Sur les « opérateurs rétrogrades »

Tero Tulenheimo
Université de Helsinki

Résumé : Une logique d'« opérateurs rétrogrades » (**OR**) est définie en utilisant des jeux sémantiques, joués sur des modèles à deux dimensions, l'une pour le temps, l'autre pour les scénarios épistémiques. On démontre que l'expressivité de **OR** est plus grande que celle de la logique de base des attitudes propositionnelles (**AL**). De plus, on établit que les pouvoirs expressifs de **OR** et la logique hybride **AL** $+ \downarrow +$ @ coïncident. L'intérêt théorique général des opérateurs rétrogrades est brièvement discuté.

Abstract: A logic of 'backwards-looking operators' (**OR**) is defined using semantical games, played on models with two dimensions, one for time and another for epistemic scenarios. It is shown that the expressive power of **OR** is greater than that of basic logic of propositional attitudes (**AL**). Furthermore, it is established that the expressive powers of **OR** and the hybrid logic **AL** $+ \downarrow$ $+$ @ coincide. In conclusion, the theoretical interest of backwards-looking operators is briefly discussed.

Philosophia Scientiæ, 8 (2), 2004, 145–160.

1 Introduction

Pensons aux prédictions exprimées par les énoncés suivants :

(1) *Il a été prédit que le Messie viendra.*

(2) *Il a été prédit que le Messie viendrait.*

La différence entre les deux est que le temps futur de « viendra » en (1) est interprété *indexicalement* – par rapport au moment de l'énonciation de (1) – tandis qu'en (2), la variante morphologique du futur, « viendrait », est interprétée relativement à l'imparfait de « a été prédit »[1]. Les conditions de vérité de (1) et (2), prononcés au moment t_0, peuvent être respectivement representées par les formules (1′) et (2′) de la logique du premier ordre :

(1′) $(\exists x)(x < t_0 \wedge \textsf{il est prédit}[x]\ \textsf{que}\ (\exists y)(y > t_0 \wedge \textsf{le Messie vient}[y]))$;

(2′) $(\exists x)(x < t_0 \wedge \textsf{il est prédit}[x]\ \textsf{que}\ (\exists y)(y > x \wedge \textsf{le Messie vient}[y]))$.

Voici où réside la différence sémantique : en évaluant ces énoncés, on choisit l'interprétation (y) du futur du verbe « venir », dans les deux cas, par rapport à un autre instant, t_1. Pour (1), t_1 égale t_0, tandis que pour (2), t_1 est l'interprétation (x) du passé composé de « prédire ».

Comment décrire logiquement la dimension temporelle des langues naturelles ? La proposition d'Arthur Prior [Prior 1967] était de traiter les temps des verbes en tant qu'opérateurs logiques – analogues aux opérateurs modaux. Cette approche a été extensivement critiquée – par [Enç 1986, 1987], [Hornstein 1990], [Kamp 1971], [Kamp & Reyle 1993] et [Partee 1973], entre autres. Une des sources de la critique est celle-ci : si les temps étaient des opérateurs, il faudrait – suggère-t-on – que les rapports temporels entre les instants qui interprètent ces temps soient représentables en termes de *portées* de ces opérateurs temporels. Pourtant, poursuit la critique, il existe des énoncés dont la condition de vérité n'est absolument pas représentable en termes de configurations de portées des opérateurs temporels de la logique priorienne ; qui plus est, il existe de toute façon des formules de logique temporelle qui correspondent à des énoncés (français ou anglais) agrammaticaux[2]. Comment les temps pourraient-ils malgré tout *être* des opérateurs ?

[1] Les énoncés correspondants anglais *It was predicted that the Messiah will come* et *It was predicted that the Messiah would come* sont utilisés dans [Kamp & Reyle 1993], pp. 491-8, où les auteurs discutent les problèmes auxquels est confrontée la logique temporelle, en particulier pour représenter l'interprétation indexicale des temps.

[2] Voir, en particulier, la critique de l'idée des temps en tant qu'opérateurs de [Hornstein 1990].

Si l'on projette de défendre, contre la mode, l'idée originale de Prior que les temps sont effectivement des opérateurs, il sera nécessaire de répondre à ces allégations contre l'idée des opérateurs temporels. Je pense qu'une telle défense est possible dans une certaine mesure, en distinguant deux rôles possédés à la fois par les temps grammaticaux des verbes et par les opérateurs temporels formels : celui d'exprimer des dépendances logiques entre les temps (opérateurs), et celui d'exprimer des relations temporelles entre les interprétations des temps (opérateurs).[3] Cet article est une tentative formelle de montrer que ces deux rôles des opérateurs temporels peuvent être systématiquement distingués. La distinction est implémentée par la logique des « opérateurs rétrogrades », où les *relations temporelles* entre les interprétations des opérateurs ne sont *pas* déterminées par les *portées* de ces opérateurs. Le rôle véritable des portées est autre, à savoir d'exprimer des priorités logiques entre les interprétations des opérateurs – c'est-à-dire les relations de dépendance logique entre eux.

On démontre avec le Théorème 5.2 que l'emploi des opérateurs rétrogrades résulte en un formalisme logique plus expressif que ne l'est la logique standard des attitudes propositionnelles. En particulier, la méthode des bisimulations utilisée pour prouver ce théorème montre qu'il n'est *pas possible* d'exprimer l'énoncé français (1) dans les termes de cette logique standard.

Le terme d'« opérateur rétrograde » est dérivé de l'anglais « backwards-looking operator ». A l'origine, l'idée des « backwards-looking operators » a été introduite par Esa Saarinen, voir par ex. [Saarinen 1977].

2 Une logique modale à deux dimensions

Soit $\tau = \{p, q, \ldots\}$ une classe d'atomes propositionnels, et soit k un entier positif quelconque. La syntaxe de la *logique des attitudes propositionnelles* $\mathbf{AL}[k]$ est donnée par la règle suivante : $\varphi :=$

$$p \mid \neg p \mid \varphi \vee \psi \ \mid \varphi \wedge \psi \mid F\varphi \mid G\varphi \mid P\varphi \mid H\varphi \mid \mathit{Pres}\varphi \mid \Diamond_i\varphi \mid \Box_i\varphi \mid \ =_i \varphi,$$

où $p \in \tau$ et $1 \leq i \leq k$. Le paramètre k indique le nombre de types d'attitudes propositionnelles distingués par la logique. Le symbole de négation $(\neg)$ n'apparaît que prefixé à un atome. Les symboles F, G, P, H et *Pres*

[3]Pour une discussion, voir [Tulenheimo 2004a], [Tulenheimo 2004b], et la section 7 plus bas.

sont des *opérateurs temporels*, tandis que les symboles $\Diamond_i, \Box_i$ et $=_i$ sont des *opérateurs d'attitude*.

La logique $\mathbf{AL}[k]$ est munie d'une sémantique relativement aux modèles $(k+1)$-aires $\mathcal{M}$ à deux dimensions, $\mathcal{M} = (T \times W, R_0, \ldots, R_k, \mathfrak{h})$, où le *domaine* $T \times W$ de $\mathcal{M}$ est non vide, les *relations d'accessibilité* R_i sont des parties de $(T \times W)^2$, et *l'interprétation* $\mathfrak{h}$ est une fonction assignant à tout atome $p \in \tau$ une partie du domaine. Intuitivement, nous pouvons considérer T comme un ensemble d'instants temporels, et les éléments de W comme des scénarios épistémiques alternatifs. Nous nous servons de l'abréviation $/\mathcal{M}/$ pour le domaine du modèle $\mathcal{M}$.

Les relations R_i d'accessibilité doivent se conformer à la limitation suivante : pour tout $t, t' \in T$ et $w, w' \in W$,

$$\langle (t, w), (t', w') \rangle \in R_i \Longrightarrow (t = t' \text{ ou } w = w').$$

Ainsi seules les transitions faites *suivant une seule composante* sont admises comme relations d'accessibilité. On prévoit cette limitation pour refléter la sémantique des expressions temporelles (des temps et des adverbes temporels) – aussi bien que des expressions d'attitudes propositionnelles (comme le savoir, la croyance, l'admission) – dont la contribution sémantique se situe dans une seule perspective (soit les instants, soit les scénarios épistémiques) et pas dans les deux simultanément.

La vérité de la formule φ dans le modèle $\mathcal{M}$ au point (t, w), symboliquement $\mathcal{M} \models \varphi[t, w]$, est définie simplement comme suit :

- $\mathcal{M} \models p[t, w] \Longleftrightarrow (t, w) \in \mathfrak{h}(p)$.
- $\mathcal{M} \models \neg p[t, w] \Longleftrightarrow \mathcal{M} \not\models p[t, w]$.
- $\mathcal{M} \models \psi \vee \chi[t, w] \Longleftrightarrow$ il existe $\theta \in \{\psi, \chi\}$ tel que $\mathcal{M} \models \theta[t, w]$.
- Le cas $\varphi = \psi \wedge \chi$ est le dual du cas $\varphi = \psi \vee \chi$.
- $\mathcal{M} \models F(\psi)[t, w] \Longleftrightarrow$ il existe $t' \in T$ tel que $\langle (t, w), (t', w) \rangle \in R_0$, et $\mathcal{M} \models \psi[t', w]$.
- $\mathcal{M} \models G(\psi)[t, w] \Longleftrightarrow$ pour tout $t' \in T$ satisfaisant $\langle (t, w), (t', w) \rangle \in R_0 : \mathcal{M} \models \psi[t', w]$.
- Les conditions pour $P(\psi)$ et $H(\psi)$ sont comme celles pour $F(\psi)$ *resp.* $G(\psi)$, sauf qu'elles sont formulées en termes de la converse R_0^{-1} de R_0.
- $\mathcal{M} \models Pres(\psi)[t, w] \Longleftrightarrow$ pour $t' = t : \mathcal{M} \models \psi[t', w]$.

Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$:

- $\mathcal{M} \models \Diamond_i(\psi)[t,w] \iff$ il existe $w' \in W$ tel que $\langle (t,w),(t,w') \rangle \in R_i$, et $\mathcal{M} \models \psi[t,w']$.
- Les conditions pour $\Box_i(\psi)$ et $=_i (\psi)$ sont comme celles pour $G(\psi)$ et $Pres(\psi)$, respectivement, mais la transition est faite suivant R_i.

Par la sémantique, *Pres* et les opérateurs $=_i$ correspondent aux transitions identité. Les opérateurs $\Diamond_i$, F, P et $\Box_i$, G et H sont respectivement *duals* l'un de l'autre. Une lecture intuitive des opérateurs temporels serait, pour F, « quelquefois à l'avenir », et pour P, « quelquefois dans le passé ». Leurs duals respectifs G et H correspondent par conséquent respectivement aux locutions « toujours à l'avenir » et « toujours dans le passé ». Si $\Box(\varphi)$ exprime « a sait que φ » – au sens de : « φ est vrai dans tous les circonstances compatibles avec le savoir de a » – la formule $\Diamond(\varphi)$ exprime l'idée qu'il existe un scénario compatible avec tout ce que a sait, dans lequel φ est vrai.

La sémantique de $\mathbf{AL}[k]$ est dite à deux dimensions parce que la vérité de ses formules est définie relativement aux paires $(t,w) \in T \times W$. La dimension 1 représente le temps, tandis que les transitions correspondant aux attitudes propositionnelles ont lieu dans la dimension 2, étant donné que l'ensemble des « mondes possibles » requis par la sémantique de diverses attitudes ne varie pas selon l'attitude[4].

3 Bisimulations

Pour démontrer qu'une logique ($\mathcal{L}$) est plus expressive qu'une autre ($\mathcal{L}'$), il faut prouver les deux choses suivantes : **(a)** que $\mathcal{L}$ n'est pas traduisible dans $\mathcal{L}'$, et **(b)** que $\mathcal{L}'$ est traduisible dans $\mathcal{L}$. Dans le contexte des modèles à deux dimensions, nous parlerons de la « traductibilité » d'une logique $\mathcal{L}$ dans une logique $\mathcal{L}'$ (relativement à une classe $\mathcal{K}$ de modèles) si la condition suivante est respectée :

> Pour toute formule $\varphi \in \mathcal{L}$ il existe une formule $\psi_\varphi \in \mathcal{L}'$ telle que tout modèle $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$ et tout point (t,w) satisfont : $\mathcal{M} \models \varphi[t,w] \iff \mathcal{M} \models \psi_\varphi[t,w]$.

Pour pouvoir établir la condition (a), il faut que l'on puisse trouver des modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ tels qu'il soit possible de les distinguer par une formule

[4] En fait des attitudes propositionnelles différentes ont en commun un trait bien moins trivial : comme [Hintikka 2003] l'exprime, « le contenu d'une attitude propositionnelle peut être spécifié indépendamment des différences entre les différentes attitudes ».

de $\mathcal{L}$, tandis que toutes les formules de $\mathcal{L}'$ s'accordent sur eux. Dans ce but nous introduisons les *bisimulations*.

Une bisimulation pour une logique modale $\mathcal{L}$ est une relation entre modèles dont la propriété utile ici est qu'il n'existe pas de formule de $\mathcal{L}$ qui pourrait distinguer deux modèles bisimilaires. Ainsi la bisimulation nous fournit un outil pour effectuer une preuve de la condition (a). Soient $\mathcal{M} = (T \times W, R_0, \ldots, R_k, \mathfrak{h})$ et $\mathcal{N} = (T' \times W', R'_0, \ldots, R'_k, \mathfrak{h}')$ des modèles $(k+1)$-aires à deux dimensions arbitraires. Une *bisimulation* entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ est une relation binaire $\equiv\, \subseteq (T \times W) \times (T' \times W')$, satisfaisant les conditions (1), (2) et (3) suivantes :

(1) *L'harmonie atomique :* $(t, w) \equiv (t', w') \Longrightarrow$
pour tout $p \in \tau$: $(t, w) \in \mathfrak{h}(p)$ ssi $(t', w') \in \mathfrak{h}'(p)$.

(2.1) *Zigzag en avant pour le temps :*

(a) *L'avenir :* $(t, w) \equiv (t', w')$ et $(t, w)\ R_0\ (s, w) \Longrightarrow$
il existe s' tel que $(t', w')\ R'_0\ (s', w')$, et $(s, w) \equiv (s', w')$.

(b) *Le passé :* $(t, w) \equiv (t', w')$ et $(t, w)\ R_0^{-1}\ (s, w) \Longrightarrow$
il existe s' tel que $(t', w')\ R_0'^{-1}\ (s', w')$, et $(s, w) \equiv (s', w')$.

(2.2) *Zigzag en avant pour les attitudes :* Comme (2.1.a), sauf que les transitions sont dans la dimension 2.

(3.1) *Zigzag en arrière pour le temps :*

(a) *L'avenir :* Comme (2.1.a), sauf le sens qui va ici de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{M}$.

(b) *Le passé :* Comme (2.1.b), sauf le sens qui va ici de $\mathcal{N}$ à $\mathcal{M}$.

(3.2) *Zigzag en arrière pour pour les attitudes :* Comme (3.1.a), sauf que les transitions sont dans la dimension 2.

La proposition suivante établit un lien entre l'existence d'une bisimulation entre des modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ et l'équivalence de ces modèles par rapport à la logique $\mathbf{AL}[k]$:

Proposition 3.1. *Soit $\equiv$ une bisimulation entre des modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Pour tout $\varphi \in \mathbf{AL}[k]$, $(t, w) \in /\mathcal{M}/$ et $(t', w') \in /\mathcal{N}/$:*

$$(t, w) \equiv (t', w') \Longrightarrow (\mathcal{M} \models \varphi[t, w] \textit{ ssi } \mathcal{N} \models \varphi[t', w']).$$

Preuve. Etant donnés $\mathcal{M}, \mathcal{N}, (t, w)$ et (t', w'), la proposition est aisément démontrée par induction sur la complexité de la formule φ. ■

4 « Opérateurs rétrogrades »

Nous introduisons une logique des « opérateurs rétrogrades ». Elle s'avère être à la fois plus expressive, et plus à même de refléter certaines propriétés des langues naturelles que la logique **AL**. Définissons simultanément la syntaxe de la classe $\mathcal{L}$ des formules, et les ensembles $|\varphi|$ d'*indices* des formules $\varphi \in \mathcal{L}$, comme suit :

- Les atomes propositionnels et leurs négations sont dans $\mathcal{L}$. Si $p \in \tau$, alors $|p| = |\neg p| = \{0\}$.
- La classe $\mathcal{L}$ est fermée sous la conjonction ($\wedge$) et la disjonction ($\vee$). Et $|\varphi \vee \psi| = |\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cup |\psi|$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}$ et $n = max|\varphi| + 1$, alors pour tout symbole $O \in \{F, G, P, H, Pres, \Diamond_i, \Box_i, =_i\}$, $(O^n|m)\varphi \in \mathcal{L}$, où $m \in\ ]n, \infty]$ et $i < k$ sont arbitraires[5]. Et $|(O^n|m)\varphi| = \{n\} \cup |\varphi|$.

Le rôle du symbole « m » dans une expression $(O^n|m)$ est d'identifier une position syntaxique à laquelle l'opérateur $(O^n|m)$ est subordonné. Définissons $\mathbf{OR}[k]$, la *logique des opérateurs rétrogrades*, comme étant la classe des formules de $\mathcal{L}$ qui respectent la condition suivante :

Limitation syntaxique : Les symboles m doivent être « liés », au sens où les formules $\varphi \in \mathbf{OR}[k]$ doivent satisfaire l'exigence suivante :

> Si $\varphi \in \mathbf{OR}[k]$ et si $(O^n|m_1)$ apparaît dans φ, soit $m_1 \neq \infty$, soit il existe dans φ un opérateur $(O^{m_1}|m_2)$ – ainsi identifié par l'exposant m_1 – auquel $(O^n|m_1)$ est subordonné.

Le symbole « ∞ » n'est jamais l'exposant d'un opérateur. Par la sémantique définie plus bas, la valeur $m := \infty$ référera au point de départ de l'évaluation d'une formule.

Syntaxiquement la logique **AL** n'est *pas* incluse dans **OR** : par ex. les formules Fq et $\Diamond_2 p$ de **AL** ne sont pas des formules de **OR**. En fait **OR** se différencie de **AL** de deux manières. La différence mineure est qu'aux occurrences des opérateurs modaux sont assignés des exposants. En ajoutant des exposants aux opérateurs des formules de **AL** de façon similaire, la formule $\Diamond_1(FHp \vee \Box_7 q)$, par exemple, deviendrait : $\Diamond_1^3(F^2H^1p \vee \Box_7^1 q)$. La véritable nouveauté de **OR** réside dans le fait qu'un opérateur modal $(O^n|m)$ peut référer syntaxiquement à un autre – un opérateur auquel il est subordonné – à savoir à celui auquel est assigné l'exposant m. En utilisant l'exposant ∞, ce même mécanisme

[5]Par définition, $]n, \infty]$ est l'ensemble $\{n + 1, n + 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$, dont l'ordre des éléments est $n + 1 < n + 2 < \ldots < \infty$.

permet aussi de référer à l'instant ou au scénario de l'évaluation d'une formule[6]. Du point de vue de l'expressivité, **AL** s'avère être un fragment de **OR** (voir le Fait 5.1 plus bas).

Jeux sémantiques Pour fournir une sémantique à la logique des opérateurs rétrogrades, nous définissons pour toute formule $\varphi \in \mathbf{OR}[k]$, tout modèle $(k+1)$-aire $\mathcal{M}$, et tout point $(t,w) \in /\mathcal{M}/$, un jeu $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$ entre deux joueurs, *Abélard* et *Héloïse.* Commençons en spécifiant les règles pour quelque chose d'apparemment plus compliqué, à savoir les jeux

$$G(\varphi, \mathcal{M}, t, w, H_\varphi)$$

procédant d'un ensemble H_φ donné d'éléments indicés (t_i, w_i) du domaine de $\mathcal{M}$ et définis pour toute formule φ de la classe $\mathcal{L}$, non seulement pour celles de la sous-classe $\mathbf{OR}[k]$.

- Si $\varphi \in \{p, \neg p\}$, aucun coup n'est joué. Si $\varphi = p$ et $(t,w) \in \mathfrak{h}(p)$, ou $\varphi = \neg p$ et $(t,w) \notin \mathfrak{h}(p)$, alors *Héloïse* gagne la partie et *Abélard* la perd. Sinon *Abélard* gagne et *Héloïse* perd.
- Si $\varphi = \theta \wedge \psi$, *Abélard* choisit un élément $\chi \in \{\theta, \psi\}$, et la partie continue comme $G(\chi, \mathcal{M}, t, w, H_\chi)$ où $H_\chi := H_\varphi$.
- Le cas $\varphi = \theta \vee \psi$ est comme celui de $\theta \wedge \psi$, mais le choix de l'élément $\chi \in \{\theta, \psi\}$ est effectué par *Héloïse.*
- Si $\varphi = (G^n|m)\psi$, alors *Abélard* choisit, si cela est possible, un instant t_n tel que pour l'unique m satisfaisant $(t_m, w_m) \in H_\varphi$: $R_0(t_m, t_n)$. La partie continue comme $G(\psi, \mathcal{M}, t_n, w_n, H_\psi)$, où $w_n = w$ et $H_\psi = H_\varphi \cup \{t_n, w_n\}$. Si un tel choix n'est pas possible[7], la partie se termine, *Héloïse* gagne et *Abélard* perd.
- Le cas $\varphi = (H^n|m)\psi$ est analogue, la relation employée étant R_0^{-1}.
- Le cas de $\varphi = (\Box_i^n|m)\psi$ est analogue, sauf qu'*Abélard* choisit un monde w_n tel que pour l'unique $(t_m, w_m) \in H_\varphi$, $R_i(w_m, w_n)$.
- Les cas de $(F^n|m)\psi, (P^n|m)\psi$ et $(\Diamond_i^n|m)\psi$ sont exactement analogues à ceux de $(G^n|m)\psi, (H^n|m)\psi$ et $(\Box_i^n|m)\psi$, respectivement,

[6] Grâce aux disjonctions et conjonctions, il est possible que m ne repère pas un opérateur unique. Mais il existe toujours un unique opérateur auquel $(O^n|m)$ est *syntaxiquement subordonné* et qui est identifié par cet indice.

[7] C'est-à-dire si t_n n'a aucun successeur le long de R_0, ou s'il n'existe pas d'unique m tel que la paire indicée (t_m, w_m) soit dans H_φ. Observons que si le jeu a initialement commencé avec une formule de $\mathbf{OR}[k]$, un tel indice m est précisément toujours unique – grâce à la « limitation syntaxique ».

mais le choix est effectué par *Héloïse* ; si aucun choix n'est possible, la partie se termine, et c'est *Abélard* qui gagne et *Héloïse* qui perd.

- Les cas de $(Pres^n|m)\psi$ et $(=^n_i|m)\psi$ sont comme celui de $(F^n|m)\psi$, mais l'instant t_n *resp.* le monde w_n est choisi identique à l'instant t_m *resp.* au monde w_m.

Finalement, nous stipulons que pour tout $\varphi \in \mathbf{OR}[k]$, les règles du jeu $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$ sont celles du jeu

$$G(\varphi, \mathcal{M}, t, w, \{(t_\infty, w_\infty)\}),$$

où $(t_\infty, w_\infty) := (t, w)$. Les parties de $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$ peuvent ainsi être vues comme des suites finies croissantes $H_{\varphi_0} \subseteq \ldots \subseteq H_{\varphi_N}$, où $\varphi_0 := \varphi$ et φ_N est un atome ou une négation d'atome.

Une *stratégie* pour un joueur dans le jeu $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$ est une fonction spécifiant un coup pour toute partie dans laquelle c'est son tour d'agir. Une *stratégie gagnante* (*s.g.*) d'un joueur est une stratégie telle que le joueur gagne toute partie du jeu qui peut se réaliser si le joueur suit cette stratégie.

Fait 4.1. *Il existe une s.g. pour un et un seul joueur de* $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$.

Preuve. Observons que $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$ est un jeu à somme nulle et à information parfaite à deux joueurs. Il est facile de montrer que ces jeux sont déterminés, si on suppose qu'il existe seulement deux paiements possibles (disons : victoire, perte) des joueurs[8]. ■

La vérité et la fausseté des formules de $\mathbf{OR}[k]$ sont définies, en utilisant des jeux que nous venons de présenter, comme suit :

- $\mathcal{M} \models \varphi[t, w] \iff$ il existe une s.g. pour *Héloïse* dans $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$.
- $\mathcal{M} \not\models \varphi[t, w] \iff$ il existe une s.g. pour *Abélard* dans $G(\varphi, \mathcal{M}, t, w)$.

Voici un exemple d'évaluation selon cette sémantique :

Exemple 4.2. (a) *Evaluons la formule suivante :*

$$\varphi := (F^2|\infty)((\Box^1|2)p \wedge (H^1|2)q).$$

Soient $\mathcal{M}$ *et* $(t, w) \in /\mathcal{M}/$ *arbitraires. Alors* $\mathcal{M} \models \varphi[t, w]$ *ssi :*

[8]Pour la preuve, voir par ex. [Tulenheimo 2004a], Appendice B. Pour le cas des paiements arbitraires, mais limité à un nombre fini de coups possibles, voir [von Neumann & Morgenstern 1944].

$(t, w) = (t_\infty, w_\infty)$ *&* $w_2 = w_\infty$ *& il existe* t_2 *tel que* $R_0(t_\infty, t_2)$ *&*
$[t_1 = t_2$ *& pour tout* w_1 *satisfaisant* $R_1(w_2, w_1) : (t_1, w_1) \in \mathfrak{h}(p)]$ *&*
$[w_1 = w_2$ *& pour tout* t_1 *satisfaisant* $R_0^{-1}(t_2, t_1) : (t_1, w_1) \in \mathfrak{h}(q)]$.

Ainsi φ *est équivalente sur tout modèle à une formule de* **AL***, à savoir* $F(\Box p \wedge Hq)$*, obtenue en remplaçant dans* φ *les opérateurs de la forme* $(O^n|m)$ *par l'opérateur* O *correspondant.*

(b) *Considérons la formule*

$$\psi := (F^3|\infty)(\Box^2|3)(G^1|\infty)p.$$

Pour comprendre la signification de cette formule, il est utile de passer par sa traduction dans la logique du premier ordre,

$$\exists t_3(t_3 > t \wedge \forall w_2(R(w, w_2) \rightarrow \forall t_1(t_1 > t \rightarrow P(t_1, w_2)))).$$

Ainsi ψ *est comme la formule* $F(\Box(G(p)))$ *de* **AL***, sauf que la valeur sémantique* t_1 *de* G *est choisie relativement à* l'instant initial d'évaluation t *de* ψ*, et non pas à l'instant* t_3 *donné par l'évaluation de* F*.*

En somme, contrairement au cas de **AL**, tous les opérateurs de **OR** ne sont *pas* évalués relativement à l'état donné par le stade immédiatement prédédent de l'évaluation – mais ils peuvent être évalués relativement à un état introduit à n'importe quel stade précédent de l'évaluation.

5 Pouvoir expressif de OR

On démontre que la logique **OR** des opérateurs rétrogrades est plus expressive que la logique **AL** des attitudes propositionnelles.

Fait 5.1. *La logique* **AL**$[k]$ *est traduisible dans* **OR**$[k]$*.*

Preuve. On fournit les opérateurs des formules de **AL**$[k]$ des exposants comme sont fournis ceux de **OR**$[k]$: étant donné O qui apparaît dans φ, l'exposant de O sera $max|\theta|+1$, si O est prefixé à la sous-formule θ de φ. Si φ' est la version avec des exposants de φ, on obtient φ'' en remplacant dans φ' chaque opérateur O^n par l'opérateur $(O^n|m_n)$, où m_n est l'exposant de l'unique opérateur auquel O^n est immédiatement subordonné dans φ', ou s'il n'existe pas de tel opérateur, $m_n = \infty$. C'est-à-dire, $m_n := min\{N > n :$ un opérateur O^N apparaît dans φ' ou $N = \infty\}$. Il est évident que φ'' est une traduction de φ dans **OR**$[k]$. ■

Théorème 5.2. *La logique* **OR**$[k]$ *est plus expressive que* **AL**$[k]$.

Preuve. Par le Fait 5.1, la logique **AL**$[k]$ est traduisible dans **OR**$[k]$. Il reste à démontrer que la logique **OR**$[k]$ n'est pas traduisible dans **AL**$[k]$. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, et $<_{\mathbb{Q}}$ leur relation d'ordre habituelle. Soient R_0 et R_1 les relations suivantes sur l'ensemble $\mathbb{Q} \times \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$:

- $(t, w)R_0(t', w') \Leftrightarrow t <_{\mathbb{Q}} t'$ et ($w = w' = -\sqrt{2}$ ou $w = w' = \sqrt{2}$).
- $(t, w)R_1(t', w') \Leftrightarrow$ ($t = t' = -1$ et $w = -\sqrt{2}$ et $w' = \sqrt{2}$), ou ($t = t' \neq -1$ et $w = w' = -\sqrt{2}$).

Nous pouvons supposer que $\tau = \{p\}$; soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ finalement des interprétations telles que $\mathfrak{h}(p) = \{(-\frac{1}{2}, \sqrt{2})\}$ et $\mathfrak{h}'(p) = \{(\frac{1}{2}, \sqrt{2})\}$. Spécifions $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ comme deux modèles basés sur la structure $\mathcal{F} = (\mathbb{Q} \times \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, R_0, R_1)$, différant sur les interprétations : $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \mathfrak{h})$ et $\mathcal{N} = (\mathcal{F}, \mathfrak{h}')$. Nous observons deux choses : **(i)** On peut distinguer les modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ par **OR**$[k]$. En effet, soit χ la formule[9]

$$(P^3|\infty)(\Box^2|3)(F^1|\infty)p.$$

Alors : $\mathcal{M} \not\models \chi[0, -\sqrt{2}]$, mais $\mathcal{N} \models \chi[0, -\sqrt{2}]$. D'autre part, **(ii)** la relation suivante est une bisimulation entre les modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$:

$$\{\langle(t, -\sqrt{2}), (t, -\sqrt{2})\rangle : t \in \mathbb{Q}\} \cup \{\langle(-\tfrac{1}{2}, \sqrt{2}), (\tfrac{1}{2}, \sqrt{2})\rangle\} \cup$$
$$\{\langle(t, \sqrt{2}), (t', \sqrt{2})\rangle : (t > -\tfrac{1}{2} \wedge t' > \tfrac{1}{2}) \vee (t < -\tfrac{1}{2} \wedge t' < \tfrac{1}{2})\}.$$

Ainsi, par la Proposition 3.1, il n'est pas possible de distinguer ces modèles en employant **AL**$[k]$. Pris ensemble, (i) et (ii) impliquent que **OR**$[k]$ n'est pas traduisible dans **AL**$[k]$. ■

6 OR et la logique hybride

Récemment les dites *logiques hybrides* ont reçu une grande attention parmi les chercheurs en logique modale[10]. Les logiques modales « classiques » partagent une limitation intrinsèque : selon leurs sémantiques, les transitions entre états (les éléments du domaine) procèdent toujours

[9] Si l'attitude associée à $\Box$ est la prédiction (« Il est prédit que... »), la formule χ représente la condition de vérité de l'énoncé « Il a été prédit que le Messie viendra ».

[10] Voir par ex. [Blackburn & Seligman 1998], [Blackburn & Tzakova 1999], [Blackburn, de Rijke & Venema 2002], passage 7.3.

à partir de l'état le plus récemment atteint. Les logiques hybrides abandonnent cette limitation en autorisant à employer tous les états atteints au cours d'une évaluation comme points de départ possibles des transitions.

Il est possible de démontrer que la logique $\mathbf{OR}[k]$ des opérateurs rétrogrades équivaut à une logique hybride, à savoir la logique $\mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$, définie comme suit. Ses formules sont obtenues en fermant la classe $\mathbf{AL}[k]$ sous la règle suivante : Si φ est une formule, et $x \in$ VARE, alors $\downarrow x\ \varphi$ et $@_x\varphi$ sont des formules, où VARE est une classe de *variables d'état*[11]. La sémantique de cette logique est définie relativement aux modèles $\mathcal{M}$, aux points (t, w) et aux interprétations $g : \text{VARE} \longrightarrow \mathcal{P}(/\mathcal{M}/)$ des variables. Les conditions de verité des formules dont la forme n'est pas celle de $\downarrow x\ \varphi$ ou de $@_x\varphi$, sont obtenues directement à partir de celles de la logique **AL**. Pour ces dernières, les conditions sont :

- $\langle \mathcal{M}, g\rangle \models\ \downarrow x\ \varphi[t, w] \Longleftrightarrow \langle \mathcal{M}, g'\rangle \models \varphi[t, w]$, où g' est semblable à g sauf éventuellement en x : $g'(x) = (t, w)$.
- $\langle \mathcal{M}, g\rangle \models\ @_x\varphi[t, w] \Longleftrightarrow \langle \mathcal{M}, g\rangle \models \varphi[g(x)]$.

Limitation syntaxique : Nous exigeons que toute occurrence de $@_x$ dans une formule φ de $\mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$ soit *liée* au sens où il y ait une occurrence de l'opérateur $\downarrow x$ dans φ à laquelle $@_x$ soit syntaxiquement subordonnée.

Théorème 6.1. $\mathbf{OR}[k]$ *et* $\mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$ *ont le même pouvoir expressif.*

Preuve. (i) Soit $\varphi \in \mathbf{OR}[k]$ une formule arbitraire. On remplace dans φ chaque opérateur $(O^n|m)$ par le symbole $@_{x_m}O^n$. On insère le symbole $\downarrow x_m$ dans la chaîne résultante de symboles, φ', afin qu'il suive immédiatement le symbole O^m, ou bien, si $m = \infty$, on l'insère au début de la formule. Si φ'' est la chaîne résultante, le résultat φ''' de l'élimination des exposants des opérateurs O dans φ'' est une formule de $\mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$. Il est aisément démontrable que φ''' est une traduction de φ.

Ainsi, par exemple, la formule $(P^3|\infty)(\Box^2|3)(F^1|\infty)p$ est traduite par la formule $\downarrow x_\infty \downarrow x_\infty @_{x_\infty} P \downarrow x_3 @_{x_3} \Box @_{x_\infty} F\,p$, qui, en fait, équivaut à la formule $\downarrow x\, P\, \Box\, @_x F\, p$.

(ii) Soit $\varphi \in \mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$ arbitraire. Il existe ainsi $\varphi' \in \mathbf{AL}[k] + \downarrow + @$ équivalente à φ, où tout opérateur $@_x$ est immédiatement suivi soit

[11] Ainsi les variables d'état ne sont *pas* des formules par cette syntaxe.

par un opérateur de $\mathbf{AL}[k]$, soit par un atome propositionnel[12]. On peut admettre qu'ils sont dans φ' tous suivis par un opérateur, car une sous-formule $@_x p$ peut être remplacée par $@_x(Pres(p))$. Et on peut supposer qu'il n'y a pas d'occurrences superflues d'opérateurs $\downarrow x$. On donne aux opérateurs de φ' des exposants : tout opérateur de $\mathbf{AL}[k]$ reçoit l'exposant $max|\theta| + 1$, où θ est la sous-formule à laquelle il est prefixé, tandis que $\downarrow x$ et $@_x$ ne reçoivent d'exposants. Ensuite, pour toute variable x, si son occurrence dans $@_x$ est liée par $\downarrow x$, on remplace les deux occurrences de x par x_m, m étant l'exposant de l'opérateur auquel $\downarrow x$ est immédiatement subordonné, ou s'il n'y a pas de tel opérateur, $m = \infty$. Dans la formule résultante φ'', on remplace tout symbole $@_{x_m} O^n$ par le symbole $(O^n|m)$, et on efface l'opérateur $\downarrow x_m$ auquel x_m est lié. Dans la formule φ''' qui en résulte, on remplace les éventuels opérateurs O^n par l'opérateur correspondant de forme $(O^n|m)$, m étant défini comme dans la preuve du Fait 5.1. Il est évident que la formule φ'''' ainsi obtenue est une traduction de φ. ■

7 Morale linguistique

La logique **OR** n'est certainement pas la première réalisation des idées sous-jacentes à la logique temporelle de [Prior 1967] qui a la capacité additionnelle de représenter les conditions de vérité des phrases dont certains temps des propositions subordonnées sont interprétés indexicalement. Comme en témoigne en effet la preuve du Théorème 5.2, l'exemple d'une telle phrase – qui se situe essentiellement au-delà du pouvoir expressif de la logique standard priorienne – est fourni par l'énoncé (1) introduit au début de cet article, « Il a été prédit que le Messie viendra ». Cet énoncé est représentable dans **OR**, mais également en ajoutant à la logique priorienne l'opérateur Now à deux dimensions de [Kamp 1971], aussi bien qu'en termes de logique hybride (cf. le Théorème 6.1).

Observons en passant une différence entre **OR** et la logique de [Kamp 1971]. Cette dernière est une logique à deux dimensions parce que sa sémantique présuppose que l'analogue formel du moment de l'énonciation est toujours disponible : la sémantique est définie par rapport aux paires (t_0, t), dont le rôle du premier membre est de prendre soin de la possibilité d'avoir toujours recours au moment t_0 fixé. Par une modification

[12]Nous pouvons utiliser les équivalences $@_x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow @_x\varphi \vee @_x\psi$, $@_x(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow @_x\varphi \wedge @_x\psi$, $@_y @_x \varphi \Leftrightarrow @_x\varphi$, et $@_x \downarrow y\ \varphi \Leftrightarrow @_x\varphi^*$, où φ^* est obtenue à partir de φ en remplacant les occurrences de l'opérateur $@_y$ par des occurrences de $@_x$.

analogue, la logique **AL** deviendrait une logique à *trois* dimensions. Par contre, **OR** a ici un avantage théorique sur la logique de Kamp, car elle n'exige rien des modèles utilisés qui ne soit pas déjà exigé des modèles de la logique priorienne[13].

L'avantage théorique de la logique des opérateurs rétrogrades se manifeste aussi sur un autre plan : l'autre dimension. Le scénario de l'énonciation (le « monde actuel ») est automatiquement disponible, si bien que l'on peut toujours capturer les références indexicales à ce « scénario de discours ». Par exemple, avec plus ou moins difficulté, l'énoncé

(3) *Je suis sûr que j'existe,*

prononcé dans le scénario w_0, peut être interprété *de re* – dans ce cas sa condition de vérité est exprimable par la formule

(3′) $(\forall x)(R(w_0, x) \to (\exists y)(y = w_0 \wedge \mathsf{j'existe}[y]))$

de la logique du premier ordre[14], plutôt que *de dicto*, qui s'exprimerait

(3″) $(\forall x)(R(w_0, x) \to (\exists y)(y = x \wedge \mathsf{j'existe}[y]))$.

Il n'existe pas de représentation de (3′) dans **AL** qui reflète sa structure syntaxique, tandis que cette interprétation *de re* est ainsi représentée par une formule de la forme $\Box^2(=^1|\infty)\,\mathsf{j'existe}$ dans la logique des opérateurs rétrogrades.

Ce qui confère aux opérateurs rétrogrades leur intérêt théorique véritable n'est cependant pas le fait qu'en les utilisant, il devient possible de représenter des énoncés non représentables par la logique standard des attitudes propositionnelles. L'intérêt général de **OR** est basé sur la manière complètement explicite dont elle distingue *(i)* les relations de *priorité logique* entre opérateurs temporels et *(ii)* les relations *temporelles* entre les interprétations de ces opérateurs. *Être postérieur*, ou *antérieur*, ou *simultané* sont des relations du second type, tandis que celles du premier type se manifestent en tant que *dépendances fonctionnelles* entre les interprétations des opérateurs. Considérons par exemple la formule

(4) $\neg P^3 \Box^2 \neg (P^1|\infty)\, q$,

équivalant à $H^3 \Diamond^2 (P^1|\infty)\, q$. La condition de vérité de (4), au point (t_0, w_0), est exprimable dans la logique du second ordre par la formule

(4′) $\exists F_w \exists F_t \forall x(x > t_0 \to R(w_0, F_w(x)) \wedge F_t(x) < t_0 \wedge Q(F_w(x), F_t(x)))$,

[13] La sémantique de la logique hybride utilise quelque chose d'additionnel : l'interprétation g des variables d'état.

[14] La condition *y est compatible avec tout dont je suis sûr en x* est symbolisée par « $R(x, y)$ ». Notons que (3′) se réduit à : $(\exists x)R(w_0, x) \to \mathsf{j'existe}[w_0]$, autrement dit : si le contenu de tout ce dont je suis sûr n'est pas contradictoire, j'existe. Cette interprétation de (3) est discutable.

où les valeurs des variables du second ordre « F_t » et « F_w » sont des *fonctions* des instants sur les scénarios et des instants sur les instants, respectivement. L'interprétation (t_1) de l'opérateur ($P^1|\infty$) dans (4) dépend fonctionnellement de celle (t_3) de l'opérateur avec l'exposant 3 : si cette formule est vraie, il existe une fonction F_t telle que $t_1 = F_t(t_3)$, comme en témoigne la vérité de sa traduction du second ordre. D'autre part, l'instant t_1 n'est *pas* choisi *temporellement* par rapport à t_3. Par contre, il doit être choisi de façon à ce qu'il soit antérieur au *moment de l'évaluation* (t_0) : $t_1 < t_0$. La « forme logique » de la formule (4) rend complètement manifeste le fait que les deux relations (i) et (ii) ne coïncident pas.

Ainsi les problèmes auxquels la logique priorienne se trouve confrontée en analysant les mécanismes qui régissent l'interprétation des temps dans les propositions subordonnées – ce sont les problèmes qu'elle rencontre en essayant de capturer les relations temporelles entre les interprétations des temps de différentes propositions dans un énoncé – n'impliquent-ils pas automatiquement la fausseté de l'idée originale priorienne elle-même, à savoir que les temps des verbes sont des opérateurs. Ces problèmes montrent seulement que la manière particulière dont la *logique priorienne* implémente cette idée n'est pas linguistiquement adéquate. Mais comme le montre la logique **OR**, les mécanismes pour représenter les relations temporelles et les mécanismes pour représenter les priorités logiques sont logiquement séparables. La critique de l'idée que « les temps sont des opérateurs » n'est fatale que de manière fortuite pour la logique priorienne : son symbolisme n'est pas capable de distinguer les deux types de relations liées à la sémantique des temps. Appliquée à **OR**, la critique montre, certes, que cette logique n'incorpore pas les limitations, propres aux langues naturelles, régissant les relations temporelles entre les interprétations des temps. Mais il ne s'ensuit pas que les temps ne sont pas des opérateurs, car ce qui fait d'une expression un opérateur est sa capacité à exprimer des priorités logiques ; et la critique décrite ne dit rien des relations *logiques* entre des temps.

Qui plus est, *il y a* des temps en français qui se comportent comme des opérateurs. Considérons l'énoncé :

(5) *Il ne savait pas qu'il n'avait pas appris la vérité.*

Sa forme logique est fournie par la formule (5′) de la logique **AL** :

(5′) $\neg P \Box \neg P q$,

qui équivaut à $H \Diamond Pq$. Selon la sémantique de (5) – comme on l'observe aisément à l'aide de sa formalisation (5′) – l'interprétation du plus-que-parfait de « avait appris » est déterminée en fonction de l'interprétation de l'imparfait de « savait ». Mais cela signifie que de ces deux temps, le premier est logiquement subordonné au second – en d'autres termes, le temps de « savait » se comporte comme un opérateur.