

Un pas décisif vers la théorie quantique : L'article de Heisenberg de 1925

André Coret

LPHS — Archives Poincaré, Université de Nancy 2

Résumé. L'article de Heisenberg de 1925 fut déterminant pour le développement de la théorie quantique. Il nous apparaît également très important de le prendre en considération dans le cadre d'une réflexion générale sur les fondements de cette théorie. C'est ce qui nous a incité à entreprendre une transcription et une traduction en français de ce texte.

Abstract. The 1925 paper of Heisenberg has been a deciding factor for the development of the quantum theory. It seems also very important to us to take it into account within the framework of a general reflexion about the foundations of this theory. That is the reason for which we have undertaken a transcription and a french translation of this paper.

C'est en 1925 que Heisenberg¹ à Göttingen et Schrödinger² à Zurich trouvent presque simultanément à rendre compte de façon théorique des états d'énergie des particules élémentaires dans les atomes simples que les données spectroscopiques leur avaient fournies. Ils seront suivis de très près par les chimistes quantiques tels que Hund ou Mulliken qui trouveront là le moyen de traiter efficacement les états d'énergies des molécules et par les physiciens du solide qui seront en mesure de construire une théorie du solide ordonné qui conduira à l'élaboration des semi-conducteurs.

Heisenberg et Schrödinger ont utilisé des outils différents : les matrices pour le premier, les fonctions d'onde pour le second. L'équivalence formelle de ces deux méthodes sera rapidement montrée. Elles ont en commun un fait nouveau en physique : ni l'une ni l'autre ne donnent une représentation des objets élémentaires, elles n'en donnent aucune intuition. Il y a pire : elles semblent même y renoncer !

C'est même, à notre avis, cette position essentiellement non-réaliste qui a rendu possible l'élaboration et le succès de la théorie quantique, telle qu'elle fut exposée en 1930 dans les ouvrages de Max Born et Pascual Jordan³ d'une part et de Paul Dirac d'autre part⁴. Mais cet abandon de toute possibilité « d'imaginer » l'objet quantique fut difficilement admis non seulement par Einstein et ceux qui, à sa suite, cherchèrent longtemps des paramètres cachés, mais également par les acteurs et auteurs de la théorie quantique, qu'il s'agisse de Niels Bohr ou de Heisenberg lui-même. Le patron de l'École de Copenhague (constituée essentiellement par les physiciens-mathématiciens de Göttingen) tenta bien une théorie de la complémentarité pour faire passer le concept de « dualité onde-corpuscule » ; mais cette contradiction langagière ne peut que nous rappeler le surréalisme de l'époque qui était à la recherche, lui-aussi, d'un « autre » déterminisme.

1. W. Heisenberg, « Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen », *Zeitschrift für Physik*, 33, 1925, pp. 879-893. Heisenberg raconte que le contenu de cet article a été élaboré lors de son séjour dans l'île de Helgoland, île sans végétation dans laquelle il était allé pour soigner son rhume des foies. [W. Heisenberg, *La partie et le tout*, Flammarion, collection Champs, Paris, 1990, pp. 87-92. Édition originale : *Der Teil und das Ganze*, R. Piper et Co. Verlag, 1969.]

2. E. Schrödinger, « Die stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik », *Die Naturwissenschaften*, 28, 1925, p. 664. « Quantisierung als Eigenwertproblem », *Annalen der Physik*, 79, 1926, p. 372.

3. M. Born und P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1930.

4. P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, the Clarendon Press, Oxford, 1930.

Quant à Schrödinger, il eut une attitude plus complexe. C'est à l'occasion de la publication de la traduction en français par Alexandre Proca⁵ de ses articles sur la mécanique quantique qu'il s'interroge sur la nature imaginaire de la fonction d'onde sensée représenter un objet réel :

Mais comment le $\sqrt{-1}$ a-t-il pu s'introduire dans cette équation ? Une réponse, dont je n'ose indiquer ici que le sens général, a été donnée à cette question par un physicien, qui a autrefois quitté l'Autriche, mais qui, malgré de longues années passées à l'étranger, n'a pas complètement perdu son humeur mordante de viennois et qui, en outre, est connu pour sa faculté de trouver toujours le mot juste, d'autant plus juste qu'il est plus cru. Voici cette réponse : « Le $\sqrt{-1}$ s'est glissé dans l'équation (...) comme quelque chose que nous laissons échapper par hasard, en éprouvant toutefois un soulagement inappréciable après lui avoir donné naissance involontairement. »

Ce trouble de Schrödinger qui s'exprime au moment d'une traduction nous a incité à entreprendre un travail équivalent pour l'article de Heisenberg de 1925. À ceci prêt que Heisenberg n'est plus là pour commenter l'interprétation et la traduction de ses articles, comme le fit Schrödinger à propos du travail d'Alexandre Proca. Il faut bien dire par ailleurs que l'article de Heisenberg ne fait pas l'unanimité sur son intérêt et qu'en France il fallut attendre une date récente pour qu'une première version en français soit proposée⁶, version qui s'inspire largement de la traduction en anglais qu'en fit Van der Waerden⁷. Si pour Max Born cet article fut considéré comme le pas décisif (« ...den entscheidenden Schritt ... »)⁸, il fut plus tard qualifié de « *puzzling* » par l'historien des sciences McKinnon⁹. Contrairement à Born, Schrödinger¹⁰ était lui plus réservé quant aux travaux de Heisenberg :

Eines genetischen Zusammenhanges mit Heisenberg bin ich mir durchaus nicht bewußt. Ich hatte von seiner Theorie natürlich Kenntnis, fühlte mich

5. E. Schrödinger, *Mémoires sur la Mécanique Ondulatoire*, Alcan, Paris, 1933, p. 735 note 2. Il s'agit de la traduction assez « libre » par Alexandre Proca des principaux articles de Schrödinger. Proca soumit sa traduction à l'auteur lui-même, si bien que l'on trouve en note dans cet ouvrage les commentaires de Schrödinger sur la manière dont Proca a compris son œuvre.

6. J. Leite Lopez et B. Escoubès, *Sources et évolution de la physique quantique*, Masson, Paris, 1995, pp. 112-125.

7. B. L. Van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

8. M. Born, *op. cit.*, p. 13.

9. E. McKinnon, « Heisenberg, Models and the Rise of Quantum Mechanics », *Historical Studies in the Physical Sciences*, 8, 1977, p. 137.

10. E. Schrödinger, « Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen », *Annalen der Physik*, 79, 1926, p. 735 note 2.

aber durch die nur sehr schwierig scheinenden Methoden der transzendenten Algebra und durch den Mangel an Anschaulichkeit abgeschreckt, um nicht zu sagen abgestoßen¹¹.

En fait cet article fut rangé au magasin des accessoires par les physiciens eux-mêmes. Bien que reconnu par ses pairs comme étant l'inventeur de la théorie quantique, Heisenberg est plus connu aujourd'hui par son « principe d'incertitude » datant de 1927, principe qui résulte de façon très normale d'une propriété particulière de la nouvelle théorie quantique : la non commutativité des opérateurs s'appliquant aux grandeurs observables. On ne peut s'empêcher de penser que le succès du principe d'incertitude serait dû à l'apparent vacillement des certitudes scientifiques sur le caractère essentiellement déterministe de toute théorie.

Heisenberg structure son article de la même manière qu'Einstein le fit en 1905 dans l'exposé de la théorie de la relativité restreinte : une partie cinétique (§. 1) qui met en place la manière quantique de représenter l'évolution des coordonnées d'espace en fonction du temps et une partie dynamique (§. 2 et §. 3) qui montre que ce mode de représentation permet de maintenir le principe de la conservation de l'énergie. Il expliquera plus tard¹² que c'est bien à partir du moment où il a pu calculer les énergies à partir de systèmes simples (l'oscillateur anharmonique ou ce qu'il appelle « *der Rotator* ») qu'il fut persuadé de la pertinence de son approche originale et se permit de la publier.

C'est à partir de l'utilisation de la représentation de Fourier pour toute grandeur physique dans la mécanique classique que Heisenberg va raisonner : en mécanique classique toute fonction du temps et de l'espace et représentant l'évolution et le déplacement de la qualité d'un objet peut être remplacée par une somme de fonctions périodiques dont le spectre de fréquence est obtenu par le produit $\alpha\omega(n)$ où α est un nombre entier, $\omega = 2\pi\nu$ où ν est la fréquence, et n un entier qui repère l'état dans lequel se trouve l'objet (sa trajectoire autour du noyau dans le cas de l'électron au sein de l'atome). Il s'agit, dans la cadre de la mécanique classique d'une opération purement mathématique qui fait apparaître par exemple qu'un électron en mouvement non uniforme devrait émettre de la lumière aux fréquences $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots, \alpha\nu, \dots$. Cependant, comme l'a

11. Traduction de Proca [E. Schrödinger, *op. cit.*, p. 72]: « Je n'ai conscience d'aucune relation de cause à effet entre les idées de Heisenberg et les miennes. Je connaissais, naturellement, sa théorie, mais j'étais effrayé, pour ne pas dire que je reculais, devant ses méthodes d'algèbre transcendante qui me semblaient trop difficiles, et devant l'impossibilité d'y trouver une image intuitive des phénomènes naturels. »

12. W. Heisenberg, *La partie et le tout*, *op. cit.*, p. 91.

montré Bohr dès 1913¹³, la lumière émise à partir d'un atome ne résulte pas du mouvement des électrons sur leur trajectoire autour du noyau, mais du passage d'un électron d'une trajectoire à une autre, c'est-à-dire d'une valeur de n à une autre valeur de n que Heisenberg nomme $n - \alpha$.

« L'opération quantique » de Heisenberg a donc pour point de départ une transformation du statut du nombre entier α : dans le cadre classique il désigne l'harmonique de la décomposition de Fourier ; dans le cadre quantique il s'agit d'un entier tel que la fréquence de la lumière émise corresponde au passage de l'électron de la trajectoire n à $n - \alpha$. Ce passage est réalisé par Heisenberg lorsqu'il écrit, successivement les équations (1) (*Quantentheoretisch*) et (2) (*Klassisch*). Heisenberg se trouve alors en présence d'un ensemble (*eine Gesamtheit*) de termes

$$A_\alpha(n, n - \alpha)e^{i\omega(n, n - \alpha)t}$$

qu'il ne peut plus additionner et mettre, comme dans le cadre classique, sous le signe Σ . Born et Jordan¹⁴ montreront dans les mois qui suivent la parution de l'article de Heisenberg que ces termes peuvent être rangés dans une matrice. En attendant, Heisenberg, dans la suite de l'article montre qu'il peut se servir de ces ensembles de termes de manière efficace même sous cette forme fruste.

En s'appuyant sur l'expérience, c'est-à-dire sur la nécessité de considérer l'émission lumineuse comme issue d'un changement d'état de l'électron et non de son mouvement, Heisenberg se permet une opération qu'il qualifie lui-même d'arbitraire (*Willkür*). Elle est d'autant plus arbitraire que le statut de cet ensemble de termes est pour le moins incertain : il ne peut s'agir d'une représentation (*Vorstellung*) puisqu'il est difficile d'imaginer intuitivement le rapport de cet ensemble avec le réel de l'objet dont il s'agit, l'électron en l'occurrence. Apparaît alors le terme d'origine latine « *Repräsentant* » qui permet de passer de la description imaginaire à une symbolique qui constitue le fondement de la théorie quantique.

En ce point de sa réflexion, Heisenberg est aux antipodes du réalisme d'une part, il est au point le plus crucial de sa démarche d'autre part. En utilisant des outils symboliques pour commencer à construire ce qui deviendra la théorie quantique, il renonce à dire quoi que ce soit sur la nature de l'électron (le réel) mais il rétablit du même coup le lien

13. N. Bohr, « On the Constitution of Atoms and Molecules », *Philosophical Magazine*, 26, 1913, p. 1.

14. M. Born und P. Jordan, « Zur Quantenmechanik », *Zeitschrift für Physik*, 34, 1925, p. 857.

à l'expérience puisque la seule justification à son opération arbitraire est une référence aux résultats de la spectroscopie. On peut alors se demander s'il existe une meilleure application du pragmatisme que cette démarche de Heisenberg, si l'on en juge par ses effets.

Ce court préambule à la transcription et à la traduction de l'article de Heisenberg n'a d'autre ambition que de proposer une grille de lecture possible. Malgré notre souci de rester aussi près que possible du texte en allemand, il reste que la traduction de certains passages relève de l'interprétation. C'est ainsi que nous avons évité de traduire, comme on le fait d'habitude, les termes « *quantentheoretisch* » et « *Quantentheorie* » par « [selon] la théorie quantique ». Nous avons préféré les termes « quantique » ou « théorie des quanta », tout en sachant bien que celle-ci n'était pas une théorie constituée mais plutôt une hypothèse de travail imposée par l'expérience. La théorie quantique en tant que telle n'apparaît, à notre sens, qu'en 1930 dans les ouvrages de Born et de Dirac sous le titre de « Mécanique Quantique » .

Zeitschrift für Physik, Band XXXIII, S. 879-893

**Über
quantentheoretische
Umdeutung
kinematischer und
mechanischer
Beziehungen.**

Von **W. Heisenberg** in Göttingen

(Eingegangen am 29. Juli 1925.)

In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.

Bekanntlich läßt sich gegen die formalen Regeln, die allgemein in der Quantentheorie zur Berechnung beobachtbarer Größen (z. B. der Energie im Wasserstoffatom) benutzt werden, der schwerwiegende Einwand erheben, daß jene Rechenregeln als wesentlichen Bestandteil Beziehungen enthalten zwischen Größen, die scheinbar prinzipiell nicht beobachtet werden können (wie z. B. Ort, Umlaufzeit des Elektrons), daß also jenen Regeln offenbar jedes anschauliche physikalische Fundament mangelt, wenn man nicht immer noch an der Hoffnung festhalten will, daß jene bis jetzt unbeobachtbaren Größen später viel-

**Sur une
réinterprétation
quantique des relations
cinématiques et
mécaniques.**

par **W. Heisenberg** à Göttingen

(reçu le 29 juillet 1925.)

Ce travail doit être considéré comme une tentative pour obtenir les bases d'une mécanique quantique exclusivement fondée sur des relations entre grandeurs par principe observables.

On connaît l'objection de poids qui s'élève à l'encontre des règles formelles qui sont généralement utilisées dans la théorie des quanta pour le calcul des grandeurs observables (p. exemple l'énergie dans l'atome d'hydrogène) : ces règles de calcul contiennent comme élément essentiel des relations entre des grandeurs qui, apparemment par principe, ne pourront être observées (comme par exemple la position et le temps de révolution de l'électron). De plus, manifestement, tout fondement physique intuitif manque à ces règles, à moins que l'on ne veuille encore conserver l'espoir que, peut être, ces gran-

leicht experimentell zugänglich gemacht werden könnten. Diese Hoffnung könnte als berechtigt angesehen werden, wenn die genannten Regeln in sich konsequent und auf einen bestimmt umgrenzten Bereich quantentheoretischer Probleme anwendbar wären. Die Erfahrung zeigt aber, daß sich nur das Wasserstoffatom und der Starkeffekt dieses Atoms jenen formalen Regeln der Quantentheorie fügen, daß aber schon beim Problem der „gekreuzten Felder“ (Wasserstoffatom in elektrischem und magnetischem Feld verschiedener Richtung) fundamentale Schwierigkeiten auftreten, daß die Reaktion der Atome auf periodisch wechselnde Felder sicherlich nicht durch die genannten Regeln beschrieben werden kann, und daß schließlich eine Ausdehnung der Quantenregeln auf die Behandlung der Atome mit mehreren Elektronen sich als unmöglich erwiesen hat. Es ist üblich geworden, dieses Versagen der quantentheoretischen Regeln, die ja wesentlich durch die Anwendung der klassischen Mechanik charakterisiert waren, als Abweichung von der klassischen Mechanik zu bezeichnen. Diese Bezeichnung kann aber wohl kaum als sinngemäß angesehen werden, wenn man bedenkt, daß schon die (ja ganz allgemein gültige) Einstein-Bohrsche Frequenzbedingung eine so völlige Absage an die klassische Mechanik oder besser,

deurs jusqu'à présent inobservables, pourraient être rendues accessibles plus tard par l'expérience. Cet espoir pourrait être considéré comme légitime, si les règles mentionnées avaient une consistance interne et étaient applicables à un domaine bien circonscrit de problèmes quantiques. L'expérience montre cependant que seul l'atome d'hydrogène et l'effet Stark de cet atome se conforment à ces règles formelles de la théorie des quanta, mais que des difficultés fondamentales se présentent déjà dans le problème des « champs croisés » (l'atome d'hydrogène dans un champ électrique et dans un champ magnétique de directions différentes); que la réaction de l'atome à des champs variant périodiquement ne pourra sûrement pas être décrite par les règles mentionnées et qu'enfin, une extension des règles quantiques au comportement des atomes à plusieurs électrons s'est révélée impossible. Il est devenu habituel de qualifier cette défaillance des règles quantiques qui étaient après tout surtout considérées comme une application de la mécanique classique, de déviation de la mécanique classique. Mais cette manière de voir peut être considérée comme ayant peu de sens lorsque l'on pense que déjà la condition de Einstein-Bohr pour les fréquences (valable de façon tout à fait générale) représente une réfutation absolument com-

vom Standpunkt der Wellentheorie aus, an die dieser Mechanik zugrunde liegende Kinematikdarstellt, daß auch bei den einfachsten quantentheoretischen Problemen an eine Gültigkeit der klassischen Mechanik schlechterdings nicht gedacht werden kann. Bei dieser Sachlage scheint es geratener, jene Hoffnung auf eine Beobachtung der bisher unbeobachtbaren Größen (wie Lage, Umlaufzeit des Elektrons) ganz aufzugeben, gleichzeitig also einzuräumen, daß die teilweise Übereinstimmung der genannten Quantenregeln mit der Erfahrung mehr oder weniger zufällig sei, und zu versuchen, eine der klassischen Mechanik analoge quantentheoretische Mechanik auszubilden, in welcher nur Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen vorkommen. Als die wichtigsten ersten Ansätze zu einer solchen quantentheoretischen Mechanik kann man neben der Frequenzbedingung die Kramersche Dispersionstheorie¹ und die auf dieser Theorie weiterbauenden Arbeiten² ansehen. Im folgenden wollen wir einige neue quantenmechanische Beziehungen herauszustellen suchen und zur vollständigen Behandlung einiger spezieller Probleme benutzen. Wir werden uns dabei auf Probleme von einem Freiheits-

plète de la mécanique classique. Du point de vue de la théorie ondulatoire, il en est de même de la cinématique qui est à la base de cette mécanique. Quant aux problèmes quantiques les plus simples, on ne peut de toute façon pas concevoir que la mécanique classique puisse être valide. Dans ces circonstances, il semble à propos de perdre complètement tout espoir d'observer des grandeurs jusqu'ici inobservables (comme la position et le temps de révolution de l'électron), d'admettre aussi que l'accord partiel entre ce que l'on appelle les règles quantiques et l'expérience, est plus ou moins fortuit et qu'il faut chercher à développer une mécanique en accord avec la théorie des quanta, analogue à la mécanique classique, et dans laquelle n'apparaissent que des relations entre les grandeurs observables. En plus de la condition sur les fréquences, on peut considérer la théorie de la dispersion de Kramers¹ ainsi que les travaux ultérieurs à propos de cette théorie² comme étant les premières et les plus importantes ébauches d'une telle mécanique en accord avec la théorie des quanta. Dans la suite nous avons l'intention de chercher à établir un certain nombre de relations quantiques nouvelles et de les utiliser

1. H. v. Kramers, *Nature* **113**, 673, 1924.

2. M. Born, *ZS. f. Physik* **26**, 379, 1924. H.A. Kramers und W. Heisenberg, *ZS. f. Phys.* **31**, 681, 1925. M. Born und P. Jordan, *ZS. f. Phys.* (Im Erscheinen.) [À paraître (a paru dans *Zeitschrift für Physik*, 34, 1925, p. 857,)]

grade beschränken.

§1. In der klassischen Theorie ist die Strahlung eines bewegten Elektrons (in der Wellenzone, d.h. $\mathfrak{E} \sim \mathfrak{H} \sim \frac{1}{r}$) nicht allein durch die Ausdrücke :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \frac{e}{r^3 c^2} [\mathfrak{r} [\mathfrak{r} \dot{\mathfrak{v}}]], \\ \mathfrak{H} &= \frac{e}{r^2 c^2} [\dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{r}]\end{aligned}$$

gegeben, sondern es kommen in nächster Näherung noch Glieder hinzu, z. B. von der Form

$$\frac{e}{rc^3} \dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{v},$$

die man als „Quadrupolstrahlung“ bezeichnen kann, in noch höherer Näherung Glieder z. B. der Form

$$\frac{e}{rc^4} \dot{\mathfrak{v}} \mathfrak{v}^2 ;$$

in dieser Weise läßt sich die Näherung beliebig weit treiben. (Im Vorhergehenden bedeuteten : $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ die Feldstärken im Aufpunkt, e die Ladung des Elektrons, r den Abstand des Elektrons vom Auf-

pour le traitement complet de quelques problèmes particuliers. Nous nous limiterons cependant à des problèmes à un degré de liberté.

§1. En théorie classique, le rayonnement d'un électron en mouvement (dans la zone d'onde c-à-d. $\mathfrak{E} \sim \mathfrak{H} \sim \frac{1}{r}$) n'est pas seulement donné par les expressions :

mais il vient encore, à l'ordre d'approximation suivant, des termes p. ex. de la forme

que l'on nomme « rayonnement quadrupolaire » ; à un ordre d'approximation encore supérieur on a par exemple des termes de la forme

on peut passer de cette manière à un ordre aussi élevé que l'on veut. (Dans ce qui précède : $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ signifient les intensités des champs en un point donné, e la charge de l'électron, r la distance séparant

punkt, v die Geschwindigkeit des Elektrons.)

Man kann sich fragen, wie jene höheren Glieder in der Quantentheorie aussehen müßten. Da in der klassischen Theorie die höheren Näherungen einfach berechnet werden können, wenn die Bewegung des Elektrons bzw. ihre Fourierdarstellung gegeben ist, so wird man in der Quantentheorie Ähnliches erwarten. Diese Frage hat nichts mit Elektrodynamik zu tun, sondern sie ist, dies scheint uns besonders wichtig, rein kinematischer Natur; wir können sie in einfachster Form folgendermaßen stellen: Gegeben sei eine an Stelle der klassischen Größe $x(t)$ tretende quantentheoretische Größe; welche quantentheoretische Größe tritt dann an Stelle von $x(t)$ ²?

Bevor wir diese Frage beantworten können, müssen wir uns daran erinnern, daß es in der Quantentheorie nicht möglich war, dem Elektron einen Punkt im Raum als Funktion der Zeit mittels beobachtbarer Größen zuzuordnen. Wohl aber kann dem Elektron auch in der Quantentheorie eine Ausstrahlung zugeordnet werden; diese Strahlung wird beschrieben erstens durch die Frequenzen, die als Funktionen zweier Variablen auftreten, quan-

l'électron de ce point, v la vitesse de l'électron).

On peut se demander comment ces termes d'ordre supérieur devraient apparaître dans la théorie des quanta. Comme dans la théorie classique les approximations d'ordre supérieur peuvent être calculées simplement si le mouvement de l'électron (et respectivement sa représentation de Fourier) est donné, on peut s'attendre à la même chose en ce qui concerne la théorie des quanta. Cette question n'a rien à voir avec l'électrodynamique; elle est par contre, et ceci nous semble particulièrement important, purement de nature cinématique. On peut la poser sous la forme la plus simple de la manière suivante: soit une grandeur quantique introduite à la place de la grandeur classique $x(t)$, quelle grandeur quantique prendra la place de $x(t)$ ²?

Avant que nous puissions répondre à cette question, nous devons nous rappeler à ce sujet que, dans la théorie des quanta, il n'était pas possible d'associer à l'électron un point dans l'espace, considéré comme fonction du temps, au moyen de grandeurs observables. Néanmoins, il est aussi possible dans la théorie des quanta, d'associer à l'électron l'émission d'un rayonnement; ce rayonnement est décrit tout d'abord par les fréquences qui se

tentheoretisch in der Gestalt: présentent comme des fonctions
à deux variables et qui, selon
la théorie des quanta, auront la
forme :

$$\nu(n, n - \alpha) = \frac{1}{h} [W(n) - W(n - \alpha)] ,$$

in der klassischen Theorie in der et, selon la théorie classique, la
Form: forme :

$$\nu(n, \alpha) = \alpha \cdot \nu(n) = \alpha \frac{1}{h} \frac{dW}{dn} .$$

(Hierin ist $n \cdot h = J$, einer der ka- (Ici $n \cdot h = J$ où J est une des
nonischen Konstanten, gesetzt.) constantes canoniques.)

Als charakteristisch für den Afin de caractériser la compa-
Vergleich der klassischen mit der raison entre la théorie classique et
Quantentheorie hinsichtlich der la théorie des quanta quant aux
Frequenzen kann man die Kombi- fréquences, on peut écrire les re-
nationsrelationen anschreiben: lations combinatoires :

Klassisch: Classique :

$$\nu(n, \alpha) + \nu(n, \beta) = \nu(n, \alpha + \beta) .$$

Quantentheoretisch: Quantique :

$$\nu(n, n - \alpha) + \nu(n - \alpha, n - \alpha - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta)$$

bzw. /respectivement

$$\nu(n - \beta, n - \alpha - \beta) + \nu(n, n - \beta) = \nu(n, n - \alpha - \beta)$$

Neben den Frequenzen sind Outre les fréquences, les ampli-
zweitens zur Beschreibung der tudes sont en second lieu néces-
Strahlung notwendig die Ampli- saires pour décrire le rayonne-

tuden; die Amplituden können als komplexe Vektoren (mit je sechs unabhängigen Bestimmungsstücken) aufgefaßt werden und bestimmen Polarisation und Phase. Auch sie sind Funktionen der zwei Variablen n und α , so daß der betreffende Teil der Strahlung durch den folgenden Ausdruck dargestellt wird:

ment; les amplitudes peuvent être considérées comme des vecteurs complexes (avec chacun six composantes indépendantes) et elles déterminent la polarisation et la phase. Ce sont aussi des fonctions des deux variables n et α de telle manière que la partie correspondante du rayonnement sera représentée par l'expression suivante :

Quantentheoretisch:

Quantique :

$$Re \left\{ \mathfrak{A}(n, n-\alpha) e^{i\omega(n, n-\alpha)t} \right\}. \quad (1)$$

Klassisch:

Classique :

$$Re \left\{ \mathfrak{A}_\alpha(n) e^{i\omega(n) \cdot \alpha t} \right\}. \quad (2)$$

Der (in \mathfrak{A} enthaltenen) Phase scheint zunächst eine physikalische Bedeutung in der Quantentheorie nicht zuzukommen, da die Frequenzen der Quantentheorie mit ihren Oberschwingungen im allgemeinen nicht kommensurabel sind. Wir werden aber sofort sehen, daß die Phase auch in der Quantentheorie eine bestimmte, der in der klassischen Theorie analoge Bedeutung hat. Betrachten wir jetzt eine bestimmte Größe $x(t)$ in der klassischen Theorie, so kann man sie repräsentiert denken

À première vue, la phase (contenue dans \mathfrak{A}) ne semble pas devoir être redevable d'une signification physique dans la théorie des quanta car les fréquences n'y sont pas, de façon générale, commensurables avec leurs harmoniques. Mais nous allons voir immédiatement que dans la théorie des quanta la phase a aussi une signification déterminée, analogue à celle de la théorie classique. Considérons maintenant une grandeur déterminée $x(t)$ dans la théorie classique; on peut penser la repré-

durch eine Gesamtheit von Größen der Form

senter par un ensemble de grandeurs de la forme

$$\mathfrak{A}_\alpha(n)e^{i\omega(n).\alpha t},$$

die, je nachdem die Bewegung periodisch ist oder nicht, zu einer Summe oder zu einem Integral vereinigt $x(t)$ darstellen:

qui, suivant que le mouvement est périodique ou pas, peuvent être représentées de manière groupée sous la forme d'une somme ou d'une intégrale $x(t)$:

$$\left. \begin{aligned} x(n, t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{A}_\alpha(n) e^{i\omega(n).\alpha t} \\ &\text{bzw./resp.} \\ x(n, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha(n) e^{i\omega(n)\alpha t} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Eine solche Vereinigung der entsprechenden quantentheoretischen Größen scheint wegen der Gleichberechtigung der Größen $n, n - \alpha$ nicht ohne Willkür möglich und deshalb nicht sinnvoll; wohl aber kann man die Gesamtheit der Größen

À cause de l'équivalence des grandeurs $n, n - \alpha$ une combinaison équivalente des grandeurs quantiques correspondantes ne semble pas possible sans arbitraire et paraît pour cela dénuée de sens; mais on peut très bien concevoir l'ensemble des grandeurs

$$\mathfrak{A}_\alpha(n, n - \alpha) e^{i\omega(n, n - \alpha)t}$$

als Repräsentant der Größe $x(t)$ auffassen und dann die oben gestellte Frage zu beantworten suchen: Wodurch wird die Größe $x(t)^2$ repräsentiert?

comme le représentant de la grandeur $x(t)$ et chercher à répondre à la question posée ci-dessus : quel est le représentant de la grandeur $x(t)^2$?

Die Antwort lautet klassisch
offenbar so:

Classiquement, la réponse est
évidemment :

$$\mathfrak{B}_\beta(n)e^{i\omega(n)\beta t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_{\beta-\alpha} e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t} \quad (3)$$

bzw.

respectivement

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_\alpha \mathfrak{A}_{\beta-\alpha} e^{i\omega(n)(\alpha+\beta-\alpha)t} d\alpha, \quad (4)$$

wobei dann

de sorte que

$$x(t)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta \mathfrak{B}_\beta(n) e^{i\omega(n)\beta t} \quad (5)$$

bzw.

respectivement

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_\beta(n) e^{i\omega(n)\beta t} d\beta \quad (6)$$

Quantentheoretisch scheint es
die einfachste und natürlichste
Annahme, die Beziehungen (3, 4)
durch die folgenden zu ersetzen:

En théorie des quanta il appa-
raît que l'hypothèse la plus simple
et la plus naturelle est de rempla-
cer les relations (3, 4) par les sui-
vantes :

$$\mathfrak{B}(n, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{A}(n, n - \alpha) \mathfrak{A}(n - \alpha, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} \quad (7)$$

bzw.

respectivement

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \mathfrak{A}(n, n - \alpha) \mathfrak{A}(n - \alpha, n - \beta) e^{i\omega(n, n - \beta)t} ; \quad (8)$$

und zwar ergibt sich diese Art der Zusammensetzung nahezu zwangsläufig aus der Kombinationsrelation der Frequenzen. Macht man diese Annahme (7) und (8), so erkennt man auch, daß die Phasen der quantentheoretischen \mathfrak{A} eine ebenso große physikalische Bedeutung haben wie die in der klassischen Theorie : nur der Anfangspunkt der Zeit und daher eine allen \mathfrak{A} gemeinsame Phasenkonstante ist willkürlich und ohne physikalische Bedeutung; doch die Phase der einzelnen \mathfrak{A} geht wesentlich in die Größe \mathfrak{B} ein³. Eine geometrische Interpretation solcher quantentheoretischer Phasenbeziehungen in Analogie zur klassischen Theorie scheint zunächst kaum möglich.

et, en effet, cette sorte d'assemblage à peu de chose près inévitable résulte de la relation de combinaison des fréquences. Si l'on fait ces hypothèses (7) et (8), on se rend compte aussi que les phases des \mathfrak{A} quantiques ont une signification physique tout aussi grande que celles de la théorie classique. Seule l'origine du temps, et par conséquent une constante de phase commune à tous les \mathfrak{A} , est arbitraire et sans signification physique ; mais la phase des \mathfrak{A} individuels rentre de manière essentielle dans la grandeur \mathfrak{B} ³. Une interprétation géométrique de ces relations de phase qui seraient établies dans le cadre de la théorie des quanta et qui serait analogue à celle de la théorie classique, ne semble à première vue guère possible.

Fragen wir weiter nach dem Repräsentant der Größe $x(t)$ ³, so finden wir ohne Schwierigkeit:

Si nous nous interrogeons ensuite sur le représentant de la grandeur $x(t)$ ³, nous trouvons alors sans difficulté :

3. Vgl. auch H. A. Kramers und W. Heisenberg, l. c. In die dort benutzten Ausdrücke für das induzierte Streumoment gehen die Phasen wesentlich ein. [Voir également H. A. Kramers und W. Heisenberg, *op. cit.* Les phases interviennent de manière essentielle dans les expressions du moment induit par la diffusion qui y sont utilisées.]

Klassisch:

Classique :

$$\mathfrak{C}(n, \gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_{\alpha}(n) \mathfrak{A}_{\beta}(n) \mathfrak{A}_{\gamma-\alpha-\beta}(n). \quad (9)$$

Quantentheoretisch:

Quantique :

$$\mathfrak{C}(n, n - \gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_{\alpha, \beta} \mathfrak{A}(n, n - \alpha) \mathfrak{A}(n - \alpha, n - \alpha - \beta) \mathfrak{A}(n - \alpha - \beta, n - \gamma) \quad (10)$$

bzw. die entsprechenden Integrale.

et respectivement les intégrales correspondantes.

In ähnlicher Weise lassen sich alle Größen der Form $x(t)^n$ quantentheoretisch darstellen, und wenn irgend eine Funktion $f[x(t)]$ gegeben ist, so kann man offenbar immer dann, wenn diese Funktion nach Potenzreihen in x entwickelbar ist, das quantentheoretische Analogon finden. Eine wesentliche Schwierigkeit entsteht jedoch, wenn wir zwei Größen $x(t), y(t)$ betrachten und nach dem Produkt $x(t)y(t)$ fragen.

De la même manière, toute les grandeurs de la forme $x(t)^n$ peuvent être représentées selon la théorie des quanta et lorsqu'une fonction quelconque $f[x(t)]$ est donnée, on peut évidemment toujours en trouver l'analogue quantique si la fonction est développable en série de puissance de x . Une difficulté fondamentale a cependant lieu lorsque nous considérons deux grandeurs $x(t), y(t)$ et que nous nous posons la question du produit $x(t)y(t)$.

Sei $x(t)$ durch \mathfrak{A} , $y(t)$ durch \mathfrak{B} charakterisiert, so ergibt sich als Darstellung von $x(t).y(t)$:

Soit $x(t)$ caractérisé par \mathfrak{A} et $y(t)$ par \mathfrak{B} , on obtient pour la représentation de $x(t).y(t)$:

Klassisch

Classique

$$\mathfrak{C}_{\beta}(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}_{\alpha}(n) \mathfrak{B}_{\beta-\alpha}(n).$$

Quantentheoretisch

Quantique

$$\mathfrak{C}(n, n - \beta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \mathfrak{A}(n, n - \alpha) \overline{\mathfrak{B}}(n - \alpha, n - \beta).$$

Während klassisch $x(t).y(t)$ stets gleich $y(t).x(t)$ wird, braucht dies in der Quantentheorie im allgemeinen nicht der Fall zu sein. — In speziellen Fällen, z. B. bei der Bildung von $x(t).x(t)^2$, tritt diese Schwierigkeit nicht auf.

Wenn es sich, wie in der zu Beginn dieses Paragraphen gestellten Frage, um Bildungen der Form

$$v(t)\dot{v}(t)$$

handelt, so wird man quantentheoretisch $v\dot{v}$ ersetzen sollen durch $\frac{v\dot{v} + \dot{v}v}{2}$, um zu erreichen, daß $v\dot{v}$ als Differentialquotient von $\frac{v^2}{2}$ auftritt. In ähnlicher Weise lassen sich wohl stets naturgemäße quantentheoretische Mittelwerte angeben, die allerdings in noch höherem Grade hypothetisch sind als die Formeln (7) und (8).

Abgesehen von der eben geschilderten Schwierigkeit dürften Formeln vom Typus (7), (8) allgemein genügen, um auch die Wechselwirkung der Elektronen in ei-

Alors que classiquement $x(t).y(t)$ est toujours égal à $y(t).x(t)$, ceci n'a pas besoin d'être en général le cas selon la théorie des quanta. — Dans des cas particuliers, par exemple pour la formation de $x(t).x(t)^2$, cette difficulté n'entre pas en ligne de compte.

Lorsqu'il s'agit, comme l'exprime la question posée au début de ce paragraphe, de traiter des expressions de la forme

alors, selon la théorie des quanta, on doit remplacer $v\dot{v}$ par $\frac{v\dot{v} + \dot{v}v}{2}$ afin de parvenir à ce que $v\dot{v}$ se présente comme la dérivée de $\frac{v^2}{2}$. On doit pouvoir spécifier de la même manière les valeurs moyennes quantiques naturelles, même si celles-ci sont assurément encore plus hypothétiques que les formules (7) et (8).

En faisant abstraction de la difficulté que nous venons de décrire, des formules du type (7), (8) devraient en général suffire pour exprimer aussi l'interaction des

nem Atom durch die charakteristischen Amplituden der Elektronen auszudrücken.

§2. Nach diesen Überlegungen, welche die Kinematik der Quantentheorie zum Gegenstand hatten, werden wir zum mechanischen Problem übergehen, das auf die Bestimmung der \mathfrak{A} , ν , W aus den gegebenen Kräften des Systems abzielt. In der bisherigen Theorie wird dieses Problem gelöst in zwei Schritten:

1. Integration der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (11)$$

2. Bestimmung der Konstante bei periodischen Bewegungen durch

$$\oint pdq = \oint m\dot{x} dx = J(= nh). \quad (12)$$

Wenn man sich vornimmt, eine quantentheoretische Mechanik aufzubauen, welche der klassischen möglichst analog ist, so liegt es wohl sehr nahe, die Bewegungsgleichung (11) direkt in die Quantentheorie zu übernehmen wobei es nur notwendig ist — um nicht vom sicheren Fundament der prinzipiell beobachtbaren Größen abzugehen —, an Stelle der Größen \ddot{x} , $f(x)$ ihre aus §1 bekannten

électrons dans un atome au moyen des amplitudes caractéristiques des électrons.

§2. Après ces considérations qui avaient pour objet la cinématique de la théorie des quanta, nous allons passer au problème mécanique qui a pour but la détermination des \mathfrak{A} , ν , W à partir des forces données du système. Dans le cadre de la théorie jusqu'à présent admise, ce problème sera résolu en deux temps :

1. Intégration de l'équation du mouvement

2. Détermination de la constante des mouvements périodiques grâce à

Lorsque l'on entreprend d'élaborer une mécanique quantique qui soit aussi analogue que possible à la mécanique classique, il est alors tout à fait naturel d'introduire directement l'équation du mouvement (11) dans la théorie des quanta. Il est alors seulement nécessaire — afin de ne pas s'écarter de la base solide constituée par ces grandeurs par principe observables —, de remplacer les gran-

quantentheoretischen Repräsentanten zu setzen. In der klassischen Theorie ist es möglich, die Lösung von (11) durch Ansatz von x in Fourierreihen bzw. Fourierintegralen mit unbestimmten Koeffizienten (und Frequenzen) zu suchen; allerdings erhalten wir dann im allgemeinen unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten bzw. Integralgleichungen, die sich nur in speziellen Fällen zu einfachen Rekursionsformeln für die \mathfrak{A} umgestalten lassen. In der Quantentheorie sind wir jedoch vorläufig auf diese Art der Lösung von (11) angewiesen, da sich, wie oben besprochen, keine der Funktion $x(n, t)$ direkt analoge quantentheoretische Funktion definieren ließ.

Dies hat zur Folge, daß die quantentheoretische Lösung von (11) zunächst nur in den einfachsten Fällen durchführbar ist. Bevor wir auf solche einfache Beispiele eingehen, sei noch die quantentheoretische Bestimmung der Konstante nach (12) hergeleitet. Wir nehmen also an, daß die Bewegung (klassisch) periodisch sei:

deurs $\ddot{x}, f(x)$ par leurs représentants quantiques connus tels qu'ils ont été établis au §1. Dans la théorie classique il est possible de chercher la solution de (11) en mettant x sous forme d'une série de Fourier (respectivement d'une intégrale de Fourier) avec des coefficients) indéterminés (et des fréquences). Il est vrai que nous obtenons alors en général des équations en nombre illimité avec un nombre illimité d'inconnues (respectivement des équations intégrales). C'est seulement dans certains cas que celles-ci peuvent se transformer pour les \mathfrak{A} en simples relations de récurrence. En théorie des quanta nous sommes toutefois contraints à ce type de résolution de (11) car, comme il a été dit ci-dessus, on ne peut définir directement aucune fonction quantique qui soit analogue à la fonction $x(n, t)$.

Il en résulte que la résolution de (11) selon la théorie des quanta ne peut être entreprise que dans les cas les plus simples. Avant que nous abordions de tels exemples simples, donnons encore la définition quantique de la constante dans (12). Nous supposons donc que le mouvement (classique) doit être périodique :

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) e^{i\alpha\omega_n t}; \quad (13)$$

dann ist

on a alors

$$m\dot{x} = m \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) \cdot i\alpha\omega_n e^{i\alpha\omega_n t}$$

und

et

$$\oint m\dot{x}dx = \oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\alpha}(n) a_{-\alpha}(n) \alpha^2 \omega_n.$$

Da ferner $a_{-\alpha}(n) = \overline{a_{\alpha}(n)}$ ist
(x soll reell sein), so folgt

Comme en outre $a_{-\alpha}(n) = \overline{a_{\alpha}(n)}$ (x doit être réel), il en résulte

$$\oint m\dot{x}^2 dt = 2\pi m \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_{\alpha}(n)|^2 \alpha^2 \omega_n. \quad (14)$$

Dieses Phasenintegral hat man bisher meist gleich einem ganzen Vielfachen von h , also gleich $n \cdot h$ gesetzt; eine solche Bedingung fügt sich aber nicht nur sehr gezwungen der mechanischen Rechnung ein, sie erscheint auch selbst vom bisherigen Standpunkt aus im Sinne des Korrespondenzprinzips willkürlich; denn korrespondenzmäßig sind die J nur bis auf eine additive Konstante als ganzzahlige Vielfache von h festgelegt, und an Stelle von (14) hätte naturgemäß zu treten:

Jusqu'à présent, on a habituellement mis cette intégrale de phase égale à un multiple entier de h , donc égale à $n \cdot h$; mais ce n'est pas seulement dans le calcul de la mécanique que cette condition s'introduit par un forçage, elle apparaît aussi, du point de vue jusqu'ici adopté, comme étant elle-même arbitraire au sens du principe de correspondance; car, suivant celui-ci, les J ne sont seulement déterminés comme multiples entiers de h qu'à une constante additive près. À la place de (14), il serait plus naturel d'avancer

$$\frac{d}{dn}(nh) = \frac{d}{dn} \cdot \oint m\dot{x}^2 dt$$

das heißt:

c'est-à-dire :

$$h = 2\pi m \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha \frac{d}{dn} (\alpha \omega_n \cdot |a_\alpha|^2). \quad (15)$$

Eine solche Bedingung legt allerdings die a_α dann auch nur bis auf eine Konstante fest, und diese Unbestimmtheit hat empirisch in dem Auftreten von halben Quantenzahlen zu Schwierigkeiten Anlaß gegeben.

Fragen wir nach einer (14) und (15) entsprechenden quantentheoretischen Beziehung zwischen beobachtbaren Größen, so stellt sich die vermißte Eindeutigkeit von selbst wieder her.

Zwar besitzt eben nur Gleichung (15) eine an die Kramerssche Dispersionstheorie anknüpfende einfache quantentheoretische Verwandlung⁴:

$$h = 4\pi m \sum_0^\infty \alpha \left\{ |a(n, n + \alpha)|^2 \omega(n, n + \alpha) - |a(n, n - \alpha)|^2 \omega(n, n - \alpha) \right\}, \quad (16)$$

Une telle condition ne détermine donc les a_α qu'à une constante près et cette indétermination a donné lieu, dans la pratique, à des difficultés lors de l'introduction de nombres quantiques demi entiers.

Si nous posons la question d'une relation quantique correspondant à (14) et (15) entre des grandeurs observables, l'unicité perdue se rétablit d'elle-même.

Il est vrai que seule l'équation (15) a la propriété de se transformer en une relation quantique simple liée à la théorie de la dispersion de Kramers⁴ :

4. Diese Beziehung wurde schon auf Grund von Betrachtungen von Dispersion gegeben von W. Kuhn, *ZS. f. Phys.* **33**, 408, 1925, und Thomas, *Naturw.* **13**, 1925. [Cette relation a déjà été énoncée à partir de considérations concernant la dispersion par...]

doch diese Beziehung genügt hier zur eindeutigen Bestimmung der a ; denn die in den Größen a zunächst unbestimmte Konstante wird von selbst durch die Bedingung festgelegt, daß es einen Normalzustand geben solle, von dem aus keine Strahlung mehr stattfindet; sei der Normalzustand mit n_0 bezeichnet, so sollen also alle

$$a(n_0, n_0 - \alpha) = 0 \text{ (für/pour } \alpha > 0)$$

sein. Die Frage nach halbzahliger oder ganzzahliger Quantelung dürfte daher in einer quantentheoretischen Mechanik, die nur Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen benutzt, nicht auftreten können.

Die Gleichungen (11) und (16) zusammen enthalten, wenn sie sich lösen lassen, eine vollständige Bestimmung nicht nur der Frequenzen und Energien, sondern auch der quantentheoretischen Übergangswahrscheinlichkeiten. Die wirkliche mathematische Durchführung gelingt jedoch zunächst nur in den einfachsten Fällen; eine besondere Komplikation entsteht auch bei vielen Systemen, wie z. B. beim Wasserstoffatom, dadurch, daß die Lösungen teils periodischen, teils aperiodischen Bewegungen entsprechen, was zur Folge hat, daß die quantentheoretischen Reihen (7),

pourtant cette relation suffit pour une détermination unique des a . En effet, la constante indéterminée contenue initialement dans les grandeurs a sera d'elle-même déterminée par la condition que l'on doit avoir un état fondamental à partir duquel aucun rayonnement ne peut plus avoir lieu; dénotons cet état par n_0 , on doit alors avoir :

La question de la quantification par demi entiers ou par entiers ne devrait alors plus se poser dans une mécanique des quanta qui ne nécessite que des relations entre grandeurs observables.

Quand il est possible de les résoudre, les équations (11) et (16) contiennent ensemble une détermination complète non seulement des fréquences et des énergies, mais également des probabilités de transition quantiques. Cependant, la véritable résolution mathématique ne réussit que dans les cas les plus simples; une complication particulière apparaît aussi dans beaucoup de systèmes, comme par exemple dans l'atome d'hydrogène, en ce que les solutions correspondent à des mouvements en partie périodiques et en partie a-périodiques ce qui a pour conséquence que les séries quanti-

(8) und die Gleichung (16) stets in eine Summe und ein Integral zerfallen. Quantenmechanisch läßt sich eine Trennung in „periodische und aperiodische Bewegungen“ im allgemeinen nicht durchführen.

Trotzdem könnte man vielleicht die Gleichungen (11) und (16) wenigstens prinzipiell als befriedigende Lösung des mechanischen Problems ansehen, wenn sich zeigen ließe, daß diese Lösung übereinstimmt bzw. nicht in Widerspruch steht mit den bisher bekannten quantenmechanischen Beziehungen; daß also eine kleine Störung eines mechanischen Problems zu Zusatzgliedern in der Energie bzw. in den Frequenzen Anlaß gibt, die eben den von Kramers und Born gefundenen Ausdrücken entsprechen — im Gegensatz zu denen, welche die klassische Theorie liefern würde. Ferner müßte untersucht werden, ob im allgemeinen der Gleichung (11) auch in der hier vorgeschlagenen quantentheoretischen Auffassung ein Energieintegral $m\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}$ entspricht und ob die so gewonnene Energie — ähnlich, wie klassisch gilt: $\nu = \frac{\partial W}{\partial J}$ — der Bedingung genügt: $\Delta W = h\nu$. Eine allgemeine Beantwortung dieser Fragen erst könnte den inneren Zusammenhang der bisherigen quantenmechanischen Versuche dartun und zu einer konse-

ques (7) et (8) et l'équation (16) se décomposent constamment en une somme et une intégrale. En général, cette séparation entre « des mouvements périodiques et a-périodiques » ne peut être menée à bien dans le cadre de la mécanique des quanta.

Néanmoins, on pourrait peut-être considérer, du moins par principe, les équations (11) et (16) comme une solution satisfaisante du problème mécanique si on pouvait montrer que cette solution est en accord ou n'est pas en contradiction avec les relations quantiques connues jusqu'à présent. Il en serait de même si l'on pouvait montrer qu'une petite perturbation du système mécanique donne lieu à des termes supplémentaires en énergie et respectivement en fréquence qui correspondent précisément aux expressions trouvées par Kramers et Born — et qui seraient en contradiction avec celles que fournirait la théorie classique. De plus, alors que la relation (11) correspond d'une manière générale à une intégrale d'énergie $m\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}$, on devrait rechercher s'il en est de même dans la conception quantique qui est ici proposée et si l'énergie ainsi obtenue — de la même façon que classiquement $\nu = \frac{\partial W}{\partial J}$ — satisfait à la condition : $\Delta W = h\nu$. Une réponse générale à ces questions pourrait montrer la cohésion interne des re-

quent nur mit beobachtbaren Größen operierenden Quantenmechanik führen. Abgesehen von einer allgemeinen Beziehung zwischen der Kramersschen Dispersionsformel und den Gleichungen (11) und (16) können wir die oben gestellten Fragen nur in den ganz speziellen, durch einfache Rekursion lösbaren Fällen beantworten.

Jene allgemeine Beziehung zwischen der Kramersschen Dispersionsstheorie und unseren Gleichungen (11), (16) besteht darin, daß aus Gleichung (11) (d. h. ihrem quantentheoretischen Analogon) ebenso wie in der klassischen Theorie folgt, daß sich das schwingende Elektron gegenüber Licht, das viel kurzwelliger ist als alle Eigenschwingungen des Systems, wie ein freies Elektron verhält. Dieses Resultat folgt auch aus der Kramersschen Theorie, wenn man noch Gleichung (16) berücksichtigt. In der Tat findet Kramers für das durch die Welle $E \cos 2\pi\nu t$ induzierte Moment:

cherches quantiques menées jusqu'ici et conduire à une mécanique des quanta consistante opérant uniquement avec des grandeurs observables. Mis à part une relation générale entre la formule de dispersion de Kramers et les équations (11) et (16), on ne peut répondre aux questions posées ci-dessus que dans des cas tout à fait spécifiques susceptibles d'être résolus au moyen de simples relations de récurrence.

Cette relation générale entre la théorie de la dispersion de Kramers et nos équations (11) et (16), consiste en ceci : de l'équation (11) (c'est-à-dire son équivalent quantique) tout comme de la théorie classique, il résulte que l'électron oscillant se comporte vis à vis de la lumière dont la longueur d'onde est plus courte que toutes les oscillations propres du système, comme un électron libre. Ce résultat résulte aussi de la théorie de Kramers si on tient encore compte de l'équation (16). En fait Kramers trouve pour le moment induit par une onde $E \cos 2\pi\nu t$:

$$M = e^2 E \cos 2\pi\nu t. \frac{2}{h} \sum_0^{\infty} \alpha \left\{ \frac{|a(n, n + \alpha)|^2 \nu(n, n + \alpha)}{\nu^2(n, n + \alpha) - \nu^2} - \frac{|a(n, n - \alpha)|^2 \nu(n, n - \alpha)}{\nu^2(n, n - \alpha) - \nu^2} \right\},$$

also für $\nu \gg \nu(n, n + \alpha)$ et donc pour $\nu \gg \nu(n, n + \alpha)$

$$M = -\frac{2Ee^2 \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot h} \sum_0^\infty \alpha \left\{ |a(n, n + \alpha)|^2 \nu(n, n + \alpha) - |a(n, n - \alpha)|^2 \nu(n, n - \alpha) \right\},$$

was wegen (16) übergeht in qui, grâce à (16), devient :

$$M = -\frac{e^2 E \cos 2\pi\nu t}{\nu^2 \cdot 4\pi^2 m}.$$

§3. Als einfachstes Beispiel soll im folgenden der anharmonische Oszillator behandelt werden:

§3. Comme exemple le plus simple, nous traiterons dans ce qui suit l'oscillateur anharmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 = 0 \quad (17)$$

Klassisch läßt sich diese Gleichung befriedigen durch einen Ansatz der Form

Du point de vue classique, cette équation a pour solution une expression de la forme

$$x = \lambda a_0 + a_1 \cos \omega t + \lambda a_2 \cos 2\omega t + \lambda^2 a_3 \cos 3\omega t + \dots \lambda^{\tau-1} a_\tau \cos \tau \omega t,$$

wobei die a Potenzreihen in λ sind, die mit einem von λ freien Gliede beginnen. Wir versuchen quantentheoretisch einen analogen Ansatz und repräsentieren x durch Glieder der Form

où les a sont des séries en puissance de λ qui commencent par un terme indépendant de λ . Nous cherchons une expression quantique analogue où x aura pour représentant les termes de la forme

$$\lambda a(n, n); a(n, n - 1) \cos \omega(n, n - 1)t; \lambda a(n, n - 2) \cos \omega(n, n - 2)t; \dots \lambda^{\tau-1} a(n, n - \tau) \cos \omega(n, n - \tau)t \dots$$

Die Rekursionsformeln zur Bestimmung der a und ω lauten (bis auf Glieder der Ordnung λ) nach Gleichung (3), (4) bzw. (7), (8):

Les formules de récurrence pour la détermination des a et ω s'établissent (jusqu'aux termes d'ordre λ) d'après (3), (4), respectivement (7), (8) :

Klassisch:

Classique :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 a_0(n) + \frac{a_1^2(n)}{2} &= 0; \\ -\omega^2 + \omega_0^2 &= 0; \\ (-4\omega^2 + \omega_0^2) a_2(n) + \frac{a_1^2}{2} &= 0; \\ (-9\omega^2 + \omega_0^2) a_3(n) + a_1 a_2 &= 0; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Quantentheoretisch:

Quantique :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 a_0(n) + \frac{a^2(n+1, n) + a^2(n, n-1)}{4} &= 0; \\ -\omega^2(n, n-1) + \omega_0^2 &= 0; \\ (-\omega^2(n, n-2) + \omega_0^2) a(n, n-2) \\ + \frac{a(n, n-1) a(n-1, n-2)}{2} &= 0; \\ (-\omega^2(n, n-3) + \omega_0^2) a(n, n-3) + \frac{a(n, n-1) a(n-1, n-3)}{2} \\ + \frac{a(n, n-2) a(n-2, n-3)}{2} &= 0; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Hierzu kommt die Quantenbedingung:

Ajouté à cela la condition des quanta :

Klassisch ($J = nh$):

Classique ($J = nh$) :

$$1 = 2\pi m \frac{d}{dJ} \sum_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 \frac{|a_\tau|^2 \omega}{4}.$$

Quantentheoretisch:

Quantique :

$$h = \pi m \sum_0^{\infty} \left[|a(n + \tau, n)|^2 \omega(n + \tau, n) - |a(n, n - \tau)|^2 \omega(n, n - \tau) \right].$$

Dies ergibt in erster Näherung, sowohl klassisch wie quantentheoretisch:

Ce qui donne en première approximation, aussi bien classiquement que selon la théorie des quanta :

$$a_1^2(n) \text{ bzw. /respectivement } a^2(n, n - 1) = \frac{(n + \text{const})h}{\pi m \omega_0}. \quad (20)$$

Quantentheoretisch läßt sich die Konstante in (20) bestimmen durch die Bedingung, daß $a(n_0, n_0 - 1)$ im Normalzustand Null sein solle. Numerieren wir die n so, daß im Normalzustand gleich Null wird, also $n_0 = 0$, so folgt

D'après la théorie des quanta, la constante dans (20) est déterminée par la condition que $a(n_0, n_0 - 1)$ doit être nul dans l'état fondamental. Si on donne à n des valeurs numériques telles que n à l'état fondamental soit égal à zéro, soit $n_0 = 0$, il en résulte :

$$a^2(n, n - 1) = \frac{nh}{\pi m \omega_0}.$$

Aus den Rekursionsgleichungen (18) folgt dann, daß in der klassischen Theorie a_τ (in erster Näherung in λ) von der Form wird $\kappa(\tau)n^{\frac{\tau}{2}}$, wo $\kappa(\tau)$ einen von n unabhängigen Faktor darstellt. In der Quantentheorie ergibt sich aus (19)

Il résulte alors des équations de récurrence (18) que, dans la théorie classique, a_τ (en première approximation en λ) sera de la forme $\kappa(\tau)n^{\frac{\tau}{2}}$, où $\kappa(\tau)$ représente un facteur indépendant de n . Selon la théorie des quanta, on obtient à partir de (19)

$$a(n, n - \tau) = \kappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n - \tau)!}}, \quad (21)$$

wobei $\kappa(\tau)$ desselben, von n unabhängigen Proportionalitätsfaktor darstellt. Für große Werte von n geht natürlich der quantentheoretische Wert von a_τ asymptotisch in den klassischen über.

Für die Energie liegt es nahe, den klassischen Ansatz

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + m\omega_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{m\lambda}{3}x^3 = W$$

zu versuchen, der in der hier durchgerechneten Näherung auch quantentheoretisch wirklich konstant ist und nach (19), (20) und (21) den Wert hat:

Klassisch:

$$W = \frac{n h \omega_0}{2\pi}. \quad (22)$$

Quantentheoretisch [nach (7), (8)]:

$$W = \frac{(n + \frac{1}{2}) h \omega_0}{2\pi}. \quad (23)$$

(bis auf Größen der Ordnung λ^2).

Nach dieser Auffassung ist also schon beim harmonischen Oszillator die Energie nicht durch die „klassische Mechanik“, d.h. (22) darstellbar, sondern sie hat die Form (23).

où $\kappa(\tau)$ représente le même facteur de proportionnalité indépendant de n . Il est évident que pour de grandes valeurs de n la valeur quantique de a_τ tend asymptotiquement vers celle de la théorie classique.

Pour l'énergie, il semble plausible d'essayer l'hypothèse classique

qui, tout au long de ce calcul approché, est aussi réellement constante dans le cadre de la théorie des quanta et qui d'après (19), (20) et (21) a la valeur :

Classique :

(jusqu'aux termes en λ^2 non compris).

D'après cette conception, l'énergie d'un oscillateur harmonique n'est donc déjà plus représentable par la « mécanique classique », c'est-à-dire par (22), mais elle prend la forme (23).

Die genauere Durchrechnung auch der höheren Näherungen in W , a , ω soll ausgeführt werden am einfacheren Beispiel des anharmonischen Oszillators vom Typus:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0$$

Klassisch kann man hier setzen:

$$x = a_1 \cos \omega t + \lambda a_3 \cos 3\omega t + \lambda^2 a_5 \cos 5\omega t + \dots,$$

analog versuchen wir quantentheoretisch den Ansatz

$$a(n, n-1) \cos \omega(n, n-1)t; \lambda a(n, n-3) \cos \omega(n, n-3)t; \dots$$

Die Größen a sind wieder Potenzreihen in λ , deren erstes Glied, wie in (21), die Form hat:

$$a(n, n-\tau) = \kappa(\tau) \sqrt{\frac{n!}{(n-\tau)!}},$$

wie man durch Ausrechnen der den Gleichungen (18), (19) entsprechenden Gleichungen erhält.

Führt man die Berechnung von ω , a nach (18), (19) bis zur Näherung λ^2 bzw. λ durch, so erhält man:

Le calcul plus précis, y compris les ordres d'approximation plus élevés, en W , a , ω va être effectué en prenant l'exemple simple de l'oscillateur anharmonique du type :

Classiquement, on peut poser :

Par analogie nous essayons l'hypothèse quantique

Les grandeurs a sont une nouvelle fois des séries en puissance de λ , dont le premier membre, comme dans (21), a la forme :

que l'on obtient par le calcul des équations qui correspondent aux équations (18), (19).

Si l'on effectue le calcul complet de ω et a d'après (18), (19) à l'approximation λ^2 et respectivement λ , on obtient alors :

$$\omega(n, n-1) = \omega_0 + \lambda \cdot \frac{3nh}{8\pi\omega_0^2 m} \quad (24)$$

$$- \lambda^2 \cdot \frac{3h^2}{256\omega_0^5 m^2 \pi^2} (17n^2 + 7) + \dots$$

$$a(n, n-1) = \sqrt{\frac{nh}{\pi\omega_0 m}} \left(1 - \lambda \frac{3nh}{16\pi\omega_0^3 m} + \dots \right). \quad (25)$$

$$a(n, n-3) = \frac{1}{32} \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3 \omega_0^7 m^3} n(n-1)(n-2)} \quad (26)$$

$$\left(1 - \lambda \frac{39(n-1)h}{32\pi\omega_0^3 m} \right).$$

Die Energie, die als das konstante Glied von

L'énergie qui est définie comme élément constant à partir de

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} + m\omega_0^2 \frac{x^2}{2} + \frac{m\lambda}{4} x^4$$

definiert ist (daß die periodischen Glieder wirklich alle Null sind, konnte ich nicht allgemein beweisen, in den durchgerechneten Gliedern war es den Fall), ergibt sich zu

(je n'ai pas pu prouver en général que les termes périodiques sont réellement tous nuls, mais cela était le cas pour ceux qui ont été calculés) est donnée par

$$W = \frac{(n + \frac{1}{2})h\omega_0}{2\pi} + \lambda \cdot \frac{3(n^2 + n + \frac{1}{2})h^2}{8.4\pi^2\omega_0^2.m} \quad (27)$$

$$- \lambda^2 \cdot \frac{h^3}{512\pi^3\omega_0^5 m^2} \left(17n^3 + \frac{51}{2}n^2 + \frac{59}{2}n + \frac{21}{2} \right).$$

Diese Energie kann man auch noch nach dem Kramers-Bornschen Verfahren berechnen, indem man das Glied $\frac{m\lambda}{4}x^4$ als Störungsglied zum harmonischen

On peut également calculer cette énergie à partir de la méthode de Kramers-Born dans laquelle le terme $\frac{m\lambda}{4}x^4$ est conçu comme un terme de perturbation

Oszillator auffaßt. Man kommt dann wirklich wieder genau zum Resultat (27), was mir eine bemerkenswerte Stütze für die zugrundegelegten quantenmechanischen Gleichungen zu sein scheint. Ferner erfüllt die nach (27) berechnete Energie die Formel [vgl. (24)]:

$$\frac{\omega(n, n-1)}{2\pi} = \frac{1}{h} \cdot [W(n) - W(n-1)],$$

welche ebenfalls als notwendige Bedingung für die Möglichkeit einer den Gleichungen (11) und (16) entsprechenden Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten zu betrachten ist.

Zum Schluß sei der Rotator als Beispiel angeführt und auf die Beziehung der Gleichungen (7), (8) zu den Intensitätsformeln beim Zeemaneffekt⁵ und bei den Multipletts⁶ hingewiesen.

Sei der Rotator repräsentiert durch ein Elektron, das im konstanten Abstand a um einen Kern kreist. Die „Bewegungsgleichungen“ besagen dann klassisch wie quantentheoretisch nur, daß das Elektron im konstanten Abstand

de l'oscillateur harmonique. On arrive alors vraiment à nouveau et de façon exacte au résultat (27), ce qui m'apparaît être un soutien remarquable aux équations fondamentales de la mécanique des quanta. En outre, l'énergie calculée à partir de (27) est en accord avec la formule [voir (24)] :

que l'on peut considérer comme une condition nécessaire permettant une détermination des probabilités de transition en accord avec les équations (11) et (16).

Considérons pour conclure l'exemple du mouvement de rotation et observons la relation entre les équations (7), (8) et les formules donnant l'intensité pour l'effet Zeeman⁵ et pour les multiplets⁶.

Soit le mouvement de rotation représenté par un électron qui décrit un cercle autour du noyau à une distance constante a . Les « équations du mouvement » stipulent, aussi bien classiquement que selon la théorie des quanta,

5. Goudsmit und R. de L. Kronig, *Naturw.* **13**, 90, 1925; H. Hönl, *ZS. f. Phys.* **31**, 340, 1925.

6. R. de L. Kronig, *ZS. f. Phys.* **31**, 885, 1925; A. Sommerfeld und H. Hönl, *Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss.* 1925, S. 141; H. N. Russell, *Nature*, **115**, 835, 1925.

a eine ebene, gleichförmige Rotation um den Kern beschreibt mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die „Quantenbedingung“ (16) ergibt nach (12):

$$h = \frac{d}{dn}(2\pi m a^2 \omega),$$

nach (16):

$$h = 2\pi m \{a^2 \omega(n+1, n) - a^2 \omega(n, n-1)\},$$

woraus in beiden Fällen folgt:

$$\omega(n, n-1) = \frac{h \cdot (n + \text{const})}{2\pi m a^2}$$

Die Bedingung, daß im Normalzustand ($n_0 = 0$) die Strahlung verschwinden solle, führt zu der Formel:

$$\omega(n, n-1) = \frac{h \cdot n}{2\pi m a^2} \quad (28)$$

Die Energie wird

$$W = \frac{m}{2} v^2$$

oder nach (7), (8)

$$W = \frac{m}{2} a^2 \cdot \frac{\omega^2(n, n-1) + \omega^2(n+1, n)}{2} = \frac{h^2}{8\pi^2 m a^2} (n^2 + n + \frac{1}{2}), \quad (29)$$

que l'électron situé à la distance constante a décrit une rotation uniforme plane autour du noyau avec la vitesse angulaire ω . La « condition quantique » (16) donne d'après (12) :

d'après (16) :

d'où il résulte dans les deux cas :

La condition que, à l'état fondamental ($n_0 = 0$), le rayonnement doit disparaître conduit à la formule :

L'énergie est

ou d'après (7), (8)

was wieder der Beziehung $\omega(n, n-1) = \frac{2\pi}{h} [W(n) - W(n, n-1)]$ genügt. Als Stütze für die von der bisher üblichen Theorie abweichenden Formeln (28) und (29) kann es angesehen werden, daß viele Bandenspektren (auch solche, bei denen die Existenz eines Elektronenimpulses unwahrscheinlich ist) nach Kratzer⁷ Formeln vom Typus (28), (29) (die man bisher der klassisch-mechanischen Theorie zuliebe durch halbzahlige Quantelung zu erklären suchte) zu fordern scheinen.

Um beim Rotator zu den Goudsmit-Kronig-Hönl'schen Formeln zu gelangen, müssen wir das Gebiet der Probleme mit einem Freiheitsgrad verlassen und annehmen, daß der Rotator, in irgendwelcher Richtung im Raume, um die Achse z eines äußeren Feldes eine sehr langsame Präzession \mathbf{o} ausführe. Die dieser Präzession entsprechende Quantenzahl heiße m . Dann wird die Bewegung repräsentiert durch die Größen

$$\begin{aligned} z &: a(n, n-1; m, m) \cos \omega(n, n-1)t; \\ x + iy &: b(n, n-1; m, m-1) e^{i[\omega(n, n-1) + \mathbf{o}]t}; \\ & b(n, n-1; m-1, m) e^{i[-\omega(n, n-1) + \mathbf{o}]t}. \end{aligned}$$

qui satisfait à nouveau la relation $\omega(n, n-1) = \frac{2\pi}{h} [W(n) - W(n, n-1)]$. À l'appui des formules (28) et (29) qui diffèrent de celles de la théorie utilisée jusqu'alors, on peut considérer d'après Kratzer⁷ que beaucoup de spectres de bandes (y compris ceux pour lesquels l'existence d'une quantité de mouvement pour l'électron est improbable) paraissent exiger des formules du type (28), (29) (alors que l'on préférerait jusqu'à présent se conformer à la théorie de la mécanique classique par une quantification par demi entier).

Afin d'obtenir les formules de Goudsmit-Kronig-Hönl pour le rotateur, nous devons abandonner le domaine des problèmes à un degré de liberté et supposer que le rotateur, dans n'importe quelle direction de l'espace, accomplit autour de l'axe z d'un champ extérieur une très lente précession \mathbf{o} . Le nombre quantique correspondant à cette précession est m . Le mouvement sera alors représenté par les grandeurs

7. Vgl. z. B.; A. Kratzer, *Sitzungsber. d. Bayr. Akad.* 1922, S. 107.

Die Bewegungsgleichungen
lauten einfach:

Les équations du mouvement
sont simplement :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

was nach (7) zu den Gleichungen⁸
Anlaß gibt:

ce qui d'après (7) conduit aux
équations⁸ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} a^2 (n, n-1; m, m) + b^2(n, n-1; m, m-1) \right. \\ \left. + b^2(n, n-1; m, m+1) + \frac{1}{2} a^2(n+1, n; m, m) \right. \\ \left. + b^2(n+1, n; m-1, m) + b^2(n+1, n; m+1, m) \right\} = a^2. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(n, n-1; m, m) a(n-1, n-2; m, m) \\ = b(n, n-1; m, m+1) b(n-1, n-2; m+1, m) \\ + b(n, n-1; m, m-1) b(n-1, n-2; m-1, m). \end{aligned} \quad (31)$$

Hierzu kommt nach (16) die
Quantenbedingung:

D'après (16), il faut ajouter la
condition de quantification :

$$\begin{aligned} 2\pi m \{ b^2(n, n-1; m, m-1) \omega(n, n-1) \\ - b^2(n, n-1; m-1, m) \omega(n, n-1) \} = (m + \text{const}) h. \end{aligned} \quad (32)$$

Die diesen Gleichun-
gen entsprechenden klassischen
Beziehungen:

Les relations classiques corres-
pondant à ces équations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a_0^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 &= a^2 ; \\ \frac{1}{4} a_0^2 &= b_1 b_{-1} ; \\ 2\pi m (b_{+1}^2 - b_{-1}^2) \omega &= (m + \text{const}) h \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

8. Die Gleichung (30) ist im wesentlichen identisch mit den Ornstein-Burgerschen Summenregeln. [La relation (30) est pour l'essentiel identique aux règles de sommation de Ornstein-Burger.]

genügen (bis auf die unbestimmte Konstante bei m) zur eindeutigen Festlegung der a_0, b_1, b_{-1} .

Die am einfachsten sich darbietende Lösung der quantentheoretischen Gleichungen (30), (31), (32) lautet:

$$\begin{aligned} b(n, n-1; m, m-1) &= a \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\ b(n, n-1; m-1, m) &= a \sqrt{\frac{(n-m)(n-m+1)}{4(n+\frac{1}{2})n}}; \\ a(n, n-1; m, m) &= a \sqrt{\frac{(n+m+1)(n-m)}{(n+\frac{1}{2})n}}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den Formeln von Goudsmit, Kronig und Hönl überein; man kann jedoch nicht einfach einsehen, daß diese Ausdrücke die einzige Lösung von (30), (31), (32) darstellen — was mir jedoch bei Beachtung der Randbedingungen (Verschwinden der a, b am „Rande“, vgl. die oben zitierten Arbeiten von Kronig, Sommerfeld und Hönl, Russell) wahrscheinlich scheint.

Eine der hier angestellten ähnliche Überlegung führt auch bei den Intensitätsformeln der Multipletts zu dem Ergebnis, daß die genannten Intensitätsregeln mit Gleichung (7) und (16) im Ein-

suffisent (à la constante indéterminée s'ajoutant à m près) pour déterminer de manière unique a_0, b_1, b_{-1} .

La solution qui se présente de manière la plus simple des équations quantiques (30), (31), (32) est :

Ces expressions sont en accord avec les formules de Goudsmit, Kronig et Hönl; on ne peut cependant pas se rendre compte de manière simple si ces expressions représentent la solution unique de (30), (31), (32) — ce qui me semble cependant probable au regard des conditions aux limites (disparition des a, b aux « bords », voir les travaux cités plus haut de Kronig, Sommerfeld et Hönl, Russell).

Une considération semblable à celles auxquelles nous nous livrons ici, appliquée aux formules donnant l'intensité des multiplets, conduit à la conclusion que les règles connues concernant les in-

klang stehen. Dieses Resultat dürfte wiederum als Stütze insbesondere für die Richtigkeit der kinematischen Gleichung (7) anzusprechen sein.

Ob eine Methode zur Bestimmung quantentheoretischer Daten durch Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen, wie die hier vorgeschlagene, schon in prinzipieller Hinsicht als befriedigend angesehen werden könnte, oder ob diese Methode doch noch einen viel zu groben Angriff auf das physikalische, zunächst offenbar sehr verwickelte Problem einer quantentheoretischen Mechanik darstellt, wird sich erst durch eine tiefere mathematische Untersuchung der hier sehr oberflächlich benutzten Methode erkennen lassen.

Göttingen, Institut für theoretische Physik

tensités sont en accord avec les équations (7) et (16). Ce résultat devrait être considéré comme étant un soutien notable à la validité de l'équation cinématique (7).

C'est d'abord par une recherche mathématique en profondeur sur la méthode utilisée ici de manière très superficielle que nous saurons si une méthode pour la détermination des données de la théorie des quanta par des relations entre des grandeurs observables, comme celle suggérée ici, peut être déjà considérée dans son principe comme satisfaisante ou si cette méthode représente encore une approche beaucoup trop grossière du problème physique manifestement très complexe d'une mécanique quantique.

Göttingen, Institut de Physique théorique