Originalité et Posterité : L'Ausdehnungslehre de Hermann Günther Grassmann (1844)

Jean–Luc Dorier
Laboratoire Leibniz
46, Ave F. Viallet
F-38 031 Grenoble Cedex
Tel : 04 76 57 47 84 — Fax : 04 76 57 46 02
e-mail : jean-luc.dorier@imag.fr

Résumé. Le but de cet exposé n'est pas de donner une présentation exhaustive du traité de Grassmann, mais plutôt d'en donner certaines clefs de lecture. Le contenu mathématique à proprement parler n'est, au demeurant, qu'effleurer. Après une brève présentation de l'homme et du contexte mathématique de l'époque, nous nous intéressons à l'influence que Justus Grassmann, le père de Hermann a pu avoir sur l'œuvre mathématique de son fils. L'une des principales difficultés de l'*Ausdehnungslehre* reste sa dimension philosophique, nous l'abordons à travers une présentation de l'introduction et de l'influence de Friedrich Schleiermacher. Enfin, nous montrons comment les positions philosophiques de Grassmann opèrent sur le contenu mathématique, en analysant en détail les huit premiers paragraphes de son œuvre, qui non seulement fondent la théorie mais présentent l'équivalent des concepts modernes de base et de dimension.

Philosophia Scientiæ, 4 (1), 2000, 3–45.

Introduction

L'histoire des mathématiques ne manque certainement pas d'exemples de découvertes géniales qui ne furent pas estimées à leur juste valeur en leur temps. Dans cette longue liste cependant, l'*Ausdehnungslehre* [1] de Hermann Günther Grassmann (1809-1877) se distingue autant par l'ampleur de son incapacité à infiltrer le monde mathématique de son temps que par l'ampleur de son génie. En effet, Grassmann en 1844 met en place une théorie entièrement nouvelle, très générale ; la géométrie dont elle s'inspire n'en est qu'une application. Cette théorie contient de façon explicite et générale quasiment tous les résultats qui font aujourd'hui l'algèbre linéaire de dimension finie, alors qu'il faudra attendre 1920 environ pour que la théorie moderne des espaces vectoriels prenne son essor. De plus, les concepts proposés par Grassmann permettent un traitement unifié des aspects affines, vectoriels et projectifs de la géométrie (qui ne se limite bien sûr pas ici à trois dimensions). Enfin les produits extérieurs et régressifs, invention la plus originale de Grassmann, ont donné naissance près d'un siècle plus tard à l'algèbre extérieure et au calcul tensoriel mis au point par Elie Cartan (1922) et aux fondements de l'algèbre multilinéaire tels que l'a mise en place Nicolas Bourbaki (1948). Plus récemment encore, Gian Carlo Rota et al. (1985) ont proposé une nouvelle approche de l'algèbre extérieure, plus fidèle aux idées de Grassmann, et qui permet de mieux comprendre la résolution de nombreux problèmes. Ces travaux récents ont montré que l'*Ausdehnungslehre* n'avait pas fini d'inspirer les théories les plus contemporaines.

On ne peut donc nier une forme de génie à l'œuvre mathématique de Grassmann. Le but de cet exposé n'est pas d'en donner une présentation exhaustive. Je ne ferai, au demeurant, qu'effleurer le contenu mathématique à proprement parler [2]. Après avoir brièvement présenté l'homme [3], j'esquisserai le contexte mathématique de 1844 de façon à mieux situer

1. En français, Théorie de l'Extension, ou Science de la Grandeur Extensive, comme Dominique Flament le propose dans sa traduction [Flament1994].

2. Pour un survol de ce contenu mathématique, on pourra se reporter au paragraphe sur Grassmann contenu dans l'article "Nombres Complexes" écrit par Elie Cartan pour l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées (cf. Bibliographie). Par ailleurs j'ai donné en référence un certain nombre d'articles et d'ouvrages consacrés à Grassmann : [Châtelet 1992], [Fearnley-Sander 1979 et 1982], [Flament 1992], [Lewis 1977 et 1981], [Otte 1989], [Schubring 1996], [Zaddach 1994] et [Dorier 1996 et 1997b].

3. On trouvera en annexe un résumé biographique et le lecteur intéressé pourra consulter la biographie très complète de Friedrich Engel : *Grassmanns Leben* (1911) insérée dans la deuxième partie du troisième volume des œuvres complètes de Grassmann (1894-1911), ou encore, la préface de la traduction française de l'*Ausdehnungslehre* par Dominique Flament (1994).

l'*Ausdehnungslehre*. J'examinerai ensuite succinctement l'influence que Justus Grassmann, le père de Hermann a pu avoir sur l'œuvre mathématique de son fils. J'en viendrai ensuite à ce qui est l'une des originalités les plus frappantes de l'*Ausdehnungslehre*, son contenu philosophique, à travers une présentation de l'introduction et de l'influence de Friedrich Schleiermacher. Enfin, j'essaierai de montrer comment les positions philosophiques de Grassmann opèrent sur le contenu mathématique, en analysant en détail les huit premiers paragraphes de son œuvre, qui non seulement fondent la théorie mais présentent l'équivalent des concepts modernes de base et de dimension.

Grassmann et les Mathématiques de son Temps

Ce qui caractérise Grassmann en tant que mathématicien, c'est avant tout le fait qu'il soit entièrement autodidacte. Il ne semble avoir jamais suivi aucun cours de mathématiques ni même de physique et son seul maître fut son père (auquel le paragraphe suivant sera consacré). Engel, qui a édité ses œuvres et écrit sa biographie est très admiratif sur ce point :

> "Seul un esprit d'une force extraordinaire et d'une originalité de penser était capable d'une telle performance, de même que seule l'existence d'une disposition tout exceptionnelle pour les mathématiques rend le fait concevable... Grassmann a pu se former comme mathématicien, tout à fait par lui-même, par la seule étude de quelques traités et par ses propres réflexions." [Grassmann (1894/ 1911), 3(2) :75]. [4]

Par ailleurs, Grassmann a suivi une formation universitaire axée sur la théologie et les langues classiques. Il en gardera une culture et un penchant pour la philosophie, on verra plus loin comment Friedrich Schleiermacher qui avait été son professeur à Berlin a influencé son approche des mathématiques et des sciences en général. De plus, son goût des langues le poussera à étudier de nombreuses langues anciennes (Sanscrit, Gothique, Lithuanien, vieux Prussien, vieux Persan, Slovaque religieux etc....). Il consacrera d'ailleurs une grande partie de sa vie professionnelle à des travaux de linguistique, qui lui vaudront plus de renommée que son œuvre mathématique. Notamment sa traduction du monumental Rigveda (équivalent de la bible écrit en Sanscrit) associée à son dictionnaire en 6 volumes est encore utilisée aujourd'hui. Grassmann gagne aussi une notoriété, qui lui sera accordée de son vivant, pour ses travaux

4. La traduction française provient de [Flament 1994, préface, 10].

de physique (dans lesquels on retrouve des applications de l'*Ausdehnungslehre*) notamment sur l'électrodynamique, la théorie des couleurs, l'acoustique et l'optique élémentaire.

On voit donc que Grassmann est éclectique et que sa carrière scientifique a été fructueuse au–delà des seules mathématiques. Enfin, il s'est beaucoup intéressé à l'enseignement et a publié divers manuels destinés à la formation des enseignants tant en mathématiques qu'en physique ou en linguistique.

Cependant, il n'a jamais réussi à obtenir un poste universitaire, malgré plusieurs tentatives et a fini sa carrière comme professeur au lycée de Stettin, où il a enseigné pratiquement toutes les disciplines, suivant en cela les pas de son père Justus Grassmann. Il s'est souvent plaint de cet état de fait, comme d'un handicap majeur à pouvoir mener à bien ses ambitions scientifiques, par manque de temps.

L'*Ausdehnungslehre* touche à la géométrie, mais elle propose en fait une théorie mathématique entièrement nouvelle [5] permettant, entre autres, par ses applications à la géométrie de réconcilier les méthodes synthétique et analytique. De fait, l'œuvre de Grassmann répond, tout en les dépassant, à des préoccupations de son époque.

La méthode analytique, mise au point indépendamment par René Descartes (1637) et Pierre de Fermat (1643), permit d'introduire en géométrie la performance du calcul algébrique.

> "Tous les problèmes de géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.
>
> Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, de même n'a-t-on autre chose à faire en géométrie, en ce qui concerne les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que d'en ajouter d'autres ou d'en ôter. Ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter

5. Le titre exact de l'ouvrage qu'il publie en 1844 est :«Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert» [La Théorie Réglée de l'Extension, une Nouvelle Discipline Mathématique, Représentée et Illustrée par des Applications aux autres Disciplines Mathématiques, de même qu'à la Statique, à la Mécanique, à la Théorie du Magnétisme et à la Crystallographie]. Il se présente comme la première partie de L'Ausdehnungslehre, dont Grassmann n'écrira jamais la deuxième moitié, qui aurait dû porter essentiellement sur les concepts de rotation et d'angle. Une erreur de traduction à ne pas commettre et qui m'a été signalée par Gert Schubring, consisterait à traduire «lineale» par linéaire.

> d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui revient à multiplier. Ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une des deux comme l'unité est à l'autre, ce qui revient à diviser. Ou enfin trouver une, deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui revient à extraire la racine carrée ou cubique, etc...
>
> Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible." [Descartes 1638, 297-298].

La performance d'une telle méthode ne faisait pas de doute pour les auteurs, ainsi Fermat conclut son *Isagoge* de 1643 par la phrase suivante : " Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides."

De fait la méthode analytique obtint immédiatement un large succès et les mathématiciens en reconnurent le pouvoir de simplification en l'appliquant à la résolution de nombreux problèmes de géométrie anciens et nouveaux.

Cependant en marge de ce succès indéniable, certains commencèrent à exprimer des réserves, voire des critiques, à l'égard de la méthode analytique. Il semblait en effet inacceptable pour eux que la résolution d'un problème géométrique passe par le transfert à des nombres, étrangers au domaine de la géométrie, sur lesquels, qui plus est, porte un arbitraire lié au choix du repérage. Cette position, qui peut sembler un peu dogmatique, était assortie du reproche que la méthode analytique, masquant la réalité géométrique de la résolution, ne permettait aucun recours à l'intuition et que si elle semblait démontrer le résultat, par contre elle ne l'expliquait en rien. Or, cette critique paraissait d'autant plus fondée que dans la résolution de certains problèmes complexes, la méthode analytique ne permettait pas d'aboutir et s'enlisait dans des calculs sans fin, où toute signification géométrique était perdue. Un de ceux à avoir exprimer ce type de critiques est Gottfried Wilhelm Leibniz.

Voici des extraits d'une lettre adressée à son ami Christian Huyghens, datée du 8 sept 1679 :

> "(...) je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en avoir le moyen et qu'on pourroit représenter des figures et mesme des machines et mouve-

ments en caractères, comme l'Algèbre represente les nombres ou grandeurs". [Leibniz 1850, 1 :382]

Leibniz tente alors de créer une *Géométrie des Situations,* dont il explicite ainsi les principes :

> "J'ay trouvé quelques éléments d'une nouvelle caractéristique, tout à fait différente de l'Algèbre, et qui aura des grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figure, tout ce qui dépend de l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles, et le mouvement, d'où vient, qu'il est souvent difficile de réduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des démonstrations et des constructions géométriques assez commodes lors mesme que le calcul d'Algèbre est tout fait. Mais cette nouvelle caractéristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en mesme temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes déterminées". [*ibid.*, 1 :384]

L'analyse géométrique de Leibniz est fondée sur une relation de congruence : deux bipoints sont congrus si leurs deux points sont à égale distance, deux triplets de points sont congrus si les triangles qu'ils forment sont superposables, etc. Il est ainsi possible de définir une sphère comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à AB, un plan comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à BX, un cercle comme l'ensemble des points X tels que ABX est congru à ABC, une droite comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à BX et CX, etc. Leibniz applique cette analyse à quelques problèmes assez élémentaires, mais il ne prolongera jamais cette tentative. Il semble qu'il se soit lui-même rendu compte des limitations de son calcul. En effet la non prise en compte de l'orientation des figures géométriques et de la direction des segments est un handicap qui ne pouvait permettre à ce type de calcul de devenir vraiment opératoire.

Cette lettre de Leibniz ne sera publiée qu'en 1833 (cf. références), mais à cette date la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque (ou d'une analyse géométrique) n'a pas réellement abouti. De fait au printemps 1844, la *Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaft* de Leipzig lance un concours, à l'approche du bicentenaire de la naissance de Leibniz (originaire de Leipzig), visant à récompenser un travail permettant de réaliser l'ambition de Leibniz. Après avoir relancé ce concours sans succès, elle décerne finalement le premier prix à Grassmann, sur la base d'un article intitulé : *Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse*, daté du 15 avril 1845, mais publié en 1846 dans le Journal de Crelle. Ce traité qui sera suivi de divers articles dans le Journal de Crelle, présente essentiellement les concepts et les applications de l'*Ausdehnungslehre* dans le cadre restreint de la géométrie. Drobisch et Möbius, principaux examinateurs de la commission, sont flatteurs à l'égard de Grassmann. Cependant, Möbius un des rares mathématiciens de son temps à avoir lu l'*Ausdehnungslehre*, s'il avait exprimé des louanges à l'égard du travail de Grassmann, n'en restait pas moins très réservé sur sa philosophie. Aussi, dans le souci d'aider à la diffusion du travail de Grassmann, il propose d'éditer en 1847, l'article primé qui deviendra ainsi la *Geometrische Analyse* [Grassmann 1894/1911, 1 :321-399], en y ajoutant une préface et des notes explicatives. Cette initiative, à l'origine plutôt bien intentionnée, aura un effet néfaste sur l'accueil de la communauté mathématique qui juge le travail de Grassmann comme imparfait, puisque Möbius a eu besoin d'y donner des explications.

Ainsi, on voit que le travail de Grassmann répond (incidemment, puisque ce dernier ne connaissait pas la lettre de Leibniz) à des interrogations mises en forme par Leibniz[6] :

> "Avec la méthode habituelle à l'ordinaire, l'idée était complètement obscurcie par l'introduction de coordonnées arbitraires qui n'avaient rien à faire avec le sujet, et le calcul consistait en un développement mécanique de formules qui n'apportait rien à l'esprit et qui par conséquent le tuait. Ici en revanche, où l'idée, qui n'était plus troublée par quelque chose d'étranger, transparaissait en toute sa clarté à travers les formules, l'esprit était saisi, même lors de chaque développement de formules, par le développement progressif de l'idée." [Grassmann 1844, 9][7]

D'ailleurs, l'Ausdehnungslehre dépasse très largement les ambitions de Leibniz car plus qu'un calcul géométrique, c'est toute une nouvelle discipline mathématique, dont ce calcul géométrique n'est qu'une application, qui est créée par Grassmann. D'autre part, il ne faudrait pas croire que la recherche d'une analyse géométrique en était restée au travail de Leibniz. En fait dans la première moitié du 19^{e} siècle (et ceci s'amorce au siècle précédent) différents travaux ont jeté les bases du calcul vectoriel. Or ceux-ci, même s'ils sont moins complets que celui de Grassmann, n'en auront pas moins une influence plus grande sur les développements

6. On se reportera à [Otte 1989], pour plus de précisions sur cette question.

7. Toutes les citations de l'*Ausdehnungslehre* de 1844 sont tirées de la traduction de Flament (1994), les numéros de pages font référence à l'édition des œuvres complètes.

ultérieurs [8]. Grassmann ne connaissait pas la plupart de ces travaux au moment où il a écrit l'*Ausdehnungslehre*, il découvrira leur existence par la suite. Il me semble toutefois important d'en rappeler ici les grandes lignes pour aider à la mise en perspective historique. On mesurera mieux en effet la portée de l'œuvre de Grassmann si on connaît les difficultés où ses contemporains se trouvaient.

En fait la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque trouva une première réponse indirecte et incomplète dans la découverte de la représentation géométrique des quantités imaginaires. Les principes de cette méthode furent découverts de façon indépendante par plusieurs personnes dont les préoccupations se partageaient entre la recherche d'un calcul géométrique et la volonté de légitimation de ces racines impossibles ou imaginaires dont le statut était très controversé. Dans un travail de 1673, John Wallis avait déjà tenté d'illustrer géométriquement les racines des nombres négatifs, mais son modèle de gains et pertes de surfaces sous la mer ne permit pas de donner une interprétation satisfaisante de la multiplication [Wallis 1673]. En quelques années, de façon très certainement indépendante, cinq personnes pratiquement inconnues, qui n'étaient pas des mathématiciens professionnels dégagèrent (avec plus ou moins de succès) les principes de la représentation géométriques des complexes : Caspar Wessel en 1799, l'abbé Buée en 1805, Jean Robert Argand en 1806, C.V. Mourey et John Warren en 1828 [9]. Toutefois, ce n'est qu'avec le travail de Carl Friedrich Gauss publié en 1831, que ces principes devinrent largement connus, acceptés et utilisés par les mathématiciens. Les complexes trouvant ainsi une légitimité au sein même de la géométrie procurèrent un modèle de calcul géométrique plan qui apparaissait comme plus intrinsèque que les cordonnées cartésiennes. Dans la plupart des travaux cités plus haut (c'est surtout vrai pour Wessel), les auteurs essayèrent en vain de construire de nouveaux nombres permettant de généraliser leur découverte à la dimension trois, mais ils butèrent tous sur la définition d'un produit des triplets.

A peu près dans le même temps, deux mathématiciens développèrent des calculs géométriques, qui jetèrent les bases de la géométrie vectorielle.

En 1827, August Ferdinand Möbius publie un mémoire qui fit connaître son *Calcul Barycentrique* [Möbius 1827]. Il propose ainsi une algèbre qui opère essentiellement sur les points. De plus, dès le début de

8. Sur le développement du calcul vectoriel, cf. [Crowe 1967].

9. Je cite ici ces travaux dans l'ordre chronologique, cependant la plupart ne furent connus que plusieurs années après leur première publication, essentiellement en raison du peu de renommée de leurs auteurs. Pour plus de détails sur l'histoire de la représentation géométrique des complexes, on pourra consulter par exemple : [Cauchy 1847], [Cartan 1908], [Budon 1933] et [Crowe 1967].

son traité, il fait preuve d'une grande perspicacité en soulignant l'intérêt de distinguer dans diverses grandeurs géométriques des caractéristiques d'orientation et de direction ; ainsi il introduit la notion de segment orienté (le vecteur géométrique). Il considère aussi des grandeurs algébriques dont le signe dépend de l'orientation pour représenter des triangles et des pyramides. Néanmoins il ne définit la somme de deux segments que dans le cas où il sont colinéaires. Il généralisera cette addition à des segments quelconques seulement en 1843 dans ses *Elemente der Mechanik des Himmels* [Möbius 1843, 1-2]. C'est un des premiers travaux où l'on trouve exposée la structure linéaire des vecteurs de l'espace géométrique.

La définition d'une somme pondérée de points de Möbius ne peut donc être identique à ce à quoi un lecteur contemporain peut penser, elle se fonde en fait, sur le théorème suivant :

> “ Étant donné un système de n points $A,B,C, \ldots, N$ avec les coefficients respectivement $a,b,c,\ldots\ n$, dont la somme n'est pas nulle, on peut toujours trouver un point et un seul, le centre S, ayant la propriété suivante : si des droites parallèles sont tracées par les points donnés et par le point S dans une direction quelconque et si ces lignes coupent un plan quelconque respectivement en les points $A',B',C', \ldots, S'$ on a toujours :
>
> $$\mathrm{a.AA' + b.BB' + \ldots + n.NN' = (a + b + c + \ldots + n).\ SS'}.$$
>
> En particulier si le plan passe par S on a :
>
> $$a.AA' + b.BB' + \ldots + n.NN' = 0.\text{” [Möbius 1827, 9-10]}$$

De là il introduit la notation :

$$a.A + b.B + c.C + \ldots + n.N = (\ a + b + c + \ldots + n).S.$$

Dans le cas où la somme des coefficients est nulle, Möbius dit laconiquement que le point est rejeté à l'infini, mais ce cas n'est pas examiné en détail [10]. En fait Möbius n'a pas pour but de construire une théorie algébrique, dont il dégagerait les propriétés les plus fines, il veut avant tout montrer l'intérêt pratique de sa méthode pour résoudre plus simplement des problèmes de géométrie et de physique, ce qu'il fit très bien. Il permit aussi des avancées théoriques importantes en géométrie, il est

10. Grassmann qui redécouvrira dans son *Ausdehnungslehre* de 1844, indépendamment de Möbius, les principes du calcul barycentrique, montrera que dans le cas où la somme des coefficients est nulle, la somme pondérée des points doit être considérée comme un vecteur, dont il donne les caractéristiques. Grassmann obtient le calcul barycentrique comme une application de sa théorie plus vaste ; son point de vue très général lui permet d'une façon très personnelle de dépasser l'intuition géométrique en s'appuyant sur les régularités des structures algébriques.

en particulier à l'origine de la mise au point des coordonnées projectives par Karl von Staudt, qui permirent de dégager la géométrie projective de toute considération métrique et par là même d'en mieux comprendre la nature. Malgré ces performances réelles et la nouveauté de l'approche de Möbius, le calcul barycentrique ne connut pas un succès très large, bien qu'on l'utilise et qu'on l'enseigne encore de nos jours.

De son côté, Giusto Bellavitis, avec son *Calcul des Equipollences*, dont les premiers résultats furent publiés en 1833 définit, le premier, la notion de vecteur géométrique (les équipollences) comme classe d'équivalence de bipoints. Il définit aussi les principes de l'addition des équipollences et de leur multiplication par un scalaire. Ensuite il introduit la multiplication de deux vecteurs coplanaires en s'inspirant du mémoire de l'abbé Buée sur la représentation géométrique des nombres complexes. Il résume ainsi les propriétés de son calcul :

> "Dans les équipollences, les termes sont transposés, substitués, additionnés, soustraits, multipliés, divisés, etc. En bref, on effectue toutes les opérations algébriques qui seraient légitimes, si on avait affaire à des équations, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes. Comme nous l'avons dit plus haut, les équipollences non linéaires ne peuvent se référer qu'à des figures dans un même plan." [Bellavitis 1833, 247]

Bellavitis illustrera habilement l'intérêt de sa méthode pour la résolution de problèmes de géométrie et de physique [Bellavitis 1835]. Bien sûr son calcul n'apporte semble-t-il rien de plus que la représentation géométrique des complexes. Mais le fait que les entités qu'il utilise soient purement géométriques donne à son travail son originalité et sa nouveauté. Même par rapport à Möbius, son souci de traiter les objets géométriques comme des entités algébriques (cf. la citation précédente) donne une dimension nouvelle à son approche.

On a vu plus haut que la possibilité de généraliser à la dimension trois la représentation géométrique des complexes butait sur l'épineux problème de la multiplication. En effet, jusqu'au milieu du 19^e siècle le modèle algébrique restait celui des nombres, la constitution d'un nouveau calcul se devait donc de produire une addition et une multiplication avec les propriétés qui définissent ce qu'on appelle depuis une structure de corps commutatif. Ces propriétés n'étaient d'ailleurs pas toujours explicitement dégagées, puisque n'ayant jamais été vraiment mises en défaut. Ainsi la définition d'un calcul géométrique en dimension trois était-elle naturellement et plus ou moins implicitement envisagée sous la forme d'une addition et d'une multiplication induisant sur R^3, une structure d'algèbre et de corps commutatifs. Sir William Rowan Hamilton s'intéressait depuis plusieurs années à la représentation géométrique des nombres complexes et à sa généralisation en dimension trois, quand il a découvert les *Quaternions* vers 1843. Il fut le premier à avoir explicité en détail les propriétés que devaient avoir l'addition et la multiplication des triplets. Il a rédigé de nombreuses notes sur ses différentes tentatives qui montrent qu'il a souvent changé d'angle d'approche essayant tantôt d'aborder le problèmes sous l'angle de l'algèbre tantôt sous l'angle de la géométrie, en usant fréquemment de changements de point de vue. Finalement, c'est en examinant les propriétés géométriques de la multiplication des complexes, qu'il fit un pas décisif vers la découverte des Quaternions. Il mit en effet en relief le fait que cette multiplication se base sur le produit des longueurs de chaque vecteur et sur l'angle qu'ils forment. Essayant de transposer ces idées à la dimension trois, il comprit que l'angle de deux vecteurs n'était plus suffisant, mais qu'il fallait aussi considérer le plan dans lequel cet angle se dessine, autrement dit la rotation qui permet de passer d'une direction à l'autre [Hamilton 1866, 1 :106-110]. Or si la longueur est en dimension trois comme deux une valeur unidimensionnelle, une rotation en dimension trois est déterminée par une direction (grandeur bidimensionnelle) et un angle (grandeur unidimensionnelle).

Cette analyse le conduisit progressivement à penser qu'un calcul géométrique en dimension trois devait se fonder sur des quadruplets et non des triplets. De plus la non-permutabilité dans le produit de deux rotations en dimension trois le conduisit à abandonner la commutativité du produit des quadruplets [11]. En 1844, Hamilton publia les fondements de la théorie des Quaternions [Hamilton 1844] et passa le reste de sa vie a en promouvoir l'utilisation. La personnalité de Hamilton et son influence sur les mathématiciens d'Outre-Manche, aidèrent beaucoup à la popularisation de cette théorie. En physique et plus particulièrement en électromagnétisme, on assista à une guerre parfois virulente entre quaternionistes et partisans des méthodes vectorielles. Le rôle des différentes théories dans l'établissement du calcul vectoriel est retracé en détail dans le livre de Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis* [Crowe 1967], auquel je renvoie le lecteur intéressé. Pour ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels, la découverte des Quaternions eut un autre effet tout autant important. Les Quaternions ont, en effet, fourni la première structure algébrique qui rompait avec le principe de perma-

11. On savait depuis longtemps que la composée de deux fonctions change selon l'ordre de composition. Mais la composition des fonctions n'étant pas considérée encore comme une opération au sens algébrique du terme, cela ne constituait pas un exemple de non-commutativité.

nence, à cause de sa multiplication non commutative. De fait, cela ouvrit la porte sur de nombreuses recherches sur ce qu'on appelait les systèmes hypercomplexes, qui devinrent plus tard les algèbres, et qui jouèrent un rôle important dans l'émergence de l'algèbre moderne.

L'œuvre de Grassmann dépasse sur de nombreux plans les différents travaux brièvement présentés ci-dessus. Pourtant celui-ci ne les connaissait pas, pour la plupart, au moment d'écrire l'*Ausdehnungslehre*. Il aura connaissance du calcul barycentrique de Möbius très peu de temps après 1844 et reconnaissant une proximité d'idées avec Möbius, prendra contact avec lui, ce sera le début d'une correspondance suivie. Möbius est d'ailleurs un des rares mathématiciens de son temps à reconnaître la valeur du travail de Grassmann, mais il ne partage pas ses vues philosophiques et admet son impuissance à saisir tout le contenu de son œuvre. Grassmann entretiendra également une correspondance avec Bellavitis et sur la fin de sa vie, il découvre les Quaternions, dont il donne une interprétation dans le cadre de son Ausdehnungslehre. Mais Hamilton reste persuadé, bien qu'il en reconnaisse certaines qualités, que l'*Ausdehnungslehre* est inférieure à ses propres travaux et la notoriété du mathématicien Irlandais, qui contraste avec l'anonymat de Grassmann, fait que la théorie du premier a eu une influence bien plus grande, sur le développement des mathématiques, et même dans les applications à la physique. Pourtant, grâce en particulier à Josiah Willard Gibbs, les méthodes de Grassmann furent à l'origine de l'emploi de méthodes vectorielles en électromagnétisme s'opposant en cela aux "quaternionistes", dont l'un des plus fervents défenseurs était Peter Guthrie Tait. La reconnaissance de la valeur de Grassmann sur le plan mathématique commencera doucement et tardivement dans les dernières années de sa vie (cf. la fin des repères biographiques, en annexe).

Justus Günther Grassmann (1779-1852)[12]

Comme je l'ai signalé plus haut, le père de Hermann Grassmann fut son seul maître en mathématiques et en physique. Justus Grassmann commença par être pasteur, mais au bout de quelques années, il devient professeur au lycée de Stettin, où il fera toute sa carrière et enseignera quasiment toutes les disciplines. Dans ce cadre, Justus Grassmann a écrit plusieurs manuels destinés à la formation des enseignants du second degré :

— *Raumlehre für Volksschulen*, 1^{e} pt., Berlin, 1817.

12. Sur tout ce paragraphe on pourra, pour plus de détails, consulter [Lewis 1981].

— *Raumlehre für die untern Klassen der Gymnasien und für Volksschulen*, 2^e pt., Berlin, 1824.
— *Lehrbuch der ebenen und sphaerischen Trigonometrie*, Berlin, 1835.

Son œuvre majeure est en fait la première partie d'une série, dont il ne publiera jamais la suite, destinée à donner un exposé plus clair des notions élémentaires de mathématiques, elle s'intitule : *Zur Physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationlehre* (1829). Reconnaissant que son style pédagogique n'est pas propre à attirer l'attention des scientifiques, il publie en 1836, dans un journal scientifique, une deuxième version, sous le titre : *Combinatorische Entwicklung der Krystallgestalten*[13]. Dans son travail, Justus Grassmann introduit d'un point (pris comme origine O) trois segments unitaires orientés perpendiculaires deux à deux *a, b, c* et considère les combinaisons de ceux-ci ou de leurs opposés (*a', b', c'*), avec des exposants, d'une manière qui est équivalente à la notion moderne de combinaison linéaire : $a'^3 b^2 c$ dans les notations de Justus Grassmann correspond en langage moderne au vecteur de composantes (-3, 2, 1) dans le repère (O, *a, b, c*).

Dans sa *Theorie der Ebbe und Flut* (1839), qui prépare son *Ausdehnungslehre*, Hermann reprendra l'idée de son père en en faisant un usage plus systématique. Par ailleurs, on trouve dans La *Raumlehre* de Justus, les prémisses de l'idée de produit géométrique telle qu'il sera conçu par Hermann dans l'*Ausdehnungslehre* :

> "C'est essentiellement le rectangle même qui est le vrai produit géométrique et sa construction la vraie multiplication. Dans son sens le plus pur et le plus général, le concept de produit renvoit au résultat d'une construction, qui vient de la même façon de quelque chose de déjà généré ou construit, puisque ce dernier fut généré du générateur initial ; donc la multiplication est seulement une construction de plus haut degré. En géométrie, le point est le générateur original, de lui, à l'aide de cette construction, vient la ligne. Si on fait du segment (comme ayant été généré par la première construction), la base d'une nouvelle construction, que l'on accomplit de la même manière que précédemment pour le point, alors on forme le rectangle. Le rectangle est donc formé de la ligne de la même manière que la ligne a été formée du point. [...]
>
> On peut donc peut-être dire que le rectangle est un segment pour lequel le point générateur a été remplacé par un segment." [Grassmann 1844, note bas de page, 194-5].

13. in *Annalen der Physik und Chemie* **30** (1936), "Ergänzungsband", pp. 1-43.

Justus Grassmann exprime ici plusieurs idées qui seront fondamentales dans l'œuvre de son fils, relevons les plus marquantes.

— La génération (par déplacement) est un concept central. Seul le point est donné a priori, le reste est construit à partir de lui, selon un processus de génération itératif.

— Les constructions se répètent pour passer d'une grandeur à une grandeur d'échelon supérieur.

— L'identité du processus de génération qui se répète permet de voir le rectangle comme une sorte de segment ; ceci ouvre la porte sur une généralisation à un nombre quelconque de dimensions, que Justus ne fait que dévoiler, mais Hermann franchira ce pas aisément.

Il est tout à fait remarquable que ces quelques idées sur la construction de l'espace et sur la multiplication géométrique constituent quasiment les seuls principes strictement mathématiques fondateurs de la Théorie de l'Extension conçue par Hermann. Justus Grassmann, bien qu'il n'ait pas développé une théorie très élaborée, apparaît néanmoins comme un précurseur du calcul géométrique, très novateur pour son époque, aussi son influence sur son fils est–elle de ce fait très importante. Voici maintenant une longue citation tirée de la préface de l'Ausdehnungslehre de 1844, où l'on peut juger de l'importance de l'influence de Grassmann père sur son fils :

> "La considération du négatif en géométrie m'avait donné la première impulsion ; je m'habituais à voir dans les segments AB et BA des grandeurs opposées ; d'où résultait que, si A, B, C sont des points d'une ligne droite, AB + BC = AC est également toujours vrai, et quand AB et BC sont désignés pareillement, et quand ils sont opposés, c'est-à-dire quand C est placé entre A et B. Dans ce dernier cas AB et BC n'étaient pas vus seulement comme de simples longueurs, mais il y était fixé en même temps la direction au moyen de laquelle justement ils étaient opposés. S'imposait ainsi la distinction entre la somme des longueurs et la somme de tels segments où était en même temps fixée la direction. D'où résultait l'exigence de fixer ce dernier concept de somme non seulement pour le cas où les segments sont dirigés dans la même sens ou dans le sens opposé, mais aussi pour tous les autres cas. Cela se pouvait faire de la façon la plus simple en maintenant encore la loi AB + BC = AC, même quand A, B, C n'étaient pas sur une ligne droite [14] . — Ainsi fut fait le premier pas vers une analyse qui

14. Bien entendu cette loi est la traduction algébrique du parallélogramme des forces, connu depuis l'antiquité. Cependant entre un moyen graphique de représenter la résultante de deux forces et une interprétation algébrique de l'addition de deux vecteurs, le saut conceptuel est énorme. Il ne faut donc pas s'étonner de la nouveauté de l'addition vectorielle en ce milieu de 19^e siècle.

> menait par la suite vers la nouvelle branche de la mathématique que voici. Mais je n'avais aucune idée de la richesse et du caractère fructueux du domaine auquel j'étais parvenu ; au contraire ce résultat ne me semblait pas très remarquable jusqu'au moment où je l'ai combiné avec une idée connexe.
>
> En suivant le concept de produit en géométrie, tel qu'il fut conçu par mon père [15] , je trouvai que non seulement le rectangle mais somme toute aussi le parallélogramme est à considérer comme le produit de deux côtés contigus, quand on prenait en effet, là encore, non pas le produit des longueurs, mais celui des deux segments en tenant compte de leurs directions. En combinant alors ce concept de produit avec celui de somme exposé précédemment, j'obtins l'harmonie la plus frappante. (...) (*explication du caractère distributif)*
>
> (...) Cette harmonie me faisait alors pressentir en tous cas que s'ouvrirait ainsi un domaine tout à fait nouveau de l'analyse, ce qui pourrait mener à des résultats importants. (...)
>
> Je me mettais alors à retravailler les résultats ainsi obtenus dans leur ordre d'idées, depuis le début me proposant de ne faire appel à aucun théorème démontré dans n'importe quelle autre branche de la mathématique, il apparut alors que l'Analyse que j'avais découverte ne se situait pas seulement dans la géométrie, mais j'aperçus alors que j'avais atteint là le domaine d'une nouvelle science, dont la géométrie elle-même n'est qu'une application.(...) L'avantage était que la limitation à trois dimensions devenait caduque. De cette façon seulement, les lois étaient mises en lumière dans leur évidence et dans leur universalité et se présentaient dans leur contexte essentiel, et certaines régularités, qui à trois dimensions soit n'existaient pas encore, soit existaient de façon cachée, s'épanouissaient alors en toute clarté dans cette généralisation." [*ibid.*, 7-11]

L'essentiel des idées mathématiques que Hermann esquisse ici trouvent donc leur origine dans le travail de Justus. Cependant, la grande innovation de Hermann est d'adopter un point de vue plus systématique et plus général. On verra dans le paragraphe suivant, comment ses positions philosophiques ont pu influer ce processus de généralisation.

Au–delà de cette influence sur les idées mathématiques, Justus Grassmann a certainement joué un rôle non négligeable sur les conceptions de son fils vis-à-vis du fonctionnement des sciences et des mathématiques en particulier, même si d'autres, dont principalement Schleiermacher (cf.

---

15. Voir : la "Raumlehre", 2^{e} partie, p.194 de Justus Grassmann, et sa "Trigonometrie", p. 10. (c'est une note de Grassmann).

paragraphe suivant), ont pu jouer un rôle peut-être plus décisif sur ce point.

Justus Grassmann était avant tout un enseignant et sa vision des sciences et des mathématiques apparaît essentiellement dans ses principes didactiques, qu'il a eu l'occasion d'expliciter dans ses écrits destinés aux enseignants. Par ailleurs, certainement sous l'influence de sa formation de théologien, sa philosophie des sciences reste empreinte d'une dose de métaphysique, qui a dû influencer le jeune Hermann, bien qu'on se doive de rester au niveau de la spéculation sur ce point, faute de plus d'information. Pour donner une idée de cette composante métaphysique chez Justus Grassmann, je donne ci-dessous une traduction de la double épigraphe qui apparaît au début de sa *Geometrische Combinationslehre* :

> "Où que tu erres dans l'espace, ton zénith et ton nadir,
> Aux cieux associe-toi, ainsi qu'à l'axe de la terre.
> Quels que soient tes actes, que le ciel soit mû par ta volonté,
> Que le but de tes exploits traverse l'axe de la terre."[16]

> "Il existe une méthode qui permet de connecter entre elles les lignes et les surfaces de sorte que d'elles se développe une collection de formes des plus simples et des plus régulières, qui, comme issues d'une lanterne magique, apparaissent à l'œil de l'esprit, brillant contre les cieux de leur aspect clair, et éclairant les profondeurs obscures de la terre de leur lumière, les rendant transparentes."

Les principes didactiques de Justus Grassmann ont pu jouer un rôle non négligeable dans le choix du mode de présentation de l'Ausdehnungslehre, dont on verra qu'il est un élément constitutif de la théorie même. Dans le passage qui suit, extrait de la préface de la *Raumlehre* [1817, viii.] Justus explique comment il pense que les enseignants doivent présenter les résultats de la science à leurs élèves :

> "[Les élèves-professeurs] peuvent obtenir un bénéfice durable, seulement s'ils cherchent à mettre à jour les points de départ initiaux, qui sont les mêmes pour la science que pour son instruction, s'ils suivent ceux-ci clairement dans leur inter-relation naturelle, et par là, placent leur élève à chaque pas au cœur des recherches, de sorte qu'il embrasse clairement du regard non seulement le chemin qu'il vient de suivre, mais aussi qu'il soit en position d'anticiper et de déterminer depuis le départ ce qui doit suivre par la suite."

16. Cette première partie de l'épigraphe est un épigramme de Friedrich von Schiller :

> "Wo du auch wandelst im Raum, es knüpft dein Zenith und Nadir
> An dem Himmel dich an, dich an die Axe der Welt.
> Wie du auch handelst in dir, es berühre den Himmel der Wille,
> Durch die Axe der Welt gehe die Richtung der That."

La suite de l'épigraphe est de Justus Grassmann.

On va voir dans le paragraphe qui suit que l'on retrouve un point de vue similaire dans le choix du mode de présentation de Hermann pour la première édition de l'*Ausdehnungslehre*.

Contenu Philosophique

L'une des originalités les plus frappantes de L'*Ausdehnungslehre* réside dans son contenu explicitement philosophique. C'est avant tout ce qui a rebuté la plupart des lecteurs contemporains de Grassmann qui n'ont pas hésité à critiquer vivement cette tendance. Möbius lui-même qui fut l'un des rares mathématiciens a avoir reconnu la valeur de l'œuvre de Grassmann, lui a reproché l'obscurantisme de ses considérations philosophiques. En réponse à la requête que Grassmann lui fait dès 1844, de publier une critique de son œuvre, voici un extrait de la réponse de Möbius, datée du 2 février 1845 :

> "Je réponds que j'ai été sincèrement heureux de vous avoir rencontré dans une communauté d'esprit, mais notre affinité ne tient qu'aux mathématiques, pas à la philosophie. Comme je me souviens vous l'avoir dit en personne, je suis étranger à ce qui touche à la spéculation philosophique. En ce qui concerne la composante philosophique de votre excellent travail, qui se situe à la base de la composante mathématique, je ne suis pas prêt à l'apprécier de manière correcte ou même à la comprendre de façon adéquate. Je me suis suffisamment rendu compte de cela au cours des nombreuses tentatives que j'ai faites pour étudier votre travail sans interruption ; dans chaque cas, néanmoins, j'ai été arrêté par la grande généralité philosophique". [Grassmann 1894/1911, 3(2) :100].

Möbius refusera de publier une critique de l'*Ausdehnungslehre* et proposera à Grassmann de s'adresser à Drobisch, philosophe et mathématicien, mais celui-ci ne donnera pas suite. Par ailleurs Richard Baltzer, également mathématicien et philosophe, avoue à Möbius dans une lettre du 26 octobre 1846 :

> "[. . .] Il ne m'est pas encore possible, de pénétrer ses [celles de Grassmann] pensées, je suis pris de vertige et tout devient bleu-ciel devant mes yeux, quand je les lis." [*ibid.* ; 3(2) :102].

Durant les trois années (de 1827 à 1830) qu'il a passé à étudier à l'université de Berlin, Hermann Grassmann eut comme professeur Friedrich Schleiermacher, qui aura une grande influence sur ses positions philosophiques [17]. Voici un extrait de l'opinion de Grassmann sur son maître [18] :

17. Sur ce point, cf. l'analyse très détaillée et très bien documentée de Lewis (1977).
18. Ceci est extrait d'un écrit de Grassmann connu sous le nom de *Lebenslauf*, édité par Engel dans la préface de sa biographie de Grassmann, il a certainement été écrit

> "[...] bien que j'étais essentiellement intéressé par la philologie à l'époque, je reconnus alors pour la première fois que quelque chose pouvait être appris de Schleiermacher valable pour toute science. C'est parce que, plus que de donner une connaissance positive, il apprend comment approcher chaque recherche du bon côté et comment la poursuivre de sa propre initiative, et cela permet de trouver la connaissance positive de soi-même. Dans le même temps, ses idées m'ont aussi stimulé, ses cours ont excité mon esprit et cela n'a pu qu'influencer mes croyances fondamentales et mon entière façon de penser." [Grassmann 1894/1911, 3(2) :viii].

L'œuvre principale de Schleiermacher, que Hermann Grassmann a étudié avec son frère Robert, entre 1840 et 1841, s'intitule *Dialektik* ; c'est une compilation de notes de cours qu'un de ses élèves, Ludwig Jonas, a réunies et publiées en 1839, à la demande de Schleiermacher lui-même. Une présentation détaillée de la *Dialektik* dépasserait le propos de ce texte. Disons tout d'abord que cette œuvre n'a pas la prétention de proposer une organisation systématique de la connaissance ; c'est plutôt une présentation des conditions qui rendent une telle organisation possible. Ainsi Schleiermacher nous dit :

> "Toute connaissance est une pensée [...]. Une pensée est une connaissance si elle est
>
> (a) nécessairement produite par tous les individus pensant de la même manière,
>
> et (b) représentée comme correspondant à un existant [qui peut être une autre pensée] auquel la pensée réfère." [Dialektik, 43]

Ainsi, l'intuition est une moyenne entre la pensée rationnelle, où l'intellect prédomine, et la perception, où l'organique prédomine. Schleiermacher reconnaît à tout jugement une part d'a-priori et une part d'a-posteriori, une part de synthétique et une part d'analytique. On voit donc qu'il se démarque assez nettement de la théorie kantienne prédominante à l'époque.

Si l'on se réfère à l'analyse de Lewis, le point essentiel de l'influence sur Grassmann réside dans l'utilisation de la dialectique des contrastes, comme un thème unificateur de la méthode de Grassmann et l'un de ses moteurs essentiels.

> "Comme dans la *Dialektik*, les contrastes dans l'*Ausdehnungslehre* ont les propriétés suivantes :
>
> (i) L'Un et le Multiple apparaissent sous une forme ou sous une autre dans tous les contrastes, comme par exemple, le général et le particulier, le continu et le discret, l'égal et le différent ;

entre 1834 et 1839.

> (ii) Relativisme : chacune de deux qualités opposées dépend de l'autre pour sa définition et il est impensable qu'elle puisse décrire un existant pur ayant cette seule qualité ;
> (iii) Non résolution : l'essence de la réalité est représentée par la tension entre des éléments mis en contraste, plutôt que par leur synthèse ou leur résolution ;
> (iv) Les contrastes sont utilisés comme des éléments déterminants des concepts et des relations de type genre-espèce entre ces concepts." [Lewis 1977, 121].

La dialectique des contrastes opère sur de nombreux plans dans toute l'œuvre de Grassmann, non seulement dans l'introduction qui est entièrement philosophique, mais aussi comme un moyen de découverte mathématique, et de présenter les résultats, tout au long de la théorie.

L'*Ausdehnungslehre* de 1844 commence donc par une introduction d'une dizaine de pages, voilà comment Grassmann la présente dans la préface :

> "Par la nature des choses, elle est plutôt philosophique, et si je l'ai isolée de l'ensemble de l'œuvre c'est pour ne pas effrayer tout de suite les mathématiciens par la forme philosophique. [...] Cela n'empêche pas que j'ai jugé nécessaire d'attribuer à la nouvelle science sa place dans le domaine du savoir, et, pour répondre aux deux exigences, j'ai fait une introduction qui peut être sautée sans nuire beaucoup à la compréhension de l'ensemble." [Grassmann 1844, préface, 15]

On voit donc que Grassmann avait anticipé le mauvais accueil qu'allaient faire les mathématiciens à la composante philosophique de son œuvre. Cependant, l'aspect philosophique dépasse le simple cadre de l'introduction, qui, malgré son caractère isolé, n'en reste donc pas moins un élément à part entière de l'œuvre. D'ailleurs, après une tentative de suppression de toute considération philosophique, qui donna lieu à la publication en 1862 d'une nouvelle version présentée sous la forme d'un exposé mathématique plus traditionnel, Grassmann recevra des demandes de réédition de la version de 1844 ; il n'aura pas le temps de terminer cette réédition avant de mourir, cependant Victor Schlegel s'en chargera. Dans la nouvelle préface écrite par Grassmann lui-même, celui-ci reconnaît l'unité de son œuvre et réhabilite ainsi l'introduction et toute la composante philosophique de 1844 :

> "Dans cette seconde édition j'ai laissé inchangé le texte de la première édition (sauf bien sûr pour les erreurs de frappe) car cela représente l'explicitation cohérente d'une seule idée fondamentale, et aussi car la méthode de traitement est telle que je la crois fermement justifiable et comme plus parlante pour le lecteur enclin

> à la philosophie que la méthode plus familière des mathématiciens de l'*Ausdehnungslehre* de 1862." [Grassmann 1894/1911, 1 :17].

En particulier, c'est dans l'introduction que l'on trouve les clefs essentielles qui permettent de comprendre le processus de généralisation à l'œuvre dans la Théorie de l'Extension ainsi que la nature du jeu dialectique entre formalisme et intuition géométrique. C'est aussi là que se trouve expliqué et justifié le choix du mode de présentation. Or ces deux points sont essentiels pour la compréhension du contenu mathématique qui suit. Aussi une mauvaise appréciation de la portée des idées philosophiques qui sous-tendent l'*Ausdehnungslehre*, fut-elle souvent à l'origine de l'incompréhension de la théorie mathématique. Comme ce fut le cas pour Ernst F. Apelt qui écrit à Möbius le 3 septembre 1845 :

> "Avez-vous lu la bizarre *Ausdehnungslehre* de Grassmann ? Je la connais seulement de *Grunerts Archiv* [19] , mais il me semble qu'une fausse philosophie des mathématiques est à la base. Le caractère essentiel de la connaissance mathématique, l'intuition, en semble être complètement bannie. Une Théorie de l'Extension "abstraite", telle qu'il l'a cherchée, pourrait être développée uniquement à partir des concepts. Mais la source de la connaissance mathématique ne repose pas sur les concepts mais sur l'intuition." [Grassmann 1894/1911, 3(2) :101].

On va voir combien une telle critique montre une incompréhension des idées de Grassmann.

L'introduction de l'*Ausdehnungslehre* commence par une succession de mises en contraste qui visent à spécifier la nature de la science, des mathématiques et de leurs diverses branches.

Ainsi Grassmann commence-t-il par mettre en contraste les sciences réelles qui "figurent l'être dans la pensée, un être lui-même indépendant de cette pensée" et les sciences formelles qui "ont pour objet ce qui est posé par la pensée elle-même", c'est-à-dire les formes (de pensée). Pour les premières, la vérité est donnée par la concordance de la pensée avec l'être alors que pour les secondes, celle-ci se fonde sur la concordance entre eux des processus de pensée. On retrouve donc ici les éléments classiques de l'opposition entre réalisme et idéalisme. Grassmann insiste beaucoup sur le fait que la géométrie est souvent considérée à tort comme faisant partie des mathématiques, donc des sciences formelles, il s'en explique ainsi :

> "La place de la géométrie vis-à-vis de la théorie des formes [i.e. les mathématiques pures] dépend du rapport de l'intuition de l'espace

19. Grassmann avait fait lui-même paraître un résumé de l'*Ausdehnungslehre* dans ce journal scientifique en 1845.

> avec la pensée pure. Bien que nous disions qu'une telle intuition fait face à la pensée d'une manière indépendante, nous n'avons pourtant pas de la sorte affirmé que l'intuition de l'espace ne nous vient que par la contemplation des choses spatiales ; mais c'est une intuition fondamentale qui nous est donnée *a priori* par le fait que notre sens est ouvert au monde sensible et qui nous est originellement inhérente de la même manière que le corps l'est à l'âme. Il en est de même du temps et du mouvement qui est fondé sur les intuitions du temps et de l'espace ; c'est pourquoi, on a inclus avec le même droit la théorie pure du mouvement (Phorométrie) dans les sciences mathématiques. Moyennant le contraste de cause et d'effet, le concept de force mouvante découle de l'intuition du mouvement. Ainsi géométrie, Phorométrie et mécanique se présentent comme applications de la théorie des formes aux intuitions fondamentales du monde sensible." [Grassmann 1844, introduction, A,§3., 24].

Ainsi la Théorie de l'Extension se présente comme la science formelle qui pourra être appliquée à la géométrie, qui elle fait partie des sciences réelles.

Il distingue ensuite deux types de sciences formelles : la dialectique ou logique qui s'occupe de l'étude des lois générales de la pensée et la mathématique pure ou théorie des formes qui étudie le particulier posé par la pensée. Il met alors en évidence deux contrastes qui lui permettent de séparer la théorie des formes en quatre branches :

— ce qui est devenu par la pensée (une forme) peut l'être de deux façons : soit par un acte simple générateur qui donne la forme continue, soit par un acte double de pose et de liaison qui donne la forme discrète.

— chaque particulier devient tel de deux manières différentes, soit par le concept de distinct (coordination avec un autre particulier) ce qui donne la forme combinatoire, soit par le concept d'égal (subordination à un général commun), ce qui donne la forme algébrique.

En reprenant le schéma de Lewis (1997, 125) on peut représenter comme suit, les quatre branches de la théorie des formes issues de ces deux contrastes :

Mode de génération

type d'éléments	acte simple générateur	acte double de pose et de liaison
égal	*Forme continue algébrique* Théorie des Fonctions Calcul differentiel et intégral	*Forme discrète algébrique* Théorie des nombres Arithmétique
distinct	*Forme continue combinatoire* Théorie de l'Extension	*Forme discrète combinatoire* Analyse combinatoire

Voilà donc déterminée la position de la Théorie de l'Extension dans l'édifice général des sciences comme une des quatre branches de la mathématique pure. Cette branche entièrement nouvelle s'intéresse aux formes continues combinatoires. Grassmann peut alors définir le "concept général de l'*Ausdehnungslehre*" :

> "Le devenir continu, séparé en ses moments, paraît telle une formation continue en fixant ce qui est déjà devenu. Pour la forme d'extension ce qui est en train de se former est chaque fois posé comme un distinct ; si maintenant nous ne fixons pas ce qui est chaque fois devenu, nous parvenons au concept de *changement continu.* Nous appelons élément générateur ce qui subit ce changement, et quel que soit l'état que prend dans son changement l'élément générateur, il est un élément de la forme continue. Par conséquent, la forme d'extension est l'ensemble de tous les éléments en lesquels se transforme l'élément générateur en se changeant continûment. [. . .]
> Le distinct doit se développer selon une loi pour que l'engendré soit fixé. Pour la forme simple, cette loi doit être la même pour tous les moments du devenir. La forme d'extension *simple* est alors la forme qui naît d'un changement de l'élément générateur

> suivant toujours la même loi ; nous appelons ici système ou domaine l'ensemble de tous les éléments qui peuvent être engendrés par la même loi. [. . .]
>
> Si on applique deux lois différentes du changement, alors l'ensemble des éléments qui peuvent être engendrés forme un système du deuxième échelon. Les lois du changement, par lesquelles les éléments de ce système peuvent résulter les uns des autres, sont dépendantes des deux premières lois ; si on ajoute une troisième loi indépendante, on arrive alors à un système de troisième échelon et ainsi de suite." [*ibid.*, introduction, C, §9-11, 28-29].

La représentation géométrique de l'extension consiste en un point se déplaçant de façon rectiligne, dans les deux sens, qui engendre une droite infinie, puis un plan et enfin l'espace. Mais la Théorie de l'Extension se place à un niveau plus formel, où, en particulier, le nombre de dimensions n'est pas limité. Le concept de changement continu qui est à la base de la Théorie de l'Extension, n'est pas plus défini par Grassmann, que par ce qui est dit là. Ceci est en fait typique de la démarche qui consiste à une détermination par usage de la dialectique des contrastes ; les aspects réel et formel font écho, sans qu'ils ne soient jamais tranchés. Ainsi le changement continu ne peut être appréhendé que dans ce rapport dialectique où l'intuition géométrique comme celles du temps et de l'espace, données a priori (cf. le passage cité ci-dessus), détermine les rapports entre le formel et le réel. On mesure ici ce qui distingue l'approche de Grassmann des théories modernes, où l'axiomatique permet un rapport beaucoup plus distant et subalterne du réel au modèle. Ici la formalisation se construit sur le réel dans une dialectique permanente, dont l'aspect systématique fixe les règles du processus de généralisation.

Ce dernier point est aussi essentiel dans le choix du mode de présentation de la théorie. Grassmann reconnaît avoir essayé plusieurs possibilités :

> "Il est vrai que j'ai travaillé l'ensemble plusieurs fois de plusieurs façons : tantôt sous forme euclidienne d'explications et de théorèmes de la plus grande rigueur, tantôt sous forme d'un développement cohérent présentant la meilleure vue d'ensemble, tantôt sous une forme qui combine les deux ; c'est en ce sens que j'ai commencé par une présentation donnant une vue d'ensemble et poursuivi par un développement sous forme euclidienne." [*ibid.*, préface, 16].

Le dernier paragraphe de l'introduction est consacré à justifier ce choix :

> "Nous attachons maintenant un caractère scientifique à un mode de traitement si d'une part il conduit le lecteur à la nécessité

> d'admettre chaque vérité individuelle et si de l'autre, il le met en état d'embrasser à chaque pas du développement l'orientation prise par sa progression." [Grassmann 1844, introduction, D, §14, 30].

Ainsi le mode de présentation est régi par une dialectique portant sur le contraste entre rigueur et vue d'ensemble. On reconnaît dans ce dernier point une similitude avec les principes didactiques de Justus Grassmann. Pour Hermann cela devient un critère de scientificité. Il précise par ailleurs sur quoi la vue d'ensemble doit s'appuyer :

> "A tout moment du développement, la manière ultérieure de développer est essentiellement marquée par une idée directrice qui est, ou bien rien d'autre qu'une analogie présumée avec des branches voisines du savoir et déjà connues, ou bien — et c'est le meilleur cas — un pressentiment direct ["Ahnung"] de la vérité suivante à chercher.[...]
>
> Le pressentiment paraît étranger au domaine de la science pure et surtout au domaine mathématique. Cependant, sans lui, il est impossible de trouver une quelconque vérité nouvelle ; par combinaison aveugle des résultats obtenus on n'y arrive pas ; mais ce qu'il faut combiner, et de quelle manière, doit être marqué par l'idée directrice, et, de son côté cette idée directrice ne peut se présenter que sous la forme du pressentiment avant qu'elle ne soit réalisée dans la science même. C'est pourquoi ce pressentiment est quelque chose d'indispensable dans le domaine scientifique. A savoir, il est — s'il est conçu de la bonne manière — le regard en une unité de toute la série de développements qui mènent à la nouvelle vérité, mais avec des moments de développement qui ne sont pas encore exposés, et c'est pour cette raison que le pressentiment ne peut être au début qu'obscur. L'exposition de ces moments renferme à la fois la découverte de la vérité et la critique de ce pressentiment."[*ibid.*, introduction, D, §15, 31].

Dans la Théorie de l'Extension, c'est la géométrie qui sert à donner les analogies inspiratrices :

> " (...) partout je me rattache à la géométrie pour la déduction de concepts nouveaux, dont notre science constitue la base. Mais en posant toujours à la base le concept abstrait pour la déduction de vérités qui constituent le contenu de cette science, sans jamais me fonder sur une vérité démontrée en géométrie (...)" [*ibid.*, §13, p. 46].

En définitive, dans le mode de présentation, le contraste entre réel et formel se retrouve dans celui entre construction et combinaison. La construction concerne les séries de développements rigoureux qui se déroulent selon un mode de présentation euclidien. La combinaison elle, fait référence au processus de découverte d'une nouvelle connaissance et à la détermination de ses connections avec les connaissances déjà acquises. Comme le fait remarquer Lewis on retrouve dans ce contraste la distinction que Schleiermacher fait entre les méthodes architectonique et heuristique. Le contraste entre le développement formel de la théorie et son avancement par analogie et pressentiment au regard de la géométrie est un composant fondamental dans les fondations mêmes de la Théorie de l'Extension. En ce sens, il influe de façon déterminante et dialectique dans le processus de création ainsi que dans l'exposé des justifications et des validations apportées par Grassmann tout au long de son œuvre.

La Théorie Générale des Formes

Après l'introduction mais avant la Théorie de l'Extension proprement dite, Grassmann consacre une quinzaine de pages à un chapitre intitulé : *Aperçu de la Théorie Générale des Formes,* qui "présente les lois des liaisons ["Verknüpfung"] générales, c'est-à-dire les lois qui s'appliquent également à toutes les branches". Il ne faut cependant pas confondre cette partie avec la Dialectique (ou Logique), qui est l'étude des formes générales, ici on s'intéresse à ce que les formes particulières ont en commun.

> "Il est essentiel de faire précéder une telle partie avant tout parce que non seulement cela évite de répéter des mêmes séries de conclusions dans les quatre branches (...), mais ainsi aussi tout ce qui va par essence ensemble se présente ensemble et comme fondement de tout". [*ibid.*, introduction, B, §8, 28].

En fait ce qui est présenté est très proche de l'étude de la relation d'équivalence et des structures de groupe, d'anneau et de corps. On est pourtant très éloigné de l'esprit d'une présentation axiomatique. En effet les éléments ne sont pas donnés a priori, au contraire Grassmann regarde leurs règles de construction à la lumière des contrastes d'égal et de différent et de liaison et de séparation, qui se trouvent formalisés.

> "Égal est ce dont on peut toujours dire la même chose ou, plus généralement, égal est ce qui peut être mutuellement substitué dans chaque jugement [20] . Il est évident qu'on a dit ici à la fois

20. Ceci ne doit pas être une détermination conceptuelle philosophique, mais seulement un accord sur le mot, afin de ne pas comprendre quelque chose d'autre par ceci. La détermination conceptuelle philosophique devrait plutôt saisir le contraste de l'égal et du distinct dans sa mouvance et dans sa délimitation rigide, pour lequel

> que si deux formes sont égales à une troisième, elles le sont entre elles, et que ce qui est engendré de la même manière à partir de ce qui est égal est encore égal." [*ibid.*, §1, 34].

Ceci est très proche "techniquement" de la définition d'une relation d'équivalence compatible avec les opérations qui définissent la génération des éléments, mais on mesure la distance qui sépare cette présentation d'une définition axiomatique.

Dans la suite, Grassmann définit ce qu'il appelle une addition et qui correspond en langage moderne à la loi d'un groupe commutatif. En fait, il regarde comment des changements formels dans des liaisons d'éléments peuvent conduire à des constructions qui seront considérées comme identiques sur le plan réel, quand les liaisons seront spécifiées. Il définit de même la multiplication qui correspond en langage moderne à la deuxième loi d'un anneau ou d'un corps si elle est associée à une division univoque.

La Théorie Générale des Formes ne fait donc que déterminer les propriétés possibles des lois de construction qui seront spécifiées en fonction du contexte réel qui détermine les liaisons particulières. Ainsi ce chapitre joue le rôle d'une architectonique, dans le sens de Schleiermacher.

Au regard de la Théorie de l'Extension, la Théorie Générale des Formes va déterminer les règles de formation des objets sur le plan formel dans un mode exploratoire. L'analogie avec la géométrie est à la source du mode initial de génération des grandeurs d'extension, et détermine l'aspect réel de la théorie. La méthode heuristique, complémentaire de l'architectonique, implique selon Schleiermacher une constante référence à ce mode initial de génération. On va voir maintenant comment les premiers paragraphes de la Théorie de l'Extension vont mettre en œuvre cette dialectique entre les méthodes architectonique et heuristique, entre aspects formel et réel, pour libérer les grandeurs d'extension de leur contingence par rapport au choix du mode de génération. Dans ce sens, ces quelques pages illustrent bien le processus de généralisation à l'œuvre dans la théorie de Grassmann qui a fait dire à Lewis :

> "Ce n'est pas seulement le progrès vers la généralité qui fait de l'Ausdehnungslehre de 1844, une des grandes œuvres mathématiques du 19^{e} siècle ; c'est plutôt que cette généralité est du genre qui élucide les obscurités et les problèmes aux niveaux les plus fondamentaux." [Lewis 1977, 161].

---

serait encore nécessaire un équipement considérable de déterminations conceptuelles, qui n'a pas sa place ici. (C'est une note de Grassmann).

Premiers Paragraphes de la Théorie de l'Extension

Le corps de l'*Ausdehnungslehre* se divise en deux sections. La première s'intitule : *La Grandeur d'Extension* et se divise en cinq chapitres. Nous examinerons ici les sept premiers paragraphes (numérotés de 13 à 20 [21]) du premier chapitre intitulé : *Addition et Soustraction des Extensions Simples du Premier Échelon ou des Segments* (les autres paragraphes du chapitre sont consacrés à des applications).

Les paragraphes 13 et 14 sont consacrés à la présentation du mode original de génération et aux premières définitions, il en ressort les définitions suivantes :

> "Par *formation d'extension du premier échelon*, nous entendons la totalité des éléments en lesquels un élément générateur se transforme lors d'un changement continu." [Grassmann 1844, §13, 48].

En géométrie cela correspond au concept de segment orienté, ou encore de vecteur lié.

> "La formation d'extension devient alors une *grandeur d'extension* ou *extension* ou *segment* ("Strecke") si nous faisons abstraction des éléments, que la première contient et ne fixons que la manière d'engendrer ("Erzeugungsweise")." [*ibid.*, §14, 48-49].

C'est donc ici la définition du vecteur mathématique moderne qui apparaît. Grassmann note un segment $[\alpha\beta]$, α désigne l'élément initial et β l'élément final. Il ne faut pas confondre le segment et le changement ("Änderung") ou la manière de changement ("Änderungsweise"), qui correspond au point projectif ou à la direction vectorielle.

> "Enfin nous appelons la totalité des éléments engendrés par la poursuite continue d'un même changement fondamental et par son opposé un *système* (ou domaine) de *premier échelon* ("Stufe")." [*ibid.*, §14, 49].

C'est à présent la définition de la droite affine que l'on retrouve. L'adjectif fondamental attaché à une manière de changement, signifie qu'elle participe à la manière initiale d'engendrer le système, c'est une sorte de direction canonique.

C'est donc l'aspect réel de la théorie qui est mis en place dans ces deux paragraphes, dans un rapport dialectique avec la géométrie ; on y trouve un traitement original des aspects vectoriel, affine et projectif de la droite, qui se retrouvera pour les dimensions supérieures.

Le §15 traite de la liaison des segments engendrés dans le même sens. Grassmann commence par en donner la détermination réelle :

21. La numérotation en continu des paragraphes a débuté avec la Théorie Générale des Formes.

> “Si l’engendrement continu du segment est pensé interrompu au cours de son mouvement pour être ensuite poursuivi, alors le segment entier se présente comme deux segments qui sont attachés continûment l’un à l’autre et dont l’un se présente comme le prolongement de l’autre.” [*ibid.*, §15, 49-50].

On peut définir ainsi la somme de deux segments, en les représentant de sorte que l’élément final du premier soit égal à l’élément initial du second, comme le segment dont l’élément initial est celui du premier segment et l’élément final celui du second. Cette détermination conduit ainsi à la représentation symbolique : $[\alpha\beta] + [\beta\gamma] = [\alpha\gamma]$, qui permet le jeu dialectique avec l’aspect formel.

Ensuite Grassmann, en référence à la Théorie Générale des Formes, montre que cette liaison est bien une addition (i.e. une loi de groupe commutatif). Or cela conduit aux notions d’élément nul et d’opposé. Grassmann se propose donc d’examiner ces notions sous leur aspect réel. D’après les règles établies dans la Théorie Générale des Formes, la soustraction, encore appelée liaison analytique en opposition à l’addition qui est la liaison synthétique, se détermine par la correspondance entre :

$[\alpha\beta] + [\beta\gamma] = [\alpha\gamma]$ et $[\alpha\beta] = [\alpha\gamma]$ - $[\beta\gamma]$; autrement dit $[\alpha\gamma]$ - $[\beta\gamma]$ est ce que l’on doit lier à $[\beta\gamma]$ pour obtenir $[\alpha\gamma]$.

Ainsi si on prend $\alpha=\beta$, on obtient : $[\alpha\alpha] = [\alpha\gamma]$ - $[\alpha\gamma]$, c’est-à-dire zéro à cause du deuxième membre et en vertu de la détermination univoque de la liaison analytique. On trouve donc sur un plan purement formel (ou selon la méthode architectonique) que $[\alpha\alpha] = 0$, ce qui est tout à fait en accord avec l’aspect réel (ou l’heuristique) puisqu’un segment ayant même élément initial que final est engendré par un changement nul. Ici la dialectique du contraste formel/réel permet de mieux cerner la signification du concept de segment nul par la mise en rapport cohérente de ses deux aspects, dans le jeu entre les méthodes architectonique et heuristique.

Grassmann continue dans la même voie à propos du concept de négatif. Sur le plan formel on a :

(-$[\alpha\beta]$) = 0 - $[\alpha\beta] = [\beta\beta]$ - $[\alpha\beta] = [\beta\alpha]$; on retrouve donc l’aspect réel du concept de négatif : le changement qui fait passer de β à α est l’opposé de celui qui fait passer de α à β.

Dans la démarche de Grassmann, l’addition de segments engendrés dans le même sens ne se résume ni à un jeu formel, ni à une simple illustration du réel, sa détermination passe par une mise à distance de ces deux aspects dans le but d’en déterminer les points communs sans que cela ne se laisse enfermer dans une synthèse finale. Ainsi la mise en contraste tout en avançant vers une détermination des concepts permet aussi d'ouvrir sur la suite. Ici la détermination de l'addition des segments engendrés dans le même sens débouche naturellement sur l'élargissement à des segments engendrés dans des sens opposés. L'aspect réel de l'addition des segments de même espèce (i.e. engendré dans le même sens ou dans des sens opposés) est alors déterminé par la règle suivante :

> "Si on lie continûment deux segments de même espèce, c'est-à-dire de manière que l'élément final du premier segment devient l'élément initial du second, alors le segment de l'élément initial du premier segment à l'élément final du dernier est la somme des deux[22]." [*ibid.*, §15, 51].

Le point de vue formel revient à dire que c'est une addition au sens de la Théorie Générale des Formes (i.e. une loi de groupe commutatif).

Le §16 élargit la théorie aux dimensions supérieures :

> "Si je suppose maintenant, pour arriver aux liaisons d'espèces différentes, d'abord deux changements fondamentaux différents et si je prolonge à volonté un élément du premier changement fondamental (ou son opposé) et prolonge ensuite à volonté l'élément, ainsi changé, suivant la deuxième manière de changement, je pourrai alors engendrer d'un élément, une infinité d'éléments nouveaux, et j'appelle système de deuxième échelon la totalité des éléments ainsi engendrés.
>
> Si maintenant je prends un troisième changement fondamental, qui à partir de l'élément initial ne fait pas revenir à un élément de ce système du deuxième échelon et que je dis, à cause de cela, indépendant de ces deux premiers changements, et si je prolonge à volonté un élément quelconque du système du deuxième échelon suivant ce troisième changement (ou son opposé), alors la totalité des éléments ainsi engendrés formera un système de troisième échelon ; et comme cette manière d'engendrer n'a, conceptuellement, aucune limite, je pourrai ainsi parvenir à des systèmes d'échelons quelconques." [*ibid.*, § 16, 52].

Ici se trouve déterminés les aspects réels des concepts d'échelon d'un système et d'indépendance des manières de changement. En langage moderne, on trouve les notions de base canonique, de dimension et d'indépendance linéaire. Ce qu'il est important de souligner c'est que, dans cette présentation, la génération est centrale pour donner le sens et les liens entre ces concepts. Ainsi la base canonique est caractérisée comme

22. Ici se pose le problème du choix des représentants, desquels cette somme ne doit pas dépendre. Grassmann ne le soulève pas explictement, mais il faut rappeler que sa détermination de l'égalité revient à une relation d'équivalence compatible avec les opérations. Donc le problème est implicitement pris en charge. Il sera d'ailleurs évoqué plus explicitement plus loin.

une famille de générateurs indépendants, en fait on devrait dire non-dépendants, au sens où chaque manière de changement ne peut se réduire à une combinaison des manières de changement précédentes. Dans ce sens, le nombre d'échelons, sorte de dimension "naturelle", représente la mesure de l'extension.

Les trois paragraphes qui suivent, tout en déterminant la somme des segments, ont pour but explicite d'affranchir le domaine de n-ième échelon de son mode initial de génération. On va voir que cela va permettre de dégager les concepts de base et de dimension dans un sens très général.

Dans ce qui va suivre il ne faut donc pas perdre de vue que tout dépend de ce mode initial de génération. En particulier seuls les segments appartenant aux manières originaires de changement [23] sont déterminés. C'est donc la liaison de ces segments que Grassmann va commencer à déterminer au §17. L'aspect réel de cette liaison repose sur le principe suivant :

> "(...) si maintenant je change un élément d'abord d'un segment a, et ensuite d'un segment b l'élément ainsi changé, le résultat final des deux changements doit être conçu à la fois comme le résultat d'un seul changement, qui est la liaison des deux premiers, et qui se présente, si les deux segments sont de même espèce comme leur somme." [*ibid.*, §17, 53]

En effet, par rapport à l'addition des segments de même espèce la différence ici est que la liaison de deux segments appartenant à des manières originaires de changement n'est pas un tel segment. De plus, l'ordre des segments dans la liaison est déterminé par le mode de génération. Pour bien marquer ces difficultés, Grassmann commence par utiliser le symbole général de liaison $\cap$ et non le signe d'addition $+$, et il remarque :

> "Comme l'acte de cette réunion ne change pas l'état de l'élément, il résulte tout de suite de ce concept la loi
>
> $$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)."\ [ibid., \S15, 53].$$

Il examine alors la question de la commutativité (sans employer ce terme). Or l'ordre des changements étant donné par le mode de génération, l'inversion de l'ordre de deux segments ne peut être déterminée dans son

23. "Appartenir à une manière de changement" ou comme tout à l'heure "être de même espèce" correspond, chez Grassmann, à la colinéarité des segments. L'*Ausdehnungslehre* se voulant indépendante des autres théories mathématiques, la notion de nombre ne peut en être un composant élémentaire. De fait cette notion de nombre, bannie du début, sera introduite comme quotient de deux grandeurs extensives de même espèce au §68. Ainsi dans le premier tiers de l'œuvre, il n'y a pas de combinaisons linéaires, et seulement une approche qualitative de la dépendance linéaire.

aspect réel, sa signification devient donc arbitraire tout en étant nécessaire. Grassmann reconnaît explicitement cela, et donc la possibilité de faire de la commutativité une propriété de principe, mais il ne se satisfait pas de ce seul argument et avant de l'accepter essaie d'en anticiper les conséquences (rappelant à ce propos son souci de donner une vue d'ensemble de la théorie à tout instant). Il montre alors en restant à un niveau purement formel qu'admettre la commutativité est équivalent à admettre que si $[\alpha\beta] = a$ et si $[\alpha\alpha'] = [\beta\beta']$ alors $[\alpha'\beta'] = [\alpha\beta]$ ou encore que :

> "Si on soumet un segment qui appartient à une des m manières de changement originaires du système, aux changements qui appartiennent aussi à ces manières de changement, et pour préciser tous les éléments aux mêmes changements, alors ce segment est égal à celui de l'origine." [*ibid.*, §17, 55].

Or cette dernière règle permet de déterminer l'égalité de deux segments en accord avec ce qui a été dit de l'égalité dans la Théorie Générale des Formes : "ce qui est engendré de la même manière à partir de ce qui est égal est encore égal". De propriété arbitraire la commutativité se trouve donc justifiée par le concept général d'égalité. On voit donc ici un exemple très caractéristique du processus de généralisation utilisant la dialectique des contrastes à plusieurs niveaux.

Ensuite l'univocité de la liaison analytique ne pose pas de difficulté puisque d'après la détermination réelle d'une liaison si on change un segment sans changer l'autre, en partant du même élément initial on n'arrive pas au même élément final. La liaison générale des segments appartenant aux manières de changement originaires s'avère donc maintenant être une addition. Grassmann en conclut qu'il en est de même pour la liaison de tous les segments d'un domaine de n-iène échelon dans la mesure où l'on ne considère que leur élément initial et leur élément final.

Le §18, vise à "montrer comment sont déterminés dans un système de plus haut échelon, par deux éléments tous les autres éléments qui sont dans le même système de premier échelon." Il s'agit essentiellement de montrer qu'il existe un et un seul système de premier échelon passant par deux éléments donnés. L'argumentation de Grassmann n'est pas des plus limpides ; il introduit entre autre une notion de mutuelle correspondance qui est difficile à concrétiser sans la notion de longueur, bannie de la théorie (cf. note précédente). Néanmoins à la fin du paragraphe le concept de somme de segments est cerné. Grassmann en déduit une nouvelle détermination du concept de dépendance :

> "(...) une manière de changement est dépendante d'autres si les

> segments de la première se laissent représenter comme sommes de segments qui appartiennent aux dernières, en revanche elle est indépendante de celles-ci, si cela n'est pas possible." [*ibid.*, §18, 59].

Cette deuxième approche de la dépendance correspond à son aspect formel.

A ce stade, la théorie a fait un premier pas vers l'indépendance vis-à-vis du mode originaire de génération, puisque l'ordre des changements fondamentaux peut être modifié. Ainsi, il est facile d'examiner l'aspect formel de la somme de deux segments, comme le propose Grassmann au début du §19.

Si p_1 et p_2 sont deux segments quelconques, les §17 et 18 permettent d'écrire :

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots \text{ et } p_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots$$

où a_i , b_i , c_i sont des segments appartenant respectivement aux manières de changement originaires, *a, b, c, ...*.

D'où on déduit formellement, grâce à l'associativité et à la commutativité :

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + \dots$$

Or cette détermination formelle de la somme permet d'en rendre compte en accord avec le mode originaire de génération, donc dans son aspect réel. On retrouve ici encore la mise en tension des deux pôles d'un contraste comme composante essentielle de la détermination d'un concept.

C'est le §20 qui va consacrer l'affranchissement du mode initial de génération :

> "Le même système de m-ième échelon peut-être engendré par chaque m manières de changement qui appartiennent à ce système et qui sont indépendantes l'une de l'autre." [*ibid.*, §20, 61].

On voit donc que c'est le concept de base, et de changement de base qui va permettre cet affranchissement. Pour montrer ce résultat, Grassmann utilise un résultat intermédiaire, très important :

> "Je veux d'abord montrer que, si le système peut être engendré par m manières de changement quelconques, je peux introduire au lieu d'une manière quelconque d'entre elles une manière *(p)* qui est indépendante des *(m-1)* autres, et qui appartient à ce système du m-ième échelon, et que je peux engendrer le système donné par celle-ci en liaison avec les *(m-1)* autres." [*ibid.*, §20, 61].

Ce résultat est ce qu'on appelle parfois aujourd'hui le *lemme de l'échange* ("Austauschsatz") [24]. Bien qu'il serve effectivement à montrer le résultat précédent, il le dépasse et permet entre autres, de montrer qu'il ne peut y avoir de système générateur de moins de m changements. En 1844, Grassmann laisse ce dernier point implicite, il s'en sert, est à deux doigts de le démontrer mais ne le fait jamais vraiment. Il sera beaucoup plus explicite à ce sujet, comme sur d'autres conséquences du lemme de l'échange, dans la version de 1862. Vu ce qui précède, le §20 vient assez naturellement, il s'agit de se libérer des manières de changement originaires, on les change donc une par une en ayant soin de les remplacer par des manières de changement qui ne dépendent pas des autres, vu ce qu'on sait sur la notion d'échelon. De plus la démonstration de ce résultat, technique et formelle, se trouve beaucoup moins dépouillée chez Grassmann que dans les théories modernes du fait de la dialectique constante entre les aspects formel et réel. Le nombre d'échelons (équivalent du concept moderne de dimension) apparaît chez Grassmann comme la mesure de l'extension du domaine, il porte en lui intrinsèquement l'idée d'une génération indépendante et est associé à un invariant dans le nombre de tels générateurs.

Il est frappant de constater que les successeurs de Grassmann ne reprendront pas ce concept sous ce jour. Giuseppe Peano (1888), Cesare Burali-Forti et Roberto Marcolongo (1909) et même Hermann Weyl (1918), bien que dans une moindre mesure, même s'ils définissent plus clairement et formellement ce qu'est un espace vectoriel, restent très attachés au modèle géométrique. Ainsi leur approche de la dimension ne se fait pas par la mesure de l'extension mais par le nombre limite de degré de liberté. L'espace géométrique est plus traditionnellement vu comme limité à trois degrés de liberté, que comme une extension de degré trois par déplacement rectiligne d'un point. C'est pourquoi ils définissent tous la dimension comme le nombre maximal de vecteurs indépendants. Cette différence d'approche les empêche de formuler le lemme de l'échange et de fait, même s'ils montrent que toute famille libre de n vecteurs est une base, ils n'ont pas le souci de montrer que tout système générateur possède au moins n éléments [cf. Dorier 1997a, 1^{re} partie].

Ce passage illustre bien la citation de Lewis donnée plus haut. En effet, on voit que la démarche de Grassmann lui permet de bien cerner le concept de dimension et en particulier d'en expliciter le double aspect : nombre minimal de générateurs et nombre maximal de vecteurs

---

24. Ce terme introduit une des premières fois par Bartel van der Waerden (1930/31, 1 :96) et repris entre autre par Otto Schreier et Emanuel Sperner (1931/35, 20) est associé à Ernst Steinitz et à son travail en théorie des corps (1910).

indépendants. Alors que le premier de ces aspects sera souvent laissé dans l'ombre, dans le travail de ces successeurs. Richard Dedekind dans la quatrième édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Gustav Peter Lejeune-Dirichlet (1894), sera le premier a explicitement définir les deux aspects de la dimension, mais sans utiliser le lemme de l'échange, de même que Pincherle en 1901. Ce point restera encore obscur dans certains traités d'Algèbre Moderne, par ailleurs tout à fait novateurs, publiés au début des années 1920 [25].

Le §20 se termine par l'énoncé et la démonstration du fait que l'on peut changer l'élément générateur initial d'un système (l'origine de l'espace affine). Le chapitre 1 se termine ensuite par sept paragraphes d'applications, qui sont aussi des illustrations géométriques et mécaniques de ce qui a précédé.

Conclusion

Cet aperçu de l'œuvre de Grassmann ne se veut pas comme une fin en soi. J'espère seulement avoir pu ouvrir l'appétit du lecteur curieux envers un aspect singulier de l'histoire des mathématiques. Bien sûr les principaux résultats de la théorie de Grassmann appartiennent aujourd'hui à des théories bien établies, cependant l'esprit même de son œuvre en est absent. L'analyse qui précède aura peut-être donné au lecteur l'impression que l'œuvre de Grassmann était parfaite. Ce serait une erreur : le style de Grassmann est effectivement parfois embrouillé, les idées ne sont pas toujours bien dégagées et organisées, certaines définitions sont redondantes ou au contraire floues. En clair, il y a des raisons objectives aux critiques qu'il a subies. Cependant si on surmonte certains obstacles, force est de reconnaître que par sa composante philosophique, la version de 1844 est une entreprise originale, qui ne saurait être réduite à une simple anticipation de résultats aujourd'hui bien connus. Ainsi, comprendre l'œuvre de Grassmann dans toutes ses dimensions reste encore de nos jours une gageure pour un mathématicien même très averti.

Dans ce sens, j'ai donné des éléments qui permettent de mieux apprécier cette dimension. Plusieurs travaux historiques et épistémologiques sur Grassmann, dont j'ai donné les références, peuvent compléter cette approche, et aider à la lecture de l'*Ausdehnungslehre* elle-même.

Annexe : Repères Biographiques

Né le 15 avril 1809 à Stettin (Poméranie), il est le 3° enfant d'une famille de 9.

25. Pour plus de détails sur ce point cf. [Dorier 1995 et 1996].

1827 : Université de Berlin : il étudie la théologie, les langues classiques et la littérature.

1830 : retour à Stettin : étude intensive et indépendante des mathématiques et de la physique.

1831 : échec pour obtenir un poste dans un lycée de Stettin.

Pâques 1832 : devient professeur assistant dans un lycée de Stettin.

1834 : devient professeur assistant dans un lycée de Berlin. La même année, il passe avec succès le premier niveau des examens de théologie, mais renonce rapidement à la carrière de pasteur.

1836 : nommé professeur dans une école secondaire de Stettin, où il enseigne les mathématiques, la physique, le latin, l'allemand et la religion.

1840 : examen pour pouvoir enseigner les mathématiques, la physique, la minéralogie et la chimie, à tous les niveaux du secondaire. Il écrit à cet occasion un traité sur la théorie des marées : *Die Théorie der Ebbe und Flut*, dans lequel il présente une méthode géométrique originale qui lui permet de donner une méthode simplifiée pour résoudre des questions abordées dans la *Mécanique Analytique* de Lagrange et la *Mécanique Céleste* de Laplace.

1840/41 : étudie avec son frère Robert la *Dialektik* de Friedrich Schleiermacher.

1842 : nommé au lycée de Stettin où enseigne son père. Il publie deux articles de mathématiques dans le journal de Crelle.

1843 : publie avec son frère Robert un manuel pour l'enseignement du Latin et un autre pour l'enseignement de l'Allemand. Il publie également un nouvel article dans le journal de Crelle.

Automne 1843 : L'*Ausdehnungslehre* est prêt

1844 : publication. Celle-ci se solde par un silence des milieux mathématiques, en particulier, personne n'en propose de présentation dans une revue. Finalement, en 1845, Grassmann lui-même écrit un résumé dans les *Archives de Grunert.*

1845 : *Neue Theorie der Elektrodynamik* (première application de l'*Ausdehnungslehre* à des problèmes de physique).

1846 : *Geometrische Analyse*. Ce traité reprend des idées de l'*Ausdehnungslehre* et présente plus spécifiquement les applications de cette œuvre à la géométrie, il est voulu par l'auteur lui-même comme une lecture introductive à l'*Ausdehnungslehre.* Grassmann remporte ainsi le prix de la *Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften*, visant à récompenser une œuvre réalisant le programme de Leibniz sur la création d'un calcul géométrique intrinsèque, contenu dans une lettre de 1679 à Christian Huyghens et publiée pour la première fois en 1833.

Ce demi-succès de Grassmann ne suffira pas à le faire reconnaître.

1847 : Grassmann prend connaissance d'un article d'Adhémar Barré de Saint-Venant publié en 1845 : *Mémoire sur les Sommes et les Différences Géométriques et sur leur Usages pour Simplifier la Mécanique*, dans lequel il reconnaît une proximité avec ses idées. Ne connaissant pas l'adresse de Saint-Venant, Grassmann écrit à Cauchy, lui faisant parvenir une lettre pour Saint-Venant et deux exemplaires de l'*Ausdehnungslehre.* Seule, la lettre parviendra à bon port. Saint-Venant répond à Grassmann lui demandant son œuvre. Grassmann croit à un retard du courrier et laisse en attente.

Cette même année, Grassmann formule sa première requête en vue d'obtenir un poste universitaire. Ernst Eduard Kummer remet un rapport d'évaluation sur l'*Ausdehnungslehre*, celui-ci est négatif et le poste lui est refusé.

1849 : épouse Marie Therese Knappe. Ils eurent onze enfants, dont deux sont morts en bas âge, et deux un peu plus vieux. De leurs cinq fils, deux deviendront professeurs de mathématiques au lycée de Stettin, un, physicien, un, professeur de mathématiques à l'Université de Giessen, et le dernier, professeur de mécanique pour ingénieur à la *Technische Hochschule* de Karlsruhe.

Entre 1847 et 1851 : se consacre à la politique et fonde un journal avec son frère Robert. Il s'intéresse également aux langues anciennes et en particulier au Sanscrit.

1851 : publication de trois articles mathématiques dans le Journal de Crelle.

1852 : mort du père Justus Grassmann. Hermann lui succède comme "Professor" au Gymnasium de Stettin.

1852 – 1854 : se consacre à la physique et à la linguistique.

En 1853, publie *Zur Theorie der Farbenmischung*, théorie de la couleur utilisant des résultats du calcul barycentrique.

Cauchy publie trois articles sur les *Clefs Algébriques*, dans lesquels il reprend des idées de Saint-Venant, sans parler de Grassmann. Möbius et Baltzer alerte Grassmann qui écrit plusieurs lettres à l'Académie des Sciences et publie un article en français dans le Journal de Crelle (1855) *Sur les Différents Genres de Multiplication.* Saint-Venant répond à Grassmann en lui disant qu'il n'a toujours pas reçu l'*Ausdehnungslehre*, Grassmann lui en envoie un exemplaire avec un exposé des idées essentielles en français, Saint-Venant lui répond en reconnaissant son mérite et sa priorité. Néanmoins, Grassmann présente une requête officielle de priorité auprès de l'Académie des Sciences, qui est examinée le 17 avril 1854 par une commission constituée de Lamé, Binet et... Cauchy ! Celle-ci ne rendra jamais de conclusion.

Cette même année Grassmann commence de parler de réécrire l'*Ausdehnungslehre.*

Par ailleurs William Rowan Hamilton prend connaissance de l'œuvre de Grassmann, par l'intermédiaire de son ami Augustus De Morgan. Bien que reconnaissant une certaine valeur à l'œuvre, celui-ci la juge inférieure à sa Théorie des Quaternions.

1860 :*Lehrbuch der Arithmetik für Hohere Lehrantstalten* (Manuel d'Arithmétique pour les Instituts Supérieurs d'Enseignement)

1860–62 : publie quatre traités de linguistique

1861 : La deuxième version de l'*Ausdehnungslehre* est prête, elle sera publiée l'année suivante. Grassmann en a gommé tout contenu philosophique et s'est astreint à un exposé mathématique plus classique, en essayant également de donner les applications plus tôt. Cependant cette réécriture entière de l'œuvre n'apporte pas le succès escompté. On lui reproche, entre autre, son style trop strictement euclidien, qui oblige le lecteur à lire tout depuis le début pour comprendre n'importe quel concept.

1862 : nouvelle requête pour un poste universitaire, nouvel échec.

1865 : *Lehrbuch der Trigonometrie für Höhere Lehranstalten*

1867 : *Deutsche Pflanzennamen*, traité de botanique dans lequel Grassmann propose une classification des plantes d'origine allemande et une nomenclature basée sur des termes de racines germaniques.

De 1862 à 1875 : rédaction du *Wörterbuch zum Rigveda* (Dictionnaire pour le Rigveda) qui sera publié en six volumes entre 1873 et 1875. Il réalise également une traduction du Sanscrit de ce monument de la littérature indienne entre 1876 et 1877. Ce travail monumental lui vaudra une reconnaissance immédiate des linguistes de l'époque. Si bien qu'en 1876, il devient *Docteur Honoris Causa* de la faculté de philosophie de l'université de Tübingen et la même année il est élu membre de l'*American Oriental Society*. Sa traduction est encore aujourd'hui utilisée. Il commence également à avoir une reconnaissance en physique pour ses travaux sur l'électrodynamique, la théorie des couleurs, l'acoustique et l'optique élémentaire. Ainsi il est admis à la *Leopoldina,* une des plus anciennes académies des sciences d'Allemagne.

Dans le monde mathématique aussi, une certaine reconnaissance se fait jour, mais lentement. Celle-ci commence vers 1866, lorsque Hermann Hankel, élève de Riemann, le contacte au sujet d'un traîté qu'il ambitionne d'écrire sur les systèmes de nombres hypercomplexes, il est très élogieux à l'égard de Grassmann. Par l'intermédiaire de Hankel, Grassmann apprend, entre autres, l'existence des Quaternions de Hamilton. La publication de l'ouvrage de Hankel (1867), fait connaître Grassmann au moins superficiellement. Par l'intermédiaire de son fils, qui étudie à l'université de Berlin, il rentre aussi en contact avec Rudolf Clebsch, Stern, et Félix Klein, qui en parle lui-même à Sophus Lie. Il devient ainsi, en 1871, correspondant de la *Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.* Cependant cette estime pour Grassmann reste un peu superficielle, personne ne connaît vraiment bien le contenu de son œuvre. En 1872, Viktor Schlegel est le premier à en publier une présentation détaillée : *System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Ce dernier publiera en 1878, la première biographie de Grassmann.

1877 : publie plusieurs articles dans le Journal de Crelle, dont un sur les liens avec les Quaternions. Par ailleurs, à la suite de la demande de plusieurs mathématiciens, il obtient de son éditeur (Otto Wigand) une republication de la première édition de l'*Ausdehnungslehre*, dont les nombreux invendus du premier tirage avaient fini au pilon.

Il meurt le 26 septembre de la même année et ne verra pas cette nouvelle publication qui paraît l'année suivante, grâce à Schlegel.

Dès 1880 : Felix Klein suggère de rassembler les œuvres mathématiques et physiques de Grassmann. Leur édition sera dirigée par Friedrich Engel et paraîtra en 3 volumes entre 1894 et 1911.

1888 : Giuseppe Peano publie son *Calcolo Geometrico Secundo L'Ausdehnungslehre di H. G. Grassmann (...),* qui permit de faire connaître Grassmann en Italie et en France.

Cependant comme le rappelle Dieudonné "c'est seulement après 1930, lorsque l'œuvre de Elie Cartan a commencé à être comprise, que celle de Grassmann a repris la place centrale qui lui revenait dans toutes les applications de l'algèbre linéaire et multilinéaire."[26]

Cette affirmation reste encore elle-même à tempérer si l'on fait référence au travail de Rota et al. (1985).

Bibliographie

ARGAND, JEAN ROBERT

1806 Essai sur une Manière de Représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géométriques, *Annales de Mathématiques* **5**, 33-147 ; reprint ed. J. Hoüel, Paris : Gauthier-Villars, 1874 ; Paris : Blanchard 1971.

BELLAVITIS, GIUSTO

1833 Sopra alcune Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica, *Il Poligrafo Giornale di Scienze, Lettre ed Arti. Verona* **13**, 53-61.

1935 Saggio di Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica (Calcolo delle Equipollenze), *Annali delle Scienze del Regno Lombaro-Veneto. Padova* **5**, 244-259.

BOURBAKI, NICOLAS

1947 *Éléments de Mathématiques -livre II- Chap.3- Algèbre Multilinéaire*, Paris :Hermann.

BUDON, J.

26. Jean Dieudonné, *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900,* 2 vols., Paris : Hermann, 1 :111.

1933 Sur la Représentation Géométrique des Nombres Imaginaires (Analyse de quelques Mémoires Parus de 1795 à 1820), *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2^e^ série) **57**, 175-200 & 220-232.

Buée, Adrien Qentin

1805 Mémoire sur les Quantités Imaginaires, *Transactions of the Royal Society of London* **96**, 23-88.

Burali-Forti, Cesare et Marcolongo, Roberto

1909 *Omografie Vettoriali con Applicazioni alle Derivate rispetto ad un Punto e alla Fisica Matematica*, Turin : G. B. Pretrini di Giovani Gallazio.

Cartan, Elie

1908 Nombres Complexes (version augmentée de l'article allemand de E. Study, 1898), *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, Paris : Gauthier-Villars, 1904-1914, Article I-5, 1(1) : 329-468 ; ou *Œuvres Complètes* (6 vols., Paris : Gauthier-Villars, 1953), 1(2) : 107-247.

1922 *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Paris : Hermann.

Cauchy, Augustin-Louis

1853 Sur les Clefs Algébriques, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **36**, 70-75, 129-136 et 161-169.

Châtelet, Gilles

1992 La Capture de l'Extension comme Dialectique Géométrique : Dimension et Puissance selon L'Ausdehnungslehre de Grassmann (1844), in Boi et al. (eds.) *1830-1930 : A Century of Geometry — Epistemology, History and Mathematics,* Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New-York/Paris : Springer, pp. 222-244.

Crowe, Michael J.

1967 *A History of Vector Analysis — The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre-Dame : University Press.

Descartes, René

1637 *Le Discours de la Méthode pour bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, Leyden : Jan Maire ; réédition, *La Géométrie*, ed. M. Leclerc et J-C. Juhel, Nantes : edition de L'AREFPPI, 1984.

Dirichlet, Gustav Peter Lejeune

1863 *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig : Vieweg, réédité avec des suppléments de Richard Dedekind en 1871 (ed.1), 1879 (ed.2), 1893 (ed.4) ; rééd. ed.4., New-York : Chelsea Publishing Company, 1968.

DORIER, JEAN-LUC

1995 A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, *Historia Mathematica* **22(3)**, 227-261.

1996 Basis and Dimension : from Grassmann to van der Waerden, in Schubring (ed.) (1996) : *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, Boston Studies in the Philosophy of Science, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

1997a (ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditeur.

1997b L'Ausdenhungslehre de Grassmann : Une étape clef dans la théorisation du linéaire, in Flament (éd.) *Le nombre une hydre à n visages — entre nombres complexes et vecteurs*, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, pp. 163-191.

PIERRE DE FERMAT

1643 *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*, Toulouse ; rééd., in *Varia Opera Mathematica,* 3 vols., ed. P. Tannery et C. Henri, Paris : Gauthier-Villars, 1891-1912, 85-96.

FEARNLEY-SANDER, DESMOND

1979 Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra, *American Monthly* **86***,* 809-817.

1982 Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra, *American Monthly* **89**, 161-166.

FLAMENT, DOMINIQUE

1992 La "lineale Ausdehnungslehre" (1844) de Hermann Günther Grassmann, in Boi et al. (eds) *1830-1930 : A Century of Geometry — Epistemology, History and Mathematics,* Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New-York /Paris : Springer, pp. 205-221.

1994 *Hermann Günther Grassmann, La Science de la Grandeur Extensive, La lineale Ausdehnungslehre*, Paris : Blanchard.

GAUSS, CARL FRIEDRICH

1831 Theoria Residuorum Biquadraticorum — Commentatio Secunda, papier lu à Göttingen le 23 avril 1831, imprimé pour la première fois in *Werke*, 12 vols., Leipzig : Teubner, 1863-1933, 2 :69-178.

GRASSMANN, HERMANN

1844 *Die lineale Ausdehnungslehre,* Leipzig : Otto Wigand, reed. 1878 et [Grassmann 1894-1911, 1 :1-139].

1846 Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer rein geometrischen Analyse, *Journal für die* *reine und angewandte Mathematik* **31**, 11-132, reed. [Grassmann 1894/1911, 2(1) :49-72].

1847 *Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik — mit einer erläuternden Abhandlung von A. F. Möbius*, Leipzig : Weidmannsche Buchhandlung, reed. [Grassmann 1894-1911, 1 :320-399].

1862 *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form,* Berlin : Th. Chr. Fr. Enslin, reed. [Grassmann 1894-1911, 2 :1-383].

1894-1911 *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke,* 3 vols., ed. F. Engel, Leipzig : Teubner ; rééd., New-York/London : Johnson Reprint Corporation, 1972.

Hamilton, William Rowan

1844 On Quaternions or a New System of Imagineries in Algebra, *Philosophical Magazine* **25**, 489-495.

1866 *Elements of Quaternions*, 2 vols., Dublin ; rééd., New-York : Chelsea Publishing Company, 1969.

Hankel, Hermann

1867a *Theorie der Complexen Zahlensysteme*, Leipzig.

1867b *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leipzig.

Klein, Felix

1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen, Erlangen : Deichert ; reed. *Le Programme d'Erlangen*, trans. M. H. Padé, ed. J. Dieudonné, Paris : Gauthier-Villars, 1974.

Leibniz, Gottfried Wilhelm

1679 lettre à Christian Huyghens — Hanover ce 8 de Sept. 1679, *Christi. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, ed. Uylenbroek, Hagen : Hagae comitum, 1833, 2 :6-12 [27].

Lewis, Albert C.

1977 H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, *Annals of Sciences* **34**, 103-162.

27. Cette référence est celle que l'on trouve en introduction des notes sur la Geometrische Analyse de Grassmann dans [Grassmann 1894/1911, 1 :415-420] où la plupart de cette lettre et l'intégralité de l'essai qui l'accompagne sont reproduits. Pour une édition plus accessible voire : *Leibnizens Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin : Julius Pressner, 1850 ; rééd., *Œuvres Mathématiques,* Paris : Librairie de A. Frank Editeur, 1853.

1981 Justus Grassmann's School Programs as Mathematical Antecedents of Hermann Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre, in Jahnke et Otte (eds.) *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, pp. 255-267.

Möbius, August Ferdinand

1827 *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig : Johan Ambrosius Barth, 1827, reed. [Möbius1967, 1 :1-388].

1843 *Die Elemente der Mechanik des Himmels,* Leipzig : Weidemannsche Buchhandlung, reed. [Möbius1967, 4 :1-318]

1915 *Gesammelte Werke*, 4 vols., ed. R. Baltzer, Leipzig : S. Hirtzel KG ; rééd., Wiesbaden : Dr. Martin Sändig oHG, 1967.

Mourey, C. V.

1828 *La Vraie Théorie des Quantités Négatives et Prétendues Imaginaires*, Paris ; rééd., Paris : Mallet-Bachelier, 1861.

Otte, Michael

1989 The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz, *Historia Mathematica* **16**, 1-35.

Peano, Giuseppe

1888 *Calcolo Geometrico Secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann e Precedutto dalle Operazioni della Logica Deduttiva*, Turin : Fratelli Bocca editori.

Rota, Gian-Carlo et al.

1985 On the Exterior Calculus of Invariant Theory, *Journal of Algebra* **96(1)**, 120-160.

Barré de Saint Venant, Adhémar

1845 Mémoire sur les Sommes et les Différences Géométriques, et sur leur Usage pour Simplifier la Mécanique, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **21**, 620-625.

Schlegel, Viktor

1872-75 *System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann' schen Ausdehnungslehre*, 2 vols, Leipzig : Teubner.

1878 Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke, Leipzig.

Schreier, Otto et Sperner, Emanuel

1931-35 Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra (en deux parties), *Hamburger Mathematische Einzelschriften* **10** (1931) and **19** (1935) ; reed. sous la forme d'un livre : *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, trad. Martin Davis and Melvin Hausner, New-York : Chelsea Publishing Company, 1951.

SCHUBRING, GERT (ED.)

1996 *Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : Visionnary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar -Papers from a Sesquicentinnial Conference*, Boston Studies in the Philosophy of Science, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

STEINITZ, ERNST

1910 Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **137**, 167-309 ; rééd., H. Hasse and R. Baer (eds.), Berlin/Leipzig : De Gruyter, 1930.

WAERDEN (VAN DER) BARTEL. L.

1930-31 *Moderne Algebra*, 2 vols., Berlin : Springer.

WALLIS, JOHN

1693 *Opera Mathematica*, 3 vols., Oxford : Oxianae.

WARREN, JOHN

1828 A treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negatives Quantities, Cambridge ; rééd. Philosophical Transactions London **119** (1829), 241-254.

WESSEL, CASPAR

1798 Om Directionens Analytiske Betegning, (lu à l'Académie Royal du Danemark en 1797), Copenhague, 1798 ; reed. Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter (2) **5** (1799), 496-518 ; Essai sur la Représentaion Analytique de la Direction, trad. H.G. Zeuthen, Copenhage/Paris : H. Valentiner et T. N. Thiele Editeurs, 1897.

WEYL, HERMANN

1918 *Raum-Zeit-Materie*, Berlin : Springer ; *Space-Time-Matter*, trad. L. Brose, New-York : Dover, 1952.

ZADDACH, ARNO

1994 *Grassmanns Algebra in der Geometrie,* Mannheim/ Leipzig/ Wien/ Zürich : B. I. Wissenschaftverlag.