} a) \rightarrow_{L_3} b$	(0)
(1)	$\vdash_{1/2} (a \rightarrow_{L_3} b) \wedge_{L_3} a$	0			
(3)	$\vdash_{1/2} a$		1	?	(2)
(5)	$\vdash_{1/2} a \rightarrow_{L_3} b$		1	?L	(4)
(7)	$\vdash_{1/2} a$		5	$?_a$	(6)

O gagne.

Comme ce dialogue le montre, **P** n'a pas de stratégie gagnante pour $\vdash_1 ((a \rightarrow_{L_3} b) \wedge_{L_3} a) \rightarrow_{L_3} b$ et donc, cette formule n'est pas valide. Dans le cas où **O** se serait défendu en (1) avec $\vdash_1 (a \rightarrow_{L_3} b) \wedge_{L_3} a$, le dialogue aurait suivi le cours de l'exemple 1 et **P** aurait pu gagner. Au coup (3), cela n'aurait pas été très différent si **O** s'était défendu avec $\vdash_{1/2} a \rightarrow_{L_3} b$ pour commencer. A la fin du dialogue, **P** perd parce qu'il n'est pas autorisé à introduire de formules atomiques et ne peut par conséquent ni se défendre contre l'attaque de **O** au coup (1), ni attaquer le coup (5).

Attention : le fait que cette formule n'est pas valide ne signifie pas que la règle d'inférence du *modus ponens* n'est pas valide dans L_3, car $a \rightarrow_{L_3} b$ et a impliquent toujours b.[15]

Exemple 4 *(dans L_{3c} et L_{3i}) :*

	O			**P**	
(H)	$\vdash_1 a \rightarrow_{L_3} b$			$\vdash_1 \neg_{L_3} a \vee_{L_3} b$	(0)
(1)	?	0		$\vdash_1 \neg_{L_3} a$	(2)
(3)	$\vdash_{1/2} a$	2		$\otimes$	
(5)	$\vdash_{1/2} b$		H	$\vdash_{1/2} a$	(4)

O gagne.

Ce dialogue montre que $a \rightarrow_{L_3} b$ et $\neg_{L_3} a \vee_{L_3} b$ ne sont pas équivalentes dans L_3. La seconde formule implique la première, mais la réciproque ne tient pas. (Remarque : dans la logique trivalente de Kleene[16], K_3, la subjonction et la conjonction sont encore interdéfinissables de la manière habituelle car $a \rightarrow_{K_3} b$ et $\neg_{K_3} a \vee_{K_3} b$ sont équivalentes. C'est la principale différence entre le système de Łukasiewicz et celui de Kleene[17].)

[15] **P** a une stratégie gagnante pour $\vdash_1 b$ sous l'hypothèse que **O** ait concédé $\vdash_1 a \rightarrow_{L_3} b$ aussi bien que $\vdash_1 a$ dès le début du dialogue.

[16] Voir [Kleene 1952], §64.

[17] Dans la table de vérité standard pour la subjonction de K_3, la seule différence avec L_3 provient de la ligne où A et B ont toutes deux la valeur 1/2 : $A \rightarrow_{K_3} B$ vaut alors 1/2, tandis que $A \rightarrow_{L_3} B$ vaut 1. Voici les règles de particule qui en résultent :

	Attaque	**Défense**
$\vdash_1 A \rightarrow_{K_3} B$	$\vdash_1 A$ $\vdash_{1/2} A$ (L'attaquant choisit entre les deux attaques à sa disposition)	$\vdash_1 B$ $\vdash_1 B$
$\vdash_{1/2} A \rightarrow_{K_3} B$	$?_A$ $\vdash_1 B$ (L'attaquant choisit entre les deux attaques à sa disposition)	$\vdash_1 A$ ——— $\vdash_{1/2} A$ (Le défenseur choisit) $\otimes$

Exemple 5 *(dans L_{3c} et L_{3i})* :

O			P		
				$\vdash_1 \neg_{L_3}(a \wedge_{L_3} \neg_{L_3} a)$	(0)
(1)	$\vdash_{1/2} a \wedge_{L_3} \neg_{L_3} a$	0		$\otimes$	
(3)	$\vdash_{1/2} a$	2	1	?	(2)
(5)	$\vdash_{1/2} \neg_{L_3} a$		1	?R(ight)	(4)
(7)	$\vdash_{1/2} a$		5	?	(6)

O gagne.

Ce dialogue montre que **P** n'a pas de stratégie gagnante pour la négation de la contradition.

Voici finalement un exemple qui illustre la différence entre le jeu avec la règle structurelle classique et le jeu avec la règle structurelle intuitionniste :

Exemple 6 *(dans L_{3c})* :

Variante a :

O			P		
(H)	$\vdash_1 \neg_{L_3} b \rightarrow_{L_3} \neg_{L_3} a$			$\vdash_1 a \rightarrow_{L_3} b$	(0)
(1)	$\vdash_1 a$	0		$\vdash_1 b$	(4)
			H	$\vdash_1 \neg_{L_3} b$	(2)
(3)	$\vdash_1 b$	2		$\otimes$	

P gagne.

Ce dialogue reflète parfaitement celui de la logique dialogique classique 'bivalente' standard. **P** gagne en se défendant avec le coup (4), un coup qui ne serait pas possible en jouant avec la règle structurelle intuitionniste. (Je laisse ici le lecteur se convaincre qu'attaquer avec $\vdash_{1/2} a$ au coup (1) n'aiderait pas **O**.) Par conséquent, **P** n'a pas de stratégie gagnante dans L_{3i}, mais il semble en avoir une dans L_{3c}. Mais il nous faut encore regarder ce qui arrive quand au coup (3), **O** attaque avec $\vdash_{1/2} b$ plutôt qu'avec $\vdash_1 b$:

Variante b :

O			**P**		
(H)	$\vdash_1 \neg_{L_3} b \rightarrow_{L_3} \neg_{L_3} a$			$\vdash_1 a \rightarrow_{L_3} b$	(0)
(1)	$\vdash_1 a$	0			
			H	$\vdash_1 \neg_{L_3} b$	(2)
(3)	$\vdash_{1/2} b$	2		$\otimes$	
(7)	$\vdash_{1/2} \neg_{L_3} a$ $[\vdash_1 \neg_{L_3} a]$		H	$\vdash_{1/2} \neg_{L_3} b$	(4)
(5)	?	4		$\vdash_{1/2} b$	(6)
			7	$?[\vdash_1 a]$	(8)

P gagne.

O ne peut pas se défendre contre l'attaque du coup (7) avec $\vdash_{1/2} a$ puisqu'il a déjà concédé $\vdash_1 a$ (voir la règle structurelle formelle).

6 Systèmes de tableaux stratégiques pour $\mathbf{L_{3c}}$ et $\mathbf{L_{3i}}$

Dans cette section, nous présentons des systèmes de tableaux stratégiques dialogiques pour L_{3c} et L_{3i}. Les tableaux stratégiques permettent d'examiner systématiquement s'il y a ou non une stratégie gagnante pour **P** dans un jeu dialogique donné. Voici les idées principales sous-jacentes à ces tableaux stratégiques[18] :

Un arbre stratégique débute avec **P** $\vdash_1 \alpha$, α étant la thèse du dialogue. (Si on s'intéresse à un dialogue avec des hypothèses β_1, $\beta_2\ldots$ il faut ajouter **O** $\vdash_1 \beta_1$, **O** $\vdash_1 \beta_2\ldots$). Les règles de tableaux ci-dessous sont telles qu'elles conduisent toujours de certaines positions gagnantes pour **P** à d'autres positions gagnantes pour **P**. Aussi la considération stratégique suivante est-elle très importante : si dans une position donnée **O** a plusieurs coups à sa disposition, **P** n'a de stratégie gagnante que s'il

[18] Pour une présentation plus complète des systèmes de tableaux stratégiques dialogiques avec plus d'explications, voir par exemple [Rahman 1993], [Rahman & Rückert 1999] ou [Rahman & Rückert 2001a]. Pour une présentation générale des systèmes de tableaux non dialogiques pour les logiques multivalentes, voir [Hähnle 1999].

peut gagner quelle que soit la manière dont **O** joue. Cela signifie que nous devons considérer tous les choix de **O** comme des possibilités de déroulement du dialogue, et que **P** doit être capable de gagner contre toutes ces variantes. Certaines règles vont ainsi conduire à un embranchement de l'arbre stratégique[19]. D'autre part, il n'y aura pas d'embranchement aux positions où **P** a le choix entre différents coups car pour avoir une stratégie gagnante, il suffit qu'un seul des coups à sa disposition conduise à une position gagnante.

P a une stratégie gagnante pour α ssi l'arbre stratégique qui débute avec $\mathbf{P} \vdash_1 \alpha$ est clos. Un arbre stratégique est clos ssi toutes ses branches sont closes. Une branche est close ssi elle contient une expression de la forme $\mathbf{O} \vdash_x \chi$ et une autre de la forme $\mathbf{P} \vdash_x \chi$, χ étant une formule atomique[20].

6.1 Tableaux stratégiques pour $\mathbf{L}_{3c}$

O-règles	**P-règles**
$\mathbf{O} \vdash_1 A \vee_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{O} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_1 A \vee_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B$
$\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \vee_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} A$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$	$\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \vee_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{P} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 B$
$\mathbf{O} \vdash_1 A \wedge_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{O} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_1 A \wedge_{L_3} B$ ――――― $\mathbf{P} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 B$

[19] Les expressions qui appartiennent à différentes branches sont séparées par le symbole '|', tandis que les expressions qui appartiennent à la même branche sont séparées par le symbole ','.

[20] Cette règle pour la clôture d'une branche est la contrepartie stratégique de la règle structurelle formelle.

O-règles	**P-règles**
$\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \wedge_{L_3} B$ ——— $\mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \wedge_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{P} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B$
$\mathbf{O} \vdash_1 A \rightarrow_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} A$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_1 B$ $\mid \mathbf{P} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_1 A \rightarrow_{L_3} B$ ——— $\mathbf{O} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B$ $\mid\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$
$\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \rightarrow_{L_3} B$ ——— $\mathbf{O} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B$	$\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \rightarrow_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} A$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 B$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$
$\mathbf{O} \vdash_1 \neg_{L_3} A$ ——— $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} A$	$\mathbf{P} \vdash_1 \neg_{L_3} A$ ——— $\mathbf{O} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A$
$\mathbf{O} \vdash_{1/2} \neg_{L_3} A$ ——— $\mathbf{P} \vdash_{1/2} A$	$\mathbf{P} \vdash_{1/2} \neg_{L_3} A$ ——— $\mathbf{O} \vdash_{1/2} A$

6.2 Tableaux stratégiques pour L_{3i}

La seule différence entre les règles de tableaux pour L_{3i} et celles pour L_{3c} réside dans le fait que les **P**-règles contiennent deux notations supplémentaires :

- Si une formule a une occurrence avec le suffixe '$_{(\mathbf{O})}$', cela signifie que toutes les autres **P**-expressions qui appartiennent à la même branche doivent être supprimées[21].
- Si deux formules sont séparées par '*ou*' cela signifie que seulement l'une des deux (n'importe laquelle) résulte de l'application de la **P**-règle correspondante[22].

Ces modes de notation reflètent les spécificités de la règle structurelle intuitionniste au niveau stratégique.

O-règles	**P-règles**
$\mathbf{O} \vdash_1 A \vee_{L_3} B$ ——— $\mathbf{O} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_1 A \vee_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_1 A$ *ou* $\mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_1 B$
$\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \vee_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} A$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 A,\ \mathbf{P} \vdash_1 B,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B$	$\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \vee_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} A$ *ou* $\mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} B$ $\mid \mathbf{O}_{(\mathbf{O})} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{O}_{(\mathbf{O})} \vdash_1 B$
$\mathbf{O} \vdash_1 A \wedge_{L_3} B$ ——— $\mathbf{O} \vdash_1 A,\ \mathbf{O} \vdash_1 B$	$\mathbf{P} \vdash_1 A \wedge_{L_3} B$ ——— $\mathbf{P} \vdash_1 A$ $\mid \mathbf{P} \vdash_1 B$

[21] Il faut être prudent avec les **P**-expressions au-dessus des embranchements : comme elles appartiennent à plusieurs branches il peut se produire qu'elles doivent être supprimées seulement pour une branche mais pas pour une autre.

[22] En d'autres termes, c'est une seconde sorte d'embranchements. Ici, une branche seulement doit être close pour que **P** ait une stratégie gagnante.

O-règles	**P-règles**
$\dfrac{\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \wedge_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{O} \vdash_{1} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1} B \end{array}}$	$\dfrac{\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \wedge_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} A \textit{ ou } \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} A \textit{ ou } \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} A \textit{ ou } \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} B \end{array}}$
$\dfrac{\mathbf{O} \vdash_{1} A \rightarrow_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{P} \vdash_{1} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} A \\ \mid \mathbf{P} \vdash_{1} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{P} \vdash_{1} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1} B \\ \mid \mathbf{P} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1} B \end{array}}$	$\dfrac{\mathbf{P} \vdash_{1} A \rightarrow_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{O} \vdash_{1} A,\ \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} B \\ \mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} B \textit{ ou } \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} B \end{array}}$
$\dfrac{\mathbf{O} \vdash_{1/2} A \rightarrow_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{O} \vdash_{1} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1} B,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B \\ \mid \mathbf{O} \vdash_{1/2} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1} B,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} B \end{array}}$	$\dfrac{\mathbf{P} \vdash_{1/2} A \rightarrow_{L_3} B}{\begin{array}{c} \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} A \textit{ ou } \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} A \\ \mid \mathbf{O}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} B \\ \mid \mathbf{P}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} A,\ \mathbf{O} \vdash_{1/2} B \end{array}}$
$\dfrac{\mathbf{O} \vdash_{1} \neg_{L_3} A}{\mathbf{P} \vdash_{1} A,\ \mathbf{P} \vdash_{1/2} A}$	$\dfrac{\mathbf{P} \vdash_{1} \neg_{L_3} A}{\begin{array}{c} \mathbf{O}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1} A \\ \mid \mathbf{O}_{(\mathbf{O})} \vdash_{1/2} A \end{array}}$
$\dfrac{\mathbf{O} \vdash_{1/2} \neg_{L_3} A}{\mathbf{P} \vdash_{1/2} A}$	$\dfrac{\mathbf{P} \vdash_{1/2} \neg_{L_3} A}{\mathbf{O} \vdash_{1/2} A}$

7 Conclusion

Les logiques multivalentes constituent un sujet très large et en développement toujours rapide, avec beaucoup de résultats techniques et d'applications intéressantes. Le but de cet article était d'ouvrir la porte au dialogicien pour qu'il commence à explorer ce champ logique. L'addition cruciale au cadre dialogique a été l'introduction du concept de différents modes d'assertion. Grâce à cela on a montré comment un système de logique multivalente très basique, à savoir une logique de Łukasiewicz à trois valeurs, peut être reconstruit avec des moyens dialogiques (en gagnant du même coup une version intuitionniste de ce système). Rien n'a encore été dit des logiques avec une infinité de valeurs, des *product logics*, etc. Mais je pense qu'une première étape a été réalisée et que les recherches futures pourront conduire à d'intéressants résultats. En particulier, il sera dorénavant possible de combiner les idées sous-jacentes aux logiques multivalentes avec celles d'autres logiques dans le cadre flexible de la logique dialogique.

Cet article peut aussi apporter un éclairage nouveau sur une discussion en cours à propos des différences essentielles entre différentes logiques non classiques. Une réponse, qui dérive de la tradition polonaise des logiques multivalentes (cf. [Malinowski 1993]), consiste à dire que différents systèmes logiques mettent en œuvre différentes particules logiques tandis qu'ils ne diffèrent pas dans leur conception de la notion de relation de conséquence. D'un autre côté, des substructuralistes comme [Restall 2000] par exemple affirment que différents systèmes logiques résultent de différences structurelles qui conduisent à différentes conceptions de la notion de relation de conséquence. Cet article montre que du point de vue de la logique dialogique, on devrait adopter une position intermédiaire : différents systèmes logiques résultent toujours de l'interaction des particules logiques (les règles de particule) et des propriétés structurelles (les règles structurelles). Chacun des trois cas suivants est possible : (1) différents systèmes logiques peuvent résulter de différentes règles de particule même s'il n'y a pas de différences entre eux liées aux règles structurelles (par exemple L_{3c} et K_{3c}) ; (2) deux systèmes logiques distincts ont leurs règles de particule en commun mais ont différents ensembles de règles structurelles (par exemple L_{3c} et L_{3i}) ; ou (3) des systèmes logiques distincts diffèrent à la fois sur leurs règles de particule et sur leurs règles structurelles (par exemple L_{3i} et K_{3c})[23].

[23]Je dois remercier Shahid Rahman (Lille) pour de nombreuses discussions, critiques, suggestions et propositions, et Manuel Rebuschi (Nancy), non seulement pour son effort éditorial et son aide pour la langue française, mais aussi pour avoir suggéré plusieurs améliorations à cet article.