Preuves, fondements et certificats

Jacques Dubucs
Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques
(CNRS/Paris I)

Résumé : Le fondationnalisme soutient que les propositions mathématiques sont agencées en une structure objective complexe qu'il nous incombe de découvrir, et dans laquelle chaque proposition dépend, pour sa vérité, des propositions qui la précèdent et qui la fondent. Aux preuves qui n'assurent que la vérité des propositions qu'elles prouvent, il oppose les preuves qui indiquent la raison objective de cette vérité. Le fondationnalisme insiste sur l'universelle disponibilité des ressources cognitives mobilisées par ces dernières preuves. L'article s'emploie à contester ce point et à montrer que le fondationnalisme est une doctrine épistémologiquement intenable.

Abstract: According to foundationalism, mathematical propositions form a complex objective structure we have to discover, and in which each proposition depends for its truth of the propositions that precede and ground it. Proofs that only establish the truth of their conclusions are contrasted with proofs that give also the objective reason of that truth. Fondationalism claims that the cognitive ressources required by these proofs are universally available. The paper tries to undermine that claim and to show that foundationalist epistemology is a dead end.

Philosophia Scientiæ, 7 (1), 2003, 167–198.

Nous manquons encore de recul pour une évaluation d'ensemble des travaux contemporains qui s'efforcent de remplacer, dans tout ou partie de ses usages, la notion de vérité par celle de preuve. Mais une chose apparaît d'ores et déjà clairement : tant en logique qu'en philosophie, le concept de preuve est beaucoup plus complexe qu'on ne l'avait imaginé au départ, et peut-être ne l'est-il pas beaucoup moins que le concept de vérité lui-même.

Il est notoire, bien sûr, que les mathématiciens ont fluctué dans leur distinction entre ce qui est probant et ce qui ne l'est pas. Les canons auxquels les preuves sont supposées se conformer ne sont pas restés identiques à eux-mêmes. Nous sommes aujourd'hui beaucoup plus exigeants qu'Euclide, dont les *Eléments* s'ouvrent par une proposition (« on peut toujours construire un triangle équilatéral sur un segment donné ») dont la preuve ne nous satisfait plus, puisqu'il y est mentionné deux cercles dont l'intersection, certes visible sur la figure proposée, découle d'une hypothèse de continuité que nous nous sentirions tenus d'expliciter.

Mais ces variations bien connues ne sont pas tout, ni même l'essentiel. De manière plus ou moins coordonnée à elles, une oscillation d'un autre type, moins visible, plus secrète, et sans doute moins présente à la conscience des mathématiciens eux-mêmes, en a affecté la nature et la destination. Elle est entre deux pôles, que l'on pourrait, à défaut de mieux, qualifier de *fondationnel* et d'*épistémique* respectivement.

Dans la conception fondationnelle, la preuve dit sur quoi l'énoncé repose, et elle explique pourquoi il est vrai. Les théorèmes mathématiques sont agencés en une structure objective complexe qu'il nous incombe de découvrir, et dans laquelle chaque proposition dépend, pour sa vérité, des propositions qui la précèdent et qui la fondent. Prouver un théorème consiste à dire les raisons de sa vérité, dans l'ordre objectif où elles se trouvent et qui ne dépend pas de nous.

Dans la conception épistémique, au contraire, la preuve est un *critère* de la correction de la proposition. Elle nous assure de la vérité de ce qu'elle prouve comme un papier de tournesol nous assure de l'alcalinité de la solution dans laquelle on l'a plongé. Elle ne dit pas la raison du vrai : elle est ce à quoi nous reconnaissons qu'il est là.

Ce qui fonde la vérité d'une proposition est unique et bien défini. Les voies qui mènent à sa reconnaissance sont multiples et mal circonscrites. De toutes les preuves qui, pour nous, authentifient le théorème comme tel, il se peut qu'aucune ne soit celle qui en rend objectivement raison. C'est pourquoi le fondamentaliste estun *puriste*, qui peut ne se satisfaire d'aucune des démonstrations qui le convainquent pourtant de la correction de la chose démontrée.

Bolzano est le meilleur exemple de ce scrupule, et c'est lui qui est à l'origine lointaine de la distinction. A propos du théorème des valeurs intermédiaires, dont un cas particulier important énonce qu'une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) < 0$ s'annule pour au moins une valeur de l'argument comprise entre a et b, il écrit qu'il s'agit assurément d'une proposition qui est connue « avec une certitude indubitable » [Bolzano 1817, 235], mais que les ressorts de cette conviction n'ont pas leur place en analyse, car ils ne sauraient tenir lieu d'une *preuve*, seule capable d'établir ce sur quoi le théorème repose :

> Le genre de preuve le plus répandu dépend d'une vérité empruntée à la géométrie, à savoir que chaque courbe continue de courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives, puis négatives (ou inversement) doit nécessairement couper l'axe des x quelque part en un point qui est entre ces deux ordonnées. Il n'y a absolument rien à objecter contre la justesse, ni à vrai dire contre l'évidence de cette proposition géométrique. Cependant, (...) si l'on considère que les preuves scientifiques ne doivent pas être seulement des facteurs de certitude (*Gewissmachungen*), mais des fondements (*Begründungen*), c'est-à-dire des présentations de la raison objective de la vérité examinée, alors il est évident que la preuve scientifique stricte - ou la raison objective - d'une vérité qui vaut également pour toutes les quantités, qu'elles soient ou non spatiales, ne peut pas résider dans une vérité qui ne vaut que pour les quantités spatiales. à cet égard, il peut sembler, au contraire, qu'une telle preuve géométrique est, dans la plupart des cas, réellement circulaire. Car si la vérité géométrique à laquelle nous nous référons est (comme nous l'avons déjà dit), extrêmement évidente, et donc qu'elle n'a pas besoin de preuve au sens d'un facteur de certitude, elle est néanmoins en attente d'un fondement [Bolzano 1817, 228].

En réfléchissant à ce qui est advenu en logique et en mathématiques depuis l'époque où Bolzano écrivait ces lignes, on ne peut manquer d'éprouver quelque perplexité. Les mathématiques « modernes » ont suivi sans faillir la voie de la rigueur sur laquelle Bolzano s'était engagé, mais nous ne nous exprimerions plus aujourd'hui dans les mêmes termes que lui. Le processus de « rigorisation » des mathématiques s'est inflexiblement poursuivi jusqu'à nos jours ; pourtant, il n'a pas conduit, en *philosophie*, à un triomphe pur et simple de la conception fondationnelle défendue par Bolzano

L'explication de ce paradoxe n'est pas chose aisée, et représente à elle seule une entreprise qui dépasse largement les limites de cette étude.

Sans doute pourrait-on invoquer un processus inévitable — et, comme tel, sans grand intérêt - de trivialisation, au terme duquel le fondamentalisme a cessé d'être perçu comme une position réellement *distinctive* en philosophie. Cet état de choses est un effet presque mécanique du succès général des idées défendues par Bolzano en mathématiques : le genre de démonstration contre lequel la distinction entre certificats et fondements avait été élevée à l'origine ayant à peu près disparu de la « pratique » mathématique, le bolzanisme s'est trouvé tout naturellement depossédé d'une grande part de la « légitimité militante » qui était la sienne avant Weierstrass.

Mais c'est aussi, et plus profondément, que la distinction entre certificats et fondements s'est progressivement effondrée, donnant lieu pour finir à une forme de constructivisme qui se déclare tout à fait incapable de voir comment l'enquête mathématique pourrait être mûe par d'autres ressorts que ceux de la conviction personnelle, et guidée par autre chose qu'une expérience *particulière* de son objet. Dans ce qui suit, je me limiterai à examiner deux arguments successifs dans la chaîne de ceux qui peuvent conduire à un tel constructivisme.

Le premier argument, constamment et tumultueusement discuté par Frege, concerne le point de savoir si nous ne devrions pas admettre, en mathématiques, que les motifs de la conviction rationnelle « la plus générale » entretiennent avec le fondement objectif de la chose dont on se convainc une relation étroite, intime, très voisine à certains égards de la simple identité.

Le second, très nettement anti-frégéen quant à lui, essaie de faire pièce à l'idée même de généralité « maximale », totalement exempte de particularité, au motif qu'elle est, en mathématiques, paradoxalement hors d'atteinte.

Accéder aux mathématiques

Altière et intransigeante, la philosophie bolzanienne est essentiellement soucieuse de reléguer hors des mathématiques les ressorts de la conviction personnelle : les preuves n'ont pas à certifier ce qu'elles prouvent, mais à le fonder.

Il y a, de cet austère principe, bien des interprétations erronées. En voici deux.

Selon la première, absurdement radicale, la preuve authentique, la preuve comme « fondement », ne serait pas *avec cela* un certificat. La connaissance de l'enchaînement objectif des théorèmes mathématiques *tiendrait lieu* de la reconnaissance de leur vérité et, pour reprendre la distinction que Bolzano [1837, 334] emprunte à Aristote, la recherche du $\delta\iota o\tau\iota$, du « pourquoi », *remplacerait* en mathématiques la recherche du $o\tau\iota$, du point de savoir « si » la chose a lieu.

Tel n'est pas le cas. Rien n'*exclut*, bien évidemment, que la connaissance du fondement d'une proposition ne soit l'occasion d'en appréhender la vérité. Mais Bolzano insiste sur le fait que ce dernier bénéfice doit demeurer, si l'on ose dire, essentiellement secondaire. La certification de la proposition prouvée est un objectif psychologique qui peut être atteint par la preuve, mais dont la preuve ne doit pas dépendre, et qui ne peut d'ailleurs être atteint par elle comme il doit l'être que si la preuve n'en dépend pas, et pour tout dire ne le vise pas :

> Le désir de contempler les fondements ultimes de ses jugements (...) vise en outre (...) l'occasion d'un *exercice* à la pensée correcte et ordonnée, lequel doit alors *indirectement* contribuer à accroître la *certitude* et la force de *toutes* nos convictions [Bolzano 1810, 192].

La distinction entre fondements et certificats prête encore à un autre malentendu encore, de type inverse du précédent : l'indication du fondement serait, si l'on peut dire, le plus efficace de tous les certificats, celui, parmi tous les autres, doté du coefficient le plus fort en matière de certitude installée. Ayant vu le graphe d'une fonction impaire croiser l'axe des x, ou, mieux, l'ayant soi-même tracé et « éprouvé » ainsi, un léger doute subsisterait encore sur l'existence d'un argument pour lequel la fonction s'annule, doute résiduel qui s'évanouirait en prenant connaissance de la preuve « analytique » du théorème des valeurs intermédiaires. Ce contresens, plus insidieux et donc plus instructif, postule une sorte de « centralité » de la preuve parmi les foncteurs de certitude.

Cette centralité n'est pas avérée. Les choses dont nous sommes le plus certains sont celles que nous avons des raisons *particulières* de croire. Ce qu'explique Bolzano, c'est que les preuves, n'étant justement pas des raisons « particulières », ne sont pas appropriées pour acquérir la certitude, et qu'inversement, le désir d'être *fixé* est en mathématiques la posture la plus pernicieuse que l'on puisse imaginer :

> Une chose me paraît tout à fait certaine : dans le royaume de la vérité, c'est-à-dire dans la somme totale de tous les jugements vrais, prévaut une certaine *connexion objective* qui est indépendante de sa *reconnaissance* accidentelle et *subjective* par nous-mêmes. Une conséquence de ceci, c'est que certains de ces jugements sont le fondement d'autres jugements, et que les derniers sont les conséquences des premiers. Se représenter cette connexion objective des jugements, c'est-à-dire choisir un ensemble de jugements et les arranger l'un à la suite de l'autre de telle sorte qu'une conséquence soit

> représentée comme telle, voilà ce qui me semble être l'*objectif* approprié qui doit être poursuivi dans un exposé scientifique. Au lieu de cela, on a coutume de s'imaginer que l'objectif d'un exposé scientifique réside dans la plus grande *certitude* et la plus grande *force de conviction* possibles. C'est un procédé qui, lorsque nous avons affaire à l'objectif pratique de certitude, est parfaitement correct et appréciable ; mais il ne peut pas valoir pour un exposé scientifique, parce qu'il en contredit l'objectif essentiel. Je crois néanmoins qu'Euclide et ses prédécesseurs étaient d'accord avec moi ; et ils ne considéraient pas le pur et simple *accroissement de certitude* comme une partie de leur méthode. La chose est assez claire, lorsque l'on considère la peine que ces gens se sont donnée pour équiper mainte proposition (en elle-même parfaitement certaine) d'une preuve stricte, bien qu'elle n'en devînt du tout plus certaine pour autant [Bolzano 1810, 191-192].

Résumons. La preuve, conçue comme indication du fondement objectif d'une proposition, en est un certificat parmi d'autres. Mais elle vient souvent après que la proposition a été certifiée d'une autre manière, et n'ajoute alors aucun supplément à la force de notre conviction qu'elle est vraie. Ce n'est généralement pas par la preuve que nous acquérons nos convictions mathématiques. Si d'aventure nous cherchons malgré tout à accroître encore par une preuve la certitude que nous avons d'une proposition, nous avons toute chance de manquer cette preuve, et d'en rédiger une qui ne reflète pas sa connexion objective aux autres propositions. Car il est à peu près inévitable que nous prenions alors erronément, au titre de fondement objectif de la proposition prouvée, une proposition ayant trait à la manière particulière et « accidentelle » dont nous en sommes initialement venus à reconnaître sa vérité. Au lieu d'aller droit à ce qui la fonde, nous ferons donc le « détour » par ce qui a commencé à nous convaincre qu'elle était correcte, travers commun qui est illustré par la preuve impure, « géométrique », du théorème des valeurs intermédiaires.

La preuve authentique et sans détour est donc un certificat, et sa différence spécifique n'est pas, loin s'en faut, l'efficacité comme facteur de certitude. Quelle est cette différence ?

Dans l'ordre de la connexion objective des vérités, le fondement est tout, et les autres certificats ne sont rien. Dans l'ordre subjectif de la reconnaissance du vrai, la connaissance du fondement objectif est peu de chose, et les seuls certificats efficaces sont ceux qui sont accidentels. Ne nous convainquent, la plupart du temps, que les expériences particulières que nous avons eues, et que nous aurions pu ne pas avoir. La conclusion s'impose d'elle-même : la connaissance du fondement est, de tous les certificats, celui qui nous resterait si les seules expériences que nous avions étaient celles que nous ne pouvons pas ne pas avoir.

Une autre manière de formuler la thèse de Bolzano est de dire ceci :

(i) Pour reconnaître la vérité d'une proposition mathématique comme on doit le faire, c'est-à-dire au moyen d'une preuve, il suffit des capacités cognitives les plus « générales » dont nous soyons dotés, les connaissances « accidentelles » que nous aurions éventuellement acquises par l'exercice de ces facultés à l'occasion de telle ou telle expérience « facultative » n'étant aucunement requises pour cette tâche

(ii) Compte tenu, de plus, du fait que l'usage de ces connaissances « accidentelles » est susceptible de nous détourner, par le mécanisme analysé plus haut, de la connaissance de la connexion objective des propositions, il convient, pour reconnaître la vérité d'une proposition mathématique de la manière requise, de s'abstenir volontairement d'utiliser ces connaissances accidentelles lorsque nous en possédons.

En somme, les preuves mathématiques sont les seuls certificats à la portée d'une créature qui n'aurait aucune raison *particulière* de reconnaître quoi que ce soit comme vrai, et qui ne serait donc dotée que de la capacité générale, inexercée, à avoir de telles raisons. De plus, ces certificats sont à notre propre portée, à la condition que nous suivions la *discipline* qui consiste à négliger tout ce qui, dans notre propre condition cognitive, nous sépare d'une créature de ce genre. En effet, sitôt que nous nous affranchissons de cette discipline, et que nous tenons compte pour évaluer une proposition mathématique de ce que l'exercice effectif plus ou moins erratique de nos capacités recognitionnelles a pu déjà nous enseigner, alors nous commettons, selon les termes de Bolzano, une « offense intolérable contre la méthode mathématique correcte » : notre tendance incoercible à préférer des certificats plus immédiatement convaincants nous les fait prendre pour le fondement de la proposition examinée, et nous introduisons ainsi dans sa preuve des concepts impurs, relatifs non pas à ce qu'il est question d'évaluer mais à ce dont nous avons fait plus ou moins accidentellement l'expérience effective par ailleurs.

Telle est la conséquence la plus profonde et la plus étrange du fondamentalisme. Le fameux « problème de l'accès » se pose bien à nous, mais en des termes tout à fait inverses de ceux dans lesquels nous aurions spontanément tendance à le poser — et, il faut bien dire, également de ceux dans lesquels la philosophie contemporaine des mathématiques a souvent tendance à se le représenter. La difficulté n'est pas que nous *manquerions*, en raison par exemple de notre nature corporelle et biologique, en bref de notre « incarnation », des facultés plus subtiles dont serait doté un être mieux équipé, capable pour sa part d'entrer en contact direct avec les objets mathématiques comme nous le faisons régulièrement nous-mêmes avec les objets matériels. Elle réside, tout au contraire, dans le fait que notre propre condition cognitive est déjà beaucoup trop riche, et que les expériences particulières auxquelles donne lieu son exercice ne sont que trop variées. Le salut n'est pas à chercher dans la voie fantasmatique d'un *enrichissement* de nos possibilités d'accointance personnelle ou d' « intuition » directe, mais, à l'inverse, dans la discipline d'un *renoncement* aux convictions particulières que nous avons pu, ça et là, acquérir par leur usage. Serions-nous soudainement dotés de la faculté de « percevoir » les objets mathématiques *comme* nous percevons les objets usuels que notre cas n'en serait, à cet égard, qu'aggravé : nous n'aurions là qu'un obstacle de plus, parmi ceux que toute connaissance *particulière* constitue lorsqu'il est question d'appréhender la connexion objective des vérités mathématiques.

Le fondamentalisme cherche à expliquer non pas comment l' « accès » aux mathématiques est possible, mais ce qu'il doit être pour être uniforme, c'est-à-dire pour que les corpus des propositions mathématiques reconnues comme vraies par chacun soient identiques. Certaines manières d'expliquer la possibilité rendent l'uniformité inexplicable. Toute explication qui suppose chez les accédants l'existence d'une expérience *particulière* tombe dans ce travers. Une expérience particulière est non seulement une expérience que je pourrais ne pas avoir, mais une expérience que je pourrais avoir sans que tu l'aies. Si les preuves mathématiques étaient des certificats particuliers, alors nous pourrions diverger. La remarque, qui vaut pour les expériences « ordinaires », perceptuelles, s'étend aux expériences « extra-ordinaires », comme l'intuition de type gödelien : rien de particulier ne peut expliquer la convergence, à moins de recourir à la chance dans l'explication.

La restriction aux seuls certificats fondamentaux explique la possibilité de l'accès aux mathématiques d'une façon qui en rend donc l'uniformité nécessaire. Cette uniformité repose sur la *minimalité* des ressources cognitives dont l'emploi est à la fois requis et légitime : à l'inverse des connaissances et des raisons particulières à tel ou tel, ces ressources-là sont nécessairement présentes en chacun de nous. Si tous s'astreignent à la discipline de ne pas en invoquer d'autres, les propositions reconnues comme vraies seront donc identiques pour tous. Les vérités mathématiques sont universelles parce que chacun possède en lui le moyen d'y accéder, que ces moyens sont les moins particuliers du monde, que ceux-là seuls sont d'emploi licite, et que la discipline consistant à s'y tenir n'est pas plus difficile que celle qui est requise par ce que Bolzano [1810, 192] appelle l'esprit « strictement philosophique ».

L'universalité des mathématiques dépend de façon cruciale de la « minimalité » - de la « logicité » - des raisons qui distinguent, parmi les autres, les certificats fondamentaux. A vrai dire, elle en dépend de façon tellement décisive qu'une autre précision est requise. Les preuves sont les certificats qui ne sont pas « accidentels ». Mais quel sens donner à ce terme ? Suffit-il d'exclure les raisons qui me sont particulières, en tant qu'elles diffèrent peut-être des tiennes, toi qui a vécu des expériences différentes ? Peut-on se contenter de récuser toutes les raisons qui ne tiennent pas aux propriétés les plus générales de ce dont nous *pouvons* faire, toi et moi, l'expérience ? Bolzano, et c'est *le* point sur lequel il est en total désaccord avec Kant, pense que c'est insuffisant.

Ce sont *toutes* les raisons particulières qui doivent se trouver dépossédées de leur prétention à figurer dans une preuve, ce qui inclut donc non seulement mes raisons particulières mais, aussi bien, celles de l'espèce humaine tout entière. La démonstration d'une proposition mathématique ne saurait en appeler, plus ou moins implicitement, au fait que sa vérité est, *pour nous*, une condition de toute expérience possible, et qu'elle resterait donc intacte dans tout monde dont nous pourrions avoir l'expérience. Ce fait allégué ne peut jouer ce rôle. S'il ne le peut pas, ce pas parce qu'il n'est pas bien établi, mais parce que, même s'il l'était, il serait, justement, un *fait* particulier. Les seules raisons aptes à figurer dans la reconnaissance démonstrative de la correction d'une proposition mathématique sont des raisons à ce point générales qu'elles ne doivent faire partie que des ressources cognitives absolument minimales impliquées dans la reconnaissance comme vrai de quoi que ce soit par quelque créature que ce soit : elles doivent, en bref, appartenir aux lois de la pensée elle-même en général.

C'est précisément le programme entrepris par Frege dans la *Begriffschrift* :

> J'ai dû tout d'abord rechercher jusqu'où l'on pouvait aller en arithmétique en se restreignant aux seules inférences qui ne sont fondées que sur les lois de la pensée, lesquelles sont au-dessus de toutes les particularités (*Besonderheiten*) [Frege 1879, iv]

Les mathématiques et les « lois de la pensée »

De la connaissance mathématique, on peut se demander comment elle est possible, et ce qui garantit son uniformité. La première question, contemporaine pour l'essentiel, n'a pas toujours été au premier plan. C'est la seconde qui intéressait Bolzano et Frege : comme le note

P.T. Geach [1961, 137], en séparant la logique de la psychologie et de la théorie de la connaissance, ce dernier entendait simplement *commencer* par examiner la structure objective de ce qui est connu (les lois de l' « être-vrai »), et *différer* l'examen de la manière dont cette structure objective peut être appréhendée par l'esprit humain (les lois du « Tenir-pour-vrai ») :

> La première tâche, et la plus importante, est de représenter purement ce que sont les objets de l'investigation (...) Nous ne nous occuperons donc pas de savoir comment nous procédons effectivement pour penser ou pour acquérir une conviction ; ce n'est pas l'activité de tenir pour vrai qui est notre affaire, mais au contraire les lois de l'être vrai [Frege 1897, 154 et 157].

Les deux ordres de préoccupation (l'accessibilité, la convergence) sont donc distincts. Qui plus est, ils invitent à deux conceptions antithétiques de la reconnaissance des vérités mathématiques. Si l'important est que cette reconnaissance soit possible, beaucoup de procédés seront tenus pour licites. Si l'essentiel est qu'elle soit uniforme, peu d'entre eux seront acceptés. Le fondamentalisme, qui n'en retient qu'un seul, est la forme suprême d'une philosophie qui ne se préoccupe pas de l'accès aux mathématiques, ou plutôt qui n'en traite que sous l'angle de la *convergence.* Est-ce au prix d'une théorie plausible de l'accessibilité elle-même ?

En apparence, il n'en est rien. Certes, le fondamentalisme récuse la majorité des preuves qui certifient une proposition mathématique et qui permettent, dans les termes de Frege, d'acquérir la conviction de sa justesse. Mais le genre de preuve qu'il retient (le « fondement », donc, de la proposition prouvée) est précisément celui de tous les certificats qui ne requiert, pour être obtenu, aucune expérience particulière. Une créature capable de produire un certificat quelconque est donc, présumablement, capable *a fortiori* de produire celui-ci, qui ne requiert aucune des expériences qu'elle pourrait ne pas avoir. La situation qui en résulte n'est donc pas du tout celle à laquelle on aurait affaire si le fondamentalisme sélectionnait, au titre de l'unique certificat licite, une attestation qui exigeait, pour être obtenue, une accointance particulière avec les objets auxquels la proposition réfère. En ce sens, le fondamentalisme de Bolzano et Frege est aux antipodes du « platonisme » qu'on leur attribue ordinairement [1] : il ne suppose ni ne requiert, de la part de ceux qui ont à reconnaître les vérités mathématiques, aucune faculté intellectuelle permettant de percevoir ou d'intuitionner des objets mathématiques par-

[1] Au reste J. Sébestik, dans son livre monumental sur Bolzano, se garde lui-même, à ma connaissance, d'employer ce terme fourvoyant.

ticuliers à la manière dont nous percevons les objets physiques. Les difficultés bien connues relatives à la question de l'accessibilité aux *objets* mathématiques ne se posent donc pas, en tout cas dans leur formulation traditionnelle. En revanche, nous allons voir qu'il s'en pose d'autres.

Accessibilité, convergence et dépendance

Pour le fondamentalisme, les vérités mathématiques coïncident avec celles qui ne peuvent être authentiquement reconnues que par une discipline mentale consistant à s'en tenir aux raisons les plus absolument générales, à l'exclusion de tout autre mode de justification. De cette coextensivité, on peut donner deux interprétations antithétiques [2].

Selon la première interprétation, il *découle* de l'essence des vérités mathématiques qu'elles ne peuvent être correctement reconnues que de cette façon. Les vérités mathématiques sont ce qu'elles sont, la restriction aux certificats fondamentaux est ce qu'elle est, mais il se trouve, par bonheur, que nous pouvons reconnaître ces vérités en procédant de cette manière (l'emploi de ces seuls certificats nous procure une capacité de *discernement* que l'usage de critères plus larges ne nous permettrait pas d'avoir).

Selon la seconde interprétation, au contraire, les vérités mathématiques *sont*, précisément et par nature, ces vérités capables d'être reconnues en ne se référant à aucune expérience particulière (le fait de ne devoir employer, pour les reconnaître, que les critères les plus généraux dont puisse disposer un être capable de reconnaître quoi que ce soit pour vrai est, dans ce cas de figure, *constitutif* du fait que ces vérités sont mathématiques).

Peut-être pourrait-on invoquer, en faveur de l'interprétation « constitutive », le passage de la *Wissenschaftslehre* [1837, 334] dans lequel Bolzano fait l'éloge de la fameuse définition de la raison par Leibniz :

> La *raison* est la vérité connue dont la liaison avec une autre moins connue fait donner notre assentiment à la première. Mais particulièrement et par excellence on l'appelle raison, si c'est la cause non seulement de notre jugement, mais encore de la vérité même, ce qu'on appelle aussi *raison a priori.* [Leibniz 1765, IV, xvii, § 3]

---

[2] Cr. Wright [1992, 108 sq) qualifie d' « euthyphronienne » l'alternative entre deux interprétations de ce genre, en référence au fameux dialogue dans lequel Socrate et Euthyphron discutent de deux interprétations comparables de la phrase « Les Dieux aiment les actes pieux ».

Mais l'ambiguïté persiste, entre la lecture selon laquelle la justification la meilleure (« par excellence ») d'une proposition consiste à *indiquer* la cause de sa vérité, et la lecture qui *identifie* purement et simplement cette justification-là à la cause de la vérité de la proposition. La première interprétation signale une classe de raisons (jugées seules appropriées en mathématiques) : celles qui consistent à *invoquer* la « cause » (en un sens évidemment fondationnel et non pas physique) de la vérité connue. La seconde interprétation signale une classe de vérités, à savoir celles qui *résultent* précisément de certaines des raisons que nous pouvons avoir d'y assentir.

En fait, il est surabondamment clair que les fondamentalistes récusent toute interprétation « constitutive » de la coextensivité entre les vérités mathématiques et les vérités reconnaissables comme telles à l'aide des critères les plus généraux [3] (j'appellerai désormais cela la *coextensivité* tout court). Leur thèse maîtresse est celle de l'indépendance et de l'antécédence des vérités mathématiques par rapport à leur reconnaissance comme vérités. Pourquoi cette thèse ?

L'argument invariablement et obstinément mis en avant est celui de la divergence : si les propositions mathématiques dépendaient, pour leur vérité, de leur reconnaissance comme telles, elles ne pourraient plus être qualifiées d'absolument vraies ou fausses, et il n'y aurait plus de distinction entre assertions correctes et incorrectes. Selon la comparaison favorite de Frege, il en irait, dans ce cas, des jugements mathématiques comme des jugements esthétiques. Les propriétés esthétiques sont, par excellence, ces propriétés dont les choses sont dotées exactement lorsque nous ressentons qu'elles en sont dotées, et pour cette raison même. Or, cette *dépendance* des propriétés esthétiques à l'égard de leur reconnaissance a pour conséquence naturelle la *divergence* des jugements esthétiques légitimes, divergence dont Frege entend bien, par contraste, exclure la possibilité en mathématiques :

> C'est ici qu'émerge la différence essentielle : le vrai est indépendant de notre reconnaissance du vrai, alors que le beau n'est tel que pour celui qui l'éprouve comme tel. Ce qui est beau pour l'un ne l'est pas nécessairement pour l'autre. Du goût, il n'y a pas à disputer. Dans le domaine du vrai, l'erreur est possible, mais il n'en va pas de même dans le domaine du beau. Du simple fait que je considère une chose comme belle, il découle qu'elle est belle pour moi. Mais le fait que je considère quelque chose comme vrai ne contraint pas cette chose à être vraie [Frege, 1897, 141].

[3] Sébestik [1992, 259] n'évoque d'ailleurs même pas la possibilité d'une lecture « constitutive » du texte que nous venons de citer.

Pour soustraire les mathématiques à l'idiosyncrasie des motifs personnels, il faut que les propositions mathématiques soient rendues vraies ou fausses par une source qui nous soit externe. En bref, la convergence requiert, selon Frege, l'indépendance. Peut-on l'obtenir à moindres frais ?

L'indépendance, on l'a vu, ne garantit pas toujours la convergence. Il y a des versions de l'indépendance et de l'antécédence des vérités mathématiques par rapport à leur reconnaissance comme telles qui, non seulement n'assurent pas l'unicité des systèmes de propositions mathématiques reconnues comme vraies par chacun, mais encore qui entraînent presque inévitablement, au contraire, leur disparité : ce sont toutes les versions qui expliquent cette indépendance par l'existence d'objets mathématiques *particuliers* qu'il nous incomberait d'appréhender pour statuer sur les propositions qui s'y rapportent. A cet égard, le rapprochement entre l'indépendance des vérités mathématiques et celle des vérités empiriques est insidieux, puisqu'il suggère que la reconnaissance des premières devrait se fonder non sur une démonstration, mais sur une sorte d'analogue non sensible de la perception des objets physiques. *A contrario*, une version décente de l'indépendance des vérités mathématiques devrait impliquer que leur reconnaissance ne puisse être obtenue *que* par le biais d'une preuve.

En fondant cette indépendance sur l'existence d'*objets* auto-subsistants desquels les propositions mathématiques seraient vraies ou fausses, on s'expose à réintroduire l'idée parasite selon laquelle les preuves ne constitueraient que des sortes d'*ersätze*, à nous seulement destinés, tenant lieu d'expériences particulières plus directes que des créatures mieux ou autrement équipées que nous seraient, pour leur part, capables de mener à bien. Interprétée comme un simple reflet de l'existence d'objets spécifiques dotés de propriétés particulières, l'indépendance des vérités mathématiques conduit à peu près immanquablement à admettre la possibilité, au moins hypothétique, d'un accès *privilégié*, non démonstratif, à ces objets. L'indépendance ainsi conçue contredit directement ce qu'elle était censée expliquer, à savoir l'uniformité de l'accès aux vérités mathématiques, et l'absolue généralité des ressources qu'il requiert. Si des objets doivent jouer un rôle dans l'explication de l'indépendance des vérités mathématiques, ils ne doivent donc pas être conçus comme les éléments d'un domaine de réalité particulier, mais comme des objets eux-mêmes absolument généraux : aucune autre interprétation n'est capable d'exclure la divergence. Celle-là même en est-elle capable ? L'indépendance, qui est supposée expliquer la convergence dans la reconnaissance des vérités mathématiques, est-elle seulement compatible avec elle ? Pourquoi la racine de la convergence ne devrait-elle pas être cherchée, au contraire, dans un certain mode de *dépendance* des vérités mathématiques par rapport à nos capacités de recognition ?

Frege fait lui-même remarquer que la dépendance d'une propriété à l'égard de son attributeur n'entraîne pas nécessairement la disparité des attributions. Il est frappant de constater que les propriétés les plus dépendantes sont, paradoxalement, l'occasion de phénomènes d'*agglutination* tout à fait caractéristiques. Qu'elles soient l'expression profonde des invariants culturels d'une communauté, ou qu'elles se trouvent, une fois déclarées publiquement par quelques-uns, relayées et propagées chez tous par un mécanisme d'accrétion mimétique, les préférences les moins « objectives » donnent lieu à de remarquables concours :

> Il y a des jugements de cette sorte [esthétique] qui semblent prétendre à l'objectivité. Mais, que nous en soyons conscients ou non, l'hypothèse d'un individu normal est toujours sous-jacente ici, et chacun croit instinctivement être si près de cet individu normal qu'il peut parler en son nom. « Cette rose est belle » doit donc signifier : pour un individu normal, cette rose est belle. Mais qu'est-ce qui est normal ? Cela dépend tout à fait de la collectivité humaine considérée. Si, dans une vallée reculée, tous les hommes ont des goîtres, alors le fait d'avoir un goître sera là considéré comme normal, et ceux qui sont dénués de cet ornement seront considérés comme laids. [Frege 1897, 143].

Oubliant la restriction à telle ou telle collectivité humaine, et considérant que la convergence dont il est question doit être beaucoup plus générale pour être seulement *candidate* à une explication des mathématiques, qu'est-ce qui nous empêche de conférer aux théorèmes mathématiques un statut voisin de ces préférences unanimes ?

On peut certainement écarter, comme non pertinents, les mécanismes échoïques du renforcement mutuel, en stipulant que l'accord sur les mathématiques doit pouvoir être obtenu d'une autre manière, et que l'adhésion de l'un ne doit pas intervenir parmi les raisons ultimes de la conviction de l'autre. Demeure alors la possibilité d'expliquer l'identité des convictions mathématiques par des caractéristiques communes « objectives » de l'espèce humaine, un peu comme la propension à la bipédie des adultes ou l'incapacité à résister à l'immersion prolongée s'expliquent par la conformation biologique du corps humain. Pourquoi ne pourrait-on dire, s'interroge par exemple Frege [1897, 159], qu'il est normal de juger conformément aux lois logiques exactement comme il est normal de marcher en position verticale ?

Ce qui s'oppose à cela est une manière de distinction entre les raisons et les causes. Supposons, par exemple, que nous soyons empêchés d'ajouter foi à la proposition que $7+5 = 13$ par une impossibilité comparable à celle qui nous interdit de maintenir durablement la main sur un corps brûlant. Encore faudrait-il que cette impossibilité soit clairement reconnue comme telle, que ses causes en soient analysées, et que leur reconnaissance en vienne relayer la pure et simple incapacité psychique où nous serions d'assentir à la proposition. Mais nous reconnaîtrions alors que ces causes sont autant de *particularités* de notre constitution cognitive, laquelle pourrait elle-même se trouver différemment agencée : aucun moyen de convertir par ce biais en justification générale de l'énoncé la contrainte contingente à laquelle nous sommes soumis, puisqu'une variation diachronique de notre constitution ne peut jamais être exclue : Comme l'écrit Frege :

> Dans la conception psychologique de la logique, disparaît la différence entre les raisons qui justifient une conviction, et les causes qui l'ont effectivement produite. Une justification au sens strict est donc impossible ; ce que nous avons à sa place, c'est le récit de la manière dont la conviction a été installée (...).
>
> Dans ces conditions, nous devrions parler non plus de lois logiques, mais seulement de règles logiques qui indiquent ce qui doit être considéré comme normal dans une période donnée. Nous ne devrions pas exprimer une telle règle sous la forme « Chaque objet est identique à lui-même », puisqu'ici n'est pas mentionnée l'espèce d'individus aux jugements desquels la règle est censée s'appliquer, mais plutôt sous la forme « Pour les humains — à l'exception peut-être de certains peuples primitifs chez lesquels la question n'a pas encore été examinée —, il est actuellement normal de juger que chaque objet est identique à lui-même ». Mais, sitôt qu'on a des lois, mêmes des lois psychologiques, ces lois doivent être, comme on l'a vu, toujours — ou plutôt, intemporellement — vraies, si elles doivent être simplement vraies. Si nous avions observé qu'à partir d'un instant déterminé, une loi cessait de valoir, alors nous devrions dire qu'elle est purement et simplement fausse. Ce que nous pourrions faire, néanmoins, serait de chercher à définir une condition à ajouter à la loi. Supposons que l'activité humaine de jugement s'exerce pendant un certain temps conformément à la loi selon laquelle chaque objet est identique à lui-même, mais qu'il cesse, par la suite, d'en aller ainsi. Alors il se pourrait, par exemple, que la cause en soit l'altération de la teneur de phosphore du cortex cérébral, et nous devrions dire quelque chose comme : « Si la teneur de phosphore est en tout point du cortex cérébral humain inférieure à 4%, alors son activité de jugement est toujours en accord avec la loi selon laquelle chaque objet est identique à lui-même. »
>
> On peut au moins concevoir des lois psychologiques qui se réfèreraient de cette façon à la composition chimique ou aux propriétés anatomiques du cerveau. En revanche, il serait absurde qu'il en aille de même avec les lois

> logiques ; car il ne s'agit pas, avec elles, de ce que tel ou tel individu tient pour vrai, mais de ce qui est vrai. Qu'un homme tienne pour vraie ou fausse la Pensée que $2.2 = 4$, cela peut dépendre de la composition chimique de son cerveau, mais que cette Pensée soit vraie, voilà qui ne peut pas dépendre des propriétés du cerveau. [Frege 1897, 159-160].

A vrai dire, ce que l'argument de Frege établit n'est pas que les raisons les plus absolument générales pour affirmer une proposition mathématique ne sauraient constituer ce qui la *rend* vraie, mais que les « raisons générales » que le psychologiste invoque à ce propos ne sont justement jamais assez générales pour être simplement candidates au rôle qu'on voudrait leur voir jouer : les prétendues « impossibilités psychiques » de penser autrement se résolvent toutes en données psycho-physiologiques factuelles, dont la caractéristique saillante est évidemment qu'elles pourraient se trouver définies autrement qu'elles ne le sont en fait. Si certaines raisons peuvent être véritablement « constitutives », elles ne peuvent, en tout cas, constituer en *faits particuliers* comme la teneur du cerveau humain en phosphore.

Pour qu'une preuve puisse être considérée comme constitutive de la vérité de ce qu'elle prouve, il faudrait que la moindre trace de particularité ait été extirpée des arguments qu'elle contient. A cet égard, la restriction aux modes spécifiquement *humains* de la reconnaissance du vrai est encore de trop. Quelle que soit l'apparente coercition qu'il représente *pour nous*, le fait qu'une proposition soit vraie dans la totalité des situations dont nous pourrions faire l'expérience n'est, après tout, qu'un *fait* relatif à l'idiosyncrasie de notre propre constitution cognitive. En conférant une valeur d'apodicticité à des propositions qui ne possèdent qu'une nécessité « intuitionnelle » (*Anschauungsnotwendigkeit*), plus délimitée et circonscrite que la nécessité « conceptuelle » ou « de pensée » (*Denknotwendigkeit*), Kant fait dépendre les vérités mathématiques des formes particulières que notre sensibilité impose à toutes nos expériences possibles. Ces formes particulières, qui apparaissent certes au sujet lui-même comme revêtues de tous les attributs de l'inexorabilité — il lui est impossible de se représenter quoi que ce soit *autrement* —, n'en ont pas moins la contingence des faits bruts : la nécessité mathématique n'est qu'une nécessité *pour nous*, et non pas une nécessité *logique*.

Telle est, pour Bolzano et Frege, la conséquence implacable de toute idée de « subjectivité constituante » : en identifiant les vérités mathématiques aux contraintes formelles les plus générales exercées par l'esprit sur les phénomènes, on rend ces vérités aussi peu nécessaires que le sont ces contraintes elles-mêmes, et l'on admet comme légitimes, dans le processus de reconnaissance de ces vérités, l'intuition, certes « pure » mais néanmoins particulière, de la nature de ces contraintes. Entendant fonder les vérités mathématiques sur ce genre de semi-nécessités — absolument nécessaires pour le sujet lui-même, mais pas plus nécessaires, autrement considérées, que ne l'est la constitution du sujet, et donc en définitive contingentes —, la philosophie transcendantale tombe dans ce que Bolzano appelle l' « irrémédiable confusion » (*heillose Verwirrung* [4]) que le fondamentalisme entend justement dissiper.

Lorsqu'une proposition mathématique est établie à l'aide de certificats particuliers, qui font, par exemple, appel à l' « intuition pure » que le sujet possède des conditions *a priori* de ce qui représente pour lui une expérience possible, deux cas sont envisageables. Ou bien ces certificats particuliers sont inéliminables, au sens où la proposition considérée ne saurait du tout être « prouvée » d'une autre manière ; c'est alors que sa négation, bien qu'elle soit en un certain sens *irreprésentable* pour le sujet lui-même, constitue un énoncé qui ne contredit aucune loi logique, et que la proposition d'origine *ne* doit *pas* être réellement considérée comme une vérité mathématique. Ou bien, à l'inverse, il est possible de donner de la proposition une preuve *bona fide*, c'est-à-dire d'en indiquer le fondement ; et dans ce cas, c'est cette preuve qui doit être donnée, car elle est la seule capable d'authentifier le statut de la proposition qu'elle démontre.

Il est toutefois manifeste que les objections de Frege et de Bolzano ne discréditent l'idée de subjectivité constituante que pour autant qu'elle est expressive d'un point de vue *particulier*. La philosophie critique introduit une certaine forme de *chauvinisme anthropologique* qui fait de la constitution de l'esprit humain l'arbitre — et finalement la source - de la vérité mathématique : d'autres configurations cognitives sont logiquement envisageables, qui donneraient lieu à un ensemble de vérités différemment délinéé, et c'est la possibilité d'une divergence de cet ordre qui condamne, aux yeux de Frege, toute explication de type transcendantal. Néanmoins, l'objection est inapplicable à une théorie de la constitution des vérités mathématiques dans laquelle l'instance constituante serait radicalement expurgée de toute particularité.

Frege, du reste, s'exprime à plusieurs reprises en des termes qui montrent qu'une telle explication de la vérité *arithmétique* n'était pas, à ses yeux, tout à fait exclue. Opposant l'arithmétique à la géométrie, pour laquelle il retient *grosso modo* une explication de type kantien qui laisse une certaine place à l'intuition, il écrit par exemple :

La pensée conceptuelle peut toujours poser le contraire de l'un ou l'autre

[4] Cité par Sébestik [1992, 128].

> axiome géométrique sans pour autant s'empêtrer dans des contradictions avec elle-même, si elle raisonne à partir (...) d'hypothèses qui sont en conflit avec l'intuition. Cette possibilité montre que les axiomes géométriques sont indépendants les uns des autres et des lois logiquement fondamentales, et donc qu'ils sont synthétiques. Peut-on en dire autant des propositions fondamentales de la science des nombres ? Tout ne tournerait-il pas à la confusion, si l'on voulait nier l'une d'entre elles ? La pensée serait-elle encore possible ? Le fondement de l'arithmétique ne gît-il pas plus profond que celui de toute science expérimentale, plus profond même que celui de la géométrie ? Les vérités arithmétiques gouvernent le domaine du nombrable. C'est le plus vaste ; car ce n'est pas seulement le réel, ce n'est pas seulement l'intuitif, c'est tout le pensable, qui lui appartient. Ne faut-il donc pas que les lois des nombres soit avec celles de la pensée dans la relation la plus intime ? » [Frege 1884, § 14]

L'objection précédente à la théorie « constitutive » ne paraît pas être en mesure de s'appliquer aux vérités arithmétiques, puisque leur négation contredit les lois les plus absolument générales, et non pas tel ou tel contenu particulier : ces vérités, qu'on ne saurait nier sans que la pensée ne se trouve en désaccord avec elle-même, paraissent ne décrire aucun domaine de réalité qui serait indépendant de son appréhension par la pensée. A l'inverse de ce qui se produit lorsque des raisons *particulières* ont leur place — ce qui est le cas, aux yeux de Frege, en géométrie —, l'arithmétique est une partie des mathématiques dans laquelle le vrai pourrait dépendre de ce qui est reconnu comme tel sans pour autant qu'une quelconque divergence soit possible dans la définition du vrai. Puisque la dépendance n'entraîne la divergence que là où des raisons particulières sont inéliminablement actives, l'arithmétique est un domaine dans lequel la thèse de la dépendance peut être soutenue sans aucune des conséquences délétères qu'elle entraîne ailleurs : si les raisons que nous avons de tenir un énoncé pour vrai sont absolument universelles, alors tombe l'objection cardinale qui s'opposait à ce que nous considérions ces raisons pour *constitutives* de la vérité de l'énoncé.

De fait, Frege s'exprime parfois comme s'il retenait, une fois éradiquée toute référence à une forme particulière de subjectivité, une variante de la thèse de dépendance :

> Ni la logique ni les mathématiques n'ont pour tâche d'étudier les âmes ou les contenus de conscience dont un homme individuel est le porteur. Peut-être pourrait-on plutôt leur assigner pour tâche l'étude de l'esprit : de l'esprit, non des esprits ! [Frege 1918-1919, 359]

L'essentiel étant d'éviter la référence à quoi que ce soit de particulier, il importe assez peu, finalement, de savoir si la particularité est extirpée des « objets » ou des « esprits ». Les « objets logiques » dont parle Frege (nombres, extensions de concepts, valeurs de vérité) ont pour rôle minimal d'assurer une distinction entre les assertions mathématiques correctes et celles qui ne le sont pas : les premières sont – et les secondes ne sont pas — conformes à la nature de ces objets. Mais on peut obtenir le même effet en disant que la correction d'une assertion mathématique *consiste* dans la propriété d'être ou de pouvoir être justifiée par les raisons les plus générales, c'est-à-dire par les lois de « la » pensée. La distinction entre les *certificats* particuliers — ceux qui sont de nature à convaincre tel ou tel esprit individuel — et le *fondement* d'une proposition — sa justification pour l'esprit en général – a donc cette importance-là : elle permet en principe d'assurer la convergence et la « bonne définition » des vérités mathématiques sans supposer l'existence indépendante d'un domaine d'objets spécifiquement mathématiques.

Dans ces conditions, le fait que Frege maintienne, par ailleurs, la thèse de l'indépendance des vérités mathématiques par rapport à la pensée, et qu'il explique cette indépendance par l'existence d'objets à la fois spécifiques et non particuliers, constitue une composante assez énigmatique de sa doctrine, et Dummett [1991, 301] est probablement fondé à parler de « tour de force » à propos de cette étrange combinaison du logicisme et du platonisme.

En effet, il est paradoxal de soutenir à la fois que les vérités arithmétiques, qui se rapportent à certains objets *sui generis*, sont indépendantes de la pensée en général, et que, d'autre part, les ressources exigibles pour appréhender les vérités arithmétiques sont celles qui sont également requises pour penser quoi que ce soit. En matière d'indépendance à l'égard de la pensée, la référence la plus familière est celle de la physique, où nous avons affaire à des objets qui ne sont pas des émanations de la pensée. La première thèse suggère donc que les ressources cognitives X mobilisées en mathématiques ont avec les objets qu'elles permettent de connaître le même rapport que celui que les ressources Y mobilisées en physique entretiennent avec les objets matériels. Mais la seconde thèse implique, quant à elle, que les ressources X sont déjà à l'œuvre dans toute entreprise de connaissance, et que ce qui est mis en œuvre dans les sciences de la nature n'est donc pas seulement Y, mais $X + Y$.

La source de la difficulté réside dans la notion même d'indépendance, dont Frege plaide qu'elle doit être conçue, en mathématiques, *autrement* que dans les sciences de la nature, car elle n'est pas nécessairement liée à la capacité à affecter notre appareil perceptif :

> Le botaniste veut dire quelque chose d'aussi factuel (*thatsächlich*) lorsqu'il énonce le nombre de pétales d'une fleur que lorsqu'il en indique la couleur.

> La première proposition dépend aussi peu que la seconde de notre libre-arbitre. Il y a donc là une certaine similitude du nombre et de la couleur ; toutefois elle ne réside pas dans le fait que les deux peuvent être sensoriellement perçus des choses extérieures, mais au contraire dans le fait que les deux sont objectifs.
>
> Je distingue l'objectif (*Objektiv*) du palpable, du spatial, de l'effectif (*wirklich*). (...) Par objectivité, j'entends une indépendance par rapport à nos sensations, nos intuitions et nos représentations, par rapport au surgissement d'image intérieures provenant du souvenir d'impressions précédentes, mais non pas une indépendance par rapport à la raison [1884, § 26].

Les objets mathématiques, quoiqu'indépendants, ne sont pas « effectifs », c'est-à-dire qu'ils sont totalement dénués d'efficacité causale :

> Si l'on nomme effectif ce qui tombe sous les sens, ou du moins ce qui a des effets dont peuvent s'ensuivre, de façon plus ou moins lointaine, des perceptions sensorielles, alors il n'y a aucun doute que [les] nombres ne sont pas effectifs. Mais nous n'avons non plus nul besoin de perceptions comme fondements de nos théorèmes. [1884, § 85]

A la différence de ce qui se passe dans le cas des objets matériels, l'indépendance des objets mathématiques n'a pas pour corollaire leur capacité à causer en nous quoi que ce soit qui nous renseigne sur eux. Il n'y a donc aucune symétrie entre la perception des objets matériels et la source d'où découle notre connaissance des objets mathématiques. Alors qu'en physique nous savons que A *parce que* A, en mathématiques la situation connue n'a aucune espèce d'influence causale sur la connaissance que nous en avons. Dans ce dernier cas, le parcours explicatif réside plutôt dans le fait que si nous tenions pour vraie la négation de A (en étant conduits à cette négation non par des arguments erratiques, mais par un enchaînement rigoureux de raisons « fondamentales »), alors nous serions incapables de reconnaître quoi que ce soit pour vrai. Autant dire que cette « explication » est moins destinée à éclairer la manière dont nous nous y prenons effectivement pour appréhender les vérités mathématiques – question sur laquelle, il faut bien le dire, Frege demeure extrêmement évasif —, que ce qui se produirait dans l'hypothèse où nous nous méprendrions sur elles. A cet égard, la situation est, à nouveau, tout à fait différente de celle à laquelle on a affaire dans les sciences de la nature, où la méprise sur une proposition particulière n'affecte aucunement la possibilité d'être dans le vrai à propos d'une autre proposition.

En mathématiques, mais pas en physique, la fausseté est donc absolument disséminante. Cette absence radicale de « robustesse » des mathématiques est une pure et simple conséquence de la préséance accordée aux preuves « fondamentales » sur les certificats particuliers. Alors qu'une proposition mathématique établie à l'aide d'arguments particuliers pourrait se révéler fausse sans qu'il soit nécessaire de remettre en cause quoi que ce soit d'autre que les arguments qui y ont conduit, un théorème établi comme il doit l'être, c'est-à-dire à l'aide des seules lois fondamentales, ne pourrait être pris en défaut sans que l'accord de la pensée avec elle-même ne soit détruit.

En résumé, le fondamentalisme « historique » - celui, donc, de Bolzano et Frege, qui résistent à la tentation de considérer les preuves « fondamentales » comme constitutives de la vérité de ce qu'elles prouvent – défend les trois thèses suivantes :

1) La vérité d'une proposition mathématique réside dans son accord avec la nature des objets d'une certaine sorte, et le fait que nous en possédions une preuve, loin d'être ce qui rend la proposition vraie, n'est qu'un témoin et un indice de cette vérité.

2) Les objets en question sont tels qu'il n'est ni possible ni requis d'y « accéder » autrement et plus directement qu'en prouvant les théorèmes qui s'y réfèrent.

3) L'ensemble des théorèmes démontrés à l'aide des seules lois fondamentales est unique et bien défini, et il ne saurait contenir aucune fausseté mathématique sans que ceci ne soit l'indice d'une incohérence de la pensée avec elle-même.

Les deux dernières thèses assurent à elles seules la convergence des mathématiques, c'est-à-dire l'unicité des propositions mathématiques reconnaissables comme vraies. La seconde semble également en assurer l'accessibilité, c'est-à-dire la possibilité pour tout sujet connaissant de se mettre dans la position où il pourrait reconnaître une proposition mathématique comme vraie. C'est ce dernier aspect qu'il faut maintenant examiner.

Ce qui nous est le plus propre

Le fondamentalisme disqualifie la plupart des preuves qui certifient une proposition mathématique, et soutient qu'une seule d'entre elles, la preuve « fondamentale », est apte à la justifier. Elaguant dans les moyens que nous utilisons pour reconnaître ce qui est vrai, c'est une doctrine qui vise prioritairement à assurer la convergence de ce qui peut être tenu pour vrai par chacun, au détriment, peut-être, de la capacité de tous à reconnaître quoi que ce soit pour vrai. Accessibilité et convergence sont des mots d'ordres oppposés. Le premier veut que l'on multiplie les certificats, le second veut qu'on les raréfie. Les fondamentalistes, essentiellement préoccupés par la convergence, soutiennent néanmoins que leur solution ne menace en rien l'accessibilité aux vérités mathématiques.

L'argument qu'ils utilisent est admirablement exprimé par Frege, qui interprète la coextensivité entre les vérités mathématiques et les vérités reconnaissables à l'aide des seules lois fondamentales en des termes qui suggèrent une *affinité* et une *parenté* entre les mathématiques [5] et la pensée elle-même, accréditant ainsi l'idée que les vérités mathématiques sont de part en part accessibles à la connaissance. Détournant la formule de Goethe selon laquelle « l'objet d'étude de l'humanité, c'est l'homme », Frege écrit par exemple :

> En arithmétique, nous ne nous occupons pas d'objets qui nous seraient connus comme quelque chose d'étranger, apporté de l'extérieur par la médiation des sens ; ces objets sont immédiatement donnés à la raison, qui peut les pénétrer intégralement (*völlig durchschauen*) comme ce qui lui est le plus propre [Frege 1884, § 105].

Selon Frege, ce qui est particulier (*die Besonderheit*) n'est jamais issu de la raison elle-même, mais lui est toujours présenté de l'extérieur par la médiation de la sensation. En mathématiques, où il ne doit être, si l'on écoute le fondamentaliste, jamais question d'aucun contenu particulier, la raison est donc auprès d'elle-même, et s'examine elle-même. En contradiction directe avec Kant, Frege estime donc qu'une connaissance est possible en l'absence même de tout matériau particulier livré par la sensation :

> Nous voyons comment la pensée pure, se détournant (*absehende*) de tout contenu donné par les sens ou même par une intuition empirique, est capable, en vertu du seul contenu qui émane de sa propre constitution (*welcher seiner eigenen Beschaffenheit entspringt*), de produire des jugements qui, à première vue, ne paraissent possibles que sur la base d'une intuition [1879, § 23].

Frege paraît faire sienne la thèse très répandue selon laquelle l'esprit jouit d'un accès privilégié à ses propres productions [6] : ce qui est indépendant de la raison lui est potentiellement opaque, mais rien de ce qui en émane ne saurait lui être caché. Kant ne disait pas autre chose, lorsqu'il opposait, sous cet angle, les mathématiques et la physique :

> [En mathématiques] chaque question qui s'élève doit pouvoir être absolument résolue par ce qu'on sait, car la réponse doit surgir des mêmes sources

[5] Encore une fois, il n'est ici question que de l'arithmétique, puisque Frege donne à la géométrie un tout autre statut.

[6] Sur cette thèse, qui est soutenue par des auteurs aussi différents que Brouwer et Gödel, on peut se reporter à l'étude de Michael Detlefsen [1998, 315 sq].

> que celles dont surgit la question ; il n'y est nullement permis de s'abriter derrière une ignorance inévitable, et l'on y est en droit d'exiger une solution. (...) [En physique, par contre,] il existe une infinité de conjectures à propos desquelles on ne peut jamais espérer de certitude, parce que les phénomènes naturels sont des objets qui nous sont donnés indépendamment de nos concepts, et dont par conséquent la clef n'est pas en nous et dans notre pensée pure, mais en-dehors de nous, en sorte que dans beaucoup de cas on peut fort bien ne pas la trouver, et par là devoir renoncer à toute solution certaine. [Kant 1781, A476/B504, A480-481/B508-509]

Mais Kant était, en un certain sens, beaucoup mieux fondé que Frege à écrire cela : les propositions mathématiques sont pour lui, en tant qu'elles décrivent les conditions les plus générales imposées aux phénomènes par notre propre constitution cognitive, une manière d'émanation de l'esprit humain, à laquelle peut s'appliquer, si on l'accepte, l'adage de l'omniscience du créateur à l'égard de ses créatures. On ne voit pas qu'une telle conclusion soit réellement à la portée de Frege, qui soutient pour sa part que les objets et les vérités mathématiques ne peuvent en rien être tenues pour des créations de l'esprit : en quoi les mathématiques, pour un platonicien de sa sorte, peuvent-elles voir leur accessibilité garantie comme si elles étaient « ce qui nous est de plus propre » ?

Selon Frege, une proposition comme « $7 + 5 = 12$ » est vraie parce qu'elle énonce que les objets respectivement désignés par « $7 + 5$ » et par « 12 » sont identiques, et que ces objets le sont effectivement. A cet égard, « $7 + 5 = 12$ » se comporte, sémantiquement, comme « La Seine coule à Paris », vraie en vertu de propriétés et de relations qui ne dépendent pas de nous. Pour autant, la justification de l'énoncé arithmétique diffère de celle de l'énoncé géographique en ce que la première repose sur des lois si fondamentales que nous ne saurions les enfreindre sans que tout ne « tourne à la confusion » [1884, § 14], alors que la seconde ne met en jeu que des « particularités » sans incidence sur la pensée elle-même : la différence entre les deux cas réside dans le fait qu'il n'y a rien, dans l'établissement de l'identité arithmétique, qui corresponde à l'appréhension perceptive qui est nécessaire pour reconnaître que l'affirmation géographique est fondée. En somme, la proposition arithmétique et la proposition géographique sont vraies pour des raisons similaires, qui tiennent aux relations entretenues par les objets auxquels réfèrent les termes désignatifs qu'elles contiennent. Mais l'élément qui permet d'en *reconnaître* la vérité n'est pas le même dans les deux cas : les objets mentionnés dans les propositions arithmétiques sont causalement inertes, et donc incapables de produire sur nous des effets tels que nous reconnaissions ces propositions pour vraies *parce qu*'elles le sont, lorsque tel est le cas.

Mais cette différence n'explique pas, bien au contraire, en quoi les vérités arithmétiques sont accessibles, et encore moins pourquoi elles le seraient plus aisément que les vérités de la géographie.

En soulignant que rien de « particulier » n'est requis par l'appréhension des vérités arithmétiques, Frege entend simplement signifier que nous ne devons pas expliquer cette appréhension d'une manière qui obligerait à postuler, de façon absurde, l'existence d'une relation causale entre l'esprit et les nombres qui sont en jeu dans ces vérités : il n'y a ici rien d'analogue à la relation perceptuelle qui intervient dans notre reconnaissance des vérités empiriques. Que les nombres soient également des objets, voilà qui ne devrait pas oblitérer une différence fondamentale entre arithmétique et géographie qui tient, si l'on peut dire, au spectre des reponses *sensées* aux questions qui se posent dans les deux domaines. En géographie, ce spectre comporte une infinité de réponses, toutes incorrectes sauf une ; en arithmétique, il ne comprend que la bonne réponse, car toute autre est dénuée de sens, et ne constitue pas une pensée. Dans le premier cas, nous avons le choix, et dans le second, nous ne l'avons pas. Ceci a maintenant l'allure insidieuse d'une explication : à la question « Combien font 7 et 5 ? », nous n'avons aucun autre choix sensé que de répondre « 12 », et *c'est pourquoi* nous nous y rangeons.

En fait, rien n'indique que Frege ait proposé une forme aussi naïve de l'explication *per impossibile*. Ce que Frege veut dire n'est évidemment

(i) ni que, si nous ajoutions foi, *pour une raison ou une autre*, à une fausseté arithmétique, alors se produirait *eo ipso* un phénomène sans commune mesure avec ce qui se passe lorsque nous croyons erronément à la vérité de quelque proposition géographique, à savoir une sorte de nullification soudaine de notre activité intellectuelle, ou un analogue mental plus ou moins lointain de ce qui se passerait dans notre corps si nous touchions une ligne à haute tension

(ii) ni, *a fortiori*, que nous élisons les vérités arithmétiques *parce que* nous voulons nous prémunir contre semblable éventualité.

Frege affirme plutôt que s'il existait, que nous la saisissions ou non, une preuve *fondamentale* d'une fausseté arithmétique – et si, accessoirement, nous la trouvions, et qu'elle constituait notre motif de la croire —, alors aucune espèce d'argument ne serait capable de justifier quoi que ce soit — et, accessoirement, nous ne saurions plus trouver de motif rationnel à aucune de nos convictions.

On tient là l'amorce d'une explication causale de notre aptitude à reconnaître les vérités arithmétiques, et il s'agit bien d'une explication qui reste compatible avec l'inertie causale des nombres eux-mêmes : ce qui est mentionné comme cause n'est pas le « fait » que $7 + 5 = 12$, ni même le « fait » que le choix de 12 comme somme de 7 et de 5 est le seul qui soit sensé, mais l'existence d'un système de règles de calcul qui *montrent* que ce résultat est le bon, et qui sont à ce point élémentaires que notre capacité à les appliquer régulièrement (ou à décider si une suite quelconque de symboles résulte ou non de leur application régulière) ne saurait être mise en doute sans que nous soit, du même coup, retirée toute capacité d'effectuer quelque opération intellectuelle que ce soit.

L'explication reste néanmoins très embryonnaire, et il paraît tout à fait extravagant d'imaginer que l'on pourrait en rester là, ou même que l'on détient, à ce stade, une analyse qu'il suffirait de *raffiner* pour rendre compte de l'accessibilité des mathématiques dans leur ensemble. Il y a, de ce point de vue, de très sérieuses limites à l'approche fondamentaliste, et c'est par elles que je voudrais conclure.

Normes, impératifs et permissions

La plupart des philosophes ont une tendance marquée à considérer les identités numériques du type $7 + 5 = 12$ comme représentatives des mathématiques dans leur ensemble, et à s'imaginer que les questions philosophiques qui se posent à ce stade sont suffisamment typiques de celles que soulèvent en général les propositions mathématiques pour qu'il soit inutile d'en examiner d'autres. Ceux-là mêmes, parmi eux, qui ont des mathématiques une vue moins rudimentaire, ont souvent la tentation d'extrapoler au reste des mathématiques les analyses qui leur semblent rendre compte de ces identités élémentaires et, bien que le reproche le plus explicite sur ce point en ait probablement été adressé pour la première fois par Gödel [1953, 334 sq] à Carnap, il n'y a guère de doute que d'autres philosophes, avant et après lui, l'encourent également [7].

Or, ces identités numériques ne sont pas seulement moins « compliquées » que les « véritables » propositions mathématiques, mais elles se comportent, vis-à-vis des questions auxquelles le fondamentalisme entend répondre, de manière très significativement différente des autres propositions. La différence essentielle concerne une expression dont il n'a jusqu'à présent été soufflé mot, hormis pour signaler le sens rigoureusement normatif dans laquelle elle est employée par les fondamentalistes,

[7] Pour n'en citer qu'un, sans toucher aux plus grands, A.J. Ayer, dans le chapitre qu'il consacre à l'*a priori*, limite son examen des mathématiques à « $7 + 5 = 12$ » et à « $2 \times 5 = 10$ » [1936, 96-115].

à savoir celle de « lois de la pensée ». En disant qu'il ne s'agit pas des règles selon lesquelles la pensée opère effectivement, mais des règles qui doivent être respectées par elle, on laisse encore ouverte deux acceptions fondamentalement distinctes de la chose.

Une norme peut être *impérative* ou *permissive*, selon qu'elle prescrit une conduite ou qu'elle la pose simplement comme licite : ainsi que le note, par exemple, Hans Kelsen [1934, 6 sq], il n'y a guère en effet que les habitudes du langage ordinaire pour dissimuler qu'une norme peut permettre autant que commander. De leur côté, les « lois de la pensée » sont évidemment, en un certain sens important, des impératifs. Lorsque Frege énonce que les lois de la logique sont les lois de l'être-Vrai (*Gesetze des Wahrseins*) et non pas les lois du Tenir-pour-Vrai (*Gesetze des Fürwahrhalten*), il entend insister sur le fait qu'elles sont des lois qui décrivent le Vrai, mais qui se rapportent au Tenir-pour-Vrai de manière normative, en tant qu'elles prescrivent ce qui *doit* être tenu pour vrai :

> En un sens, une loi déclare (*besagt*) ce qui est, en un autre elle prescrit (*vorschreibt*) ce qui doit être. Ce n'est qu'en ce dernier sens que les lois logiques peuvent être appellées des lois de la pensée : en tant qu'elles stipulent la manière dont on doit penser. Chaque loi qui déclare ce qui est peut être vue comme prescrivant que l'on doit penser en conformité avec cela, et elle est donc, en ce sens, une loi de la pensée [1893, xv].

Néanmoins, les « lois de la pensée » ne sont pas toutes prescriptives au même sens et au même titre. La logique n'indique pas le vrai sous forme « massive » : les propositions logiquement vraies forment une totalité hiérarchisée, dans laquelle certaines propositions sont fondamentales, et dont les autres dérivent par le moyen de règles d'inférence (*Schlussweisen)* déterminées, qui sont elles aussi des lois reconnues comme purement logiques [Frege 1884, § 90]. Frege voit dans cette hiérarchie (« la structure objective de l'être-Vrai ») un élément essentiel dont notre appréhension du vrai *doit* tenir compte : il n'est pas question de reconnaître rhapsodiquement les propositions vraies, mais de les reconnaître « comme elles doivent l'être », c'est-à-dire, à chaque fois, en saisissant leurs rapports objectifs de dépendance par rapport aux lois primitives. Tel est le dogme essentiel du fondamentalisme : ce qui importe est moins *ce qui* est vrai que *ce pourquoi* ce qui est vrai l'est effectivement.

La reconnaissance *appropriée* des vérités mathématiques dépend crucialement des modes de transition d'une assertion à l'autre, et des règles qui les gouvernent. Ces règles sont de nature *permissive* : certaines assertions étant justifiées, elles en autorisent d'autres comme découlant immédiatement des premières, et elles habilitent à les tenir à leur tour pour justifiées. Ainsi que le remarque Frege, la nature et l'étendue de ces règles dépend de façon décisive du but que l'on assigne aux preuves. Selon que les preuves sont tenues pour de simples certificats destinés à s'assurer de la vérité de la proposition qu'elles démontrent, ou au contraire pour le fondement objectif de cette proposition, les règles d'inférence seront différemment délinéées. Dans le premier cas, il suffit qu'elles transmettent régulièrement à leur conclusion la vérité éventuelle de leurs prémisses : toute transition de ce type est, *prima facie*, candidate au titre de règle logiquement permise [8]. Dans le second cas, on doit en exiger beaucoup plus :

> La plupart du temps, on se contente du fait que chaque pas de la preuve est évidemment correct, ce qui est légitime si l'on n'est préoccupé que de la vérité de la proposition à prouver. Mais lorsqu'il s'agit d'obtenir quelque aperçu sur la nature de cette évidence, ce procédé ne suffit pas, et nous devons, au contraire, expliciter toutes les étapes intermédiaires, afin de laisser tomber sur elles la pleine lumière de la conscience. D'ordinaire, les mathématiciens ne s'occupent que du contenu de la proposition, et du fait qu'elle est prouvée. Ici [dans les *Grundgesetze*], ce qui est nouveau n'est pas le contenu de la proposition, mais la manière dont la preuve est conduite, et les fondements sur lesquels elle repose [1893, viii].

Le projet fondamentaliste demande donc que l'on restreigne la variété des règles qui autorisent l'inférence. Plusieurs preuves distinctes peuvent permettre de reconnaître la vérité de la proposition prouvée, mais une seule coïncide avec le fondement de la proposition, et en donne la justification *canonique*, celle qui montre *pourquoi* la proposition est vraie. Néanmoins, Frege reconnaît la nécessité d'admettre plusieurs règles d'inférence, parmi lesquelles le *modus ponens*, le « syllogisme hypothétique », la contraposition et la généralisation universelle. Cette situation appelle plusieurs remarques.

1) Plusieurs preuves distinctes d'un même théorème peuvent être données dans le cadre proposé par Frege, selon que telle ou telle règle est, à telle ou telle étape, utilisée de préférence à telle autre. C'est une source de variété qui entre évidemment en contradiction avec l'idée que le fondement d'un théorème est unique, et qu'il se reflète dans un *pedigree* bien défini qui montre rigoureusement la nature de sa dépendance aux lois fondamentales.

[8] En vérité, d'autres conditions encore sont nécessaires pour que cette candidature soit simplement recevable. Je ne peux sur ce point que renvoyer ici à une autre étude [Dubucs, 2002] où ces conditions sont discutées.

2) A l'inverse de ce qui se produit dans le cas des identités numériques du type « $7 + 5 = 12$ », pour la vérification desquelles nous disposons de *consignes procédurales* (consistant, sommairement dit, à ramener ces identités à des tautologies explicites en remplaçant progressivement les termes qu'elles contiennent par leurs définitions), la logique ne nous dit pas *quoi faire* pour déterminer si une proposition mathématique plus générale est ou non une vérité. Elle nous *somme* d'aboutir — car elle déclare le Vrai, et qu'une telle déclaration est immédiatement convertible en une obligation épistémique de le Tenir pour vrai —, mais elle nous laisse à chaque pas en présence de plusieurs licences d'inférer concurrentes, et ne monnaye donc pas en tâches à chaque fois prescrites l'obligation générale où elle nous tient.

3) Le fait que nous conservions généralement, même dans le format très austère proposé par Frege, le choix entre plusieurs licences d'inférer, constitue évidemment une menace pour la *convergence* qui est au centre des préoccupations fondamentalistes : rien ne garantit que l'usage régulier des seuls modes de transition autorisés par la logique conduise deux individus aux *mêmes* preuves fondamentales. Cette difficulté serait vénielle et, pour tout dire, à peine digne de mention, si la variance résiduelle ne concernait que l'ordre d'application des règles, une contraposition étant utilisée d'abord par l'un, là où l'autre débute par un syllogisme hypothétique : après tout, le fondamentaliste pourrait, sans renoncer à l'essentiel de son propos, concéder que « la » dérivation canonique d'un théorème - celle qui montre non seulement sa théorématicité mais les *raisons* mêmes (les « causes », disait Bolzano) de sa vérité — n'est définie qu'à certaines permutations près dans l'enchaînement des assertions. Mais un examen plus attentif montre que le fondamentalisme, en tout cas dans la version qu'en propose Frege, est exposé à de beaucoup plus substantielles concessions, qui touchent au cœur de la doctrine.

Dans toutes les versions de son système — celle qui est exposée dans les *Grundgesetze der Arithmetik*, mais aussi celle, plus austère encore, qui est contenue dans la *Begriffsschrift* —, Frege considère que le mode d'inférence premier et fondamental est le *modus ponens*, et il y voit une règle universelle qui possède le même pouvoir déductif que toutes les inférences propositionnelles licites réunies :

> C'est le seul mode d'inférence que j'ai appliqué dans ma *Begriffschrift*, et l'on peut également se tirer d'affaire avec lui (*man kann mit ihr auch auskommen*) [1893, § 14].

Frege estime donc que le *modus ponens* est suffisant, mais il va surtout sans dire, à ses yeux, qu'il est *nécessaire*. Or, un système qui fait place à une telle règle *ne* peut *pas* satisfaire aux exigences du fondamentalisme. Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner par exemple le cas de la proposition $\forall x \forall y \forall z\ x^4 + y^4 \neq z^4$, dont il existe une preuve purement arithmétique fort simple. Cette proposition est, par ailleurs, un cas particulier du dernier théorème de Fermat, et l'on sait, depuis Ken Ribet, que ce dernier est une conséquence de la conjecture de Taniyama, laquelle met en relation les formes modulaires et les fonctions elliptiques (deux notions qui n'appartiennent pas au domaine de l'arithmétique). Une autre preuve de notre proposition est donc possible, par un *modus ponens* dont le conditionnel est le résultat de Ribet, et dont l'antécédent est la preuve récente, due à Wiles, de la conjecture de Taniyama. Le système de Frege, pas plus qu'aucun système dans lequel le *modus ponens* est une règle licite, n'est capable de disqualifier cette seconde preuve, ou de dire en quoi elle est moins « fondamentale » que la première. En d'autres termes, aucun système d'inférences conforme aux réquisits fondamentalistes ne saurait admettre le *modus ponens* : c'est par cette voie que font irruption les concepts « étrangers » à la proposition prouvée.

4) A elle seule, la remarque qui précède ne constitue évidemment pas une objection dirimante au fondationnalisme. Gentzen a montré que le *modus ponens* (la règle de « coupure ») pouvait être éliminée d'un système de règles d'inférences, les preuves possédant alors la propriété remarquable que toutes les formules qui y figurent sont des sous-formules de la formule finale. C'est là un *explicatum* très naturel de la notion de preuve « fondamentale » que Bolzano et Frege avaient en vue, puisque n'entre dans de telles preuves aucun élément « étranger » au théorème prouvé :

> On peut à peu près exprimer comme suit les propriétés fondamentales d'une telle preuve normale : elle ne fait aucun détour (*Umweg*). Il n'y est introduit aucun concept qui ne soit contenu dans son résultat final, et qui donc ne doive être nécessairement mobilisé pour l'obtenir [Gentzen 1934, 177]

Mais de telles preuves « directes » sont notoirement plus longues que les « certificats » usuels, et tellement plus longues, en fait, qu'elles ne conservent pas les propriétés d'*Übersichtlichkeit* des certificats usuels qui leur correspondent [9]. L'élimination du *modus ponens* pousse à son paroxysme le phénomène d'allongement des preuves dans lequel Frege avait très correctement diagnostiqué une conséquence presque mécanique de la restriction des règles d'inférence. Cette restriction, dictée par l'objectif fondamentaliste, se heurte très vite à des considérations pratiques :

[9] cf. sur ce point [Dubucs 1988, 101 sq].

> S'il est si difficile d'y répondre, c'est que les raisonnements qui progressent pas à pas sont d'une longueur pénible. Chaque preuve un peu compliquée menace d'être d'une d'une longueur monstrueuse (*ungeheuer*) [Frege 1884, § 91].

En d'autres termes, les preuves rigoureusement « fondamentales » ne sont plus des preuves « circonscriptibles » : il est, en pratique, impossible d'y accéder, de les rédiger ou de les comprendre [10]. Le fondamentalisme se propose d'éliminer des preuves tout élément adventice, et d'en écarter tout concept dont l'occurrence n'est pas rigoureusement exigée par la nature même de la proposition à démontrer. Les preuves mathématiques ainsi conçues, qui paraissent éminemment accessibles parce qu'elles n'exigent la maîtrise d'aucun concept « étranger », sont en définitive inaccessibles aux créatures dotées d'une constitution cognitive comparable à la nôtre. Il en découle deux conséquences véritablement fâcheuses pour le fondamentalisme :

(i) Un format démonstratif assez ascétique pour garantir la *convergence* des preuves qui peuvent y être conduites est, *eo ipso*, un format dans lequel les preuves sont généralement *inaccessibles* aux créatures ordinaires.

(ii) Un individu peut fort bien être capable de reconnaître qu'une proposition mathématique est *vraie* sans être pour autant capable de reconnaître *à quoi* cette proposition doit sa vérité.

En dépit des apparences, le fondamentalisme, qui insiste comme on ne l'avait jamais fait avant lui sur l'universelle disponibilité des ressources cognitives requises par l'appréhension des vérités mathématiques, est aussi la philosophie qui, sur ce point, nous en demande le plus, et probablement trop.

Bibliographie

Ayer, Alfred J.

1936 *Logic, Truth, and Language*, Harmondsworth, Penguin Books, 1978.

Bolzano, Bernard

1810 *Beiträge zur einer begründeteren Darstellung der Mathematik.* Prague, Caspar Widtmann (cité d'après la trad. anglaise de St.

[10] Boolos [1984, 366] cite un exemple dans lequel une preuve conduite dans un système qui admet le *modus ponens* tient en une ou deux pages, alors que sa version sans *modus ponens* contient « plus de symboles qu'il n'y a de nanosecondes entre les Big Bangs ».

Russ dans Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Oxford, Clarendon Press, 1996, 174-224).

1817 *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwieschen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.* Prague, Gottlieb Hasse (cité d'après la trad. anglaise de St. Russ dans William B. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Oxford, Clarendon Press, 1996, 225-248)

1837 *Wissenschaftslehre.* Seidel, Sulzbach, 1837 (cité d'après l'anthologie *Grundlegung der Logik* (Fr. Kambartel ed.). Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1978.

Boolos, George

1984 Don't Eliminate Cut , *in Logic, Logic and Logic*, Cambridge, Harvard University Press, 1998, 365-369/

Detlefsen, Michael

1998 Constructive Existence Claims, *in* Matthias Schirn (ed.), *The Philosophy of Mathematics Today.* Oxford, Clarendon Press, 1998, 307-335.

Dubucs, Jacques

1988 Die sogenannte Analytizität der Mathematik , *Grazer Philosophische Studien*, 32, 83-112.

2002 Feasibility in Logic, *Synthese*, 132(3), 213-237

Dubucs, Jacques et S. Lapointe,

"Preuves par excellence", *Philosophiques*, à paraître.

Dummett, Michael

1991 *Frege. Philosophy of Mathematics.* Londres, Duckworth.

Frege, Gottlob

1879 *Begriffsschrift, eine der Arithmetischen Nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Hildesheim, Georg Olms. 1964.

1884 *Die Grundlagen der Mathematik.* Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1988.

1893 *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1. Hildesheim, Georg Olms, 1966.

1897 *Logik, in Nachgelassene Schriften* (Hans Hermes, Fredrich Kambartel & Friedrich Kaulbach eds.). Hambourg, Felix Meiner Verlag, 1969, 137-163.

1918-1919 *Der Gedanke, in Kleine Schriften* (Ignacio Angelelli ed.). Hildesheim, Georg Olms, 1990.

GEACH, PETER T.

1961 *Frege*, *in* G.E.M. Anscombe & P.T. Geach, *Three Philosophers*, Oxford, Blackwell.

GENTZEN, GERHARD

1934 Untersuchungen über das logische Schliessen, I , *Mathematische Zeitschrift*, 39.

GÖDEL, KURT

1953 *Is Mathematics Syntax of Language*, *in Collected Works*, vol. III (Solomon Feferman ed.). New-York, Oxford University Press, 1995, 334-356

KANT, IMMANUEL

1781 *Kritik der reinen Vernunft.* Hamburg, Felix Meiner Verlag, 1990

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM

1765 *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris : Garnier-Flammarion, 1966

SÉBESTIK, JAN

1992 *Logique et mathématique chez Bolzano*, Paris, Vrin.

WRIGHT, CRISPIN

1992 *Truth and Objectivity.* Cambridge, Harvard University Press. 2° édit., 1994