

Des Équations intégrales au Formalisme de la mécanique quantique.

Jacques Harthong

Résumé. On montre comment la théorie analytique de la chaleur de Joseph Fourier est à l'origine d'un courant de recherches étendu sur un siècle et soumis à sa logique propre. Ce courant a abouti à la théorie des espaces de Hilbert et à la théorie spectrale des opérateurs linéaires qui a pris sa forme achevée et presque définitive vers 1924. Comment est-il alors possible que ces théories mathématiques, résultant d'une évolution indépendante, aient pu s'adapter comme un gant à la Mécanique quantique ? On essaie de comprendre ce paradoxe, que la concordance des dates rend encore plus surprenant, et on verra qu'il s'explique par le fait que la Mécanique quantique est d'une certaine façon un retour à l'électromagnétisme.

Abstract. We show how Fourier's analytic theory of Heat has initiated a stream of mathematical research over a century, subjected only to its own logic. This led to the theory of Hilbert spaces and the spectral theory of linear operators, which was accomplished about 1924. How could these mathematical theories, after an independent evolution, fit the quantum Mechanics like a glove? This paradox is made still more astonishing by the time coincidence, and we shall find an explanation in the fact that quantum Mechanics has been created by looking back on electromagnetism.

1. Présentation générale.

Je suis physicien et non historien des mathématiques. Mais c'est dans l'histoire des mathématiques que je cherche un élément de réponse à une question importante pour la Physique : *D'où vient le formalisme mathématique de la Mécanique quantique?* On sait que ce formalisme a pour l'essentiel été proposé par Johann von Neumann dans son livre *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* publié en 1932. Sur cette question, tous les faits historiques sont bien connus et les sources aisément accessibles : le formalisme de von Neumann n'a pas été construit à partir des lois de la nature nouvellement découvertes, mais à partir des travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen. Je voudrais montrer qu'il y a là une *étrangeté historique*, et essayer de la comprendre.

L'étrangeté historique consiste en ceci : les travaux des mathématiciens de Göttingen sont le résultat d'une longue évolution qui pour des raisons évidentes de causalité ne peut pas avoir été influencée par la Mécanique quantique. Je vais donc décrire cette évolution pour répondre à la question : *comment se fait-il qu'après avoir suivi une logique étrangère à des phénomènes encore inconnus, on soit comme par hasard parvenu à un résultat qui coïncide presque parfaitement avec les besoins d'une théorie future et imprévisible, et qu'en outre on y soit parvenu juste au bon moment ?*

C'est la *logique* de l'évolution qui m'intéresse ici ; le déroulement historique est connu (Hellinger 1935, Dieudonné 1981) : le processus a commencé avec les travaux de Fourier sur la chaleur, puis à travers ceux de Sturm et Liouville a conduit aux équations intégrales ; ces dernières ont joué un rôle important au cours du XIX^e siècle en électrostatique, (ce qui a donné chez les mathématiciens le *problème de Dirichlet* par exemple) ; puis vers 1900, Ivar Fredholm a trouvé la solution générale des équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x)$$

ce qui a conduit les mathématiciens de Göttingen à la notion d'espace de Hilbert d'une part, à leurs applications aux équations aux dérivées partielles, à la théorie spectrale des opérateurs, etc. d'autre part.

Il n'y a évidemment pas une origine précise de l'analyse fonctionnelle, c'est seulement la présentation de Hellinger et Dieudonné qui commence avec les travaux de Fourier sur les séries trigonométriques, puis de Sturm et Liouville sur les équations intégrales. Le choix d'une telle "origine" est toujours arbitraire : il fallait bien commencer quelque part si on ne voulait pas remonter à la création du monde. Cependant on ne devra pas

oublier que l'idée de la représentation des fonctions sous forme de séries trigonométriques est due à Daniel Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, cinquante ans avant Fourier. Il me sera d'autant plus difficile d'oublier Daniel Bernoulli que les vibrations joueront, pour mon propos, un rôle plus crucial que la propagation de la chaleur.

Après avoir présenté cette lente évolution des idées en accéléré, pour faire apparaître sa logique, on examinera si elle est vraiment étrangère à tout ce qui aurait pu avoir un rapport même lointain avec la future Mécanique quantique, et on découvrira que cette dernière avait un ancêtre qui a joué un certain rôle dans l'histoire qui nous intéresse ici.

En ce qui concerne le problème de "l'étrangeté" du formalisme de von Neumann, le doute s'était installé immédiatement sous la forme du classique "Grand débat sur la théorie quantique" : *der liebe Herrgott würfelt nicht*, etc. Ce débat est aujourd'hui dépassé, et le problème discuté ici est tout autre : il ne s'agit pas de contester le formalisme de la Mécanique quantique. Beaucoup d'auteurs l'ont déjà contesté, mais aucun n'a proposé mieux. Beaucoup d'autres en *cherchent* un meilleur, mais aucun ne s'est encore dégagé. L'activité de critique est vaine si elle ne s'accompagne pas d'une alternative. La bonne critique sera fournie par celui qui trouvera la bonne solution. Je laisse donc ce "Grand débat" de côté ; il s'agira ici uniquement de cette étrange coïncidence que *les théoriciens de la Mécanique quantique ont trouvé les outils mathématiques qu'il leur fallait, en quelque sorte "clés en main", dans le livre de Courant et Hilbert, dont la première édition a paru en 1924, c'est-à-dire juste au moment où la Mécanique quantique allait naître.*

Certains faits cependant atténuent ce mystère : par exemple, le formalisme de von Neumann ne convient pas pour l'électrodynamique quantique et ses diverses généralisations, et surtout pas en conservant la cohérence et la rigueur qu'il avait dans l'œuvre originale. C'est pourquoi, depuis les premières tentatives de Dirac, le formalisme de la théorie quantique des champs s'est progressivement éloigné de celui qu'avait proposé von Neumann. À première vue, ce dernier constat pourrait étayer la thèse que le formalisme de von Neumann a été provisoirement emprunté "parce que les travaux antérieurs des mathématiciens de Göttingen étaient là", et qu'on s'en est ensuite progressivement et assez rapidement éloigné. Avec cette thèse le mystère serait levé, puisqu'il n'y aurait plus d'adéquation. L'allégorie suivante fera peut-être mieux comprendre la situation : un homme (nommé Erwin) veut ouvrir une porte mais n'en a pas la clé ; il cherche rapidement dans ses poches un objet pour crocheter la serrure et trouve un clou qui lui permet d'ouvrir ; cependant, derrière la première porte il y en a d'autres, que le clou ne permet pas de l'ouvrir,

et il doit alors limer des clés spécialement selon les différentes serrures. Il n'y aurait là rien d'étrange. Le mystère serait qu'Erwin possédât déjà un trousseau de clés *indépendant* du lieu, et s'aperçût que les clés de ce trousseau ouvrent les portes une à une.

Toutefois, cette thèse ne suffit pas à régler le problème, car le formalisme de von Neumann reste quand même la base de la Mécanique quantique, et continue (sous une forme évidemment simplifiée pour des raisons pédagogiques) d'être enseigné dans les cours d'initiation. S'il en est ainsi, ce n'est pas seulement par conservatisme, mais parce que réellement il fonctionne remarquablement bien sur les problèmes tels que l'atome d'hydrogène, l'oscillateur quantique, l'effet tunnel, etc. En outre, il est vrai que l'électrodynamique quantique et ses divers succédanés s'en éloignent, mais en en gardant le coeur : le champ de forces est toujours une superposition d'oscillateurs auxquels on applique bel et bien l'outil de von Neumann, même si on l'oublie ensuite. Donc le trousseau qu'Erwin avait dans sa poche permet effectivement d'ouvrir les portes ; il faut limer un peu, mais ça marche.

Si ce genre de situation était habituel, c'est-à-dire si l'Histoire nous avait habitués à ce que, par une sorte d'harmonie préétablie, les mathématiques fournissent toujours aux physiciens les outils dont ils ont besoin juste au moment où ils en ont besoin, alors le cas de J. von Neumann ne serait pas étrange, mais normal, et les remarques précédentes n'auraient pas de sens. Or l'Histoire nous a habitués à l'inverse. Le formalisme de la théorie électromagnétique s'est construit lentement *à partir des propriétés des champs*, au fur et à mesure qu'on les découvrait. Le rotationnel d'un champ, le flux à travers une surface, la formule de Green, etc., sont des concepts mathématiques directement issus de la nécessité d'écrire sous une forme mathématique des lois qu'on *venait* de découvrir : il suffit pour s'en convaincre de comparer la formulation mathématique des lois dans les mémoires d'Ampère [1823], de Green [1828], de Beer (environs de 1850 et en particulier [1856]), et enfin dans le *Traité* de Maxwell [1873]. Dans la préface de ce *Traité* on trouve d'ailleurs des témoignages directs et explicites de l'antériorité des lois physiques aux formulations mathématiques :

J'ai ainsi reconnu que plusieurs des plus fécondes méthodes de recherche découvertes par les mathématiciens pouvaient recevoir, au moyen d'idées dérivées de celles de Faraday, une forme bien préférable à leur expression primitive.

De même, le calcul infinitésimal est le *résultat* des efforts pour exprimer l'action instantanée d'un "fluide" (Kepler) ou d'une "force" (Newton) sur la vitesse *variable* des planètes ; là aussi, il suffit pour s'en convaincre

de voir les tentatives de Kepler pour y parvenir. Je renvoie à ce sujet à l'ouvrage de référence d'Alexandre Koyré [1961], où il est montré comment Johannes Kepler a cherché à expliquer la vitesse, variable selon la distance au Soleil des planètes sur leur orbite comme l'action d'un fluide émis isotropiquement par le Soleil. L'idée était que chaque élément infinitésimal de l'orbite reçoit une quantité de fluide qui se propage le long du rayon vecteur, et Kepler a longuement cherché à faire coïncider quantitativement la loi des aires avec l'idée que le fluide se propage isotropiquement. Pour cela, il a cherché à exprimer les aires balayées par le rayon vecteur comme une somme d'un nombre infini de longueurs et Alexandre Koyré montre très clairement que ces tentatives de Kepler sont le début du calcul infinitésimal. On connaît beaucoup moins bien les tâtonnements de Newton, qui l'ont conduit au calcul des fluxions, mais il est historiquement incontestable qu'ils sont postérieurs à la Mécanique céleste et inspirés par la connaissance *préalable* des œuvres de Kepler et Galilée.

C'est pourquoi on prendra conscience pleinement l'étrangeté historique que je signalais en essayant d'imaginer que le calcul des fluxions ait été élaboré — dans la continuité des œuvres d'Apollonios de Pergè et d'Archimède de Syracuse sur les coniques — par un prestigieux groupe de mathématiciens établi à Prague depuis 1550 ; que Kepler ait trouvé dans un livre publié par ce groupe en 1604 tous les outils mathématiques pour écrire la loi des aires sous forme différentielle ; et qu'il lui ait suffi d'aller consulter l'un d'entre eux pour qu'il l'aide à résoudre cette équation. Ou encore, on peut essayer d'imaginer que le Calcul vectoriel ait été entièrement élaboré par Laplace et Fourier, juste avant les travaux d'Ampère.

À ma connaissance, cette étrangeté n'a pas frappé les historiens, et c'est pourquoi j'écris cette communication. Certes, la lente maturation des idées qui commence avec la théorie des cordes vibrantes de Jean d'Alembert, Daniel Bernoulli, et Leonhardt Euler (1745 – 1755), et se poursuit avec la théorie analytique de la chaleur (Joseph Fourier, 1807 – 1822), l'extension à des développements en série de fonctions arbitraires ("orthogonales" avant la lettre) et la découverte des "valeurs propres" par Charles Sturm et Joseph Liouville (1828 – 1837), la traduction de ces problèmes en termes d'équations intégrales (J. Liouville, A. Beer, C. Neumann), la résolution des équations intégrales par I. Fredholm (1900 – 1903), et enfin la synthèse de tout cela par les mathématiciens de Göttingen, publiée par Hilbert sous le titre *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (1904 – 1907), et qui fera ensuite la matière essentielle de l'un des plus grands classiques, *Metho-*

den der mathematischen Physik de Richard Courant et David Hilbert (1924), a été maintes fois décrite et commentée. Hilbert lui-même, dans l'introduction des *Grundzüge . . .*, survole cette évolution historique des idées, et met en avant une certaine logique d'évolution. Celle-ci est reprise et développée par Ernst Hellinger dans une contribution incluse dans *Hilberts gesammelte Abhandlungen* [1935].

Cette *logique historique* est aujourd'hui une tradition et constitue le début de l'*Histoire de l'Analyse fonctionnelle*. Un ouvrage excellent sur ce sujet, qui fait d'ailleurs autorité, est la *History of Functional Analysis* de J. Dieudonné (1981). Cet ouvrage reprend la logique historique décelée par Hilbert et Hellinger, et considère les travaux de Sturm et Liouville comme le commencement de l'Analyse fonctionnelle, sans doute parce que les développements en séries de fonctions arbitraires, qui généralisent les développements en séries de fonctions trigonométriques de Joseph Fourier, sont un premier pas vers une conception où les fonctions sont considérées comme un élément générique d'un espace, et non plus comme la donnée concrète d'une expression analytique particulière.

Malheureusement le livre de Dieudonné appartient à une époque où la science est cloisonnée en disciplines étanches. Le fait que Fourier, Poisson, Sturm, et Liouville cherchaient à résoudre le problème de la propagation de la chaleur est évacué, tout comme le fait que l'importance croissante des équations intégrales au cours du XIX^e siècle est motivée par l'électromagnétisme. La trace laissée à l'intérieur des mathématiques par ce dernier y apparaît sous la forme de problèmes posés par Gauss ; ainsi Dieudonné parle du problème de Dirichlet sans expliquer son origine ; de même les nombreux travaux sur l'électrostatique, et utilisant des développements en série ou des équations intégrales, sont ignorés. Enfin, il n'y a évidemment pas un mot sur les rapports entre les espaces de Hilbert et la Mécanique quantique, pas même dans le chapitre "Applications de l'Analyse fonctionnelle". Dans de telles présentations de l'Histoire, le mystère mentionné plus haut ne peut pas être perçu, et toute l'évolution historique semble déterminée téléologiquement, ou par la simple tendance spontanée des mathématiciens à la généralisation des concepts. Ce défaut très courant a souvent été dénoncé par les historiens et je ne m'y attarde pas ; mais il m'oblige, pour montrer le mystère, à reprendre la description de l'évolution historique sans évacuer ces aspects essentiels. Néanmoins ce survol pourra être rapide. Il évitera aussi au lecteur non familier du sujet d'avoir à s'informer préalablement.

Première Partie : La Théorie analytique de la chaleur

1. La méthode de séparation des variables.

On sait que la grande découverte de Fourier est la *formule d'inversion* qui permet d'exprimer les coefficients de Fourier par l'intégrale bien connue. Pour résoudre le problème de la propagation de la chaleur, Fourier applique la *méthode de séparation des variables*, qui consiste à chercher la solution sous forme de série trigonométrique. Cette méthode, appliquée à l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0. \quad (1.1.)$$

était une invention de Daniel Bernoulli, mais ce dernier ne possédait pas la formule d'inversion, qui justement fait toute la puissance du procédé.

On pourra se souvenir à ce propos de la longue discussion qui eut lieu au siècle précédant Fourier entre Daniel Bernoulli, Jean d'Alembert, et Leonhardt Euler, le premier soutenant que la solution devait, pour des raisons physiques, être une série trigonométrique, les deux autres proposant une solution qu'ils croyaient plus générale parce qu'ils ignoraient encore que *toutes* les fonctions continues périodiques sont la somme d'une série trigonométrique.

Pour notre propos la théorie des vibrations est bien plus essentielle que celle de la chaleur, et c'est pourquoi nous allons d'abord rappeler la méthode des séries trigonométriques dans le contexte de la théorie des cordes vibrantes, qui est d'ailleurs son contexte d'origine. Il ne s'agira que d'un rappel (car reprendre toute l'histoire mènerait trop loin), puis nous reviendrons à la théorie de la chaleur.

La théorie des cordes ou des membranes vibrantes est d'autant plus essentielle (pour notre propos ici), que l'équation (1.1) ne décrit pas seulement la vibration d'une membrane; elle décrit *n'importe quelle vibration*, aussi bien celle de l'air que celle de l'éther. Ainsi les modes de vibration acoustiques ou électromagnétiques sont eux aussi décrits par cette équation, qui sera appelée plus tard "équation de Helmholtz", dans le contexte de l'électromagnétisme (encore inexistant au temps de Fourier) et de l'acoustique. Ce point est essentiel pour notre argumentation car le problème de la vibration électromagnétique dans une cavité contient en germe la future Mécanique quantique. Mais voyons d'abord cela comme Euler, Bernoulli et Fourier ont pu le voir.

Proposons-nous de résoudre l'équation (1.1) sur un rectangle de longueur p (selon la coordonnée x) et de largeur q (selon la coordonnée y)

par la méthode de Bernoulli (Le rectangle est choisi parce que c'est le plus simple et suffit pour comprendre l'idée générale). On cherche donc d'abord des solutions sous la forme $f(x) \cdot g(y)$, et on constate que l'on doit avoir $f(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ et $g(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$. Pour que l'équation (1.1) soit satisfaite par le produit $f(x) \cdot g(y)$, il faut que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2 \quad (1.2.)$$

mais les constantes A, B, C, D sont arbitraires. Si on impose à la solution des valeurs données a priori sur le bord du rectangle, les constantes A, B, C, D seront déterminées par les "coefficients de Fourier". Un cas particulièrement simple est celui où la solution doit être nulle sur tout le bord : dans ce cas, les constantes A, B, C, D ne sont pas déterminées de manière unique, mais il y a les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi}{p} n x & A &= 0 \\ \beta &= \frac{2\pi}{q} m y & C &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.)$$

où m et n sont des entiers vérifiant (1.2), c'est-à-dire

$$\frac{n^2}{p^2} + \frac{m^2}{q^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} ; \quad (1.4.)$$

les constantes B et D restent cependant arbitraires.

Ainsi l'équation (1.1) n'a de solutions nulles sur le bord que si k appartient à une famille discrète de valeurs ("valeurs propres"), données par (1.4).

Leonhardt Euler a montré une propriété analogue pour les solutions de (1.1) qui sont nulles sur un cercle au lieu d'un rectangle : les valeurs discrètes de k sont alors déterminées à partir des zéros des fonctions de Bessel J_0, J_1, J_2, \dots .

La signification électromagnétique de l'équation (1.1) est que le domaine est une cavité à l'intérieur de laquelle le champ vibre avec une fréquence k . La condition que le potentiel est nul sur le bord signifie que le domaine est une cavité creusée dans un conducteur parfait (un métal). Le fait mathématique que les solutions nulles au bord de l'équation (1.1) ne peuvent exister que pour des valeurs discrètes de k , signifie donc que, dans une cavité entourée d'un milieu conducteur, le champ électromagnétique ne peut vibrer qu'à certaines fréquences discrètes. Ainsi, le problème de la cavité, capital pour l'électromagnétisme, est mathématiquement identique au problème de la vibration d'une membrane ; identique aussi au problème de la cavité acoustique (tuyau d'orgue par

exemple) qui sera étudié par Helmholtz ; et analogue — ou apparenté — au problème de la diffusion de la chaleur le long d'une tringle ou d'une tôle, résolu par Joseph Fourier, que nous allons aborder maintenant.

2. La théorie analytique de la chaleur.

Les méthodes que Daniel Bernoulli et Leonhardt Euler avaient essayées avec succès pour les cordes vibrantes ou les membranes ont en effet été reprises par Joseph Fourier, pour traiter cette fois le problème de la propagation de la chaleur par conduction dans un milieu matériel. C'est à cette occasion que Fourier va créer la théorie des *séries de Fourier* et prouvera ainsi la justesse des visions de Daniel Bernoulli sur l'universalité des solutions trigonométriques.

Les travaux de Fourier sur la conduction de la chaleur ont commencé dès la fin des années 1790. Toutefois leur présentation à l'Académie date de 1807, et c'est le traité publié en 1822 chez l'éditeur Firmin Didot qui nous servira de référence.

Dans le *discours préliminaire* (préface) de son ouvrage, Fourier motive ses recherches sur la chaleur et les situe par rapport à la philosophie naturelle, en disant que la chaleur est un phénomène à part :

Galilée, premier inventeur des théories dynamiques, découvrit les lois du mouvement des corps graves. Newton embrassa dans cette science nouvelle tout le système de l'univers. Les successeurs de ces philosophes ont donné à ces théories une étendue et une perfection admirables ; ils nous ont appris que les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales, qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. On a reconnu que les mêmes principes règlent le mouvement des astres, leur forme, les inégalités de leurs cours, l'équilibre et les oscillations des mers, les vibrations harmoniques de l'air et des corps sonores, la transmission de la lumière, les actions capillaires, les ondulations des liquides, enfin, les effets les plus composés de toutes les forces naturelles (...)

Mais, quelle que soit l'étendue des théories mécaniques, elles ne s'appliquent point aux effets de la chaleur. Ils composent un ordre spécial de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre.

Ayant fait remarquer qu'on ne connaît pas encore les lois mathématiques générales de la chaleur, Fourier poursuit :

J'ai déduit ces lois d'une longue étude et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour ; je les ai tous observés de nouveau, dans le cours de plusieurs années, avec les instruments les plus précis dont on ait encore fait usage.

(...) J'ai reconnu ensuite que tous les phénomènes qui dépendent de cette action [de la chaleur] se résolvent en un très petit nombre de faits généraux et simples ; et par là, toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'Analyse mathématique. J'en ai conclu que, pour déterminer en nombre les mouvements les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différents corps ne possèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, de la *recevoir* ou de la *transmettre* à travers leur superficie, et de la *conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que notre théorie distingue clairement et qu'elle apprend à mesurer.

Ainsi Fourier a reconnu par l'expérience trois grandeurs qu'il faudra *mesurer*, tout le reste étant affaire d'Analyse mathématique. Il situe donc la théorie analytique de la chaleur dans le cadre de la philosophie naturelle : la physique de la chaleur est donc analogue à la Mécanique céleste, où il faut mesurer les masses et la constante G de la gravitation, la suite étant affaire d'Analyse mathématique ; ou à la physique des cordes vibrantes, où il faut mesurer la tension, la masse, et la longueur ; etc. etc.

Les trois grandeurs reconnues par Fourier sont

- la faculté de contenir la chaleur, aujourd'hui appelée *chaleur spécifique*, et désignée par C : "le coefficient C désigne ce qu'il faut de chaleur pour élever de la température 0 à la température 1 un poids déterminé qui sert d'unité",
- de la recevoir ou de la transmettre à travers leur superficie, le *coefficient de dissipation*, désigné par h : "la surface extérieure du solide ayant une température V , laisse échapper dans l'air [supposé à 0°] une quantité de chaleur proportionnelle à cette température et à l'étendue S de la surface ; cette quantité a pour valeur $h \cdot S \cdot V$ ",
- et de la conduire dans l'intérieur de la masse, ou *conductibilité*, désignée dans la suite par K .

Pour éviter toute confusion, il est sans doute utile de noter ceci : la chaleur spécifique est rapportée à la masse et non au volume. C'est pourquoi la chaleur *volumique* (rapportée au volume) sera désignée par CD , où D est la densité du corps.

Le problème le plus simple et le plus typique est celui d'une tringle, et on s'y limitera puisqu'il contient toutes les idées essentielles. Si x représente l'abscisse le long de la tringle et t le temps, soit $u(t, x)$ la température au point x de la tringle à l'instant t . L'évolution de la tem-

pérature au cours du temps est alors décrite par l'équation aux dérivées partielles

$$CD \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1.)$$

où C est la chaleur spécifique du matériau dont la tringle est faite, D la densité, et K la conductibilité du matériau. L'équation (2.1) est correcte si la tringle est parfaitement isolée et s'il n'y a aucune dissipation de chaleur dans le milieu environnant, sinon le second membre doit être diminué de $C^{te} \cdot u$ pour en tenir compte, mais pour les besoins de ce résumé le cas simple (2.1) suffit.

Fourier commence par la méthode de séparation des variables : il cherche des solutions sous la forme d'un produit

$$u(t, x) = a(t) \cdot \varphi(x), \quad (2.2.)$$

ce qui, substitué dans (2.1), conduit à

$$\frac{CD}{K} \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (2.3.)$$

le membre de gauche ne dépend que de t , celui de droite que de x , et les deux doivent être égaux ; donc la seule possibilité est qu'ils soient tous deux égaux à une même constante m ; en résolvant l'équation différentielle $\frac{CD}{K} a'(t) = m a(t)$ on obtient

$$a(t) = a(0) \cdot \exp \left\{ \frac{K}{CD} m t \right\} \quad (2.4.)$$

ce qui pour des raisons physiques implique que m ne peut être > 0 (la température ne peut pas augmenter exponentiellement avec le temps). Posons $m = -r^2$; alors l'équation différentielle en $\varphi(x)$ conduit à

$$\begin{cases} a(t) = a(0) \cdot \exp \left\{ -\frac{K}{CD} r^2 t \right\}, \\ \varphi(x) = A \cos(rx) + B \sin(rx). \end{cases} \quad (2.5.)$$

Concernant la constante r , Fourier fait remarquer ceci :

L'exposant r qui entre dans la fonction $u(t, x) = a(t) \varphi(x)$ n'est pas déterminé, et l'on peut choisir pour cet exposant un nombre positif quelconque ; mais, pour que u devienne nulle en faisant $x = 0$ ou $x = L$, quel que soit t , on prendra pour r un des termes de la suite $\frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \dots$

Cette citation n'est pas exacte : ce que dit Fourier à propos d'un solide où il y a trois coordonnées x, y, z , je l'ai réduit ici au cas simple de la tringle,

dont L sera ici la longueur. Cela signifie que si on fixe des *conditions aux limites* :

- a) $\forall t \geq 0, u(t, 0) = 0$;
- b) $\forall t \geq 0, u(t, L) = 0$;

alors la constante r ne pourra prendre que des valeurs discrètes. Ce fait est essentiel car c'est lui qui est à l'origine de la notion de *valeurs propres*.

Très exactement :

- a) $\implies A = 0$;
- b) $\implies r = n\pi/L$.

Jusqu'ici le raisonnement suivi par Fourier (séparation des variables, valeurs discrètes de r) est simplement repris de Daniel Bernoulli. L'innovation qui conduit à la théorie des séries de Fourier intervient à propos de la troisième condition aux limites. En effet, la distribution des températures évolue au cours du temps, mais à partir d'un état initial : au départ, on a chauffé la tringle (avec une flamme par exemple) donc

- c) $\forall x, 0 \leq x \leq L, u(0, x) = f(x)$,

où $f(x)$ est une fonction donnée au départ, qui décrit l'état initial de la tringle. Or, étant donné qu'on a trouvé, à partir des conditions a) et b), que les solutions possibles de (2.1) sont de la forme

$$B \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\} \quad (2.6.)$$

on obtiendra la solution la plus générale de (2.1) avec les conditions a) et b) sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left\{-\frac{K}{CD} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 t\right\}, \quad (2.7.)$$

qui dépend des constantes arbitraires B_1, B_2, B_3, \dots . Si cette solution doit en outre satisfaire à c), il faut avoir

$$\forall x, 0 \leq x \leq L, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (2.8.)$$

autrement dit : il faut, pour déterminer les constantes arbitraires B_1, B_2, B_3, \dots , "trouver le développement en série de Fourier de $f(x)$ ".

3. Le problème de Sturm-Liouville.

Les travaux de Fourier sur la chaleur ont inspiré un très grand nombre de contributions et c'était à Paris au début du siècle le sujet majeur, car l'électromagnétisme était encore peu développé. Sur la voie qui conduira

à la notion d'*espace de Hilbert*, une étape essentielle, reconnue par tous les historiens, va être le problème de Sturm-Liouville. Le but avoué de Charles Sturm et Joseph Liouville était d'étendre la méthode de Fourier rappelée ci-dessus au cas où les coefficients C , D , ou K de l'équation (2.1) dépendent de la coordonnée x , c'est-à-dire au cas où la tringle est inhomogène. Le premier mémoire présenté sur le sujet par Liouville en 1836 commence comme ceci :

Lorsqu'on veut déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène, placée dans un milieu entretenu à 0° , on tombe sur l'équation aux différences partielles

$$(1) \quad g \frac{du}{dt} = \frac{d(k \frac{du}{dx})}{dx} - l u .$$

Dans cette équation, qui doit servir à déterminer la température u de chaque point en fonction du temps t et de l'abscisse x de ce point, les trois lettres g , k , l représentent respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure, et le pouvoir émissif ; et, puisque la barre est hétérogène, on doit les regarder, non comme des constantes, mais comme des quantités variables données pour chaque valeur de x . Si les abscisses des deux extrémités de la barre sont \mathbf{x} et \mathbf{X} , on a de plus deux conditions définies de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} - h u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{du}{dx} + H u = 0 & \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{cases}$$

h et H étant des constantes qui peuvent avoir des valeurs quelconques depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Enfin, on doit avoir

$$(3) \quad u = f(x) \quad \text{pour } t = 0 ,$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire qui représente l'état initial des températures et qui satisfait aux deux conditions

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} - h f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{df(x)}{dx} + H f(x) &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}, \end{aligned}$$

lesquelles se déduisent, en posant $t = 0$, des équations (2) que nous avons regardées comme ayant lieu pour la valeur générale de u dont $f(x)$ n'est qu'un cas particulier.

Puis Liouville présente la méthode de résolution qui est exactement la

méthode de Fourier décrite plus haut :

Pour former la valeur de u qui satisfait à l'équation (1) et aux conditions définies (2) et (3), on est conduit à développer la fonction $f(x)$ en une série dont les termes successifs diffèrent l'un de l'autre par un paramètre r et ont la propriété de satisfaire à la fois à l'équation différentielle générale

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V,$$

et aux conditions particulières,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - h V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{x}, \\ \frac{dV}{dx} + H V &= 0 \quad \text{pour } x = \mathbf{X}. \end{aligned}$$

La nouveauté capitale est ici que les fonctions V_r sont des fonctions *spécifiques* du problème, qui changent si les fonctions données $g(x)$, $k(x)$, $l(x)$ changent. Si les fonctions données sont constantes, alors les fonctions V_r seront des fonctions trigonométriques comme chez Fourier ; mais si la tringle est hétérogène, ce seront des fonctions nouvelles, pour lesquelles il n'y a pas de formule analytique qui les exprimerait à l'aide des fonctions connues.

Au moment où Liouville publie ces lignes, ces fonctions V_r avaient été étudiées par son ami Charles-François Sturm depuis dix ans. L'essentiel du travail de Sturm avait été publié l'année précédente dans le même Journal, édité par Liouville (une partie des mémoires originaux de Sturm est perdue). Voici ce que Sturm en dit dans cette publication :

La résolution de la plupart des problèmes relatifs à la distribution de la chaleur dans des corps de formes diverses et aux petits mouvements oscillatoires des corps solides élastiques, des corps flexibles, des liquides et des fluides élastiques, conduit à des équations différentielles linéaires du second ordre [à coefficients variables] (...) On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi, par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir

les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration. Tel est l'objet du présent Mémoire. Les fonctions dont je me suis occupé ont, comme on le verra, des analogies remarquables avec les sinus et les exponentielles, et peuvent, dans certains cas, être évaluées numériquement avec une approximation suffisante à l'aide des tables logarithmiques et trigonométriques.

Autrement dit, pour chaque cas particulier où les fonctions g , k , l sont données, il est possible de trouver des fonctions spécifiques $V_n(x)$, qui sont analogues aux fonctions $v_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$, et qui permettent d'appliquer la même méthode que Fourier : au lieu de développer la fonction $f(x)$ (l'état initial de la tringle) en série de sinus, on la développera en série de V_n . Les fonctions sinus sont les V_n du cas particulier où les fonctions g , k , l sont constantes.

L'équation obtenue après séparation des variables

$$-r g V = \frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - l V,$$

mentionnée dans la citation ci-dessus de Liouville fournit des solutions V pour un *continuum* de valeurs de r mais, tout comme dans le problème de Fourier, les fonctions V_r correspondantes ne satisferont les conditions aux limites en $x = \mathbf{x}$ et $x = \mathbf{X}$ que pour des valeurs discrètes de r .

Sturm et Liouville démontreront alors "par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes", les propriétés *utiles* des fonctions V_n (les V_r pour $r = r_n$) : possibilité de développer n'importe quelle fonction $f(x)$ en "série de Fourier" $\sum a_n V_n$, expression intégrale des coefficients a_n , orthogonalité¹ des V_n . Leurs démonstrations n'étaient pas toutes absolument rigoureuses et la critique de ces démonstrations fait aussi partie de la logique historique.

1. Il s'agit de l'orthogonalité *avant la lettre*; le terme orthogonalité a été introduit en 1904 par Erhard Schmidt et implique une perception géométrique. Cette idée de Schmidt, de l'analogie entre le produit scalaire euclidien et l'intégrale $\int f(x)g(x) dx$, est une étape essentielle de la *logique historique*. Pour une étude historique spéciale de cette notion d'orthogonalité, voir [Dorier 1996].

$$\begin{array}{l}
 \text{puis :} \\
 \\
 \text{puis encore :}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 Q_3(x) = P_2(b) P_3(x) - P_3(b) P_2(x) \\
 Q_4(x) = P_2(b) P_4(x) - P_4(b) P_2(x) \\
 \dots\dots\dots \\
 Q_m(x) = P_2(b) P_m(x) - P_m(b) P_2(x) \\
 \\
 R_3(x) = Q_3(c) Q_4(x) - Q_4(c) Q_3(x) \\
 R_4(x) = Q_3(c) Q_5(x) - Q_5(c) Q_3(x) \\
 \dots\dots\dots \\
 R_m(x) = Q_3(c) Q_m(x) - Q_m(c) Q_3(x)
 \end{array} \right.$$

et ainsi de suite. Les fonctions P s'annulent en $x = a$, et sachant (d'après Sturm) que $V_1(x)$ ne s'annule jamais, elles ne s'annulent qu'en a . De même, les fonctions Q s'annulent en a et b et nulle part ailleurs, les fonctions R s'annulent en a , b et c et nulle part ailleurs; en continuant on obtiendra des fonctions dont la dernière

a) sera une combinaison linéaire des V_1, V_2, V_3, \dots

b) s'annulera en m points quelconques a, b, c, \dots donnés à l'avance.

Ensuite Liouville montre le lemme :

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x : si pour tout n

$$\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} \varphi(x) V_n(x) dx = 0$$

alors $\varphi(x) = 0$ pour tout x entre \mathbf{x} et \mathbf{X} .

Le principe de la démonstration est le suivant : si la fonction φ est partout positive (ou partout négative), le produit $\varphi(x) \cdot V_1(x)$ ne changera jamais de signe; comme par hypothèse $\int \varphi(x) V_1(x) dx = 0$, on aura $\varphi(x) \cdot V_1(x) = 0$ (car une fonction continue et ≥ 0 dont l'intégrale est nulle ne peut être que nulle) et par conséquent aussi $\varphi = 0$. Si φ n'est pas partout ≥ 0 ou partout ≤ 0 , soient $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ les points où elle change de signe, de sorte que sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ elle garde un signe constant. On construit selon le schéma décrit ci-dessus une fonction $R(x)$, qui sera une combinaison linéaire des $V_1, V_2, \dots V_m$, et qui aura, sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$, le même signe que φ . Alors la fonction $\varphi(x) \cdot R(x)$ sera partout ≥ 0 et continue. Puisque $R(x)$ est par construction une combinaison linéaire des V_j , on aura aussi $\int \varphi(x) R(x) dx = 0$, donc $\varphi(x) R(x) = 0$, et donc aussi $\varphi(x) = 0$.

CQFD.

La faiblesse de cette démonstration est de présupposer qu'on peut toujours prendre un nombre fini de points $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$. Cela revient à supposer que la fonction φ ne change de signe qu'un nombre fini de fois sur l'intervalle $[\mathbf{x}, \mathbf{X}]$. Le lemme énoncé ci-dessus devrait donc préciser

que φ est une fonction continue qui ne change de signe qu'en un nombre fini de points de l'intervalle $[\mathbf{x}, \mathbf{X}]$. Ce lemme devait servir à montrer que l'expression (3.1) ci-dessus est égale à $f(x)$, en prenant

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(x) \quad (3.3.)$$

En effet, on voit facilement que, si on prend pour φ précisément la fonction donnée par (3.3), alors l'intégrale $\int \varphi(x) V_n(x) dx$ sera toujours nulle, à cause des relations d'orthogonalité (avant la lettre) $\int V_m(x) V_n(x) dx = 0$ combinées avec (3.3). Or Liouville ne prouve pas préalablement que la fonction φ définie par (3.3) ne change de signe qu'en un nombre fini de points.

Si on se place dans la perspective historique de la future Analyse fonctionnelle, ce défaut de la démonstration de Liouville apparaît comme un point crucial : pour que le procédé soit correct, il faudrait que l'on puisse construire une fonction R même si les points a_1, a_2, a_3, \dots sont en nombre infini. La démonstration correcte repose sur les théorèmes d'approximation uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire

$$R_\varepsilon(x) = c_1 V_1(x) + c_2 V_2(x) + c_3 V_3(x) + \dots + c_m V_m(x) \quad (3.4.)$$

telle que $\forall x \in [\mathbf{x}, \mathbf{X}], |\varphi(x) - R_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. En général, lorsque ε tend vers zéro, le nombre m dans (3.4) tend vers l'infini, contrairement à ce qui est admis dans l'argument de Liouville. La démonstration correcte consistera alors à dire que, grâce à la limite uniforme :

$$\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} [\varphi(x)]^2 dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} \varphi(x) R_\varepsilon(x) dx = 0 \quad (3.5.)$$

4. Les équations intégrales.

On a vu que, dans l'équation de la chaleur à coefficients constants, les valeurs propres discrètes apparaissaient à cause des conditions aux limites en $x = \mathbf{x}$ et $x = \mathbf{X}$; dans notre exemple (2.1) elles apparaissaient comme les solutions $r = n\pi/L$ de l'équation $\sin(rL) = 0$. Pour l'équation de la chaleur à coefficients variables, étudiée par Sturm et Liouville, elles devraient apparaître comme solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \frac{\partial V(r,x)}{\partial x} - hV(r,x) = 0 & \text{pour } x = \mathbf{x}; \\ \frac{\partial V(r,x)}{\partial x} + HV(r,x) = 0 & \text{pour } x = \mathbf{X}. \end{cases} \quad (4.1.)$$

Liouville écrit dans le premier mémoire (page 256) :

Pour que les conditions (4.1) soient satisfaites, il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines d'une certaine équation transcendante. Nous représenterons cette équation par

$$\varpi(r) = 0 \quad (4.2.)$$

puis reprend dans le second (page 18) :

L'équation $\varpi(r) = 0$ dont le paramètre r dépend n'a pas de racines négatives, comme on le reconnaît à l'inspection seule de cette équation. Elle n'a pas non plus de racines imaginaires ; c'est ce que M. Poisson a prouvé depuis longtemps par un procédé très ingénieux.

C'est dans le but d'exprimer la fonction transcendante $\varpi(r)$ que Liouville introduit les équations intégrales (ibid. p 21) :

(...) l'équation

$$\frac{d(k \frac{dV}{dx})}{dx} - lV = -r g V$$

et la condition

$$\frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathbf{x}$$

sont satisfaites en posant

$$V = p_0 + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} \frac{dx}{k} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} (l - gr) V dx . \quad (4.3.)$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace V par sa valeur que fournit précisément ce même second membre, on trouve ensuite

$$V = p_0 + p_1 + \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} \frac{dx}{k} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} (l - gr) dx \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} \frac{dx}{k} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{X}} (l - gr) V dx$$

[avec $p_0 = C^{te} \cdot (1 + h k(\mathbf{x}) \int \frac{dx}{k})$]; remplaçant de nouveau, dans le second membre, V par sa valeur (4.3), et continuant indéfiniment cette opération, conformément à la méthode connue des approximations successives² (...)

L'idée est ici la suivante : l'équation intégrale (4.3) est équivalente à l'équation différentielle avec la première condition aux limites. En effet, l'équation intégrale s'obtient simplement en intégrant deux fois de suite l'équation différentielle, et la condition aux limites en $x = \mathbf{x}$ est

2. Cette méthode était bien connue à l'époque par ses applications à la Mécanique céleste (calculs de perturbations).

automatiquement satisfaite par le choix de p_0 et du fait qu'on prend les primitives qui s'annulent en $x = \mathbf{x}$.

Puisqu'on obtient ainsi

$$V = p_0 + p_1 + p_2 + \dots \quad (4.4.)$$

où $p_1, p_2, \text{etc.}$, sont les itérées, la seconde condition aux limites s'écrira donc

$$\frac{dp_0}{dx} + \frac{dp_1}{dx} + \dots + H(p_0 + p_1 + \dots) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathbf{X} \quad (4.5.)$$

Autrement dit, la fonction $\varpi(r)$ est le premier membre de cette équation, dans lequel x est remplacé par \mathbf{X} .

Liouville conclut (ibid. p 22) :

Les quantités $p_0, p_1, \text{etc.}$, et leurs dérivées étant essentiellement positives lorsqu'on prend $r < 0$, il en résulte que cette équation n'a pas de racines < 0 . M. Sturm a prouvé et tout-à-l'heure nous prouverons aussi qu'elle a un nombre infini de racines positives r_1, r_2, \dots qui sont de plus en plus grandes et croissent jusqu'à l'infini.

La série (4.4) pour calculer V_r , ainsi que la série (4.5) pour calculer $\varpi(r)$ et trouver ses racines constituent un algorithme effectivement utilisable et il n'y en a pas d'essentiellement meilleur pour le cas le plus général.

Deuxième Partie :

La Théorie des équations intégrales

Dans la littérature scientifique du *XIX*^e siècle, les séries du type (4.4), obtenues par itération à partir d'une équation intégrale (méthode des approximations successives), sont souvent appelées séries de Beer-Neumann. Carl Neumann semble être le premier à en avoir fourni une théorie générale et rigoureuse selon les canons mathématiques ; A. Beer est connu pour en avoir répandu l'usage en électromagnétisme, à partir de "raisonnements de physicien" ; l'idée d'y recourir (pour le "problème de Dirichlet") avait été proposée par Gauss. Cette littérature semble avoir ignoré le travail de Liouville. En examinant les textes de cette époque intermédiaire ($\sim 1830 - 1860$), il ne faut surtout pas oublier que l'électromagnétisme n'avait pas encore pris la forme achevée que lui a donnée Maxwell dans son *Traité* de 1873, et qui est encore enseignée aujourd'hui.

Pour donner une idée du rôle donné à cette époque aux équations intégrales, voici un extrait d'un court article de A. Beer [1856], où il étudie le potentiel électrostatique à l'intérieur d'une surface *conductrice*, si les charges qui le créent sont toutes sur cette surface :

Wenn nun erstlich der idioelektrische Körper außerhalb der Fläche S liegt, so verschwindet in der ganzen Ausdehnung des von ihr umschlossenen Raumes der Ausdruck ΔV , und man hat dem bekannten Green'schen Satze gemäß für jeden Punkt des erwähnten Raumes :

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{\partial\left(\frac{V}{4\pi}\right)}{r} \cdot dS + V' \\ V' &= - \int V \cdot \partial\left(\frac{1}{4\pi r}\right) \cdot dS \quad (4.6.) \end{aligned}$$

[le symbole ∂ désigne ici la dérivée normale sur S]. Die Function V ist offenbar selbst wiederum eine Potentialfunction, und der Ausdruck $\Delta V'$ verschwindet allenthalben im Innern von S .

Il est clair que si, dans la première équation ci-dessus, on substitue à V' son expression donnée dans la deuxième, on obtient une équation intégrale. Beer en propose la résolution par itération, et prouve la convergence du procédé à partir d'arguments physiques. Dans ce contexte l'équation intégrale est beaucoup plus parlante que l'équation différentielle, car elle exprime directement la rétroaction du potentiel sur les charges : la surface S étant conductrice, les charges (qui ne peuvent en sortir, mais peuvent de déplacer le long de celle-ci) sont influencées par le potentiel global, ce qui les déplace et modifie en retour ledit potentiel.

On reconnaîtra aussi dans cette citation le *problème de la cavité*, déjà mentionné plus haut ; mais dans cet exemple Beer n'étudie que le potentiel électrostatique et non les vibrations. Le problème des *vibrations* dans une cavité n'a jamais reçu, au long du XIX^e siècle une importance comparable aux problèmes *électrostatiques* (problèmes dits "de Dirichlet" ou "de Neumann"). Il n'a donc jamais eu le privilège d'être le guide ou le modèle des géomètres au cours de la longue évolution historique que j'essaie de retracer. Mais il a toujours été présent, soit sous des formes déguisées comme par exemple celui de la membrane, soit comme tel avec une importance modeste.

Historiquement, ces applications électromagnétiques ont joué un rôle important, car elles ont conduit à bien percevoir l'équivalence générale entre une équation intégrale et un problème différentiel avec conditions aux limites. L'équation intégrale, comme dans le mémoire de Liouville, contient implicitement les conditions aux limites. Toutefois dans ce mémoire le recours à l'équation intégrale apparaissait comme un procédé technique particulier (pour calculer la fonction transcendante ϖ), et c'est l'électromagnétisme qui permettra à Gauss, Dirichlet, Riemann, Carl Neumann et à d'autres, de formuler cette équivalence sous une forme générale et dans un langage mathématique autonome : c'est ainsi qu'elle est

entrée dans la tradition des mathématiques “pures” (celle que Dieudonné rapporte dans *History of Functional Analysis*).

Ces questions semblent à première vue tout à fait étrangères à la future Mécanique quantique, et bien sûr c’est cela qui donne le sentiment de l’*étrangeté historique* signalée en introduction. On verra l’écart apparent se creuser encore avec la suite de l’histoire, car à partir du moment où Gauss, Neumann, etc., ont donné au problème une vie mathématique autonome, l’évolution ultérieure devait logiquement devenir encore plus indépendante.

Or cet écart n’est qu’apparent : la Mécanique quantique *semble* avoir trouvé par miracle les bases mathématiques qu’il lui fallait ; mais c’est tout simplement parce que la Mécanique quantique prend en compte les propriétés *ondulatoires* des très petites particules, et que toutes les ondes (qu’elles soient acoustiques, électromagnétiques, électroniques) sont décrites mathématiquement par les mêmes équations, qui sont aussi celles d’une membrane. L’atome d’hydrogène est *physiquement* analogue à la cavité électromagnétique, qui est elle-même *physiquement* analogue à la membrane. Nous y reviendrons dans la conclusion.

Dans l’Histoire des équations intégrales telle qu’elle est perçue par la tradition des mathématiques pures, une étape importante est la méthode de résolution proposée par Ivar Fredholm [1903]. Ce travail est à juste titre célèbre et il est inutile de le décrire en détail pour notre propos ; je me contente d’en rappeler l’idée de base.

Fredholm propose de résoudre l’équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x) \quad (4.7.)$$

d’une manière analogue à la résolution des systèmes de n équations linéaires à n inconnues par la méthode des déterminants de Cramer, et introduit pour cela les équivalents *fonctionnels* de ces déterminants. Voici ce qu’écrivit Fredholm au début de son article (troisième page) :

... il existe une quantité D_f qui joue par rapport à l’équation fonctionnelle (4.7) le même rôle que joue le déterminant par rapport à un système d’équations linéaires.

Pour définir D_f j’introduis la notation abrégée

$$f \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{array} \right) = \left| \begin{array}{cccc} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{array} \right| \quad (4.8.)$$

et je pose

$$\begin{aligned} D_f &= 1 + \int_0^1 f(x, x) dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 f \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int f \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.9.)$$

La méthode de Fredholm se comprend aisément si on discrétise l'intervalle $[0, 1]$ par les points $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{n}$, $a_2 = \frac{2}{n}$, \dots , $a_n = 1$: l'intégrale de (4.7) devient une somme finie, et l'équation (4.7) un système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues dont la matrice est $I + F$, I étant la matrice unité et F la matrice provenant de la discrétisation de f , dont les éléments sont $F_{i,j} = f(a_i, a_j)$. Toutes les formules de Fredholm s'obtiennent alors comme les limites quand n tend vers l'infini des formules de résolution de Cramer. Cet aspect est totalement occulté dans l'article de Fredholm, mais restitué dans l'exposé qu'en fera Hilbert peu après (*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*) ; nous y reviendrons à la section 5 ci-après. On voit ici que les méthodes heuristiques de l'électromagnétisme sont loin ; le travail de Fredholm est celui d'un mathématicien qui suit la logique propre de son domaine : résoudre un problème légué par les Anciens. Ce problème est résolu selon les canons, désormais fixés, de ce qu'on appelle déjà la *mathématique pure* : la discrétisation est occultée afin d'accentuer l'aspect purement déductif de l'exposé ; la question *pratique* du calcul numérique effectif n'est même pas posée et le simple fait d'avoir pu *écrire* la formule de résolution dans le langage de l'analyse suffit pour que le problème soit considéré comme définitivement résolu. Pourtant l'expression (4.9) qui donne le déterminant, tout comme les formules explicites de résolution données plus loin (dans l'article de Fredholm) sont inutilisables pour le calcul numérique, car l'algorithme optimal pour résoudre numériquement un système linéaire est celui du pivot de Gauss et surtout pas celui de Cramer ; sans compter la manière de discrétiser l'intégrale.

L'étude entreprise ici sur une période qui couvre un siècle met en évidence un phénomène connu, mais peu discuté, de l'évolution historique, qui est la spécialisation. Vers 1900, celle-ci était encore bien loin des extrêmes qu'on observe aujourd'hui, mais déjà visible. Les travaux de Bernoulli et d'Euler sur les membranes, ceux de Fourier, puis de Sturm et Liouville, sur la chaleur, ceux de Gauss sur l'électrostatique, étaient des travaux de physique mathématique motivés par la *philosophie naturelle* ; ce faisant, ils ont légué à la postérité des problèmes issus de ces recherches, mais formulés d'une manière purement mathématique qui les rend autonomes par rapport à leur origine : les fonctions de Bessel, les

séries de Fourier, les valeurs propres, le problème de Dirichlet, les équations intégrales, etc. Ces problèmes peuvent alors mener leur vie propre dans l'Histoire des mathématiques pures, comme le montre très clairement le travail de Fredholm (c'est ce qui a parfois conduit à l'illusion que cette Histoire se passait dans le ciel des Idées). Toutefois ces problèmes peuvent conserver au cours du temps un contenu *physique* lié à leur origine, qui pendant longtemps restera en arrière-plan, au point de n'apparaître aux yeux des contemporains que comme un cas d'application tout à fait contingent, voire oublié. Jusqu'au jour où, la Physique redécouvrant le même phénomène dans une autre région de la Nature, les solutions apportées entre-temps par les mathématiciens sembleront relever du miracle ou de l'harmonie préétablie.

5. La synthèse de Göttingen.

Les historiens considèrent que les années 1900–1910 sont celles de la naissance, à Göttingen essentiellement, de l'Analyse fonctionnelle. Cependant ce qui est né à Göttingen est le *noyau* de la future Analyse fonctionnelle. En effet, cette dernière inclut aujourd'hui comme éléments essentiels la théorie de l'intégrale de Lebesgue et les topologies d'espaces vectoriels de dimension infinie, alors que, si on s'en tient aux grands textes de l'École de Göttingen (qui se résument dans Hilbert [1912] et Courant–Hilbert [1924]), ces deux éléments n'étaient pas encore intégrés. Dans *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, une série de cinq articles parus dans les *Göttinger Nachrichten*, articles repris et augmentés dans Hilbert [1912], Hilbert expose la théorie des équations intégrales de Fredholm et la théorie spectrale des opérateurs linéaires *sans la théorie de Lebesgue* : il suppose (tout comme Fredholm) que le noyau $f(x, y)$ de l'équation (4.7) est continu, alors que dans les exposés modernes on le suppose dans l'espace $L_2([0, 1] \times [0, 1])$ ou un autre espace de ce type, dérivé de l'intégrale de Lebesgue. De même en théorie spectrale, Hilbert n'envisage que les opérateurs intégraux à noyau continu (la notion topologique d'opérateur compact viendra plus tard). Le livre de Courant et Hilbert *Methoden der mathematischen Physik* fait de même et évoque la théorie de Lebesgue en quelques lignes seulement, en fin de chapitre (et encore, c'est dans l'édition de 1954!).

Il est sans doute vrai que l'espace mathématique idéal pour aborder en toute rigueur la Mécanique quantique est l'espace L_2 ; mais les outils qui ont vraiment servi à Schrödinger pour formuler sa Mécanique ondulatoire et résoudre les problèmes de l'atome d'hydrogène ou de l'oscillateur quantique sont bien ceux qu'on pouvait trouver dans Courant–Hilbert [1924]. Le formalisme mathématique de la Mécanique quantique est donc

bien né à Göttingen, *avant* la Mécanique quantique elle-même.

Le texte fondateur de Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, commence par exposer le travail de Fredholm (qui venait d'être publié dans *Acta Mathematica*). Cela montre l'importance énorme que lui donnait Hilbert. La motivation subjective de Hilbert (nous l'examinerons plus loin) est toutefois étrangère aux problèmes qui sont à l'origine de ce grand courant que nous suivons depuis Bernoulli, Euler, Fourier. Ce n'est pas parce que la théorie de Fredholm apporte enfin la solution de vieux problèmes sur la vibration des membranes, la diffusion de la chaleur, ou la cavité électromagnétique que Hilbert lui fait cet honneur. De toute façon la théorie de Fredholm n'apporte rien à la résolution effective de ces problèmes : les équations intégrales n'intéressaient les physiciens Liouville, Gauss, ou Beer que comme outil pour *calculer* les solutions, et nous avons vu que, pour *calculer*, la méthode de Fredholm est inutilisable. En réalité, la principale découverte de Fredholm est le théorème suivant (11^e page de son article)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (5.1.)$$

c'est que $D_f = 0$ [D_f est défini par (4.9)]. Si n est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède n solutions linéairement indépendantes.

(La notion de mineur pour les déterminants de Fredholm avait été introduite plus haut dans l'article de manière spécifique)

Ce résultat est devenu célèbre sous le nom d'*alternative de Fredholm*, l'alternative étant que

- ou bien $D_f \neq 0$; alors pour toute fonction donnée ψ (continue sur $[0, 1]$) il existe une solution φ *unique* de (5.1), et cette solution est $\varphi = 0$ si $\psi = 0$;
- ou bien $D_f = 0$; alors il se produit ce que dit le théorème.

Si Hilbert a placé si haut le résultat de Fredholm, c'est parce qu'il y voyait la voie de l'*unification entre l'algèbre et l'analyse*. Dans *Grundzüge...*, Hilbert commence par exposer le travail de Fredholm, mais en le réinterprétant comme une discrétisation : l'intégrale de (4.7) ou (5.1) devient une somme de Riemann et l'équation intégrale un système de Cramer. En prenant le pas de discrétisation $\varepsilon = 1/n$ l'équation intégrale devient un système de n équations à n inconnues qui sont les $X_i = \varphi(i\varepsilon)$. Hilbert montre qu'en faisant tendre n vers l'infini on retrouve exactement les résultats de Fredholm (il est pratiquement certain que Fredholm avait

— deuxième problème : trouver une fonction $\varphi(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ telle que

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x). \quad (5.5.)$$

Il suffit pour cela que l'on prenne

$$f(x, y) = \kappa(x, y) q(y) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^1 \kappa(x, y) \chi(y) dy \quad (5.6.)$$

avec

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ x(1-y) & \text{si } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5.7.)$$

En effet, ce choix judicieux de κ entraîne que l'équation intégrale (5.5) — compte tenu de (5.6) — est exactement équivalente à l'équation différentielle *plus* les deux conditions $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$.

On voit que l'équation intégrale (5.5) est exactement de la forme (4.7) étudiée par Fredholm (le cas d'un intervalle quelconque $[a, b]$ au lieu de $[0, 1]$, s'y ramène par une transformation élémentaire).

On comprend aisément que la même équivalence entre problème différentiel avec conditions au bord et équation intégrale subsiste en dimension deux, trois, ... Quoique Fredholm n'ait pas évoqué ce cas dans son article, sa méthode s'appliquerait de la même façon avec des intégrales doubles, triples, ... La discrétisation serait plus compliquée, mais le principe reste le même.

Par exemple le problème de la cavité électromagnétique s'écrit sous sa forme différentielle :

Trouver les modes de vibration du potentiel V tels que

$$\Delta V + k^2 V = 0 \quad (5.8)$$

dans le domaine tridimensionnel (la cavité) Ω , et tels que V soit nul sur le bord $\partial\Omega$.

En effet, introduisons le noyau résolvant $P(x, \xi)$ du problème associé de Dirichlet : si $h_0(\xi)$ est une fonction continue donnée sur $\partial\Omega$, la fonction

$$h(x) = \iint_{\partial\Omega} P(x, \xi) h_0(\xi) d\xi \quad (5.9.)$$

sera son prolongement harmonique dans Ω ($d\xi$ étant la mesure-aire sur $\partial\Omega$). Alors, si on pose

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(x, y)} - \iint_{\partial\Omega} \frac{P(x, \xi)}{r(\xi, y)} d\xi \right], \quad (5.10.)$$

où $r(x, y)$ est la distance euclidienne de x à y , le problème différentiel ci-dessus sera exactement équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$V(x) + k^2 \iiint_{\Omega} \kappa(x, y) V(y) = 0 \quad (5.11.)$$

Le noyau $\kappa(x, y)$ défini en (5.10) devient infini pour $x = y$, contrairement à ce qui se produit en dimension 1 avec (5.7). Mais cette singularité est intégrable et par conséquent la théorie de Fredholm peut s'appliquer avec des adaptations mineures. Comme cela avait été rappelé plus haut, le procédé de Fredholm est *sans intérêt* pour le calcul numérique, et de ce point de vue la forme différentielle sera souvent la plus efficace. Mais on voit qu'*en principe* tous les problèmes classiques (membrane, chaleur, cavité électromagnétique, problème de Dirichlet, etc.) peuvent être résolus dans le cadre proposé dans *Grundzüge... ou Methoden der mathematischen Physik*, c'est-à-dire sans l'intégrale de Lebesgue ni les espaces L_2 . Il en sera de même pour la Mécanique quantique.

Hilbert s'est exprimé à cette époque sur le sens qu'il entendait donner à la grande synthèse de tous ces problèmes classiques sous l'emblème des équations intégrales : *l'unification de l'algèbre et de l'analyse*. En effet, la similitude entre la méthode de Fredholm pour les équations intégrales et celle de Cramer pour les systèmes de dimension finie doit conduire naturellement à une méthode unique et universelle, que la discrétisation avec passage à la limite met bien en évidence. Voici sa vision [1909] :

Das genannte Problem der Bestimmung unendlichvieler Unbekannter aus unendlichvielen Gleichungen erscheint auf den ersten Blick wegen seiner Allgemeinheit undankbar und unzugänglich; bei einer Beschäftigung damit droht die Gefahr, daß wir uns in zu schwierige oder vage und weitschichtige Betrachtungsweisen verlieren ohne entsprechenden Gewinn für tiefere Probleme. Aber wenn wir uns durch solche Erwägungen nicht beirren lassen, geht es uns wie Siegfried, vor dem die Feuerzauber von selber zurückweichen, und als Lohn winkt uns entgegen der schöne Preis *einer methodisch-einheitlichen Gestaltung von Algebra und Analysis*.³

3. **Traduction** : Ce problème de la détermination d'une infinité d'inconnues à

6. Conclusion.

Comme on le voit, les motivations de la Recherche ont subi un changement considérable depuis l'époque où Fourier, Sturm, et Liouville présentaient leurs mémoires à partir de problèmes d'ingénieur. Dans la *formulation unifiée de l'Algèbre et de l'Analyse*, le fait qu'une équation avec conditions au bord telle que (5.8) — équivalente à (5.11) — possède une famille discrète de valeurs propres est tout simplement dû au fait que les zéros d'une fonction analytique sont isolés. Le problème de la cavité électromagnétique, qui pour des raisons physiques fossilisées dans l'équation (5.8) ou (5.11) ne peut avoir que des modes de vibration discrets, n'est plus qu'un cas particulier soumis au théorème des zéros isolés. Le violoncelliste sent dans son doigt le changement de son lorsqu'il appuie sur la corde, mais la postérité de Gauss, Neumann, et Hilbert ne perçoit plus qu'une causalité abstraite.

Ainsi, dans le monde des idées créé à Göttingen, ce sont les propriétés générales des fonctions analytiques qui imposent le changement de son lorsque le violoncelliste appuie sur la corde ; mais dans l'histoire réelle de la science, la synthèse effectuée par les mathématiciens de Göttingen a consisté à réunir ce qu'il y avait de commun entre des problèmes d'origines diverses et qui existaient déjà avant. Si le son change quand le violoncelliste appuie sur la corde, c'est parce que son doigt empêche la corde de vibrer selon certaines fréquences. Et si on retrouve cela comme un cas particulier ou une application du théorème des zéros isolés, c'est parce que, parmi toutes les manières possibles de fonder l'analyse mathématique, celle retenue par Hilbert était celle qu'on pouvait trouver sur le chemin qu'avaient préparé Pythagore, Bernoulli, d'Alembert, Euler, Fourier, etc., lorsqu'ils ont introduit les concepts mathématiques adéquats pour l'étude du son émis par une corde.

La synthèse de tous les problèmes étudiés de manière éparsée par les mathématiciens au cours du XIX^e siècle sous la bannière des équations intégrales n'est en réalité qu'une couverture logique⁴ qui cache peut-être

partir d'une infinité d'équations, à cause de sa généralité, semble à première vue ingrat et inextricable ; en voulant le traiter on s'expose au danger de se perdre dans des considérations trop compliquées, ou trop vagues, ou trop vastes, de sorte que les efforts consentis pour gagner une perception plus profonde des problèmes seraient disproportionnés. Mais si nous ne nous laissons pas détourner par de tels scrupules, il nous arrivera ce qui est arrivé à Siegfried, qui a vu le feu enchanté reculer devant lui et en récompense nous verrons scintiller le merveilleux trésor d'une *formulation unifiée de l'Algèbre et de l'Analyse*.

4. Il ne faut évidemment pas interpréter cette remarque comme une contestation de l'utilité de cette couverture logique ; il s'agit seulement de ne pas ignorer ce qui est en-dessous.

le sens réel de ces problèmes, mais ne le supprime pas. Tout comme la forme d'un tumulus celtique est encore reconnaissable sous la végétation, ou les configurations de MSDOS sous les systèmes d'exploitation les plus récents et les plus sophistiqués.

Voici maintenant Schrödinger, qui arrive en 1926 avec une logique entièrement étrangère à celle affichée par Hilbert (unification de l'Algèbre et de l'Analyse) :

L'analogie entre la mécanique et l'optique signalée par Hamilton ne concerne que l'optique *géométrique*; en effet, d'après cette analogie, à toute *trajectoire* du point représentatif dans l'espace de configuration correspond un *rayon de lumière* et cette dernière notion ne peut être définie sans ambiguïté qu'en optique géométrique. (...) Cette notion, et avec elle toute la mécanique classique, subsistent comme approximations, valables seulement dans le cas où les dimensions de la trajectoire sont grandes par rapport à la longueur d'onde. Au contraire, pour le cas des mouvements "micromécaniques", les équations fondamentales de la mécanique sont tout aussi peu utilisables que l'optique géométrique pour le traitement des problèmes de diffraction; par analogie avec ce qui se passe en optique, les équations fondamentales doivent être remplacées par une seule *équation d'ondes* dans l'espace de configuration [page XIX dans la réédition Gabay].

Pour aider le lecteur non physicien, il sera peut-être utile ici de rappeler rapidement comment on en est venu à découvrir les phénomènes quantiques. Le fait flagrant était que les atomes de la matière, chauffés (par exemple dans les étoiles), émettent de la lumière uniquement à des fréquences caractéristiques de chaque atome particulier. Ce phénomène est physiquement analogue aux fréquences propres d'une cavité électromagnétique, mais cette analogie n'a pas été perçue aussi facilement. C'est justement Erwin Schrödinger qui en a tiré les conséquences. Dans les atomes, les électrons ont un comportement ondulatoire et, s'ils étaient "enfermés dans une cavité", les électrons auraient des fréquences propres comme dans le problème (5.7). Il se trouve que dans les atomes les électrons ne sont pas enfermés dans une cavité qui aurait un bord bien délimité : ils sont confinés par le potentiel coulombien du noyau. Ce que Schrödinger a montré dans ses mémoires, c'est que si on traite le problème d'un électron dans le champ coulombien d'un proton (atome d'hydrogène) en complète analogie avec le problème (5.7), alors on obtient pour valeurs propres exactement les niveaux de Bohr, en parfaite adéquation avec les fréquences d'émission de cet atome.

Très exactement, l'analogie a conduit Schrödinger à l'équation d'ondes que voici (pages 2–3 de l'édition Gabay) :

(...) [l'équation] s'écrit alors dans notre cas :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial z^2} - \frac{2m}{K^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

e étant la charge et m la masse de l'électron.

Ajoutons que K est la constante de Planck divisée par 2π et E l'énergie de l'électron.

Schrödinger indique que

(...) si E est négatif il n'existe pas de solution, sauf pour une *suite discrète de valeurs* de cette constante. (...) Le spectre discret correspond aux termes de BALMER.

Il signale aussi (note au bas de la page 4) :

Je suis redevable à HERMANN WEYL des indications nécessaires pour le traitement de l'équation.

D'ailleurs le traité de Courant–Hilbert (qui venait tout juste de paraître chez Julius Springer) est fréquemment cité dans ces mémoires pour les éléments proprement mathématiques (notamment développements en séries de fonctions propres, polynômes d'Hermite, etc).

Après ce survol historique, on arrive enfin à comprendre pourquoi le trousseau de clés d'Erwin Schrödinger ouvre toutes les portes : *en réalité* toutes les serrures de la Nature étaient construites sur le même modèle, mais on ne le savait pas à l'avance. De Bernoulli à Schrödinger, c'est toujours le problème de la membrane, c'est-à-dire celui des ondes, qui reste le paradigme. Non seulement la Mécanique quantique n'en est pas sortie (du moins pas dans sa première mouture, appelée parfois, pour la distinguer, Mécanique ondulatoire), mais elle a même renforcé l'uniformité : auparavant, on ouvrait les serrures de la mécanique avec d'autres clés que celles de l'électromagnétisme ; vers 1925, on a découvert que la même clé ouvrait les deux serrures.

Bibliographie

AMPÈRE, ANDRÉ-MARIE

1823 *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*, Réédition Jacques Gabay, Paris, 1990.

BEER, A.

- 1856 Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction, *Poggendorffer Annalen der Physik* **98**, 137–142.

COURANT, RICHARD ; HILBERT, DAVID

- 1924 *Methoden der mathematischen Physik*, Julius Springer, Berlin.

DIEUDONNÉ, JEAN

- 1981 *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

DORIER, JEAN-LUC

- 1996 Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques*, **2**, 265–307.

FOURIER, JOSEPH

- 1822 *Théorie analytique de la chaleur*, (réédition Jacques Gabay, Paris, 1988).

FREDHOLM, IVAR

- 1903 Sur une Classe d'équations fonctionnelles, *Acta Mathematica*, **27**, 365–390.

GREEN, GEORGE

- 1828 *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, in *Mathematical Papers of the late George Green*, ed. by N. M. Ferrers, Macmillan and Co, London, 1871.

HELLINGER, ERNST

- 1935 *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme*, in *Hilberts gesammelten Abhandlungen*. Julius Springer, Berlin.

HILBERT, DAVID

- 1909 Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, **27**, 59–74 oder in *Hilberts gesammelten Abhandlungen*, Band III, 56–72.

- 1912 *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig.

KOYRÉ, ALEXANDRE

- 1961 *La Révolution astronomique*, Éd. Hermann, Paris.

LIUVILLE, JOSEPH

- 1836 Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une

même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *Journal de Liouville*, **1**, 253–265.

1837 Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable, *Journal de Liouville*, **2**, 16–35.

MAXWELL, JAMES CLERK

1873 *Traité d'électricité et de magnétisme*, Réédition Jacques Gabay, Paris, 1989.

NEUMANN, CARL GOTTFRIED

1877 *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential*, Teubner, Leipzig.

VON NEUMANN, JOHANN

1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Julius Springer, Berlin.

SCHRÖDINGER, ERWIN

1926 *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*, Traduits en français par Al. Proca, Félix Alcan, Paris, 1933 et réédition Jacques Gabay, Paris, 1988.

STURM, CHARLES-FRANÇOIS

1836 Mémoire sur les équations différentielles du second ordre, *Journal de Liouville*, **1**, 106–168.