Preuves et jeux sémantiques*

Denis Bonnay
IHPST / University Paris I

Abstract: Hintikka makes a distinction between two kinds of games: truth-constituting games and truth-seeking games. His well-known game-theoretical semantics for first-order classical logic and its independence-friendly extension belongs to the first class of games. In order to ground Hintikka's claim that truth-constituting games are genuine verification and falsification games that make explicit the language games underlying the use of logical constants, it would be desirable to establish a substantial link between these two kinds of games. Adapting a result from Thierry Coquand, we propose such a link, based on a slight modification of Hintikka's games, in which we allow backward playing for $\exists$*loïse*. In this new setting, it can be proven that sequent rules for first-order logic, including the cut rule, are admissible, in the sense that for each rule, there exists an algorithm which turns winning strategies for the premisses into a winning strategy for the conclusion. Thus, proofs, as results of truth-seeking games, can be seen as effectively providing the needed winning strategies on the semantic games.

*Une version très préliminaire des résultats de la section 3 a été présentée lors du septième workshop "Games in Logic, Language and Computation" organisé à Amsterdam le 28 novembre 2002. Je remercie Serge Bozon et Jacques Dubucs pour leurs suggestions fécondes.

Philosophia Scientiæ, 8 (2), 2004, 105–123.

Introduction

Hintikka distingue entre deux types de jeux : les jeux qui ont trait à la constitution de la vérité, comme ceux qu'il utilise pour définir les conditions de vérité et de fausseté des formules de la logique du premier ordre et de la logique IF, et les jeux qui ont trait à la recherche de la vérité, comme les jeux de preuve. Il serait hautement désirable, d'un point de vue philosophique, d'établir une connexion entre ces deux types de jeux – ce point est développé dans la section 1. Moyennant une certaine modification des jeux de Hintikka, présentée dans la section 2 – le vérificateur est autorisé à reprendre ses coups - nous montrons, en adaptant des résultats de Thierry Coquand en théorie de la preuve, qu'il est possible d'établir un lien substantiel entre ces deux types de jeu. Nous proposons ainsi une sémantique des preuves pour la logique classique qui permet d'interpréter les preuves comme donnant des stratégies gagnantes sur des jeux sémantiques analogues aux jeux de Hintikka. Le résultat technique est présenté dans la section 3, tandis que les preuves sont rassemblées dans la section 4.

1 Vérité et recherche de la vérité

L'utilisation des jeux en logique est multiple[1]. Les jeux sémantiques de Hintikka servent à évaluer des énoncés, dans la théorie de la preuve, les jeux sont utilisés pour interpréter les preuves d'un système formel, la tradition plus ancienne de la logique dialogique de Lorenzen propose de donner directement une fondation en termes de jeux à la validité logique, définie comme existence de stratégies gagnantes dans certains dialogues et, enfin, selon une démarche inverse, van Benthem ([van Benthem 2001]) a posé les bases d'une étude logique des jeux et des concepts de solution qui leur sont associés. Cette convergence est remarquable, mais elle a ses limites : toutes ces approches sont relativement indépendantes les unes des autres. Nous proposons ici de faire le lien entre l'approche de Hintikka et l'utilisation des jeux en théorie de la preuve, en donnant, à la suite de [Coquand 1995], une sémantique des preuves – pour un calcul

[1] [Hodges 1991] donne un bon panorama, en insistant sur l'utilisation en théorie des modèles. Plus récemment, [Lecomte 200 ?] a pointé les points communs des « logiques du dialogue »que constituent les approches de Hintikka, Lorenzen et des sémantiques pour la logique linéaire. Nous cherchons à montrer ici qu'il s'agit bien des mêmes dialogues.

des séquents du premier ordre – en termes de jeux de Hintikka amendés[2].

Cette connexion n'a pas de raison d'être que purement technique : elle permet de montrer en quoi les *mêmes* jeux peuvent représenter à la fois ce que c'est pour un énoncé que d'être vrai et ce qu'on connaît quand on connaît une preuve de cet énoncé. Ainsi, elle justifie la croyance de Hintikka dans la fécondité du paradigme des jeux au niveau de la recherche de la vérité aussi bien qu'au niveau de la vérité.

Hintikka a défendu ([Hintikka 1996] le recours à une sémantique en termes de jeux (GTS pour "game-theoretical semantics") plutôt qu'à une définition récursive à la Tarski pour définir la vérité et la fausseté d'un énoncé : vérité et fausseté sont définies à partir de l'existence de stratégies gagnantes pour deux joueurs, l'un cherchant à vérifier l'énoncé, l'autre à le rendre faux. Ce choix est motivé en aval par la possibilité d'obtenir dans le cadre GTS une extension naturelle de la logique du premier ordre, la logique IF, qui possède des propriétés métalogiques remarquables qui en font aux yeux de Hintikka *la* véritable logique. Mais le choix de Hintikka est également motivé en amont par des raisons purement conceptuelles, qui lui font préférer le style GTS.

Ainsi, selon Hintikka, l'un des intérêts des jeux sémantiques serait qu'au contraire de la définition tarskienne, ils ne se contenteraient pas d'« établir un lien abstrait entre énoncés et faits »([Hintikka 1996] p.22) mais expliqueraient comment les conditions de vérité sont ancrées dans des jeux de vérification et de falsification[3] : la définition GTS de la vérité serait plus substantielle que la définition tarskienne, en ce qu'elle reposerait sur les activités ou les jeux de langages qui constituent notre usage de la vérité. Mais, et Hintikka insiste lui-même sur ce point ([Hintikka 1996] p.37), il faut bien distinguer entre deux types de jeux, d'un côté les jeux de recherche de la vérité, et de l'autre les jeux de constitution de la vérité. Les jeux GTS pour la logique du premier ordre ou pour la logique IF sont de la seconde espèce : ils servent à définir - Hintikka irait plus loin et dirait ils constituent – la vérité ou la fausseté des énoncés. Montrer qu'un énoncé ϕ est vrai ne saurait, même métaphoriquement, passer par jouer le jeu GTS pour ϕ. En effet, montrer qu'un énoncé

[2][Herbelin 1995] développe les travaux de Coquand en montrant que le procédé d'interaction qui établit l'admissibilité de la règle de coupure correspond à une certaine stratégie d'élimination des coupures, l'élimination faible de tête (par analogie avec le lambda-calcul). Par ailleurs, Herbelin établit une bijection entre stratégies gagnantes des jeux de Lorenzen et preuves dans le calcul des séquents LJ ; moyennant une extension au cas classique, ce résultat constitue la base d'une unification de l'approche de Lorenzen avec les deux approches que nous relions ici.

[3]Hintikka tire de ce point un argument contre l'anti-réalisme; nous ne préjugeons pas ici de la force de cet argument.

est vrai revient peut-être à jouer un jeu, mais ce jeu est un jeu dérivé par rapport au jeu sémantique, puisqu'il vise à établir quelque chose à propos du jeu sémantique, à savoir l'existence d'une stratégie gagnante pour le vérificateur. Si l'on en reste là, le lien entre définition GTS de la vérité et procédures de vérification ne semble absolument pas plus substantiel que dans le cas de la définition tarskienne : d'un côté les jeux GTS ne sont pas au sens propre des jeux de vérification, et de l'autre, la possession d'une preuve de ϕ et le fait pour ϕ d'être vraie restent deux choses séparées, reliées seulement par un résultat général d'adéquation, au sens où la démonstration d'un énoncé nous en assure la vérité si elle n'utilise que des prémisses vraies et des règles qui préservent la vérité. Il semble donc que la prétention de la définition GTS de la vérité à être plus substantielle que la définition tarskienne ne serait justifiée que si elle permettait l'établissement d'un lien plus substantiel entre vérité et preuves, lien qui n'est pas établi par Hintikka.

Que serait un lien plus substantiel ? Il faut ici distinguer entre deux résultats possible d'un jeu de recherche : la garantie de l'existence d'une stratégie gagnante d'une part, la donnée effective d'une stratégie gagnante d'autre part. Le lien entre preuve et vérité sera plus substantiel si la preuve ne se contente pas de garantir, via ce que nous avons appelé un résultat général d'adéquation, l'existence d'une stratégie gagnante, mais si elle donne effectivement le moyen de jouer et de gagner les jeux sémantiques associés. Si l'on était dans ce deuxième cas, la définition GTS de la vérité serait alors elle-même plus substantielle en ce que ce qui rend vrai l'énoncé, les stratégies gagnantes, serait en même temps ce qui est obtenu à travers le jeu de recherche de la vérité. Les jeux sémantiques seraient alors bien des jeux de vérification ou de falsification, au sens où pour être en droit d'affirmer les énoncés associés, il faudrait être en position de les gagner.

Une définition plus substantielle de la vérité est en ce sens à moitié anti-réaliste. La première thèse anti-réaliste est qu'un énoncé vrai est un énoncé justifié, et que donc posséder une justification, c'est directement connaître ce qui rend vrai un énoncé. A cela, l'anti-réaliste ajoute une deuxième thèse, à savoir que toute justification doit être connaissable. Le principe de GTS est de penser les justifications comme des stratégies gagnantes. Si cette identification est compatible avec le fait de considérer en même temps les preuves comme des justifications, l'approche GTS est en accord avec la première thèse ; et c'est en cela qu'elle offrirait bien une définition plus substantielle de la vérité. Mais ceci ne garantit absolument pas la satisfaction de la contrainte supplémentaire imposée par l'anti-réaliste de l'accessibilité épistémique des justifications.

Nous sommes ainsi conduit à formuler les deux problèmes suivants :

Problème 1. *Peut-on en général interpréter les preuves comme nous donnant des stratégies gagnantes sur les jeux sémantiques ?*

Problème 2. *Peut-on en général considérer que toutes les stratégies gagnantes sur les jeux sémantiques sont épistémiquement accessibles, c'est-à-dire peuvent nous être données par des preuves ?*

L'intérêt conceptuel de GTS semble dépendre de la réponse au problème 1 ; si la réponse est négative, parler de jeux de vérification, ou de jeux de recherche et de découverte à propos des jeux sémantiques risque de n'être guère plus qu'une métaphore. Par contre, si l'on obtient une réponse positive au premier problème mais pas au second, on aura simplement montré qu'il existe des définitions plus substantielles de la vérité que la définition tarskienne qui ne sont pas pour autant anti-réalistes. Notons que puisque notre objet est le lien entre vérité et vérification des énoncés, nous ne nous intéressons pas seulement à la vérité logique, mais aux preuves dans une théorie axiomatique. Nous voulons établir un lien entre les procédures de recherche de la vérité, par exemple de la vérité arithmétique, et des stratégies gagnantes pour les jeux associés aux théorèmes et aux modèles de l'arithmétique. Les problèmes 1 et 2 sont formulés de manière intuitive, puisqu'on ne précise pas les systèmes déductifs et les théories considérées.

En suivant à la lettre la définition des jeux de Hintikka, le premier problème semble recevoir une réponse négative, en tout cas si l'on ne souhaite pas être révisionniste en matière de preuves. Il est bien connu par exemple qu'il existe des énoncés prouvables de l'arithmétique de Peano du premier ordre pour lesquels il n'existe pas de stratégie gagnante calculable sur le jeu sémantique associé. C'est par exemple le cas de l'énoncé

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall z (Halt(x_1, x_2, y) \vee \neg Halt(x_1, x_2, z))$$

où $Halt(x_1, x_2, y)$ dit que la machine de Turing de numéro x_1 s'arrête avec l'entrée x_2 au bout de z étapes. L'énoncé est classiquement prouvable, mais il n'existe pas de fonction récursive déterminant le choix de y en fonction de x_1 et x_2, car s'il en existait une, le problème de l'arrêt serait décidable. La solution au problème 1, si on veut l'appliquer au moins à une théorie comme l'arithmétique de Peano, passe donc par une modification des règles du jeu.

Trivialement, le second problème reçoit du même coup une réponse négative si l'on n'est pas révisionniste en matière de stratégies gagnantes, puisque les stratégies gagnantes qui ne sont pas récursives ne peuvent nous être données par aucune preuve (si on pouvait extraire d'une preuve un algorithme pour jouer selon la stratégie gagnante en question, celle-ci serait récursive, si l'on accepte la thèse de Church). D'où la tentation, auquel il est fait droit dans le chapitre 10 de [Hintikka 1996], « Le constructivisme reconstruit », de restreindre les modèles aux modèles récursifs et les stratégies gagnantes aux stratégies récursives pour obtenir ainsi une version constructiviste de GTS, notée GTSC.

Mais le problème 2 continue de recevoir une réponse négative. Plaçons-nous à nouveau dans le cadre de l'arithmétique de Peano. On a :

$$\mathbb{N} \vDash_{GTSC} \forall x \exists ! y F(x,y)$$
$$\text{ssi } F(x,y) \text{ définit une fonction récursive totale dans } \mathbb{N}.$$

On sait depuis [Tennenbaum 1959] que le seul modèle récursif de l'arithmétique de Peano est le modèle standard. Donc, s'il existait une axiomatisation déductivement complète $\vdash_{GTSC}$ de la logique du premier ordre GTSC, on aurait :

$$AP \vdash_{GTSC} \forall x \exists ! y F(x,y)$$
$$\text{ssi } F(x,y) \text{ définit une fonction récursive totale dans } \mathbb{N}.$$

Mais alors, $\{F(x,y)/F(x,y)$ définit une fonction récursive totale dans le modèle standard$\}$ serait récursivement énumérable. Or un simple argument de diagonalisation établit que l'ensemble des fonctions récursives totales n'est pas récursivement énumérable. Quel que soit le système déductif choisi, il ne peut donc capturer toutes les conséquences sémantiques au sens de GTS constructivisée des axiomes de Peano[4]. Autrement dit, quel que soit le système déductif choisi, il existe des stratégies gagnantes récursives sur $\mathbb{N}$ qui ne sont données par aucune preuve.

Nous allons maintenant proposer une modification des jeux de Hintikka destinée à permettre une réponse positive au premier problème.

2 Un amendement des jeux de Hintikka

Rappelons brièvement le principe de GTS. On associe à une formule ϕ en forme normale pour la négation et à un modèle M un jeu étiqueté

[4]La preuve donnée dans [Hintikka 1996] qui invoque seulement [Tennenbaum 1959] et le théorème d'incomplétude de Gödel n'est pas correcte ; le fait que les symboles de prédicats et de fonctions soient interprétées par des prédicats et des fonctions récursives ne garantit en effet absolument pas que toutes les stratégies gagnantes soient des stratégies récursives.

$G_{\phi,M}$, qui est un 5-uplet $\langle N, H, Z, J, P\rangle$ où N, l'ensemble des joueurs est $\{\exists loïse, \forall bélard\}$. H, l'ensemble des histoires est défini récursivement en même temps que J, qui dit qui doit jouer à quel moment, et qu'une fonction d'étiquetage l à l'aide de clauses du style[5] :

- $\langle\rangle \in H$, $l(\langle\rangle) = \phi$
- si $h \in H$ et l(h)=$\exists x\psi$, alors $J(h)$ =$\exists loïse$, et pour tout $a \in |M|, h \frown a \in H$, avec $l(h \frown a) = \psi[x := a]$.
- si $h \in H$ et l(h)=$\forall x\psi$, alors $J(h)$ =$\forall bélard$, et pour tout $a \in |M|, h \frown a \in H$, avec $l(h \frown a) = \psi[x := a]$.

Z est le sous-ensemble de H contenant les histoires étiquetées par des formules atomiques. P est une fonction de paiement qui donne à une histoire terminale la valeur 1 ou -1 selon que la formule atomique qui l'étiquette est vraie ou fausse dans le modèle. ϕ est vraie (fausse) dans M si et seulement si il existe une stratégie gagnante pour $\exists loïse$ ($\forall bélard$) sur $G_{\phi,M}$.

Propriété remarquable, les jeux GTS sont linéaires : une fois qu'on a commencé à explorer une branche de la formule ϕ, tout le jeu se déroule le long de cette branche, en tenant pour acquis les coups des joueurs. En particulier, $\exists loïse$ n'a pas le droit de revenir en arrière, et de se raviser en fonction de ce qu'il observe de la stratégie d'$\forall bélard$. Cette restriction ne semble pas nécessaire du point de vue de l'interprétation intuitive des jeux sémantiques. Ce qui compte, c'est qu'$\exists loïse$ puisse gagner contre toute stratégie d'$\forall bélard$; mais on peut penser que pour cela, tout les moyens sont bons, et que si $\exists loïse$ se rend compte en cours de jeu qu'il devrait réviser ses choix, il devrait pouvoir le faire. Nous allons définir une variante des jeux de Hintikka selon ce principe[6], dont nous allons montrer qu'elle constitue bien une variante acceptable.

Définition 3 (Clôture par répétition). *On dit qu'un jeu G' est clos par répétition relativement à un jeu sans répétition G s'il satisfait les propriétés suivantes :*

- *Si* $h = \langle h_0, \ldots, h_n\rangle \in H'$ *avec* $J(h) = \exists loïse$ *et s'il existe* $i \in \{0 \ldots n\}$ *tel que* $J(h_i) = \exists loïse$, $h_i \frown a \in H$ *et* $h_i \frown a \notin h$, *alors* $h' = \langle h_0, \ldots, h_n, h_i \frown a\rangle \in H'$ *et* h' *est étiqueté comme* $h_i \frown a$[7] *sauf si celle-ci est une histoire gagnante pour* $\forall bélard$ *dans ce cas*

[5] Nous ne donnons pas les clauses pour $\wedge$ et $\vee$ qui peuvent être aisément inférées.

[6] L'idée d'utiliser des retours en arrière pour traiter la logique classique par opposition à la logique intuitionniste se trouve déjà dans la tradition de Lorenzen. Les jeux utilisés ici s'inspirent directement de [Coquand 1995], les mêmes jeux sont également utilisés par [Krivine 2003].

[7] On appelle étiquette d'une histoire le joueur associé s'il s'agit d'une histoire non terminale, le paiement sinon.

h' est une histoire qui appelle un coup d'$\exists$loïse (intuitivement cette clause assure que les retours en arrière sont autorisés).

– *Soit $h = \langle h_0, \ldots, h_n \rangle \in H'$, si $h_n \frown a \in H$, alors $h' = \langle h_0, \ldots, h_n, h_n \frown a \rangle \in H'$ et h et h' sont étiquetées de même, avec la même restriction que précédemment (intuitivement cette clause assure que les histoires de H' se continuent comme les histoires de H)*[8].

Définition 4 (Jeu avec retour en arrière). *Soit $G_{\phi,M}$ un jeux sémantique, on définit $G'_{\phi,M}$ le jeu avec retour en arrière associé à $G_{\phi,M}$.*

On part de G_0 qui est comme G, avec cette modification que les histoires gagnantes pour $\forall$bélard deviennent des histoires qui appellent un coup d'$\exists$loïse.

Soit G_1 le plus petit jeu clos par répétition relativement à G_0[9]*, à cause de la clause de non-répétition contenue dans la définition précédente, G_1 comporte éventuellement des histoires qui appellent un coup d'$\exists$loïse mais telles que l'ensemble des coups possibles pour $\exists$loïse est vide, ces histoires sont transormées en histoires terminales perdantes pour $\exists$loïse. On obtient ainsi un jeu G_2 qui est le $G'_{\phi,M}$ recherché.*

Les parties associées aux jeux sémantiques de Hintikka sont toujours finies, la longueur maximale d'une partie étant directement déterminée par la complexité de la formule. Ce n'est plus le cas des parties avec retour en arrière : pour peu que le domaine M soit infini et que la formule ϕ comporte un quantificateur existentiel, la possibilité pour $\exists$*loïse* de revenir en arrière va donner lieu à des parties infinies au cours desquelles elle va choisir successivement une infinité dénombrable d'éléments de M. Par exemple, si l'on considère la formule $\exists x \forall y\ x \geq y$ jouée sur $\mathbb{N}$, elle peut choisir successivement tous les entiers, $\forall$*bélard* peut l'empêcher d'atteindre une histoire terminale gagnante pour elle, mais il ne peut atteindre lui-même une position gagnante. En accord avec cet exemple, on pose qu'une partie infinie est une partie gagnante pour $\forall$*bélard*.

Comme le montre la proposition suivante, le passage des jeux de Hintikka à des jeux avec répétition ne modifie pas leur rôle sémantique, du point de vue Hintikka. Il s'agit donc d'un amendement acceptable :

Proposition 5. *J a une stratégie gagnante sur $G_{\phi,M}$ si et seulement si J a une stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$.*

---

[8]Comme la suite vide est toujours une histoire de H et de H', cette clause assure que G' contient G, au sens où si $h = \langle a_1, \ldots a_n \rangle \in H$, alors $h' = \langle \langle a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \ldots, \langle a_1, \ldots a_n \rangle \rangle \in H'$ et h et h' sont étiquetées de même.

[9]On obtient G_1 en prenant des intersections sur tous les jeux clos par répétition relativement à G_0.

- Supposons qu'$\exists$*loïse* a une stratégie gagnante s sur $G_{\phi,M}$. N'importe quelle extension de s en une stratégie pour $G'_{\phi,M}$ est gagnante, puisqu'au cours d'une partie jouée avec s, on n'atteindra jamais que des positions qui viennent directement (sans répétition) de $G_{\phi,M}$. Donc $\exists$*loïse* a bien également une stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$.
- Supposons qu'$\forall$*bélard* a une stratégie gagnante s sur $G_{\phi,M}$. On peut étendre s en une stratégie s' sur $G'_{\phi,M}$. Soit $h = \langle h_0, \ldots, h_n \rangle$ une histoire de H' appelant un coup d'$\forall$*bélard*, par construction, h_n est une histoire de H qui appelle un coup d'$\forall$*bélard*, on pose $s'(h) = \langle h_0, \ldots, h_n, s(h_n) \rangle$.
  s' est une stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$. Supposons que ce n'est pas le cas, il existe une partie qui se termine sur une histoire terminale $h = \langle h_0, \ldots, h_n \rangle$ gagnante pour $\exists$*loïse*. Mais, par construction de H' et par définition de s', h_n est une histoire terminale de H gagnante pour $\exists$*loïse* à la quelle on arrive en jouant s. Ce qui est contradiction avec le fait que s soit une stratégie gagnante.
- Supposons qu'$\exists$*loïse* n'a pas une stratégie gagnante sur $G_{\phi,M}$. Comme les jeux de Hintikka sont déterminés, $\forall$*bélard* a une stratégie gagnante sur $G_{\phi,M}$. Le point précédent assure alors qu'$\forall$*bélard* a également une stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$. Donc $\exists$*loïse* n'a pas de stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$.
- Supposons qu'$\forall$*bélard* n'a pas une stratégie gagnante sur $G_{\phi,M}$. Comme les jeux sémantiques sont déterminés, $\exists$*loïse* a une stratégie gagnante sur $G_{\phi,M}$. Le premier point assure alors qu'$\exists$*loïse* a également une stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$. Donc $\forall$*bélard* n'a pas de stratégie gagnante sur $G'_{\phi,M}$.

On a établi ainsi au passage deux choses : premièrement, les jeux sémantiques avec retour en arrière sont déterminés, deuxièmement, on peut supposer sans perte de généralité que les stratégies d'$\forall$*bélard* ne dépendent que de la dernière position atteinte, puisqu'on a vu que s'il existait une stratégie gagnante pour $\forall$*bélard*, il en existait une de ce type.

3 Admissibilité d'une règle

Nous allons maintenant montrer que sur la base de ces jeux amendés, il est possible de voir les preuves comme donnant effectivement des stratégies gagnantes.

Définition 6 (Justification en termes de jeux). *Soient L un langage du premier ordre, M une L-structure décidable pour L, c'est-à-dire qui interprète les symboles de prédicats et de fonctions de L par des prédicats et des fonctions décidables, et soit ϕ une formule de L, une justification J_ϕ en termes de jeux de ϕ pour M est la donnée d'une une stratégie gagnante calculable pour ∃loïse sur $G'_{\phi,M}$.*

Définition 7 (Justification d'un séquent). *Une justification en termes de jeux d'un séquent monolatère $\vdash A_1, \ldots, A_n$ pour M est une justification pour M de la clôture universelle de $A_1 \vee \ldots \vee A_n$.*

Définition 8 (Admissibilité d'une règle). *Une règle pour les séquents*

$$\frac{S_1 \qquad \ldots \qquad S_N}{S_C}$$

est admissible si et seulement si, pour tout L, pour toute L-structure M décidable pour L, pour toutes justifications $J_{S_1}, \ldots, J_{S_n}$ des séquents prémisses pour M, il existe une manière effective de transformer les justifications des séquents prémisses en une justification J_{S_C} du séquent conclusion pour M.

On va considérer un calcul des séquents "à la Gentzen-Schütte" $\vdash$, dans lequel toutes les formules se trouvent d'un seul côté, pour un langage dans lequel la négation est définie à l'aide des lois de De Morgan (voir [Troelstra et Schwichtenberg 1996], section 3.6 pour une présentation détaillée) :

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee - intro$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge - intro$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A(t)}{\vdash \Gamma, \exists x A(x)} \exists - intro$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A(x)}{\vdash \Gamma, \forall x A(x)} \forall - intro$$ [10]

[10] x pas libre dans Γ

$$\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}\ {\scriptstyle \text{Contraction}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\ {\scriptstyle \text{Affaibilissement}}$$

$$\frac{}{\vdash P, \neg P}\ {\scriptstyle \text{Axiom}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma_0, A \qquad \vdash \neg A, \Gamma_1}{\vdash \Gamma_0, \Gamma_1}\ {\scriptstyle \text{Coupure}}$$

Proposition 9. *Pour tout L langage du premier ordre, pour toute L-structure M décidable pour L, et pour tout ensemble Σ de séquents axiomes justifiés en termes de jeux pour M, une preuve de ϕ dans $\vdash_\Sigma$ nous donne une justification en termes de jeux de ϕ pour M.*

Cette proposition constitue une réponse au problème 1 ; elle est un corollaire immédiat de la proposition suivante.

Proposition 10. *Toutes les règles de $\vdash$ sont admissibles.*

Qu'en est-il du problème 2 ? Intuitivement, en passant des jeux sans répétition aux jeux avec répétition, on a augmenté le stock de stratégies gagnantes, ce qui nous a permis de trouver des stratégies à associer à toutes les preuves, mais, inversement, ceci n'a bien sûr pas le stock de preuves. Il n'y a donc semble-t-il pas d'espoir de voir la situation concernant le problème 2 s'améliorer. Et là encore, restreindre les stratégies aux fonctions récursives ne permettra pas d'obtenir un résultat de complétude. Comme [Krivine 2003][11] l'indique, $\exists$*loïse* a une stratégie gagnante sur $\mathbb{N}$ si et seulement si $\exists$*loïse* a une stratégie gagnante récursive sur $\mathbb{N}$. En effet, soit ϕ une formule, la stratégie triviale consistant pour $\exists$*loïse* à choisir successivement tous les n-uplets possibles correspondant aux n choix appelés par ϕ est gagnante si et seulement si ϕ est vraie dans $\mathbb{N}$.

[11] [Krivine 2003] recourt à des jeux avec répétition pour interpréter le contenu computationnel des preuves de l'arithmétique classique du second ordre avec axiome du choix dépendant, extrait en utilisant la réalisabilité avec des extensions du lambda-calcul.

4 Admissibilité des règles de $\vdash$

Nous démontrons 10 en indiquant la démonstration pour chaque règle. Seul le cas de la règle de coupure est non trivial, mais comme la proposition 9 porte également sur des systèmes avec axiomes, dans lesquels les coupures ne sont en général pas éliminables, nous ne pouvons invoquer l'éliminabilité des coupures et nous dispenser de traiter le cas délicat.

Lemme 11. *Les règles logiques, les règles structurelles et le tiers-exclu sont admissibles.*

Nous donnons seulement la démonstration de l'admissibilité du tiers-exclu, qui se fait par induction sur A.

- A est atomique. $\forall$*bélard* commence par choisir une instanciation des variables libres, comme les symboles de prédicats et de fonctions de L sont interprétés par des prédicats et des fonctions récursives sur M, $\exists$*loïse* peut décider qui de A et $\neg A$ est vrai, et jouer le bon.
- A est de la forme $C \vee D$. Le jeu se joue sur $\vdash (C \vee D), (\neg C \wedge \neg D)$, $\forall$*bélard* fait un choix *ch* pour les variables libres du séquent. $\exists$*loïse* choisit la formule de droite pour observer la formule F choisie par $\forall$*bélard*, $\exists$*loïse* peut ensuite revenir en arrière et faire le même choix sur $(\neg C \wedge \neg D)$. Elle a ensuite une stratégie gagnante en suivant ce que fait après *ch* la stratégie qui existe pour $\vdash F, \neg F$ par hypothèse d'induction.
- Le cas où A est de la forme $C \wedge D$ est analogue au cas précédent.
- Si A est de la forme $\forall x B(x)$, l'idée est la même. Le jeu se joue sur $\vdash \forall x B(x), \exists x \neg B(x)$. $\forall$*bélard* fait un choix *ch* pour les variables libres, $\exists$*loïse* choisit la formule de gauche pour observer la valeur n choisie par $\forall$*bélard* pour x, elle peut ensuite revenir en arrière et choisir $\exists x \neg B(x)$ puis le même n pour x. Par hypothèse d'induction, il existe une stratégie gagnante s pour $\vdash B(x), \neg B(x)$, $\exists$*loïse* peut donc suivre maintenant cette stratégie après le choix initial par $\forall$*bélard* de *ch* et n pour x qui est libre également.
- Le cas où A est de la forme $\exists x B(x)$ est analogue au cas précédent.

Proposition 12. *La règle de coupure est admissible*

[Coquand 1995], en donnant une interprétation en termes de jeux des résultats anciens de [Novikoff 1943], a présenté une preuve pour un langage propositionnel infinitaire avec Γ_0 ne contenant qu'une formule se présentant comme une disjonction d'atomes et Γ_1 vide. Nous donnons ci-dessous la preuve pour le cas général. Par souci de simplicité, nous supposons que A appelle au moins un coup d'$\exists$*loïse* et d'$\forall$*bélard*[12] et que les coups d'$\exists$*loïse* et d'$\forall$*bélard* alternent sur A[13], et donc aussi sur $\neg A$.

L'idée générale de la démonstration est que l'admissibilité de la coupure repose sur la composition des stratégies, via la formule coupée qui est pour ainsi dire le lieu d'un débat entre les deux stratégies gagnantes pour les prémisses. Ceci est analogue à la démonstration de [Blass 1997] dans le cadre d'une sémantique de jeux pour la logique linéaire, Blass affirmant que l'élimination des coupures revient à trois choses : un calcul en parallèle, une discussion interne et une mise à l'écart. La difficulté propre à la démonstration de la proposition 12 tient à la possibilité des retours en arrière qui cassent la linéarité des débats. On va définir un programme d'interaction, qui assure à la fois le calcul en parallèle et la discussion interne, on verra ensuite qu'il suffit de mettre à l'écart ce qui ne concerne pas le jeu pour le séquent conclusion pour obtenir les parties gagnantes.

Définition 13 (Programme d'interaction). *Soient* $\vdash \Gamma_0, A$ *et* $\vdash \Gamma_1, \neg A$ *deux séquents,* s_0 *et* s_1 *deux stratégies gagnantes pour ces séquents, le programme d'interaction de* s_0 *et de* s_1 *est le programme* $PI(s_0, s_1)$ *qui s'exécute contre toute stratégie* e *d'∀bélard pour* $\vdash \Gamma_0, \Gamma_1$ *de la manière suivante :*

Un état π *de* $PI(s_0, s_1)$ *est un 6-uplet*

$\langle comp(\pi), S(\pi), G(\pi), hi(\pi), f_0(\pi), f_1(\pi)\rangle$.

où les valeurs de comp, f_0 *et* f_1 *sont des entiers,* S *est à valeur dans* $\{P, D\}$*,*G *est à valeur dans* $\{0, 1\}$*, hi donne une histoire dans le jeu sans répétition sur* $\Gamma_{G(\pi)}, A_{G(\pi)}$.

Supposons sans perte de généralité que de A *et* $\neg A$*, la formule qui appelle comme premier coup un coup d'∃loïse soit* A*. L'état initial de* $PI(s_0, s_1)$ *est* $\pi_0 = \langle 1, D, 0, < A >, 0, 0\rangle$[14].

[12] Si la formule A est moins complexe, la démonstration est directe et ne nécessite pas le protocole de démonstration qui suit.

[13] Toute formule est trivialement équivalente à une formule de cette forme, et il n'y a par ailleurs pas de difficulté de principe à étendre la preuve pour se passer de cette hypothèse, mais la preuve de terminaison à venir s'en trouverait passablement alourdie.

[14] Le choix de cet état initial revient à commencer par amorcer le débat, ce qui simplifie la définition du programme d'interaction. Ce n'est pas gênant, car on peut supposer sans perte de généralité que les stratégies s_X commencent par choisir A_X, à cause de la possibilité de revenir en arrière.

a) Si la suite d'états $\Pi = \pi_0 \dots \pi_n$ correspond à un déroulement du programme, on peut lui associer deux sous-suites $F_X(\Pi) = \pi_{a_1} \dots \pi_{a_m}$[15] *telles que $\pi_{a_1} = \pi_0$, $\pi_{a_m} = \pi_n$ et $comp(\pi_{a_i}) = f_X(\pi_{a_{i+1}})$.*

b) Si la suite $\Pi = \pi_1 \dots \pi_n$ est une suite d'états du programme, on note $Pr_X(\Pi)$ la sous-suite de Π où l'on ne retient que les π_i tels que ($S(\pi_i) = P$ et $G(\pi_i) = X$) ou $S(\pi_i) = D$.

c) Si la suite $\Pi = \pi_1 \dots \pi_n$ est une suite d'états du programme, on note $Hi(\Pi)$ la suite des images $hi(\pi_i)$.

Si la suite d'état $\Pi = \pi_0 \dots \pi_n$ avec $X = G(\pi_n)$ correspond à un déroulement du programme, l'état suivant dépend de $H = Hi(Pr_X(F_X(\Pi))$

1. *Si H est une histoire terminale du jeu pour $\Gamma_{G(\pi_n)}$, le programme s'arrête.*
2. *Si $H = \langle hi(\pi_{a_1}), \dots hi(\pi_{a_m})\rangle$ appelle un coup d'∃loïse , il existe un π_{a_l} tel que $s_X(H) = \langle H, h \frown a\rangle$ avec $hi(\pi_{a_l}) = h$.*
   Deux cas sont possibles :
   (a) *$h \frown a$ est une histoire du jeu sans répétition pour Γ_X, l'état suivant est*
   $\langle n+1, P, X, s_X(H), f_X(\pi_{n+1}) = n, f_{-X}(\pi_{n+1}) = f_{-X}(\pi_n)\rangle$
   (b) *$h \frown a$ est une histoire du jeu sans répétition pour A_X, l'état suivant est*
   $\langle n{+}1, D, -X, s_X(H), f_X(\pi_{n+1}) = n, f_{-X}(\pi_{n+1}) = comp(\pi_{a_l})\rangle$.
3. *Si H appelle un coup d'∀bélard , l'état suivant est*

$$\langle n+1, P, X, H \frown e(hi(\pi_{a_n})), f_X(\pi_{n+1}) = n, f_{-X}(\pi_{n+1}) = f_{-X}(\pi_n)\rangle^{16}$$

Intuitivement, *comp* est simplement un compteur, S distingue entre deux types d'état, correspondant soit à une progression P du jeu sur $\Gamma_{G(\pi)}, A_{G(\pi)}$ soit à un débat D sur $A, \neg A$, G précise laquelle des deux parties jouées en parallèle sur les deux séquents qui constituent les prémisses de la règle de coupure est en cours. *hi* indique le coup qui vient d'être joué, tandis que les fonctions f_X permettent de reconstituer les histoires en cours, en indiquant à quel état π constitue une réponse du

[15] Nous utilisons X comme variable syntaxique à valeur dans $\{0,1\}$ et $-X$ est 0 si X est 1 et inversement.

[16] On utilise ici la possibilité de considérer les stratégies d'∀*bélard* comme des stratégies pour le jeu sans répétition, et donc de ne faire dépendre la stratégie d'∀*bélard* que du dernier coup joué, c'est-à-dire que de l'histoire du jeu sans répétition atteinte. C'est la raison pour laquelle le coup d'∀*bélard* comme coup sur le jeu avec répétition n'est pas $e(hi(\pi_{a_n}))$ mais $H \frown e(hi(\pi_{a_n}))$.

point de vue du jeu sur Γ_X. L'idée sous-jacente à PI est que l'on obtient une stratégie gagnante sur Γ_0, Γ_1 en jouant comme s_0 sur Γ_0 et comme s_1 sur Γ_1 ; c'est ce qui se passe pour les états de progression P. Mais il se peut qu'en suivant par exemple s_0, on joue un coup sur A. En soi, ce n'est pas grave, puisqu'il suffira ensuite de ne pas tenir compte de ces coups, mais le problème est qu'il se peut alors ensuite que s_0 attende d'$\forall$*bélard* sur A, coup que ne peut fournir la stratégie e d'$\forall$*bélard* sur Γ_0, Γ_1. C'est ici qu'intervient pleinement l'idée d'état de débat D : comme A et $\neg A$ sont duales, ce coup attendu de la part d'$\forall$*bélard* sur A peut être joué par $\exists$*loïse* sur $\neg A$, selon s_1.

Notons que les clauses 1. à 3. épuisent tous les cas possibles. En effet d'une part, on n'arrive jamais à une histoire appelant un coup d'$\forall$*bélard* sur A_X puisque, par hypothèse, les coups d'$\exists$*loïse* et d'$\forall$*bélard* sur A (et donc également sur $\neg A$) alternent. Et d'autre part, on ne s'arrête jamais sur A ou $\neg A$, car si $\exists$*loïse* joue un coup terminal $s_X(H_X)$ sur A_X (où A_0 représente A et A_1 $\neg A$), ce coup ne peut être qu'un coup gagnant pour lui, comme s_X est une stratégie gagnante. Mais alors la position atteinte sur A_{-X} appelle nécessairement un coup d'$\exists$*loïse* car comme s_{-X} est également une stratégie gagnante, on ne peut pas s'arrêter sur une histoire qui serait gagnante pour $\forall$*bélard* .

Si la suite $\Pi = \pi_1 \ldots \pi_n$ où $G(\pi_n) = X$ est une suite d'états du programme, on note $Pr_{01}(\Pi)$ la sous-suite de Π où l'on ne retient que les π_i tels que $S(\pi_i) = P$ et $G(\pi_i) = X$.

Le lemme suivant va finir de nous assurer que la notion de programme d'interaction est bien définie et qu'elle nous permet bien d'obtenir des parties sur Γ_0, Γ_1 en faisant interagir s_0 et s_1 :

Lemme 14. *Pour tout n, si la suite d'état $\Pi_n = \pi_0 \ldots \pi_n$ correspond à un déroulement du programme, alors*

- $H_0(n) = Hi(Pr_0(F_0(\Pi_n)))$ *est une histoire du jeu avec répétition pour Γ_0, A où $\exists$loïse a joué s_0.*
- $H_1(n) = Hi(Pr_1(F_1(\Pi_n)))$ *est une histoire du jeu avec répétition pour $\Gamma_1, \neg A$ où $\exists$loïse a joué s_1.*
- $H_{01}(n) = Hi(Pr_{01}(F_{G(\pi_n)}(\Pi_n)))$ *est une histoire du jeu avec répétition pour Γ_0, Γ_1 où $\forall$bélard a joué e.*

La démonstration se fait par induction sur n. Le cas n=0 est trivial, car le choix de la formule A_X est une histoire possible du jeu pour Γ_X, A_X et la suite vide est une histoire du jeu pour Γ_0, Γ_1.

Supposons que l'affirmation est vraie au rang n. On note $X = G(\pi_{n+1})$. On est dans un des trois cas suivants :

- Le passage de π_n à π_{n+1} s'est fait par une clause 2(a). $H_{-X}(n+1) = H_{-X}(n)$ donc l'affirmation suit directement de l'hypothèse d'induction. $H_X(n+1) = H_X(n), s_X(H_X(n))$, l'affirmation suit de l'hypothèse d'induction et de ce que s_X est une stratégie sur Γ_X, A_X. Il en va de même pour $H_{01}(n+1) = \langle H_{01}(n), s_X(H_X(n))\rangle$, en effet $s_X(H_X(n))$ prolonge un coup de $H_X(n)$ sur Γ_X, donc ce coup est également dans $H_{01}(n)$.
- Le passage de π_n à π_{n+1} s'est fait par une clause 2(b). Comme $H_{01}(n+1) = H_{01}(n)$, l'affirmation pour H_{01} suit immédiatement de l'hypothèse d'induction. L'affirmation pour $H_X(n+1)$ suit comme précédemment de l'hypothèse d'induction. Montrons l'affirmation pour $H_{-X}(n+1)$. $hi(\pi_{n+1})$ prolonge soit l'état initial, soit un autre état de débat. S'il prolonge l'état initial, l'affirmation est trivialement vraie. Sinon, supposons que l'état π_{a_l} numéroté par $f_{-X}(\pi_{n+1)}$ soit un autre état de débat précédent π_{n+1} que l'état initial.

  Par hypothèse d'induction $Hi(Pr_{-X}(F_{-X}(\pi_0 \ldots \pi_{a_l}))) = H'$, $hi(\pi_{a_l})$ est une histoire du jeu avec répétition sur Γ_{-X}, A_{-X} ; de plus, comme $f_{-X}(\pi_n + 1)$ numérote π_{a_l} on sait que
  $$H_{-X}(n+1) = \langle H', hi(\pi_{a_l}), hi(\pi_{n+1})\rangle.$$
  Comme $hi(\pi_{n+1})$ prolonge $hi(\pi_{a_l})$ de manière admissible pour A_X, $hi(\pi_{n+1})$ prolonge également $hi(\pi_{a_l})$ de manière admissible pour A_{-X}, on en déduit que $H_{-X}(n+1)$ est bien une histoire du jeu avec répétition sur Γ_{-X}, A_{-X}.
- Le passage de π_n à π_{n+1} s'est fait par une clause 3. Ce cas est analogue à 2(a).

Si le programme PI s'arrête pour tout e, l'interaction de s_0 et s_1 telle que définie par PI nous donne bien une stratégie gagnante sur Γ_0, Γ_1. La démonstration de la proposition 12 se ramène donc à une démonstration de terminaison de PI pour tous s_0,s$_1$,e (s_0,s_1 étant des stratégies gagnantes).

Soit $\Pi = \pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ un déroulement du programme. Pour tout n tel que $S(\pi_n) = P$, il existe $k > n$ tel que $S(\pi_n) = D$ ou le programme s'arrête après π_k . Supposons que ce ne soit pas le cas, la suite $H_{G(\pi_n)}, hi(\pi_{n+1}) \ldots$ constituerait une partie infinie sur $\Gamma_{G(\pi_n)}, A_{G(\pi_n)}$, mais comme $s_{G(\pi_n)}$ est une stratégie gagnante, il ne peut pas y avoir de telle partie infinie.

Si la suite $\Pi = \pi_1 \ldots \pi_n \ldots$ est une suite d'états du programme, on note $Pr_D(\Pi)$ la sous-suite de Π où l'on ne retient que les π_i tels que $S(\pi_i) = D$. Pour montrer la terminaison de P, il suffit donc de montrer :

Lemme 15. *Soit $\Pi = \pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ un déroulement du programme, $Pr_D(\Pi)$ est finie.*

La démonstration du lemme 15 est adaptée de la démonstration de [Coquand 1995], en particulier nous reprenons la définition des suites d'interaction en modifiant la démonstration associée de ce que les "bonnes" suites d'interaction sont finies.

Définition 16 (Suite d'interaction Coquand 1995). *Une suite d'états*

$$\langle X, n, f_n, \rangle, \langle X, n+1, f_{n+1}, \rangle, \ldots$$

est une suite d'interaction si et seulement si, $f_n = 0$ et pour tout p, f_{p+1} est parmi $p, f_p - 1, f_{f_p-1} - 1, \ldots$[17]

Définition 17 (Intervalle défini Coquand 1995). *Etant donnée une suite d'interaction $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$, on appelle un intervalle $[f_p, p]$ tel que p n'est pas parmi les valeurs de $f_{p+1} \ldots$ un intervalle défini.*

Définition 18 (Arrangement d'une suite d'interaction). *Un arrangement d'une suite d'interaction est la donnée de deux bons ordres $<_0$ et $<_1$ tels que $\langle -X, n+1, f_{n+1} \rangle <_X \langle X, n, f_n \rangle$ et $\langle X, n, f_n \rangle <_X \langle -X, f_n, f_{f_n} \rangle$*[18]*.*

Lemme 19. *Si $si = (X_1, 1, f_1), (X_2, 2, f_2), \ldots, (X_n, n, f_n), \ldots$ est une suite d'interaction arrangée par $<_0$ et $<_1$ et $[f_p, p]$ un intervalle défini de cette suite, la suite $si' = (X_1, 1, f'_1), (X_2, 2, f'_2), \ldots, (X_m, m, f'_m), \ldots$ avec $ant(m) = m$ si $m < f_p$ et $ant(m) = m + (p - f_p + 1)$ si $m > p$, $f'_m = f_{ant(m)}$ si $f_{ant(m)} < f_p$ et $f'_m = f_{ant(m)} - (p - f_p + 1)$ si $f_{ant(m)} m > p$, est une suite d'interaction arrangée par $<'_0$ et $<'_1$ où $m_1 <'_X m_2$*[19] *si et seulement et $ant(m_1) <_X ant(m_2)$.*

La première partie du lemme est un lemme de [Coquand 1995][20], la seconde partie concernant les arrangements est facile à montrer :

On a bien $\langle -X, m+1, f'_{m+1} \rangle <'_X \langle X, m, f'_n \rangle$ car, soit $ant(m+1) = ant(m) + 1$, et dans ce cas on avait bien $ant(m+1) <_X ant(m)$, soit

[17] Lorsque le seul paramètre en jeu des suites d'interaction est la suite des f_i, nous identifions par commodité une suite d'interaction et la suite de ses f_i.

[18] Les bons ordres reconstituent les parties jouées sur les A_X, leur définition présuppose que les coups d'$\exists lo\ddot{\imath}se$ et $\forall b\acute{e}lard$ alternent sur A.

[19] m_1 est une facilité pour (X_{m_1}, m_1, f_{m_1}).

[20] Coquand ne donne pas la démonstration, qui est triviale : on montre par récurrence sur $k+1 \geq p$ que les $k, f_k - 1, f_{f_k-1} - 1, \ldots$ ne tombent jamais dans l'intervalle défini. Par ailleurs, nous nous écartons pour le reste des définitions et de la démonstration de Coquand, celle-ci nous étant restée opaque.

$ant(m) = f_p - 1$ et $ant(m+1) = p+1$, mais alors dans ce cas on avait $f_p - 1 >_X f_p >_X p >_X p+1$.

On a également $\langle X, m_1, f'_{m_1}\rangle <_X \langle -X, m_2, f'_{m_2}\rangle$ quand $m_2 = f'_{m_1}$. Trois cas sont possibles :

1. si $ant(m_1)$ et $ant(m_2)$ sont tous les deux strictement inférieurs à f_p, on a $f'_{m_1} = f_{ant(m_1)}$ et $ant(m_2) = m_2$, donc on en déduit $ant(m_2) = f_{ant(m_1)}$.
2. si $ant(m_1)$ et $ant(m_2)$ sont tous les deux strictement supérieurs à p, on a $m_2 = f'_{m_1} = f_{ant(m_1)} - (p - f_p + 1)$, donc on en déduit $m_2 + (p - f_p + 1) = f_{ant(m_1)}$, c'est-à-dire $ant(m_2) = fant(m-1)$.
3. si $ant(m_2) < f_p$ et $ant(m_1) > p$, on a $m_2 = f'm_1 = f_{ant(m_1)}$, donc on en déduit $ant(m_2) = f_{ant(m_1)}$ comme dans le cas 3.

Le lemme 19 nous permet d'associer de manière univoque à une suite d'interaction *si* arrangée et à un ensemble d'intervalles définis DI sur cette suite une nouvelle suite d'interaction arrangée si' (l'univocité est assurée car le lemme garantit que deux intervalles définis ne se chevauchent pas).

Définition 20 (Profondeur d'une suite d'interaction). *Soit si une suite d'interaction, la profondeur d'un élément i de cette suite est la longueur de la suite $i, f_i, f_{f_i}, \ldots$, la profondeur de si est la profondeur maximale de ses éléments.*

On peut maintenant énoncer le lemme crucial pour la démonstration du lemme 15 :

Lemme 21. *Toute suite d'interaction de profondeur n qui peut être arrangée est finie.*

La démonstration se fait par induction sur n. Le cas $n = 1$ est trivial, puisqu'une suite d'interaction de profondeur 1 est nécessairement de longueur au plus 1.

Soit *si* une suite d'interaction arrangée de profondeur n. Tous les intervalles $[f_p, p]$ où p est de profondeur n sont des intervalles définis, donc on peut obtenir par le lemme 19 une sous-suite arrangée si' de *si* de profondeur $n-1$. Par hypothèse d'induction, si' est finie. Maintenant pour prouver que *si* elle-même est finie, il suffit de montrer qu'il ne peut pas y avoir de suite infinie d'intervalles définis consécutifs dans *si*. Une telle suite nous donnerait une suite infinie de la forme $[f_{p_0}, p_0]\,[p_0 + 1 = f_{p_1}, p_1] \ldots [p_n + 1 = f_{p_{n+1}}, p_{n+1}] \ldots$

Supposons sans perte de généralité que les p_i correspondent à des états X (il est clair que tous les états de débats correspondant aux p_i ont la même valeur pour X). Par définition de $<_X$, on aurait une suite descendante infinie $f_{p_0} >_X p_0 >_X p_0 + 1 = f_{p_1} >_X p_1 >_X \dots p_n + 1 =_X f_{p_{n+1}} >_X p_{n+1} >_X \dots$ Ce qui est contradiction avec le fait que $<_X$ soit un bon ordre. Ceci achève la démonstration du lemme 21.

Le lemme 15 est un corollaire du lemme 21. Par construction, $Pr_D(\Pi)$ est une suite d'interaction si l'on ne garde des éléments de $Pr_D(\Pi)$ que le triplet $\langle X, n, f_n\rangle$ où f_n est f_X[21]. La suite d'interaction ainsi obtenue à partir de $Pr_D(\Pi)$ est bornée par la profondeur de A, et elle peut être arrangée, sinon on aurait une sous-suite infinie descendante correspondant à une partie infinie sur A_X pour un X ce qui est en contradiction avec le fait que s_X soit une stratégie gagnante. On peut alors appliquer le lemme 21 et en déduire le lemme 15, et avec lui la proposition 12.

[21] Moyennant bien sûr un renommage pour tenir compte des états qui n'étaient pas des états de débat et qu'on a supprimés.