Les fondements de la géométrie selon Poincaré

E. G. Zahar
Département d'Histoire et de Philosophie des Sciences
Université de Cambridge

Résumé. Dans cet article, nous poursuivrons deux buts. Le premier est de montrer qu'en *géométrie mathématique*, Poincaré, rejetant tout apriorisme, est véritablement conventionnaliste : les postulats géométriques sont regardés comme des définitions déguisées des notions de base, leur rôle se réduisant à la détermination de certains modèles, c'est-à-dire d'interprétations qui vérifient les axiomes fondamentaux. Poincaré use d'une heuristique unifiée fondée sur la théorie du groupe des T.M. (Transformations de Möbius). Cette méthode, initiée dans ses travaux sur les fonctions fuchsiennes, aboutit à la construction de deux modèles de la géométrie hyperbolique : le demi–plan Δ et le disque Ω, qui sont ensuite appliqués l'un sur l'autre au moyen d'une T.M. De ces considérations *algébriques* Poincaré tire l'expression *analytique* de la distance riemannienne ds. Notre second but est de défendre la thèse qu'en ce qui concerne *la géométrie physique,* Poincaré souscrit à un réalisme ontologique structurel, son conventionnalisme étant d'un ordre, non pas métaphysique, mais strictement *épistémologique*. Sa méthode consiste à poser — ou plutôt à conjecturer — une métrique riemannienne couplée à un champ universel, ce dernier pouvant naturellement être nul. Poincaré adopte une attitude réaliste vis-à-vis du champ *et* de la géométrie sous-jacente ; pourvu, bien sûr, que celle-ci soit intégrée dans un système scientifique unifié et corroboré par l'expérience. D'une manière générale, Poincaré tient le degré de commodité — c'est-à-dire d'unité et de simplicité — d'une théorie pour une mesure objective de sa *vérisimilitude* ou proximité de la vérité. Il faut noter que cette notion

Philosophia Scientiæ, 4 (1), 2000, 145–186.

de vérisimilitude reste intuitive, donc non mathématisée. Nous montrons finalement que, de l'aveu même d'Einstein, la Relativité Générale est tout à fait compatible avec le point de vue épistémologique de Poincaré.

[A]. L'histoire et la philosophie des sciences.

En l'absence de certains scrupules poppériens à l'endroit de toute définition dite essentialiste, cet article aurait pu s'intituler "Que signifie le mot 'conventionnalisme' en géométrie ?". De toute façon, nous aurons à examiner les différents sens que peut revêtir le 'conventionnalisme' afin de résoudre un problème épistémologique fondamental ; à savoir : existe-t-il des aspects de nos connaissances qui, ne dépendant que de nos décisions méthodologiques, ne font référence à aucune réalité objective ? On pourrait tout de suite, mais d'une manière inintéressante, répondre affirmativement à cette question : en choisissant d'exprimer ses hypothèses dans une langue particulière plutôt que dans une autre, le savant est guidé par des considérations strictement pragmatiques telles que : dois-je écrire mes articles en anglais en vue d'être entendu par un grand public, ou ferais-je mieux de m'en tenir à ma langue maternelle dans laquelle je me sens plus à l'aise ? Notons qu'il s'agit dans ce contexte, non pas de la philosophie, mais des sciences. Nous savons que selon bon nombre de penseurs, les idées philosophiques profondes ne peuvent s'exprimer que dans certaines langues privilégiées comme le grec et l'allemand. Sans avoir à prendre position vis-à-vis de ce problème, nous admettrons comme allant de soi que toute pensée *scientifique* peut être intégralement transcrite dans toutes les langues européennes, telles que le français, l'anglais ou l'allemand ; c'est-à-dire les langues dans lesquelles la plupart des débats qui nous intéressent eurent lieu.

À en croire certains philosophes, la réponse triviale, donnée ci-dessus comme une boutade plutôt que comme une proposition sérieuse, subsumerait déjà le cas de la géométrie. Ces penseurs soutiennent en effet que le choix entre deux géométries devrait être traité sur le même pied que celui entre l'emploi de l'allemand ou du français comme langue véhiculaire. Dans ce qui suit, nous aurons à débattre longuement cette thèse.

Déjà à ce stade, il nous faut avouer que notre approche des fondements de la géométrie sera *historique* dans un sens bien précis de ce terme. Admettons toutefois que la plupart des problèmes dont nous traiterons possède un caractère atemporel. Il nous semble cependant qu'un compte rendu historique d'une hypothèse et de sa problématique la rend plus intelligible que ne ferait une présentation purement hypothético-déductive, c'est-à-dire axiomatique. Par exemple, nous savons qu'Einstein tira de sa lecture de *La Mécanique* d'Ernst Mach une compréhension profonde des fondements de la physique classique ; et que Mach avait adopté un point de vue à la fois historique et philosophique. Cette connexité entre la philosophie et l'histoire des sciences découle peut-être du fait que cette dernière procède *analytiquement* et non pas de manière synthétique ; c'est-à-dire qu'elle part de certains problèmes vers leurs solutions présumées, puis vers d'autres problèmes, et ainsi de suite indéfiniment. En d'autres termes : l'histoire reconstruit le cheminement heuristique de la pensée, expliquant ainsi pourquoi des réponses à certaines questions ont revêtu telle forme plutôt que telle autre. Quant au point de vue synthétique, il prend comme point de départ un système d'axiomes déjà constitué, que les problèmes et leurs solutions ne font qu'illustrer. Nous sommes donc censés comprendre tout un réseau d'hypothèses au moyen des vérifications d'une suite de démonstrations formelles : nous nous assurons ainsi que les solutions de certains problèmes-clés découlent déductivement de postulats posés d'une manière en apparence arbitraire. Toute saisie heuristique se perd ainsi dans un labyrinthe déductif. Nous pourrions, bien sûr, suivre une méthode qui, tout en n'étant pas historique, commencerait *analytiquement* par la considération de certains problèmes concrets pour nous conduire ensuite à leurs solutions conjecturales. Mais les problèmes les plus convaincants restent ceux qui se sont vraiment posés tout au long du développement des sciences ; et non pas ceux fabriqués après coup pour les besoins d'une méthodologie donnée d'avance. Notons que notre but n'est nullement de nier le rôle essentiel de l'hypothético-déductivisme dans 'le contexte de la justification', plus particulièrement dans celui du rapport des théories à leur base empirique ; mais une approche exclusivement axiomatique ne nous permet pas de cerner tout l'apport cognitif d'une théorie, que celle-ci soit scientifique ou philosophique.

Il existe d'autres raisons de tenir l'histoire pour inséparable de la philosophie des sciences. Lakatos nous a fait remarquer qu'une méthodologie peut être conçue comme susceptible d'être infirmée ou soutenue par certains faits historiques. Dans la mesure où ils partagent des jugements de valeur *particuliers* concernant certaines étapes de l'évolution des sciences, deux philosophes sont en mesure de débattre rationnellement des avantages et des inconvénients de leurs méthodologies. Par exemple : une méthodologie pourrait être jugée irrecevable si elle ne qualifiait pas les découvertes d'un Galilée, d'un Newton ou d'un Einstein de grands pas en avant de la science. Nous présupposerons que les énoncés des *faits* historiques peuvent en principe être rendus 'wertfrei', c'est-à-dire neutres par rapport aux méthodologies rivales. Par conséquent, certains concepts recélant des jugements de valeur, comme ceux de “progrès” et “d’ajustement ad-hoc”, doivent provisoirement être exclus de toute proposition historiographique. L’histoire joue d’ailleurs un rôle majeur dans l’évaluation empirique des hypothèses, donc dans le contexte de la justification tout autant que dans celui de la découverte. Il nous semble qu’une hypothèse ne peut être considérée comme fortement appuyée que par les faits auxquels elle n’a pas été ajustée d’avance (notons cependant que même au cas où elle aurait été ainsi ‘fabriquée’, une loi pourrait recevoir un degré — *réduit* — de soutien inductif de certains résultats qu’elle subsumerait sans vraiment les prévoir). La méthode de construction d’une théorie et, de par ce fait, son passé historique pourraient ainsi être pris en compte dès lors qu’il s’agit d’évaluer certaines de ses assises empiriques.

L’histoire nous permet enfin de démarquer les jugements internes des motifs exogènes qui auraient pu influer sur le contenu et sur la forme des théories. En nous référant à l’histoire, nous pouvons souvent trancher la question de savoir si un principe constitue la solution d’un problème intrinsèque à un système scientifique ou s’il répond exclusivement à des exigences psychologiques ou sociales. Par exemple : dans le cas de Poincaré, alors qu’une donnée accidentelle — sa naissance — lui fit rédiger ses articles en français plutôt qu’en allemand, des considérations strictement internes à son travail sur les fonctions fuchsiennes donnèrent naissance à son “conventionnalisme” (cf. Section D ci-dessous).

Ayant ainsi démontré la pertinence de l’histoire quant à l’intelligibilité des théories ; son importance dans l’évaluation des méthodologies et des lois empiriques ; enfin sa capacité à nous permettre de discerner les aspects externes de la dynamique interne des hypothèses scientifiques, reprenons notre analyse des différents sens que peut prendre le ‘conventionnalisme’ dans la philosophie des sciences.

[B]. Le demi-plan Δ de Poincaré et le Conventionnalisme Sémantique Trivial (CST).

Dans son texte classique “Philosophical Problems of Space and Time” (“Problèmes philosophiques de l’espace et du temps” ou *PPST*), Adolf Grünbaum fait la critique d’une position qu’il qualifie de ‘conventionnalisme sémantique trivial’, ou CST. Il rejette cette thèse, qu’il définit de la manière suivante : aucune théorie formelle ne fixe la signification de ses termes descriptifs ; on peut, par pure convention, donner à ces derniers des référents arbitraires à condition seulement que ceux-ci satisfassent aux axiomes de l’hypothèse en question ; or les notions géométriques figurent dans le vocabulaire de toute théorie physique ; elles recevront en conséquence des significations conventionnelles. Il n’y aurait donc pas de spécificité du conventionnalisme géométrique, qui serait déjà subsumé par la conventionnalité du sens attribué aux termes primitifs de *tout* langage ; et Poincaré lui-même avait affirmé que tout ensemble d'axiomes constituait une 'définition implicite' des entités dont le système traite.

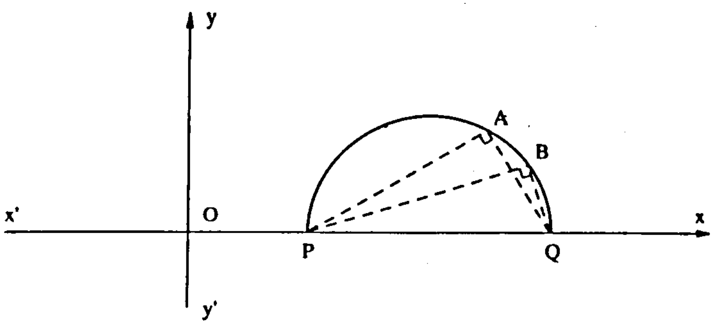
CST ne peut être qualifié de trivial que parce qu'il découle *directement* d'un théorème logico-mathématique, ce dernier étant toutefois loin d'être banal ; à savoir le théorème de Löwenheim-Skolem. Celui-ci nous dit que toute théorie du premier ordre, syntaxiquement consistante et exprimée dans un langage énumérable, possède un modèle énumérable ou fini ; si elle se trouve en outre satisfaite dans au moins un domaine infini, alors, pour tout ordinal μ, elle aura un modèle de cardinalité $\aleph_\mu$. Un tel système possédera par conséquent au moins un modèle dans tout ensemble infini. Le fait que la géométrie hyperbolique synthétique — ou GHS — a des modèles dans $\mathfrak{R}^3$ (c'est-à-dire le continu à 3 dimensions), dans $\mathfrak{R}^2$ (c'est-à-dire le plan), dans $\mathfrak{R}$ (c'est-à-dire la droite numérique), et même dans ω (c'est-à-dire l'ensemble des nombres naturels) ne saurait donc nous étonner.

Bien que Grünbaum attribue CST à Eddington et aussi à Putnam, les origines de cette thèse remontent à Poincaré, c'est-à-dire à l'auteur même du 'conventionnalisme géométrique'. Nous devons néanmoins nous rappeler que les vues philosophiques de Poincaré, émises à des dates et dans des circonstances très différentes, ne s'accordent pas toujours les unes avec les autres. Une reconstruction rationnelle — effectuée dans l'esprit de la philosophie globale du grand savant — s'impose donc dès le départ.

Dans un chapitre de 'La Science et l'hypothèse' (*SH*) intitulé 'Les Géométries non-euclidiennes' Poincaré nous propose un prétendu dictionnaire pour la traduction des postulats de la GSH dans le langage de l'espace euclidien à trois dimensions. Afin de simplifier la présentation, mais aussi pour des raisons historiques, nous nous en tiendrons à une interprétation de la GHS dans ce que l'on appellera 'le demi-plan Δ de Poincaré'.

GHS	Demi-plan Δ (euclidien)
Plan (hyperbolique)	Demi-plan Δ constitué par les points à ordonnées positives (c'est-à-dire : $\Delta = \{(x, y) : x \in R, y > 0\}$)
Point	Point de Δ (c'est-à-dire : $(x, y), y > 0$)

Droite	Verticale dans Δ ou demi-circonférence centrée sur un point de l'axe des X (c'est-à-dire : $\{(a, y) : y > 0\}$ ou $\{(x, y) : (x-a)^2 + y^2 = k^2, y > 0\}$).
Angle	Angle (c'est-à-dire : $\cos^{-1}(\frac{d\underline{r}.\delta\underline{r}}{\lvert d\underline{r}\rvert.\lvert\delta\underline{r}\rvert})$).
Cercle	Cercle contenu dans Δ (c'est-à-dire : $\{(x, y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2, 0 < k < b\}$).
Distance entre 2 points	Logarithme du rapport anharmonique de ces 2 points et des intersections de l'axe des X avec le cercle passant par ces 2 points et coupant l'axe des X orthogonalement (c'est-à-dire : $\partial(A, B) = \lvert L(A, B; P, Q)\rvert = \lvert L(\frac{\underline{AP}.\underline{BQ}}{\underline{AQ}.\underline{BP}})\rvert$, où, étant donné 2 points U et V dans le plan, $\underline{UV}$ dénote le nombre complexe representé par le vecteur joignant U à V).



– FIGURE 1 –

Notons que les expressions analytiques adjointes — entre parenthèses — à la colonne de droite ne figurent pas dans le texte de Poincaré. Nous les insérons pour des raisons qui seront explicitées par la suite.

Poincaré prétend que son 'dictionnaire' nous permet de transformer les axiomes de la GHS en des théorèmes de la géométrie euclidienne. En outre, la différence entre ces deux façons de nous exprimer, à savoir la manière hyperbolique et celle d'Euclide, serait de même nature que celle séparant deux langues comme l'allemand et le français, deux systèmes de coordonnées ou deux unités de mesure.

Malgré l'élégance d'un style qui nous donne l'impression d'avoir compris le fond de la pensée de l'auteur, la thèse que la liste ci-dessus constitue un simple dictionnaire est très douteuse. Voulant être entendu par le grand public, Poincaré eut le mérite d'avoir évité tout jargon technique dans ses écrits philosophiques ; ce qui a malheureusement donné naissance à de graves malentendus de la part non seulement des profanes, mais aussi de beaucoup de savants et de philosophes ; et le modèle Δ comporte des éléments disparates qui ne laissent pas de nous déconcerter. Nous ne comprenons pas pourquoi les verticales, tout autant que les demi-cercles normaux à $X'X$, mais non pas les lignes obliques, sont tenues pour des droites hyperboliques ; pourquoi les circonférences situées au-dessus de $X'X$ sont censées être circulaires alors que ces mêmes courbes, si elles coupaient l'axe $X'X$ ou lui étaient tangentes, ne seraient ni droites ni circulaires. Qui plus est : avant d'en arriver à la définition de la distance hyperbolique $\partial(A, B)$, nous acquérons la conviction que Poincaré ne fait que traduire la GHS dans le langage de la GES, c'est-à-dire de la géométrie euclidienne synthétique. Mais l'équation $\partial(A, B) = |L(A, B\ ; P, Q)|$ nous désabuse tout en nous intriguant : Poincaré introduit brusquement des concepts sophistiqués tels que ceux du rapport anharmonique de quatre nombres complexes et de leurs logarithmes. Nous nous rendons alors compte d'avoir affaire, non pas à une traduction de GHS dans GES, mais à la construction d'un modèle de GHS dans le plan complexe. C'est précisément pour cette raison que nous avons ajouté des formules analytiques à la colonne de droite du dictionnaire de Poincaré.

Nous pouvons bien sûr transformer le plan complexe en un espace euclidien au moyen de la définition $ds_e^2 = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$. Nous n'avons cependant besoin d'aucun postulat spécifiquement 'euclidien' et pouvons nous en tenir à la théorie des ensembles présupposée par l'analyse classique. Il est facile de vérifier que tous les axiomes de GHS se traduisent par des théorèmes portant sur les nombres complexes ; et nous pouvons démontrer qu'une infinité de parallèles à une droite hyperbolique quelconque μ passe par un point arbitraire n'appartenant pas à μ. Nous avons néanmoins fait remarquer que de telles vérifications déductives n'amènent aucune compréhension véritable d'une structure telle que celle du demi-plan Δ. C'est qu'une heuristique reliant les composantes éparses du modèle fait défaut. Nous avons pourtant l'impression que Δ doit être le transformé d'une structure géométrique plus unifiée ; et le seul indice dont nous disposons est le fait que les verticales de Δ sont traitées sur le même pied que les demi-cercles orthogonaux à $X'X$. Ceci nous suggère certaines applications conformes, telles les inversions ou les transformations de Möbius, qui peuvent interchanger droites et cercles euclidiens. Il s'avère que nous avons là une approche fructueuse de la méthode de construction utilisée par Poincaré lui-même ; mais nous sommes encore très loin de notre but, qui est de reconstituer le cheminement de la pensée du grand mathématicien.

Notons que, d'un point de vue analytique, les transformations de Möbius, c'est-à-dire les fonctions de la forme $z \rightarrow (az + b)/(cz + k)$ sont préférables aux inversions. Les T.M. sont des fonctions holomorphes construites au moyen des opérations algébriques usuelles ; elles sont donc strictement conformes, c'est-à-dire qu'elles conservent à la fois la grandeur et le sens des angles entre les courbes. Il n'est donc pas étonnant que Poincaré ait usé des T.M. plutôt que des inversions dans ses études géométriques ; avant tout parce que toute inversion peut être considérée comme la composante d'une T.M.

Examinons d'un peu plus près la position épistémologique de Poincaré telle qu'elle est décrite dans *La Science et l'hypothèse* :

> Prenons ensuite les théorèmes de Lobatchevsky et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire [*SH* p.69].
>
> Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques a priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions ; notre choix parmi toutes les conventions possibles est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction...
>
> En d'autres termes, les axiomes de la géométrie (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) ne sont que des définitions déguisées. Dès lors, que doit-on penser de cette question : la géométrie euclidienne est-elle vraie ? Elle n'a aucun sens.
>
> Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode. Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode. Premièrement, parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré... Deuxièmement, parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels... [*SH* pp. 75-76].

Dans ces passages, Poincaré assimile la différence entre deux géométries à celle séparant deux langues naturelles ou deux systèmes de coordonnées. Ceci est clairement indiqué par la notion de 'traduction' employée de préférence à celle de la construction d'un modèle. Nous avons déjà dit que cette thèse nous semblait très suspecte. À quelques nuances près, l'allemand et le français possèdent des structures équivalentes. Un dictionnaire est en outre censé conserver le sens des mots indépendemment de toute valeur de vérité ; alors que la 'traduction' mise en avant par Poincaré modifie les significations usuelles de certains termes afin justement de transformer les postulats de la GHS en des propositions *vraies* de la géométrie analytique ordinaire. Bien que la géométrie hyperbolique soit ainsi plongée dans le plan complexe, il n'est nullement question d'une équivalence entre ces deux structures : la courbure du plan euclidien reste nulle alors que celle de la géométrie hyperbolique est négative. D'un point de vue structurel, la traduction d'une langue dans une autre est donc neutre, alors qu'un changement de géométrie ne l'est pas du tout.

La conception linguistique du choix entre différentes métriques a néanmoins été adoptée par nombre d'épistémologues éminents, entre autres : Hans Reichenbach et Adolf Grünbaum. L'intérêt et la cohérence de la position de Grünbaum tiennent au fait que, dès le départ, il prend conscience d'une vérité fondamentale : deux métriques ne peuvent opérer à la manière de deux langages équivalents que si des notions de base, par exemple celles de congruence et de courbure, sont considérées comme étant, antérieurement à certaines *décisions méthodologiques,* dépourvues de référents. En d'autres termes, la thèse linguistique présuppose un certain décisionnisme. Toutes les quantités riemanniennes étant définies en fonction d'un champ tensoriel unique, à savoir la métrique $g_{ij}(\underline{x})$, l'espace en soi doit être tenu pour métriquement amorphe. Dans cette optique, c'est le physicien qui munit l'espace de la métrique de son choix ; il emploie ensuite cette stipulation arbitraire pour exprimer certaines relations entre des processus physiques qui sont les seuls à avoir droit à une existence objective. Comme le physicien aurait pu légitimement user d'autres fonctions $g'_{ij}(\underline{x})$ pour décrire les *mêmes faits*, la différence entre les deux métriques peut être assimilée à une différence linguistique. L'absence d'une métrique spatio-temporelle intrinsèque forme donc le noyau dur du 'conventionnalisme géo-chronométrique' dont les origines remontent, selon Grünbaum, à Riemann et à Poincaré.

Contre ce point de vue, nous maintiendrons, grâce à une reconstruction rationnelle de la position de Poincaré, que ce dernier a toujours souscrit à une thèse réaliste. Selon celle-ci, la géométrie physique porte sur une entité structurée indépendamment de toute décision humaine. Cette entité, tout en étant un pur continu spatial et donc inobservable, n'est néanmoins pas intrinsèquement amorphe. Postulant des relations que certaines régions de cet espace entretiennent avec des processus concrets, nous obtenons un système globalement testable, c'est-à-dire falsifiable. Il s'ensuit que seule l'inobservabilité de l'espace — pris isolément — nous permet d'imposer à ce dernier la métrique de notre choix. Nous verrons cependant que, d'un point de vue ontologique, tous ces choix ne sont pas équivalents. Que la thèse de Poincaré relève de l'épistémologie et non pas de la métaphysique ressort clairement du passage suivant :

> Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte ni ne peut porter sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace [*SH,* p.101].

Revenons à ce que Poincaré dit concernant la traduction censée transformer les axiomes de la GHS en des théorèmes de la géométrie euclidienne. Tout se passe comme si des assertions tout à fait fausses en apparence étaient transmuées par une redéfinition de leurs termes descriptifs en des propositons trivialement vraies. Il nous semble y avoir là une illustration remarquable du Conventionnalisme Sémantique Trivial (ou CST). C'est d'ailleurs pour cette raison que le CST a été identifié, non seulement par Eddington et Putnam, mais aussi par Popper, avec le conventionnalisme tout court. Et l'on peut excuser Popper d'avoir attribué à tous les conventionnalistes des stratégies dites immunisantes. Selon celles-ci, un savant confronté à une réfutation empirique est habilité à redéfinir ses termes de façon à rendre ses hypothèses automatiquement vraies. Compte tenu du théorème de Löwenheim-Skolem, nous savons qu'une telle opération de sauvetage est toujours possible, du moins dans le cas d'un système consistant du premier ordre. C'est d'ailleurs pour cela que, son critère de démarcation mis à part, Popper a toujours insisté sur la nécessité d'une décision méthodologique jugée très importante : celle de ne jamais recourir à des stratagèmes conventionnalistes, et ce, quelle que soit la critique à laquelle on fait face.

Nous rejetons le CST en tant qu'interprétation valable de la position de Poincaré, mais nos raisons ne sont pas celles de Grünbaum. Nous nous proposons de montrer que le CST n'est pas tant trivial que peu pertinent ; il ne remplit pas la fonction que lui ont assignée à la fois ses détracteurs et ses adhérents, à savoir celle de préserver certains dogmes tenus pour sacrés. Considérons une hypothèse H portant sur la structure de l'espace physique et supposons que H a été, d'une manière ou d'une autre, infirmée par l'expérience. La seule façon dont le CST pourrait nous permettre de garder H passe par la modification du sens de certains termes figurant dans 'H' ; ce qui reviendrait à envisager une nouvelle *proposition* qui n'est que dénotée par *l'entité purement syntaxique* 'H'. Nous aurions ainsi réussi à sauver une suite de *symboles,* à savoir 'H', mais non pas son contenu. Par conséquent : même s'il était en état de réussir, le CST aurait tout de même échoué en ce que, afin de conserver certains axiomes, il ne peut qu'en altérer le sens et donc aussi le référent.

Démontrons maintenant que le CST ne peut même pas sauver *l'expression 'H'* sauf à un prix rédhibitoire. Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des termes théoriques puisque les notions géométriques de congruence et de distance sont évidemment non-observationnels. (Même si nous acceptions la thèse du caractère amorphe de l'espace, les concepts géométriques, étant privés de référents, resteraient non-observationnels). Un réaliste supposera naturellement que même les termes théoriques peuvent en principe dénoter — ou refléter — certains aspects de la réalité transcendante ; mais il doit tout aussi bien admettre que nous ne sommes pas à même de nous affranchir de notre *Lebenswelt* et d'appréhender directement les entités théoriques afin d'en modifier le rapport à notre langage. Employant une terminologie russellienne, nous dirons que les objets théoriques sont connus, non pas par 'acquaintance' ou par saisie directe, mais par description, en d'autres termes : par l'intermédiaire de certaines conjectures. Nous pouvons donc modifier les hypothèses de haut niveau en altérant, non pas leur lien sémantique avec le monde extérieur, mais leur expression syntaxique ; car ce lien lui-même n'est connu qu'à travers certaines théories. Bien que nos hypothèses puissent en principe dénoter des états de fait transcendants, c'est-à-dire indépendants de notre conscience, ce n'est qu'au niveau de l'observation que nous sommes en mesure de déterminer la manière dont nos lois accrochent la réalité. Quant aux propositions théoriques, nous ne pouvons les formuler et les modifier qu'au niveau de la syntaxe ; c'est-à-dire en traitant ces propositions comme s'il s'agissait de simples schèmes formels. (À première vue, cette thèse pourrait paraître quelque peu triviale ; mais adjointe à une conception purement phénoménologique de l'observation, elle court le risque d'être tenue pour trop radicale).

Rappelons qu'une relation de la forme $H \vdash p$ ne peut être valide qu'indépendemment du sens des termes descriptifs figurant dans H ou dans p. Par définition, l'indépendance de toute connotation descriptive est la caractéristique essentielle de toute validité déductive. À moins que nous ne changions de logique, les conséquences de H resteront donc syntaxiquement inchangées ; et ce quels que soient les référents attribués aux symboles descriptifs de notre langage. Supposons que p soit un énoncé de base entrainé par H et réfuté par l'expérience ; c'est-à-dire que $H \vdash p$, où p a été empiriquement falsifié. Aussi longtemps que p sera tenu pour faux, nous ne pourrons pas sauver H ; à moins, bien sûr, de nous déclarer prêts à changer les règles de la logique usuelle. (C'est qu'un changement de logique pourrait rendre p non-déductible de H). Il ne nous reste donc qu'une solution pour préserver H ; à savoir : changer le sens des termes figurant dans p de telle manière que l'expérience n'infirme plus la *proposition* p. Mais p, étant un énoncé empirique, ne devrait contenir que des prédicats strictement observationnels. Le seul choix qui nous reste est donc de changer le sens de certains termes empiriques ; ce qui modifierait, sinon l'entité linguistique 'p', du moins la *proposition* exprimée par 'p'. Nous courons ainsi le risque de transformer p en une tautologie, ce qui ôterait à cette proposition tout intérêt pratique autant que théorique. Argumentant contre Édouard Le Roy, Poincaré écrit :

> Rappelons d'abord les exemples qu'il [Le Roy] a donnés. Quand je dis : le phosphore fond à 44 degrés, je crois énoncer une loi ; en réalité, c'est la définition même du phosphore ; si l'on venait à découvrir un corps qui, jouissant de toutes propriétés du phosphore, ne fondrait pas à 44 degrés, on lui donnerait un autre nom, voilà tout, et la loi resterait vraie... Il est clair que si les lois se réduisaient à cela, elles ne pourraient servir à prédire ; elles ne pourraient donc servir à rien, ni comme moyen de connaissance, ni comme moyen d'action [*VS*, pp. 163-164].

C'est pour cette raison que Poincaré a toujours insisté sur la nécessité de donner aux prédicats empiriques des significations antérieures à toute théorie et à toute expérimentation. Pour rendre la position de Poincaré cohérente, il nous faut exiger que ces significations restent phénoménologiques, c'est-à-dire qu'elles aient trait exclusivement à nos actes de conscience. À cette conclusion on pourrait objecter que les notions géométriques sont toutes théoriques ; une modification du sens des termes empiriques n'affecte donc nullement la signification d'une géométrie G. Par conséquent, G restera inchangée, pour ce qui est à la fois de sa forme et de son contenu, même à la suite d'une modification du sens des termes observationnels. Mais alors, ce ne seront pas les retouches sémantiques des concepts géométriques, telles qu'elles sont préconisées par le CST, mais quelque chose de bien différent qui aurait sauvé G. Nous verrons que ce 'quelque chose' possède un caractère, non pas sémantique, mais strictement syntaxique (Voir Section E ci-dessous).

[C]. Le modèle circulaire de Poincaré.

Nous pouvons facilement vérifier que Δ satisfait aux postulats de la GHS ; mais nous avons aussi constaté que Δ, n'étant régi par aucune idée directrice, possède une structure inintelligible. Le second modèle mis en avant par Poincaré, étant issu de certaines considérations d'ordre physique, est beaucoup plus convaincant que le demi-plan Δ.

> Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes : la température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.
>
> Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite ; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $(R^2 - r^2)$.
>
> Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps ont le même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue. Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu. Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable [*SH,* p. 89].

Pour simplifier notre exposé, nous nous restreindrons à la variante bidimensionnelle de ce modèle, c'est-à-dire à un cercle centré sur l'origine. De toute façon, les faits historiques montrent que Poincaré conçut un modèle sous forme de disque avant de proposer Δ comme exemple d'une géométrie non-euclidienne.

> J'appelle *cercle fondamental* le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité ; *groupe hyperbolique* le groupe des opérations qui consistent à changer z en (az+b)/(cz+d) [a, b, c, d étant des constantes], et qui n'altèrent pas le cercle fondamental ; *groupe discontinu*, tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une quantité infiniment voisine de z ; *groupe fuchsien*, tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique. J'appelle *fonction fuchsienne* toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t.92 [14 février 1881], p. 333 ; et H. Poincaré : *Œuvres,* t. 2, p. 1].

R étant un nombre réel positif arbitraire, dénotons par w le cercle $x^2 + y^2 = R^2$. Soit Ω l'intérieur de w, qui est donc un ensemble ouvert. Postulons ensuite un potentiel thermique qui affecte, instantanément et uniformément, les dimensions de tous les objets matériels. Plus précisément : supposons qu'à mesure que nous nous déplaçons à partir de l'origine vers la circonférence w, nos instruments de mesure se contractent par le même coefficient $h(R^2 - r^2)$; où h est une constante positive et r notre distance du centre O de w. Il s'ensuit que la distance entre deux points voisins — telle que mesurée par une règle matérielle quelconque — sera égale à $ds = \frac{ds_e}{h(R^2-r^2)}$, ds_e étant la distance euclidienne.

Donc : $ds_e = \sqrt{dr^2 + r^2 d\mu^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Par conséquent :

$$ds = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\mu^2}}{h(R^2 - r^2)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{h(R^2 - (x^2 + y^2))};$$

où (x, y) sont les coordonnées cartésiennes, et (r, μ) les coordonnées polaires, du point $P(x, y)$. Nous aurons donc : $x = r\cos\mu, y = r\sin\mu$.

Pour déterminer les géodésiques de notre géométrie, qui sera évidemment non-euclidienne, il nous faudra minimiser l'intégrale $\int ds = \int F(r, \mu')\, dr$, μ' et F étant définis par : $\mu' = \frac{d\mu}{dr}$, et $F(r, \mu') = \frac{\sqrt{1+r^2\mu'^2}}{h(R^2-r^2)}$.

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent donc : $\frac{d(\partial F/\partial \mu')}{dr} - \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$. Comme μ ne figure pas explicitement dans F, nous avons : $\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$; d'où : $\frac{d(\partial F/\partial \mu')}{dr} = 0$.

Il s'ensuit que

$$k = \frac{\partial F}{\partial \mu'} = \frac{r^2 \mu'}{h(R^2 - r^2)\sqrt{1 + r^2 \mu'^2}},$$

k étant une constante.

Élevant les deux membres au carré, nous obtenons, comme expression de μ' :

$$\mu' = \frac{hk(R^2 - r^2)}{r\sqrt{r^2 - (hk)^2 (R^2 - r^2)^2}}.$$

Posons $r = Ru$. Notant que $\mu' = \frac{d\mu}{dr} = (1/R)\frac{d\mu}{du}$, nous en déduisons :

$$\mu = \int h' \frac{(1 - u^2)\, du}{u\sqrt{u^2 - h'^2 (1 - u^2)^2}} = \int \frac{h'(\frac{1}{u} - u)\, du}{u\sqrt{1 - h'^2(\frac{1}{u} - u)^2}},$$

h' étant la constante hkR. La forme de cette intégrale suggère le changement de variable : $u = e^{-v.}$ Il s'ensuit que :

$$\mu = -2h' \int \frac{\mathrm{Sh}(v)\, dv}{(1 - 4h'^2 \mathrm{Sh}^2(v))^{\frac{1}{2}}} = -2h' \int \frac{\mathrm{Sh}(v)\, dv}{\sqrt{1 + 4h'^2 - 4h'^2 \mathrm{Ch}^2(v)}}.$$

Comme $\mathrm{Sh}(v) = \frac{d[\mathrm{Ch}(v)]}{dv}$, nous pouvons intégrer directement, obtenant ainsi :

$$\mu = -\sin^{-1}\left(\frac{2h'\mathrm{Ch}(v)}{\sqrt{1 + 4h'^2}}\right) + \beta,$$

β étant une constante d'intégration. Par conséquent :

$$\sin(\beta-\mu)=\frac{2h'\mathrm{Ch}(v)}{\sqrt{1+4h'^2}}=\frac{h'(e^v+e^{-v})}{\sqrt{1+4h'^2}}=\frac{h'[\frac{1}{u}+u]}{\sqrt{1+4h'^2}}=\frac{h'[\frac{R}{r}+\frac{r}{R}]}{\sqrt{1+4h'^2}},$$

puisque, par définition : $r=Ru$. Donc :

$$r\,\sin(\beta-\mu)=\frac{h'(R^2+r^2)}{R\sqrt{1+4h'^2}}.$$

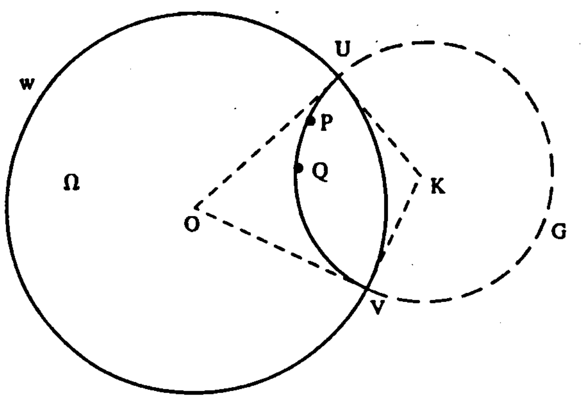
Rappelons que :

$$r^2=x^2+y^2,\quad x=r\cos\mu,\quad y=r\sin\mu$$
$$\text{et }\ \sin(\beta-\mu)=\sin\beta\cos\mu-\cos\beta\sin\mu.$$

Nous obtenons ainsi :

$$\left(x-Rb\frac{\sin\beta}{2h'}\right)^2+\left(y+Rb\frac{\cos\beta}{2h'}\right)^2=\left(\frac{R}{2h'}\right)^2,$$

où nous avons posé : $b=\sqrt{1+4h'^2}$. Cette équation représente un cercle G de rayon $\frac{R}{2h'}$ et de centre $(Rb\frac{\sin\beta}{2h'},-Rb\frac{\cos\beta}{2h'})$.



– FIGURE 2 –

Rappelons que w est le cercle fondamental de rayon R et centré sur l'origine. Il s'avère que G est toujours orthogonal à w, puisque :

$$\begin{aligned}(Rb\sin\beta/2h')^2+(Rb\cos\beta/2h')^2 &= (Rb/2h')^2\\ &= (R/2h')^2(1+4h^{'2})\\ &= R^2+(R/2h')^2;\end{aligned}$$

c'est-à-dire que le carré de la distance entre les centres des deux cercles est égale à la somme des carrés de leurs rayons.

Notons que si $k = 0$, alors $\mu' = 0$; c'est-à-dire $d\mu/dr = 0$; d'où $\mu = \beta$, β étant un angle constant. $\mu = \beta$ représente donc un diamètre de w. C'est pour cela que nous avons intérêt à appeler *cercle généralisé* toute droite et tout cercle ordinaire ; ce qui nous permet d'affirmer que l'ensemble des géodésiques est constitué par des arcs de cercles généralisés intérieurs et orthogonaux à w (voir Fig. 2).

Pour déterminer la distance entre deux points arbitraires P et Q de Ω, il suffit de calculer l'intégrale $\int ds = \int \frac{\sqrt{dr^2+(rd\mu)^2}}{h(R^2-r^2)}$ le long de la géodésique menant de P à Q, c'est-à-dire le long de l'arc de cercle normal à w et passant par P et Q.

Dénotons par U et V les intersections de cet arc avec w. Bien que laborieuse, l'intégration ne présente aucune difficulté majeure ; elle aboutit au résultat : $\partial(P,Q) = k'|L(P,Q\ ;U,V)|$, k' étant la constante $1/(2Rh)$ et $\partial(P,Q)$ la distance $\int ds$ entre P et Q.

Nous avons donné tous ces détails pour bien montrer que la nouvelle géométrie est entièrement déterminée par l'expression de la distance riemannienne $ds = \frac{ds_e}{h(R^2-r^2)}$. Remarquons tout de suite que ds diffère de ds_e par un seul facteur, à savoir $\frac{1}{h(R^2-r^2)}$. Les angles hyperboliques coïncideront donc avec leurs homologues euclidiens ; ce qui explique pourquoi la notion d'angle reste inchangée dans le dictionnaire défini par Poincaré.

Bien que l'expression de ds soit due à Poincaré, les méthodes riemanniennes employées ci-dessus ne sont pas les siennes. Il les court-circuite en usant d'une T.M. pour appliquer Ω sur le demi-plan complexe Δ ; après quoi il opère exclusivement à l'intérieur de Δ. En effet, soit M la famille de toutes les T.M., c'est-à-dire de toutes les fonctions de la forme $(az+b)/(cz+d)$, $ad-bc$ étant non-nul. Nous pouvons facilement vérifier que M forme un groupe, c'est-à-dire que les inverses et les produits de tous les T.M. sont des T.M. Les T.M. possèdent en outre les propriétés fondamentales suivantes :

[1]. Chaque T.M. applique tout cercle généralisé sur un autre cercle generalisé. Une T.M. peut donc transformer un cercle ordinaire en une droite et vice-versa.

[2]. Chaque T.M. applique intégralement l'intérieur de tout cercle généralisé C soit sur l'intérieur soit sur l'extérieur de l'image de C.

[3]. Toute T.M. est une transformation strictement conforme ; c'est-à-dire qu'elle conserve à la fois la grandeur et le sens de l'angle entre deux courbes arbitraires. (Il s'agit là d'une propriété de toute fonction complexe holomorphe, c'est-à-dire dérivable).

[4]. Tout rapport anharmonique est un invariant d'une T.M. quelconque. En d'autres termes : pour tous nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, et pour toute T.M. $f(z)$, nous avons :

$$(z_1, z_2 \; ; z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2) \; ; f(z_3), f(z_4)),$$

$(x, y \; ; z, u)$ étant la quantité définie par $(x, y \; ; z, u) = \frac{(x-z)(y-u)}{(x-u)(y-z)}$.

[5]. Nous devons enfin noter que le rapport anharmonique $(x, y \; ; z, u)$ est réel si et seulement si x, y, z et u appartiennent tous à un même cercle généralisé.

Pour appliquer Ω sur Δ il suffit donc de déterminer une T.M. f qui transforme à la fois w en l'axe $X'X$ et n'importe quel point $z = x + iy$ de Ω en un point $z' = x' + y'$ de Δ ; c'est-à-dire tel que $y' > 0$. Posons $z' = f(z)$. Nous pouvons, par exemple, imposer les réquisits suivants :

$f(R) = R, f(-R) = -R$ et $f(-Ri) = 0$.

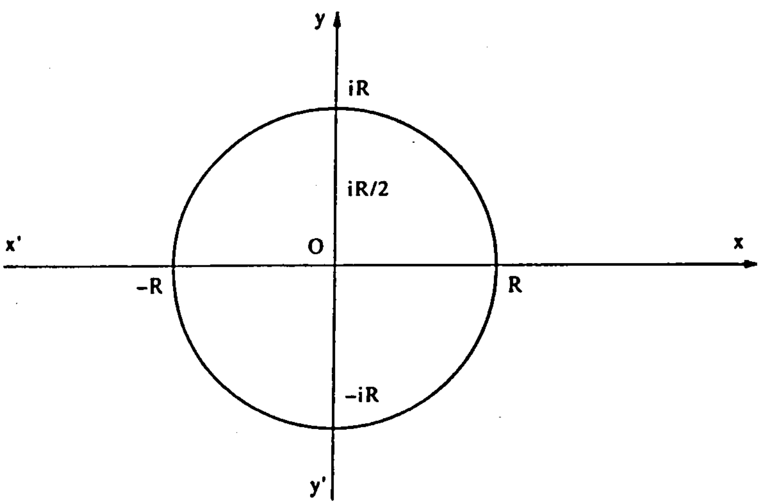
Comme f conserve le rapport anharmonique, il s'ensuit que : $(z', R \; ; -R, 0) = (z, R \; ; -R, -Ri)$; c'est-à-dire :

$\frac{(z'+R)R}{2Rz'} = \frac{(z+R)R(1+i)}{2R(z+iR)}$.

Ceci nous permet d'exprimer z' en fonction de z, et vice-versa. Nous aurons :

(1) $\frac{R(z+iR)}{(iz+R)} = z' = f(z)$; et :

(2) $\frac{R(iz'+R)}{(z'+iR)} = z = f^{-1}(z')$. [Voir Fig. 3].



– Figure 3 –

Comme $f(iR/2) = 3iR \in \Delta$, f appliquera le disque Ω sur le demi-plan Δ. Posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, nous déduisons de (2) que : $x + iy = z = \frac{R(R-y'+ix')}{x'+i(R+y')} = \frac{2R^2x'+iR(x'^2+y'^2-R^2)}{x'^2+(R+y')^2}$. Identifiant les parties réelles, puis les parties imaginaires, du premier et du troisième membre, nous obtenons :

(3) $x = \frac{2R^2x'}{x'^2+(R+y')^2}$; $y = \frac{R(x'^2+y'^2-R^2)}{x'^2+(R+y')^2}$.

À la suite d'un long calcul, qui ne présente néanmoins aucune difficulté de fond, nous avons :

(4) $k'\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{y'} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{h(R^2-(x^2+y^2))} = ds$ (par définition de ds), où, comme ci-dessus : $k' = 1/(2Rh)$.

Adoptant la conception dite passive de la transformation f, c'est-à-dire la considérant comme un simple changement de repère, nous pouvons regarder (x, y) et (x', y') comme les coordonnées, dans deux repères différents, d'un même point P de l'espace hyperbolique. Dans Δ, les géodésiques seront donc les courbes de la forme $f[G]$, G étant une géodésique quelconque de Ω.

Nous avons déjà vu que G doit être un arc de cercle généralisé orthogonal à w. Des équations (1)–(4) il s'ensuit que $f[G]$ est un cercle généralisé normal à l'image $f[w] = X'X$ de w.

Nous en concluons que $f[G]$ sera soit un demi-cercle centré sur un point de $X'X$ soit une verticale de Δ.

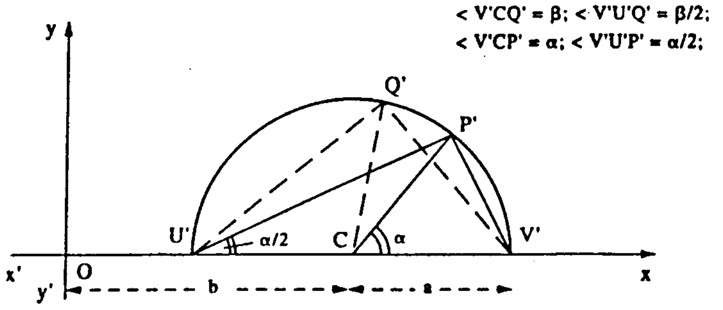
Posons : $P' = f(P), Q' = f(Q), U' = f(U)$ et $V' = f(V)$. Encore une fois, comme le rapport anharmonique est un invariant de f, nous aurons :

(5) $\partial(P', Q') = \partial(P, Q) = k'|L(P, Q; U, V)| = k'|L(P', Q'; U', V')|$.

Notons que nous aurions pu arriver au même résultat par un simple calcul algébrique. Soit $x' = b + a\cos\mu, y' = b + a\sin\mu$ une représentation paramétrique de la géodésique passant par P' et Q', c'est-à-dire du cercle centré sur un point C de $X'X$ et passant par P' et Q'. Par conséquent : $dx' = -a\sin\mu d\mu, dy' = a\cos\mu d\mu$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\partial(P', Q') &= k'\int\frac{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}{y'} = k'\int\frac{a\,d\mu}{a\sin\mu} \\
&= k'[L|\tan(\mu/2)|]_{P'}^{Q'} = k'L\left[\frac{|\tan(\beta/2)|}{|\tan(\alpha/2)|}\right] \\
&= k'L\left[\frac{\underline{Q'V'}.\underline{P'U'}}{\underline{Q'U'}.\underline{P'V'}}\right] = k'L(Q', P'; V', U') \\
&= k'L(P', Q'; U', V') \quad \text{[Voir Fig. 4].}
\end{aligned}$$

La facilité avec laquelle cette intégration a pu être effectuée est probablement l'une des raisons pour lesquelles Poincaré choisit d'étudier les



– FIGURE 4 –

propriétés de Δ plutôt que celles de Ω. De toute façon, la transformation f nous permet de traduire tout théorème concernant Δ en une proposition vraie dans Ω. Pour finir, définissons un cercle hyperbolique comme le lieu de tous les points P de Δ tels que : $\partial(A, P) = k_0, A$ étant un point fixe et k_0 une constante réelle positive. Nous pouvons facilement démontrer que ce lieu est un cercle ordinaire, dont le centre euclidien ne coïncide pourtant pas avec A.

Bien qu'équivalent au demi-plan Δ, l'univers circulaire Ω constitue, d'un point de vue heuristique, un grand progrès par rapport à Δ. Par le biais d'un gradient thermique, Poincaré transforme la distance $ds_e = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ en la métrique $ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{h(R^2-(x^2+y^2))}$ d'un nouvel univers hyperbolique Ω. Faisant ensuite usage des méthodes de Riemann, il déduit toutes les propriétés géométriques de Ω — ou plutôt de Δ — à partir de l'expression de ds. L'application f de Ω sur Δ rend enfin compte de toutes les propriétés de Δ, qui s'avèrent ainsi n'être disparates qu'en apparence.

L'heuristique de Poincaré, telle que décrite jusqu'ici, n'est cependant pas tout à fait unitaire. Elle possède deux composantes hétérogènes. Nous avons d'une part les méthodes riemanniennes fondées sur l'expression de la distance hyperbolique ds ; de l'autre, l'approche algébrique préconisée par Felix Klein et basée sur la théorie des groupes. En outre, les métriques $\frac{ds_e}{h(R^2-r^2)}$ et ds/y, introduites respectivement dans les espaces Ω et Δ, nous paraissent quelque peu arbitraires. Nous acceptons l'existence d'un potentiel thermique mais non pas la valeur particulière que lui attribue Poincaré. Nous faisons ensuite face à l'irruption, dans un enchaînement purement *analytique,* de la définition du *groupe* M et de la transformation f de Ω en Δ. Rien ne prépare le lecteur à ce brusque changement de tactique. Nous savons enfin que Poincaré lui-même avait rejeté le point de vue purement analytique de Riemann ; il le considérait comme trop lâche, puisque permettant la construction de stuctures à courbures variables qui ne méritent pas d'être tenues pour d'authentiques théories de l'espace : pour être admissible, un espace devrait avoir une courbure constante garantissant la mobilité de toutes les configurations géométriques.

> Tout dépend, dit-il [Riemann], de la façon dont on détermine la longueur d'une courbe. Or il y a une infinité de manières de définir cette longueur, et chacune d'elles peut devenir le point de départ d'une nouvelle géométrie. Cela est parfaitement exact, mais la plupart de ces définitions sont incompatibles avec le mouvement d'une figure invariable, que l'on suppose possible dans le théorème de Lie. Ces géométries de Riemann, si intéressantes à plusieurs titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide [*SH,* p.73].

Il y a donc lieu de supposer que Poincaré a fondé son approche des fondements de la géométrie sur un groupe de transformations, dont il tira ensuite l'expression d'une métrique riemannienne appropriée. Cette thèse aurait aussi l'avantage d'établir que Poincaré avait suivi une même heuristique cohérente tout au long de ses recherches géométriques. Mais ce n'est qu'en remontant le cours de l'histoire que nous serons en mesure d'expliciter et de défendre cette conjecture.

[D]. L'unité heuristique des méthodes utilisées par Poincaré, et ses découvertes simultanées des fonctions fuchsiennes et des modèles de la GHS.

Dans les années 1880, Poincaré développa la théorie des fonctions dites fuchsiennes comme méthode d'intégration de toute une famille d'équations différentielles. Nous ne nous attarderons pas sur les propriétés de ces équations. Il suffit de remarquer que Poincaré avait de bonnes raisons, d'ordre non-géométrique, de créer les fonctions fuchsiennes ; et que ces dernières furent définies par leur invariance par rapport à certains sous-groupes de H, donc aussi de M.

Dorénavant, nous prendrons $R = h = 1$ dans les équations (1)–(5), ci-dessus ; w et Ω seront donc respectivement la circonférence et le disque unitaires, et f la fonction définie par :

(6) $f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$, de sorte que : $f^{-1}(z) = \frac{-z+i}{iz-1} = \frac{iz+1}{z+i}$.

Comme ci-dessus, Δ dénotera le demi-plan $\{(x, y) : y > 0\}$. Par conséquent :

(7) $f[w] = X'X$ et $f[\Omega] = \Delta$; donc : $f^{-1}[X'X] = w$ et $f^{-1}[\Delta] = \Omega$.

Reconsidérons la citation p.157 tirée de l'un des premiers écrits de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Suivant sa terminologie :

(8) H est l'ensemble de toutes les T.M. qui appliquent chacun des domaines w et Ω sur lui-même ; c'est-à-dire $g[w] = w$ et $g[\Omega] = \Omega$, pour tout $g \in H$; d'où : $H = \{g \in M : g[w] = w, g[\Omega] = \Omega\}$.

Par conséquent : pour tout $g \in H$ et $f \in H$, nous aurons : $g[w] = w = f[w]$; donc : $fg[w] = f[w] = w$ et $g^{-1}[w] = g^{-1}g[w] = w$. De même : $fg[\Omega] = \Omega$ et $g^{-1}[\Omega] = \Omega$. Il s'ensuit que $fg \in H$ et $g^{-1} \in H$, ce qui établit que :

(9) H est un sous-groupe de M. Nous écrirons cette relation sous la forme : $H \leq M$.

Poincaré appelle H le groupe hyperbolique ; et il caractérise une fonction fuchsienne q comme une transformation complexe définie dans Ω et invariante par rapport à un sous-groupe discontinu F de H ; c'est-à-dire qu'il existe un F discontinu tel que : $F \leq H \leq M$ et $q(z) = q(f(z))$ pour tout $f \in F$ et tout $z \in \Omega$.

Bien que la structure de F ait peu d'intérêt pour nous, celle de H est d'une grande importance pour toute considération géométrique. Poincaré nous décrit comment, par une sorte d'intuition fulgurante, il s'était rendu compte de la possibilité d'interpréter H comme le groupe de déplacements d'une géométrie non-euclidienne. Nous devons néanmoins noter que de telles intuitions sont d'un ordre non pas mystique ou psychologique, mais rationnel. Après tout, Felix Klein avait établi un lien logique entre la géométrie d'une part, et la théorie des groupes de l'autre. Il était en outre évident que les fonctions scalaires usuelles sont invariantes par rapport aux déplacements euclidiens, ces derniers pouvant être tenus pour de simples changements de coordonnées. L'idée que H pût constituer le groupe d'isométries directes d'une géométrie (non-euclidienne) G était donc dans l'ordre des choses. Mais il fallait avoir le génie d'un Poincaré pour pouvoir tirer G de la structure de H. Il usa d'une méthode qu'il allait appliquer plus tard — en 1905 — à la détermination d'une théorie covariante de la gravitation. Il considéra les invariants les plus simples d'un groupe déterminé — de H dans le cas de la géométrie hyperbolique, du groupe de Lorentz dans celui de la gravitation — comme les matériaux de construction d'une hypothèse assujettie par ailleurs à d'autres réquisits. Nous avons déjà donné une liste des propriétés les plus marquantes des T.M., c'est-à-dire des éléments de M (Voir p.160). Il nous faut maintenant lui adjoindre les deux équations : $g[w] = w$ et

$g[\Omega] = \Omega$ pour tout $g \in H$. Celles-ci font partie de la définition même du groupe H. $g[\Omega] = \Omega$ signifie que Ω est l'espace dans lequel les éléments de H opèrent ; et $g[w] = w$ nous dit que w représente un invariant supplémentaire de H. Posons :

(10) $B = fHf^{-1}$.

Établissons que B est l'ensemble des fonctions qui transforment chacun des deux domaines $X'X$ et Δ en lui-même. Soit $g \in B = fHf^{-1}$: il existe donc un $h \in H$ tel que $g = fhf^{-1}$. Par conséquent : $g[X'X] = f[h[f^{-1}[X'X]]] = f[h[w]]$ (Cf. (7)) $= f[w]$ (par définition de H) $= X'X$ (Cf. (7)). Nous pouvons de même démontrer que $g[\Delta] = \Delta$. Réciproquement : soit q une T.M. telle que $q[X'X] = X'X$ et $q[\Delta] = \Delta$. Ayant posé $p = f^{-1}qf$, nous aurons : $p[\Omega] = f^{-1}[q[f[\Omega]]] = f^{-1}[q[\Delta]]$ (Cf. (7)) $= f^{-1}[\Delta] = \Omega$ (Cf. (7)). De même, il nous est tout aussi facile de prouver que $p[w] = w$. Par définition de H, il s'ensuit que $p \in H$; c'est-à-dire $f^{-1}qf \in H$, d'où : $q \in fHf^{-1}$.

En d'autres termes : B est constitué par les T.M. qui, tout en appliquant le demi-plan Δ sur lui-même, transforment tout réel en un nombre réel. De telles T.M. peuvent être caractérisées de la façon suivante. Soient p, q, r, trois réels distincts et $g \in B$. Posons : $g(p) = p', g(q) = q'$, $g(r) = r'$ et $g(z) = z', z$ étant un nombre complexe quelconque. Comme toute T.M., g conserve les rapports anharmoniques. Donc :

(11) $(z', p' ; q', r') = (z, p ; q, r)$, c'est-à-dire $\frac{(z'-q')(p'-r')}{(z'-r')(p'-q')} = \frac{(z-q)(p-r)}{(z-r)(p-q)}$.

Comme $g \in B$, la définition de B entraîne que, p, q et r étant réels, leurs transformés p', q' et r' le seront aussi. À partir de (11), nous pouvons exprimer z' en fonction de z, obtenant ainsi une équation de la forme :

(12) $\frac{(az+b)}{(cz+k)} = z' = g(z)$, où a, b, c et k sont des coefficients réels.

Nous devons maintenant nous assurer que g applique Δ sur lui-même. Vu la propriété [2] d'une T.M. quelconque, il suffit d'exiger que $g(i) \in \Delta$ (Voir p.160).

En vue de (12) : $g(i) = \frac{(ac+bk)+(ak-bc)i}{(c^2+k^2)}$. Nous devons donc imposer la condition : $(ak - bc) > 0$. Par conséquent :

(13) $B = \{\frac{(az+b)}{(cz+k)} : a, b, c, k$ sont réels, et $(ak - bc) > 0\}$.

La structure de H se détermine à partir de (10) et de (13). (10) entraîne :

(14) $H = f^{-1}Bf$.

Soit $h \in H = f^{-1}Bf$; il existe donc un $g \in B$ tel que $h = f^{-1}gf$, où g a la forme décrite par (13). Posons :

(15) $h(z) = \frac{uz+s}{vz+t}$; u, s, v et t étant des constantes complexes.

Comme $h = f^{-1}gf$, il s'ensuit à partir de (6) et de (13) que :

(16) $$\begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuant la multiplication des trois matrices, puis identifiant les termes correspondants des deux membres, nous obtenons :

$$u = -(a+k) + i(c-b); \qquad s = -(b+c) - i(a-k);$$
$$v = -(b+c) + i(a-k); \qquad t = -(a+k) - i(c-b).$$

Par conséquent :

(17) $s = v^*, t = u^*$ où, pour tout nombre complexe z, z^* dénotera le conjugué de z.

Calculant les déterminants des deux membres de (16), nous avons : $ut - vs = 4(ak - bc)$. (13) et (17) entraînent :

(18) $uu^* - vv^* = 4(ak - bc) > 0$, c'est-à-dire $|u|^2 - |v|^2 > 0$ ou $|u| > |v|$. Donc :

(19) $H = \{\frac{uz+v^*}{vz+u^*} : |u| > |v|\}$.

Poincaré dut ensuite déterminer la métrique riemannienne de sa géométrie G. Il s'agissait pour lui de trouver une fonction non-négative $\beta(P, Q)$ des points P et Q telle que β est additive le long de toute géodésique du demi-plan Δ. Ce résultat devait en outre découler de la structure même du groupe B. γ étant une géodésique, $g[\gamma]$ doit en être une aussi, et ce pour tout $g \in B$; car g peut être conçu comme effectuant un simple déplacement de γ.

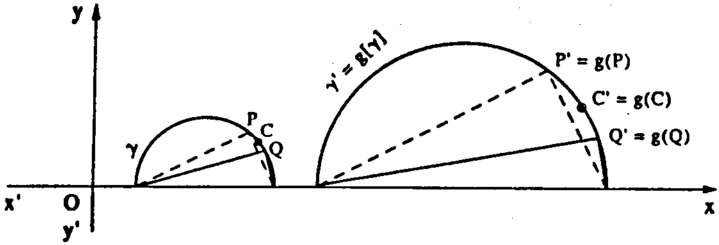
Le mot 'cercle' dénotera désormais un cercle généralisé quelconque, c'est-à-dire une droite ou un cercle ordinaire. Nous savons que les éléments de B, tout en étant conformes, permutent les demi-cercles normaux à $X'X$; et que parmi ces derniers se trouvent toutes les verticales de Δ. L'ensemble Σ des demi-cercles orthogonaux à $X'X$ constitue donc le choix naturel de la famille des géodésiques de G. Pour le domaine Ω, ces considérations équivalent à la proposition suivante : si, dans Ω, les diamètres de w sont tenues pour des géodésiques, il devra en être de même pour *tous* les arcs orthogonaux à w, puisque les éléments de H peuvent interchanger de tels arcs avec les diamètres de w.

Nous cherchons donc une fonction non-négative β telle que :

(20) $\beta(P, Q) = \beta(g(P), g(Q))$ pour tout $g \in B, P \in \Delta, Q \in \Delta$; et :

(21) $\beta(P, Q) = \beta(P, C) + \beta(C, Q)$ pour trois points P, C et Q appartenant à un élément arbitraire γ de Σ, et tels que C se trouve entre P et Q.

Le fait que les rapports anharmoniques sont conservés par n'importe quelle T.M. entraîne que (20) sera automatiquement satisfaite si nous parvenons à définir $\beta(P, Q)$ en fonction d'un rapport anharmonique approprié. Ce dernier sera réel pour quatre points quelconques d'un cercle, donc de tout membre de Σ. (Cf. Figure [5] ci-dessous).



– FIGURE 5 –

Considérons deux géodésiques dans Δ, c'est-à-dire deux demi-cercles γ et γ', dont les centres appartiennent à $X'X$. Soient U, V et U', V' les intersections respectives de γ et de γ' avec $X'X$. P, Q et P' designeront trois points tels que : $P \in \gamma, Q \in \gamma$ et $P' \in \gamma'$. Démontrons qu'il existe une T.M. unique φ telle que : $\varphi(U) = U', \varphi(V) = V'$ et $\varphi(P) = P'$. Posons $\varphi(z) = z'$. Le rapport anharmonique étant un invariant de φ, nous devons avoir : $(z', P' ; U', V') = (z, P ; U, V)$. En d'autres termes :

(22) $\frac{(z'-u')(p'-v')}{(z'-v')(p'-u')} = \frac{(z-u)(p-v)}{(z-v)(p-u)}$; où $u, v, u', v', p, q, p', q'$ dénotent respectivement les nombres complexes représentés par les points $U, V, U', V', P, Q, P', Q'$.

La relation (22) nous permet d'exprimer z', c'est-à-dire $\varphi(z)$, en fonction de z, établissant ainsi l'unicité de φ. Nous obtenons :

(23) $\varphi(z) = z' = v' + \frac{(z-v)(p-u)(p'-v')(v'-u')}{(z-u)(p-v)(p'-u')-(z-v)(p-u)(p'-v')}$.

L'équation (23) définit en fait la fonction φ. Du second membre de (23) il ressort que φ est une T.M. ; il est en outre facile de vérifier que : $\varphi(p) = p', \varphi(u) = u'$ et $\varphi(v) = v'$.

Démontrons $\varphi[\gamma] = \gamma'$ et $\varphi \in B$. Comme φ est une T.M. et que γ est un cercle, $\varphi[\gamma]$ sera aussi un cercle passant par $\varphi(P) = P', \varphi(U) = U'$ et $\varphi(V) = V'$. Par conséquent : $\varphi[\gamma] = \gamma'$, puisque le cercle γ' est déterminé par trois de ses points, et plus particulièrement par P', Q' et V'. En outre, comme toute T.M. est conforme et que $X'X$ est normal à γ aux points U et V, $\varphi[X'X]$ devra être un cercle orthogonal à $\varphi[\gamma] = \gamma'$ aux points $\varphi(U) = U'$ et $\varphi(V) = V'$. Par conséquent $\varphi[X'X] = X'X$, puisque $X'X$ est le seul cercle remplissant ces deux conditions. Enfin : comme $P \in \Delta$ et $\varphi(P) = P' \in \Delta$, il s'ensuit que φ applique Δ sur lui-même (Cf. p160, [2.]). Donc, par définition de B, $\varphi \in B$. Nous pouvons par conséquent tenir $\gamma' = \varphi[\gamma]$ pour la figure obtenue à partir de γ au moyen du déplacement φ. Posons $\varphi(Q) = Q'$.

Comme $Q \in \gamma, Q' = \varphi(Q) \in \varphi[\gamma] = \gamma'$; et nous devrions avoir $\beta(P,Q) = \beta(\varphi(P), \varphi(Q)) = \beta(P', Q')$, puisque φ est un simple déplacement. Remarquons que

$$(P, Q\ ; U, V) = (\varphi(P), \varphi(Q)\ ; \varphi(U), \varphi(V)) = (P', Q'\ ; U', V').$$

Nous pourrions en conséquence essayer de définir :
$\beta(P,Q) = (P,Q\ ;\ U,V)$, U et V étant les intersections de $X'X$ avec la géodésique γ passant par P et Q ; mais $(P,Q\ ; U,V)$ est, non pas additive, mais multiplicative le long de γ ; puisque pour n'importe quel des cinq nombres complexes distincts p, q, u, v et z, nous pouvons, à partir de la définition même du rapport anharmonique, vérifier que :

(24) $(p, z\ ; u, v)(z, q\ ; u, v) = (p, q\ ; u, v)$.

Prenant les logarithmes des deux membres de (24), nous obtenons :

(25) $L(p, z\ ; u, v) + L(z, q\ ; u, v) = L(p, q\ ; u, v)$.

Cette relation, visiblement additive, nous suggère la définition :
$\beta(P,Q) = L(P,Q\ ; U,V)$. Il nous faut en plus exactement stipuler :

(26) $\beta(P,Q) = |L(P,Q\ ; U,V)|$ pour que la quantité $\beta(P,Q)$ soit toujours non-négative.

Il nous reste à vérifier que la relation $\beta(P,C) + \beta(C,Q) = \beta(P,Q)$ est vraie pour tout point C de γ situé entre P et Q ; ce qui, vu l'équation (25), est immédiat.

Poincaré considère enfin la distance infinitésimale $\beta(z, z + dz)$ entre deux points voisins $z = x + iy$ et $z + dz = (x + dx) + i(y + dy)$. Après un calcul laborieux mais sans difficulté majeure, il établit que :

(27) $\beta(z, z + dz) = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.

À un facteur constant près, cette expression coïncide avec celle de ds pour le demi-plan hyperbolique Δ (Voir p.162, (4)).

$|L(P,Q\ ; U,V)| = \beta(P,Q)$ satisfait donc à toutes les conditions auxquelles, vu la structure du groupe B, la notion d'une distance riemannienne doit être assujettie.

Pour résumer : en géométrie mathématique, Poincaré usa d'une heuristique fondée sur la théorie des groupes telle que conçue par Felix Klein. Il définit les fonctions fuchsiennes au moyen de leur invariance par rapport à certains sous-groupes F de H, H étant à son tour défini comme un groupe de T.M. (Transformations de Möbius). 'Dans un éclair', Poincaré se rendit compte que H pouvait être conçu comme l'ensemble des déplacements définis par une géométrie non-euclidienne G. G s'avéra être hyperbolique ; d'où le nom de "groupe hyperbolique" donné à H. La structure de H permit ensuite à Poincaré de calculer la distance riemannienne ds qui, de son côté, détermine H uniquement. En géométrie mathématique, l'approche algébrique s'avéra donc fondamentale alors que les méthodes riemanniennes, c'est-à-dire analytiques, restèrent à l'arrière-plan. Inutile d'ajouter qu'en physique, où la notion de mesure des distances infinitésimales joue un rôle essentiel, ce rapport fut inversé. Ceci, ajouté au caractère naturellement concret de la physique, fut la raison principale pour laquelle, dans *La Science et l'hypothèse*, Poincaré présenta, d'une manière anachronique, la distance ds comme résultant d'une distorsion due à un potentiel thermique.

[E]. Découverte ou invention des champs universels ?

Revenons au modèle circulaire Ω de la géométrie hyperbolique. Poincaré nous dit que, si les habitants de Ω employaient des corps matériels pour mesurer les distances, ils seraient naturellement amenés à postuler une géométrie non-euclidienne. Mais un mathématicien de génie, qui serait aussi un brillant physicien, pourrait restaurer ou plutôt instaurer la géométrie euclidienne par l'introduction du potentiel thermique décrit par Poincaré. Ce gradient illustre ce que Reichenbach appellera — bien plus tard — un champ universel ; c'est-à-dire une force qui altère uniformément tous les objets matériels et contre laquelle on ne peut pas faire écran ; donc un champ qui modifie les dimensions de tous les corps indépendemment de leur composition physique.

La question se pose de savoir si Poincaré entendait l'existence de ces champs dans un sens littéral ou s'il s'agissait pour lui d'une simple métaphore. Riemann et Poincaré auraient, selon Grünbaum, soutenu que l'espace physique est métriquement amorphe ; donc que nous pouvons lui prescrire n'importe quelle géométrie. Du même coup, nous ne pourrions plus légitimement nous demander quelles causes *physiques* auraient empêché une méthode de mesure concrète d'aboutir à une géométrie arbitrairement choisie. Une telle question cesserait d'avoir un sens ; puisqu'un 'champ universel' ne serait alors qu'une *façon de parler* de la différence entre des fonctions $g_{ij}(\underline{x})$ librement stipulées dans l'expression $ds^2 = g_{ij}(\underline{x})dx^i dx^j$, et les valeurs $g'_{ij}(\underline{x})$ empiriquement calculées au moyen des méthodes dites usuelles. Ce n'est qu'après avoir *décrété* les $g_{ij}(\underline{x})$ et *mesuré* les $g'_{ij}(\underline{x})$ que nous pouvons *définir* : $F_{ij} = g'_{ij} - g_{ij}$, où F_{ij} représente un potentiel purement fictif. Dans Ω par exemple, les résultats d'expérience nous conduisent à adopter une géométrie hyperbolique. Il serait donc absurde de nous demander quel champ aurait déformé nos instruments, les empêchant ainsi de révéler la nature intrinsèquement euclidienne de l'espace. Cette question n'a un sens que si une métrique spatiale préexistait à toute stipulation méthodologique. L'espace étant amorphe, il s'ensuit que la différence entre deux géométries quelconques est d'ordre linguistique (cf. *PPST*, pp. 74-75).

Grünbaum a non seulement puissamment défendu ce point de vue, mais il a en outre pu invoquer certains textes de Poincaré qui semblent appuyer la thèse linguistique. Nous avons déjà noté que Poincaré a parfois l'air de concevoir la différence entre deux géométries comme celle entre deux systèmes de coordonnées ou deux langues naturelles. Mais nous avons aussi souligné que sa position concernant le rôle des conventions dans les sciences n'a pas toujours été cohérente. Ceci nous permettra d'établir la thèse suivante : grâce à une reconstitution rationnelle s'accordant non seulement avec la plupart de ses écrits mais aussi avec l'esprit de sa philosophie, Poincaré s'avère être un réaliste pur et dur, du moins dans le sens d'un réalisme structurel plutôt que littéral. Celui-ci peut néanmoins être qualifié de dur parce que Poincaré tenait l'espace pour être muni d'une métrique qui, tout en étant en principe inobservable, n'en reste pas moins intrinsèque au monde physique. Plus exactement : Poincaré considérait l'espace comme possédant une propriété structurelle exprimée — ou reflétée — par une géométrie empiriquement adéquate ; cette dernière doit donc faire partie intégrante de tout un système cohérent, unifié, commode, et qui, non seulement sauve les phénomènes, mais les explique et les prévoit. Que Poincaré ait en outre cru pouvoir prédire que cette géométrie serait toujours euclidienne est un fait contingent qui ne change rien à sa position méthodologique globale.

Nous devons maintenant signaler une conséquence à la fois grave et contre-intuitive de la thèse linguistique ; à savoir qu'elle ne peut que confondre deux cas de figure, ou plutôt deux problématiques très différentes. Considérons un espace S à N dimensions. S est donc un ensemble de points muni d'une topologie, par rapport à laquelle certains invariants physiques sont représentés par des fonctions continues. (En fait, cette topologie pourrait être définie comme la plus faible qui garantisse la continuité des invariants en question).

Soient $\underline{x} = (x^1, \dots, x^N)$ un système de coordonnées dans une région de S, et $g_{ij}(\underline{x})$, $g'_{ij}(\underline{x})$ deux métriques, c'est-à-dire deux champs de tenseurs covariants, symétriques et du second ordre. Désignons par $[g_{ij}(\underline{x})]$ et $[g'_{ij}(\underline{x})]$ les géométries résultant des deux métriques g_{ij} et g'_{ij} respectivement. Il est évident que les deux cas de figure (a) et (b) décrits ci-dessous s'excluent mutuellement :

(a) Il existe une application bi-univoque et infiniment différentiable $(x^1, \dots, x^N) = \underline{x} \rightarrow \underline{x'} = (x'^1, \dots, x'^N)$ de S sur lui-même telle que : $g'_{ij}(\underline{x'}) = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j)} g_{pq}(\underline{x})$, où nous suivons, comme nous le ferons désormais, la convention de sommation d'Einstein. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} ds^2(\underline{x}) &= g_{ij}(\underline{x})dx^i dx^j = g_{ij}(\underline{x})\frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^j}{\partial x'^q}dx'^p dx'^q \\ &= g'_{pq}(\underline{x}')dx'^p dx'^q = ds'^2(\underline{x}'). \end{aligned}$$

Une conception dite passive de ces transformations nous permet de tenir $\underline{x}$ et $\underline{x}'$ non pas pour deux points distincts de S, mais pour les coordonnées d'un même point P dans deux repères différents. Rappelons que les propriétés géométriques sont précisément celles qui ne dépendent pas du choix des coordonnées. Il s'ensuit que $[g_{ij}(\underline{x})] = [g'_{ij}(\underline{x}')]$. $\underline{x}$ et $\underline{x}'$ étant de simples étiquettes, nous aurons aussi $[g_{ij}(\underline{x})] = [g'_{ij}(\underline{x})]$. Notons que la géométrie de S, tout en découlant de sa structure métrique, n'en demeure pas moins distincte de cette dernière. Nous sommes donc en droit de prétendre que le choix entre g_{ij} et g'_{ij} peut être assimilé à celui entre deux langages ou deux systèmes de coordonnées différents.

(b) Soient $B^i_{jkl}(\underline{x})$ et $B'^i_{jkl}(\underline{x})$ les tenseurs de courbure construits respectivement à partir de $g_{ij}(\underline{x})$ et de $g'_{ij}(\underline{x})$. Supposons que : $B^i_{jkl} \neq 0 = B'^i_{jkl}$. Il s'ensuit que $[g_{ij}(\underline{x})] \neq [g'_{ij}(\underline{x})]$; car le fait que l'un des tenseurs, mais non pas l'autre, s'annule représente une différence géométrique parce qu'indépendante du choix du repère : $[g'_{ij}(\underline{x})]$, mais non pas $[g_{ij}(\underline{x})]$, décrit un espace plat, c'est-à-dire sans courbure. Supposons plus particulièrement que $N = 2$, que $[g_{ij}(\underline{x})]$ est hyperbolique et $[g'_{ij}(\underline{x})]$ strictement euclidien. Il existe donc une première transformation : $\underline{x} \to \underline{x}' = (x'^1, x'^2)$, telle que : $\delta_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial x'_i}\frac{\partial x^q}{\partial x'^j}g'_{pq}(\underline{x}), \delta_{ij}$ étant le symbole de Kronecker. En d'autres termes : (x'^1, x'^2) sont des coordonnées cartésiennes dans le plan euclidien. Une autre transformation : $\underline{x} \to \underline{x}'' = (x''^1, x''^2)$ aboutit à : $g''_{ij}(\underline{x}'') = \frac{\partial x^p}{\partial x''^i}\frac{\partial x^q}{\partial x''^j}g_{pq}(\underline{x})$, où : $g''_{12}(\underline{x}'') = 0 = g''_{21}(\underline{x}'')$ et $g''_{11}(\underline{x}'') = g''_{22}(\underline{x}'') = \frac{1}{(x''^2)^2}$. Nous obtenons ainsi le demi-plan Δ de Poincaré. Utilisant le dictionnaire de ce dernier, nous pouvons maintenant transformer les axiomes de $[g''_{ij}(\underline{x}'')]$, c'est-à-dire de $[g_{ij}(\underline{x})]$, en des théorèmes de $[\delta_{ij}]$, c'est-à-dire de $[g'_{ij}(\underline{x})]$. Comme nous l'avons déjà expliqué, il n'est pas question dans ce cas-là d'une simple traduction, mais de la construction d'un modèle de $[g_{ij}(\underline{x})]$ dans $\mathfrak{R}^2$. Les deux géométries $[g'_{ij}(\underline{x})]$ et $[g_{ij}(\underline{x})]$ n'ont pas la même structure, puisque la première est plate, alors que la seconde possède une courbure négative constante.

Une question toutefois se pose : les situations décrites par (a) et par (b) ne seraient-elles, somme toute, incompatibles qu'en apparence ? Plus exactement : (b) est-elle vraiment inconciliable avec la thèse linguistique qui a été souvent — mais jamais systématiquement — envisagée par

Poincaré ; à savoir que deux géométries quelconques sont deux manières équivalentes de décrire les mêmes faits objectifs ?

Il est évident que (b) contredit (a) formellement ; mais il semble qu'une sorte de compatibilité — dans un sens faible mais à un prix fort — pourrait être rétablie entre (a) et (b). Pour ce faire, nous devons premièrement alléguer l'existence de certains 'champs universels' dont le seul but est de compenser la différence entre deux géométries, ou même entre deux repères distincts pour la même géométrie. Nous devons ensuite accepter le principe selon lequel toute indiscernabilité empirique entraîne une identité totale. Mais il s'agit là d'un article de foi positiviste que nous nous proposons justement de combattre. Répétons donc qu'il existe, sinon une inconsistance logique, du moins une très grande différence entre les deux cas de figure (a) et (b). Dans (a), nous avons affaire soit à une même géométrie dotée de deux systèmes de coordonnées différents, soit à un même espace S pouvant être appliqué sur lui-même d'une façon telle que $g_{ij}(\underline{x})$ se traduit en $g'_{ij}(\underline{x}')$. Par contre, il s'agit dans (b) de deux structures diamétralement opposées : dans tout repère, le tenseur de courbure de l'une des deux géométries, mais non pas celui de l'autre, s'annule identiquement. Dans le premier cas, nous avons essentiellement affaire à une seule géométrie ; dans le second cas, l'une des deux géométries — à l'exclusion de l'autre — est plate.

Grünbaum donne, dans un langage moins technique que le nôtre, un exemple similaire à (a). Il considère une table munie de deux métriques qui, tout en étant différentes, n'en donnent pas moins naissance à la même géométrie, à savoir l'euclidienne. Ceci permet à Grünbaum de déceler une grave erreur commise par Reichenbach et par Carnap : celle de confondre 'métrique' et 'géométrie', oubliant ainsi que, bien que la première détermine la seconde, la réciproque est loin d'être vraie.

> Supposons que cette seconde spécification de la géométrie G ne soit accompagnée d'aucune information concernant [le champ universel] F. Pouvons-nous alors en vérité affirmer que la métrique ne véhicule aucune information réelle concernant la surface ou la réalité physique, simplement parce qu'elle ne fournit aucune information touchant le comportement d'une règle transportée d'un point de la surface à l'autre ? La proposition suivante montre qu'une telle inférence est erronée : suivant que la courbure gaussienne est positive (géométrie sphérique), nulle (géométrie euclidienne) ou négative (géométrie hyperbolique), nous pouvons affirmer comme fait objectif concernant la surface : par tout point pris en dehors d'une géodésique, il passe — respectivement — 0, 1, ou une infinité de géodésiques ne coupant pas la géodésique donnée [*PPST*, p.97].

Nous devons avouer que la dernière assertion de Grünbaum ne laisse pas de nous intriguer ; car elle va à l'encontre de sa position philosophique, selon laquelle le caractère amorphe de l'espace physique justifie le conventionnalisme. Mais alors, comment pourrait-on simultanément maintenir que les relations entre certaines géodésiques d'une même *géométrie* constituent des états de fait objectifs ? L'absence de toute métrique intrinsèque une fois postulée, nous devons forcément tenir les propriétés des grandeurs géométriques pour de simples conventions ; et la différence entre deux géométries devient une distinction purement linguistique, c'est-à-dire une différence terminologique entre deux modes de description des mêmes faits. Par exemple : au cas où nous préférerions la géométrie hyperbolique à l'euclidienne, ce ne serait pas l'espace en tant que tel mais notre langage qui — pour ainsi dire — acquerrait une courbure négative ; car, pour répéter, l'espace ne possède aucune structure métrique. Sur ce point, il nous semble que Grünbaum aurait dû être d'accord avec Reichenbach. Grünbaum néanmoins refuse — correctement mais sans justification — d'accepter les thèses de Reichenbach affirmant l'équivalence descriptive de toutes les géométries.

Poincaré conçoit le conventionnalisme géométrique d'une façon tout autre que celle de Reichenbach, de Carnap ou de Grünbaum. Rappelons que Poincaré avait une notion *épistémologique* de la vérité selon laquelle seules les propositions décidables, ou partiellement décidables, possèdent une valeur de vérité ; c'est-à-dire que de telles propositions devraient en principe pouvoir être *reconnues* au moins comme vraies ou au moins comme fausses. Il s'ensuit que les conventions — et plus particulièrement les axiomes géométriques — sont dénués de toute valeur de vérité ; car l'espace étant en principe inobservable, ces axiomes ne sont ni vrais ni faux mais plus ou moins commodes. Le degré de commodité doit cependant être traité d'indice de vérité et possède donc une signification métaphysique des plus importantes : plus un système est commode, mieux il *reflète* l'ordre ontologique sans pour autant *dénoter* ce dernier de manière directe. C'est là la différence essentielle entre l'empirisme logique d'une part, et les positions philosophiques de Duhem et de Poincaré de l'autre. Selon ces derniers, l'unité et la simplicité d'une hypothèse corroborée ont trait non seulement à l'ingéniosité de l'esprit humain, mais aussi à certains aspects d'une réalité transcendante.

Procédons maintenant à une reconstruction rationnelle des thèses de Poincaré concernant le rapport d'une géométrie aux théories physiques qui l'incorporent. Toute géométrie décrit certaines connexions entre des objets idéalisés comme les points mathématiques, les géodésiques, les surfaces, les distances et les angles. Les hypothèses scientifiques viennent ensuite fixer les relations entre ces entités idéales d'une part, et certains objets physiques de l'autre. Les physiciens souscrivent en outre à un postulat que l'on pourrait appeler Principe Général d'Inertie, ou PGI, qui s'énonce ainsi : toutes choses étant égales par ailleurs, certains processus naturels ont lieu le long des géodésiques, c'est-à-dire de certaines configurations privilégiées, de la géométrie sous-jacente. Il s'ensuit que seules les déviations par rapport à ces trajectoires 'naturelles' réclament des explications causales, par exemple en fonction d'un champ de forces exogène.

Désignons par B_1 et B_2 deux corps matériels ou deux processus physiques quelconques. Pour $j = 1, 2$, soit B_j^0 la région que B_j devrait, selon le PGI, occuper en l'absence de toute force 'déformante' différentielle ou universelle ; où nous définissons 'différentielle' par : dépendante de la composition physique de B_j. Dénotant par P une théorie physique et par G la géométrie sous-jacente, nous pouvons décrire la relation entre P et G au moyen du schème suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} B_1 & \_ & B_1^0 & \_ & B_2^0 & \_ & B_2, \\ & | & & | & & | & \\ & P & & G & & P & \end{array}$$

$G \wedge P$ entraîne donc un rapport entre deux entités concrètes, à savoir B_1 et B_2. À l'opposé de G prise isolément, la conjonction $G \wedge P$ est en principe testable et donc falsifiable. Selon Poincaré, $G \wedge P$ possède donc une valeur de vérité bien définie. De par ce fait, nous avons l'impression d'être confrontés à un dilemme de Duhem-Quine. C'est précisément ce qui nous conduit — ou plutôt nous méconduit — à écrire notre hypothèse scientifique sous la forme $G \wedge P$; puis, au cas où $G \wedge P$ serait réfutée, à supposer que nous puissions à loisir incriminer G, ou P ou ces deux composantes à la fois. Il semblerait donc qu'il existe une parité absolue entre G et P. Ceci est pourtant bien loin d'être vrai : alors que G décrit les propriétés de l'espace-temps et pourrait en principe être rendue indépendante de toute hypothèse physique P, P présuppose la cinématique G à la fois comme langage et comme connaissance d'arrière-plan. Par conséquent, la structure d'un système scientifique s'écrit non pas sous la forme $G \wedge P$ mais $G \wedge P_G$, le suffixe G indiquant la dépendance de toute théorie physique P_G vis-à-vis d'une géométrie G prédonnée. Notons que la priorité de la géométrie par rapport à toute autre science est d'un ordre logique plutôt qu'heuristique ou épistémologique.

Dans les années 20, Einstein parut mettre question la primauté de la géométrie, dont la dépendance vis-à-vis du monde matériel paraissait inscrite dans les équations mêmes du champ gravitationnel : $R^{ab} - (1/2)g^{ab}R = -kT^{ab}$. Le second membre de ces relations décrit le contenu énergétique de l'espace-temps, tandis que le premier en représente la structure géométrique. La physique et la géométrie avaient ainsi l'air de s'imbriquer de manière indissociable.

Rappelons toutefois que les équations einsteiniennes furent d'abord proposées sous la forme : $R_{ab} = -k[T_{ab} - (1/2)g_{ab}T]$, où le second membre contient à la fois la métrique g_{ab} et le tenseur d'énergie T_{ab}. En outre, le tenseur contravariant T^{ab} est assujetti à une condition fondamentale : sa divergence doit s'annuler en tout point de l'espace-temps ; c'est-à-dire que $T^{ab}_{:b} = 0$, où toute dérivée covariante $T^{ab}_{:j}$ de T^{ab} fait intervenir les connexions affines Γ^a_{bj} et donc aussi la métrique g_{ab}.

Nous voyons ainsi qu'une géométrie (ou cinématique) étant toujours présupposée, sa primauté n'est pas remise en cause par l'approche einsteinienne. Quant aux équations du champ, elles peuvent être prises pour de simples moyens de calcul de la métrique g_{ab} : ayant fait usage de la Relativité restreinte pour fixer les valeurs de T_{ab}, nous résolvons ensuite les équations $R_{ab} = -k[T_{ab} - (1/2)g_{ab}T]$, dans le but de déterminer les g_{ab} en fonction du tenseur (T_{ij}). Toute solution satisfait automatiquement à la relation : $T^{ab}_{:b} = (-1/k)[R^{ab} - (1/2)g^{ab}]_{:b} = 0$, puisque le second membre s'annule identiquement. Il faut aussi noter qu'Einstein lui-même considérait le premier membre de $R_{ab} - (1/2)g_{ab}R = -kT_{ab}$ comme étant fait de marbre, et le second comme n'étant composé que d'un bois de mauvaise qualité. Dans 'Géométrie et expérience' — article publié en 1921 — il admit en outre que Poincaré avait en principe eu ('sub specie æterni') raison de soutenir la thèse selon laquelle nous pouvons imposer à la physique la géométrie de notre choix. Il s'ensuit — sans qu'Einstein ait eu à le dire explicitement — que même la Relativité générale peut être reformulée dans le cadre d'un espace-temps plat, c'est-à-dire de courbure nulle. Dans la mesure où la signature d'une métrique est regardée comme un trait distinctif d'une structure géométrique, cet espace-temps sera minkowskien plutôt qu'euclidien. Einstein avait donc complètement changé d'avis depuis le temps, en 1911-12, où il tenait toute hypothèse gravitationnelle minkowskienne pour impossible. Ce changement d'attitude est peut-être dû au fait qu'en 1921 'La Dynamique de l'électron' de Poincaré et sa théorie gravitationnelle covariante (au sens de Lorentz) étaient mieux connues — et surtout mieux comprises — qu'auparavant. Quoi qu'il en soit, Einstein concéda que, dans les limites fixées par la signature de la métrique, une géométrie arbitraire pouvait être *prescrite* à l'espace physique. Cette concession pourrait à son tour expliquer pourquoi des physiciens comme Eddington et Schrödinger ont par la suite émis des thèses néo-cartésiennes concernant la réalité physique : celle-ci serait entièrement constituée par des entités géométriques ; affirmer la présence d'une forme d'énergie en un point $P(\underline{x})$ de l'espace-temps reviendrait donc à prétendre que $R_{ab} - (1/2)g_{ab}R \neq 0$, c'est-à-dire qu'un certain tenseur géométrique est non-nul. À elle seule, la géométrie déterminerait donc les régions ayant un contenu physique ; les autres régions ne contiendraient que de l'énergie gravitationnelle ou géométrique, qui reste d'ailleurs difficile à définir. Bien que cette attitude soit quelque peu outrancière, elle n'en souligne pas moins la antériorité logique de la géométrie vis-à-vis des autres composantes d'un système scientifique. Logiquement parlant, nous commençons par postuler une relation de congruence, c'est-à-dire que nous choisissons initialement les fonctions $g_{ij}(\underline{x})$. Celles-ci fixent notre géométrie, nous mettant ainsi en mesure d'exprimer nos lois dans le cadre défini par la métrique, c'est-à-dire par des postulats choisis librement dès le départ.

Nos stipulations ne nous empêchent d'ailleurs pas de redéfinir la métrique $g_{ij}(\underline{x})$ de manière à rendre notre système plus unifié ou plus simple. C'est précisément ce que Poincaré nous enjoint de faire dans certaines circonstances : les habitants du disque Ω peuvent réintroduire la géométrie euclidienne en ayant recours au gradient thermique décrit par Poincaré lui-même.

Revenant à la conjonction $G \wedge P_G$, nous voyons pourquoi une modification de la géométrie G pourrait induire un changement dans tout un système scientifique, lui permettant ainsi d'éluder une falsification empirique. Par exemple, P_G étant l'assertion que la lumière se propage le long d'une géodésique, cette proposition dépendra évidemment de G. Confrontés à une réfutation expérimentale, nous pourrions décider de substituer une nouvelle géométrie G' à G ; car le système $G' \wedge P_{G'}$, n'étant pas en général *observationnellement équivalent* à $G \wedge P_G$, a des chances d'échapper à la réfutation. Désignant l'indiscernabilité empirique par '$\sim$', nous pourrions alternativement tenter de remplacer P_G par P'_G de telle manière que : Non$[(G \wedge P_G) \sim (G \wedge P'_G)]$. Nous pouvons, par exemple, supposer que la lumière est déviée d'une géodésique de G par un champ universel $\underline{F}$, dont l'adjonction transforme la loi P_G en P'_G. Les considérations ci-dessus montrent qu'à l'intérieur d'un système scientifique, la géométrie opère à la fois comme un langage et comme une théorie de fond imprégnant toute loi physique. Là où la relation $(G \wedge P_G) \sim (G' \wedge P'_{G'})$ est vraie, Poincaré maintient, par un abus de langage, que les deux géométries G et G' sont *intertraduisibles*. Ce qualificatif ne devrait en fait désigner que l'équivalence, *au niveau de l'observation*, des deux systèmes globaux $(G \wedge P_G)$ et $(G' \wedge P'_{G'})$.

Il nous faut maintenant examiner dans le détail la démonstration que Poincaré donne de la thèse suivante : étant donné deux géométries quelconques : G, G', et n'importe quelle théorie physique P_G formulée au moyen de G, il est toujours possible de construire une hypothèse $P'_{G'}$ telle que $(G \wedge P_G) \sim (G' \wedge P'_{G'})$.

Nous avons déjà remarqué qu'il est en notre pouvoir de décréter la géométrie de notre choix, non pas parce que l'espace en tant que tel est amorphe, mais parce qu'il restera toujours inaccessible à toute perception directe. Il s'ensuit que nous ne pouvons ni observer l'espace lui-même ni vérifier une relation quelconque entre les différentes régions spatiales, ni même entre celles-ci d'une part et les processus physiques de l'autre. Seuls certains rapports directs entre des objets concrets tels que B_1 et B_2 peuvent être constatés. Rappelons que les relations entre des entités idéales comme B_1^0 et B_2^0 sont décrites par la géométrie G. Quant à la théorie physique P_G, elle établit une connexion entre B_j et $B_j^0 (j = 1, 2)$. G' définira donc une nouvelle figure $B_j^{0'}$ correspondant à B_j. B_j^0 et $B_j^{0'}$ pourraient, par exemple, désigner les géodésiques respectivement déterminées par G et G'. Nous pouvons — grosso modo — dire que $P'_{G'}$ est obtenu à partir de P_G par l'addition d'un champ universel $\underline{F}$ ayant pour seul but d'opérer la transition entre B_j^0 et $B_j^{0'} (j = 1, 2)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & G & & & & & \\
 & & \multicolumn{7}{c}{\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}} & & \\
B_1 & \text{—} & B_1^0 & \text{—} & B_1^{0'} & \text{—} & B_2^{0'} & \text{—} & B_2^0 & \text{—} & B_2, \\
 & | & & | & & | & & | & & | & \\
 & P_G & & \underline{F} & & G' & & -\underline{F} & & P_G & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\overline{\qquad\qquad\qquad}} & & & & \multicolumn{3}{c}{\overline{\qquad\qquad\qquad}} & \\
 & \multicolumn{3}{c}{P'_{G'}} & & & & \multicolumn{3}{c}{P'_{G'}} & \\
\end{array}
$$

Dans ce schèma, la relation entre B_1 et B_2 reste inchangée ; d'où :

$$(G \wedge P_G) \sim (G' \wedge P'_{G'}).$$

Grünbaum a eu raison de signaler que l'introduction de la force $\underline{F}$ équivaut à une remétrisation de l'espace menant à une nouvelle géométrie G'. Il en conclut que toute description faisant intervenir un champ universel n'est qu'une métaphore dont on peut toujours se débarrasser ; c'est-à-dire que l'on peut éliminer $\underline{F}$ en utilisant les 'moyens habituels' pour calculer empiriquement les $g_{ij}(\underline{x})$. Dans Ω, nous pourrions par exemple employer une règle matérielle pour mesurer les distances entre des points voisins ;

ce qui aboutirait à la détermination d'une géométrie hyperbolique sans que nous ayons à faire mention d'aucun champ universel. Il nous semble cependant que l'approche préconisée par Grünbaum se trouve confrontée à deux difficultés ; à savoir : d'une part, à un problème de surdétermination, de l'autre, à celui d'un cercle vicieux.

Notons d'abord que le modèle Ω est sur-idéalisé. Le potentiel thermique est fabriqué expressément soit pour créer un champ universel soit pour en donner l'illusion. Mais, quoi que nous fassions, nous devons toujours corriger les résultats de nos mesures pour en éliminer certains effets dus à la présence de champs différentiels ; par exemple, les effets électromagnétiques. Grünbaum souligne — à juste titre — la nécessité pour tout physicien de tenir compte des facteurs hétérogènes ('inhomogeneous factors'). Ceux-ci sont à leur tour évalués au moyen de lois présupposant une cinématique G ; et il n'est pas du tout sûr que ce G coïncide avec la géométrie G' obtenue au moyen de certains résultats d'expérience, c'est-à-dire de résultats fondés sur G. Grünbaum propose une méthode itérative pouvant aboutir à une géométrie G_0 qui constituerait — pour ainsi dire — un point fixe de cette itération. En d'autres termes : si tout va bien, la géométrie G_0 utilisée pour rectifier certaines mesures s'avérera identique à la géométrie G_0' déterminée au moyen de ces mêmes mesures dûment corrigées. Il n'existe cependant aucun théorème nous assurant que cette méthode doit toujours réussir.

Supposons que nous soyons tout de même parvenus, d'une manière ou d'une autre, à tenir compte de tous les facteurs hétérogènes. $\underline{x}$ étant la suite $(x^1, \ldots, x^N)$ des N coordonnées d'un point $P(\underline{x})$, transportons une règle de l'origine jusqu'à $P(\underline{x})$. Une extrémité de la règle sera fixée en P, tandis que l'autre occupera une position variable dont la direction est dénotée par le suffixe α ; α est donc un paramètre continu. Soient $Q_\alpha(\underline{x} + d_\alpha\underline{x})$ un point voisin de $P(\underline{x})$ et $ds_\alpha(\underline{x})$ la longueur de $\overline{PQ}_\alpha$ telle qu'elle est mesurée par notre règle. Ayant provisoirement fixé le point $\underline{x}$, nous devons résoudre le système d'équations : $ds^2_\alpha(\underline{x}) = g_{ij}(\underline{x})d_\alpha x^i d_\alpha x^j$, où les $g_{ij}(\underline{x})$ sont des inconnues, et $ds_\alpha(\underline{x}), d_\alpha x^i, d_\alpha x^j$, des grandeurs données (Nous convenons de ne pas appliquer la convention d'Einstein aux lettres de l'alphabet grec).

Nous avons donc $N(N+1)/2$ inconnues ; mais α étant un indice continu, les équations seront en nombre infini [égal en fait à $exp(2, \aleph_0)$]. Rien ne nous garantit donc l'existence d'une solution de ce système ; c'est-à-dire que la compatibilité des équations ne peut pas être prise comme allant de soi. Par conséquent, le réquisit que notre espace doive être riemannien *et* que sa métrique puisse se déterminer par les méthodes de mesure dites usuelles est loin d'être une pure formalité ; ces conditions imposent des contraintes au comportement de nos instruments. Nous avons donc affaire non pas à une simple stipulation, mais à une conjecture scientifique.

Quant au métaphysicien réaliste, il prend la voie opposée à celle du conventionnaliste. Montrons qu'en conséquence il aura moins de problèmes à affronter que son rival. Dès le départ, le réaliste émettra une hypothèse concernant la structure de l'espace ; c'est-à-dire qu'il commencera par fixer les fonctions $g_{ij}(\underline{x})$, déterminant ainsi la géométrie $G = [g_{ij}(\underline{x})]$. Il pourra ensuite se demander si certains procédés empiriques réalisent la géométrie G. Mais s'agit-il là d'un véritable problème de physique ? Notons que le conventionnaliste doit répondre par la négative à cette question. D'après lui, les $g_{ij}(\underline{x})$ résultent d'une stipulation qui engendre la métrique d'un espace resté jusque là amorphe. Après avoir prescrit les $g_{ij}(\underline{x})$, il prend conscience d'une problématique créée tout autant par le monde physique que par une convention librement choisie : celle de savoir si la géométrie réalisée par les procédés usuels coïncide avec ou, le cas échéant, diffère de celle initialement stipulée par le physicien lui-même. Si c'est le cas, alors il n'y a aucun problème. Mais même si tel n'est pas le cas, il n'existe toujours pas de problème *physique* réclamant une solution objective ; puisque nous sommes toujours libres de changer de définition et de remétriser l'espace selon les 'méthodes de mesure habituelles'.

Le réaliste répond à ces mêmes questions d'une tout autre manière. Supposons que notre règle attribue des longueurs différentes aux deux vecteurs infinitésimaux $\underline{PQ} = (d\underline{x})$ et $\underline{PK} = (\delta\underline{x})$, où :

$$\begin{aligned}\underline{x} &= (x^1, \ldots, x^N),\\ \underline{x} + d\underline{x} &= (x^1 + dx^1, \ldots, x^N + dx^N),\\ \underline{x} + \delta\underline{x} &= (x^1 + \delta x^1, \ldots, x^N + \delta x^N)\end{aligned}$$

sont les coordonnées de P, Q, K repectivement ; mais que l'équation $g_{ij}(\underline{x})\ dx^i dx^j = g_{ij}(\underline{x})\delta x^i \delta x^j$ se trouve vérifiée. Le réaliste conclura que sa règle est sujette à des distorsions dépendantes des directions $\underline{PQ}$ et $\underline{PK}$. De même, $(\underline{z})$ et $(\underline{z} + d\underline{z})$ étant les coordonnées respectives de U et de V, les deux intervalles $\underline{PQ}$ et $\underline{UV}$ pourraient se voir assigner — par nos instruments de mesure — des distances différentes alors que $g_{ij}(\underline{x})dx^i dx^j = g_{ij}(\underline{z})dz^i dz^j$ (ou l'inverse). Le réaliste pourrait alors conjecturer que, durant son transport de P vers U, la règle a été déformée par un champ dont la grandeur peut être théoriquement évaluée. Il lui reste d'autres solutions. Rien ne l'empêche, par exemple, de conclure que son hypothèse initiale touchant la structure de l'espace-temps est erronée ; il pourrait en conséquence changer les valeurs des

$g_{ij}(\underline{x})$ ou même recourir à une géométrie purement affine, c'est-à-dire supra-riemannienne.

À première vue, la différence entre le réalisme et le conventionnalisme semble être de nature purement verbale : ce qui, pour le conventionnaliste, passe pour un simple changement de stipulation, est interprété par le réaliste comme la réfutation d'une hypothèse suivie de la mise en avant d'une nouvelle géométrie. Il n'en existe pas moins un antagonisme profond entre ces deux méthodologies ; un antagonisme qui, en fin de compte, tourne à l'avantage du réalisme structurel.

Grünbaum maintient — à juste titre d'ailleurs — que le conventionnalisme explique un 'fait' dont le réalisme ne tient pas compte ; à savoir : l'indiscernabilité observationnelle de deux géométries arbitraires. L'espace étant, selon le conventionnalisme, métriquement amorphe, il s'ensuit qu'aucune expérience ne peut départager deux géométries physiques.

Nous ne contesterons pas la validité de cet argument ; mais le statut du prétendu fait allégué par Grünbaum soulève un problème épineux. Il nous semble que ce 'fait' possède un caractère logique plutôt qu'empirique. Pour toute proposition Y, denotons par $C[Y]$ l'ensemble de toutes les conséquences logiques de Y. $C[Y]$ est donc une classe infinie. Posons : $Z \equiv G \wedge P_G$ et $Z' \equiv G' \wedge P'_{G'}$ (voir ci-dessus).

Nous pouvons supposer qu'en 1902, c'est-à-dire la date de publication de *La Science et l'hypothèse,* les savants étaient d'accord quant à la définition des propositions observationnelles, et ce indépendemment des valeurs de vérité de ces propositions. Soit E la classe de tous les énoncés de base. Sans employer cette terminologie ensembliste, Poincaré avait effectivement démontré l'équation $C[Z] \cap E = C[Z'] \cap E$. Cette relation exprime un fait de nature, non pas empirique, mais logique : il est vrai que E est en partie déterminée par les propriétés de notre appareil perceptif ; mais aucun résultat expérimental — qui serait, par définition, exprimé par un élément de E — ne peut falsifier ni confirmer l'équation $C[Z] \cap E = C[Z'] \cap E$; car celle-ci reste valable quelles que soient les valeurs de vérité des membres de E. Par conséquent, la thèse du caractère amorphe de l'espace, qui est censée expliquer $C[Z] \cap E = C[Z'] \cap E$, ne peut être ni corroborée ni infirmée par l'expérience ; elle est donc d'un ordre soit logique soit métaphysique ; ce qui d'ailleurs ne constitue pas une critique de cette thèse en tant que telle. L'équation $C[Z] \cap E = C[Z'] \cap E$ n'acquiert cependant une signification *philosophique* qu'à la lumière d'un principe positiviste ; à savoir que là où il n'y a aucune différence détectable, il n'existe aucune différence objective du tout. Seulement après avoir accepté un tel principe, qui est gratuit et donc métaphysique, sommes-nous en droit d'affirmer que, G étant empiriquement indiscernable de G', la différence entre ces deux géométries est de nature linguistique.

Ce point de vue positiviste nous paraît néanmoins très douteux. Que le réalisme géométrique soit une position métaphysique ne fait aucun doute ; elle nous dit que l'espace possède une métrique intrinsèque et que celle-ci, correctement cernée, devrait s'intégrer dans un système scientifique commode et empiriquement adéquat. Ajoutons que cette commodité n'est pas de nature pragmatique ; elle reste étroitement liée au degré d'unité d'une hypothèse, que Poincaré tient pour un indice de vérisimilitude. Un réalisme qui confère un statut objectif à ce degré de 'compacité organique' est irréfutable et possède indéniablement un aspect théologique. Cette théologie est toutefois compatible avec l'athéisme le plus radical ; elle maintient que la Nature — parfois nommée Dieu — concilie la plus grande variété des phénomènes avec un maximum d'économie et d'unité des principes fondamentaux (thèse leibnizienne).

Nous nous proposons de faire pencher la balance légèrement du côté du réalisme structurel. Einstein, nous l'avons déjà vu, a implicitement admis que la Relativité générale pouvait être reformulée, sans perte de contenu empirique, dans le cadre d'un espace-temps sans courbure. Ceci suffit pour montrer que l'expérience seule n'est pas à même de départager les deux cinématiques : classique et einsteinienne. Les savants ont pourtant la conviction profonde que *l'artifice* d'une métrique plate détruit le couplage étroit entre la gravitation et la cinématique, c'est-à-dire la géométrie de l'espace-temps. En d'autres termes : dans un espace sans courbure, le fait qu'au même point d'un champ gravitationnel tous les corps subissent la même accélération paraît résulter d'une sorte de conspiration. Il ne s'agit donc pas de considérations ayant trait à la plus grande facilité de certains calculs comparés à d'autres ; *a fortiori,* il ne s'agit pas d'une simple différence linguistique entre deux formulations d'une même hypothèse. L'une des deux formulations, par opposition à l'autre, est censée révéler un *aspect réel* de l'univers physique ; et les raisons mises en avant par les scientifiques sont indépendantes de la question de savoir si la gravitation est, ou n'est pas, un véritable champ universel.

Notre façon de défendre le réalisme, qui repose sur des présupposés ontologiques, est naturellement loin d'être décisive. Nous devons néanmoins nous rappeler que, de par la nature du problème, toutes les positions rivales sont métaphysiques et donc empiriquement irréfutables.

Il nous reste à montrer, à la suite d'une reconstruction rationnelle, que Poincaré lui-même était réaliste dans le sens expliqué ci-dessus. Répétons que sa thèse concernant l'absence d'une *métrique directement* *calculable* relève de l'épistémologie et non pas de la métaphysique. C'est Poincaré qui a introduit en physique la notion, sinon la terminologie, des champs universels. Ceux-ci ne constituent pas pour lui de simples métaphores ; ou plutôt, ils ne sont pas plus 'métaphoriques' que d'autres concepts comme ceux de 'force', 'd'éther' ou 'd'électron'. En outre, il attribuait à certaines métaphores un contenu objectif considérable. Notons que la composante P_G de la conjonction $G \wedge P_G$ pourrait déjà postuler une force universelle. La remétrisation de l'espace aboutissant à l'équivalence $(G \wedge P_G) \sim (G' \wedge P'_{G'})$, c'est-à-dire l'introduction d'une nouvelle force, pourrait bien annuler celle déjà présente dans P_G. La nouvelle physique $P'_{G'}$ ne contiendrait alors aucun champ universel ; et G' serait par conséquent une géométrie basée sur les méthodes de congruence usuelles. Quoi qu'il en soit : ayant émis un principe strictement *méthodologique* concernant le choix des g_{ij}, c'est-à-dire d'une métrique, Poincaré gardait les mains libres pour avancer une thèse réaliste : dans la mesure où G rend le système $Z \equiv (G \wedge P_G)$ maximalement commode et où Z prévoit tout un ensemble de faits empiriques, il est peu probable que cette commodité soit un pur effet du hasard. Usant d'une terminologie due à Pierre Duhem, nous pouvons alors affirmer que Z se rapproche d'une classification naturelle ; et puisqu'ils font partie intégrante de Z, la géométrie G et son champ universel $\underline{F}$ reflètent, eux aussi, des relations vraies entre des entités réelles. Une telle conclusion ne pouvait certainement pas être tirée par Reichenbach, pour lequel G n'est qu'un mode — parmi bien d'autres — de description des faits empiriques. Poincaré écrit :

> On dira que la science n'est qu'une classification et qu'une classification ne peut être vraie mais commode. Mais il est vrai qu'elle est commode, il est vrai qu'elle l'est non seulement pour moi, mais pour tous les hommes ; il est vrai qu'elle restera commode pour nos descendants ; il est vrai enfin que cela ne peut pas être par hasard. (*VS*, p. 184).

Nous voyons donc combien la philosophie de Poincaré se rapproche d'un réalisme structurel intégral. Répétons-le : selon cette position, l'espace possède une métrique que les savants peuvent se proposer de capturer. Le réaliste se sentira donc en droit d'affirmer qu'une géométrie G cerne d'autant mieux la structure véritable de l'espace physique qu'elle s'avère capable de fournir un cadre cinématique cohérent à une théorie unifiée Z. Z devra en outre subsumer tout un ensemble de faits empiriques et en prévoir d'autres d'une manière non-ad-hoc. Étant donné son concept épistémologique de la vérité, Poincaré dénie à G, comme d'ailleurs à toute convention prise isolément, toute valeur de vérité.

Ses verdicts méthodologiques n'en sont pas moins en parallèle avec ceux du réalisme le plus classique. Poincaré soutient que Z, tout autant que ses composantes et la manière dont elles s'enchaînent, traduit des relations vraies d'un monde transcendant ; et la géométrie sous-tendant Z participe de cette propriété. Dans la mesure où il prétend que, l'espace étant amorphe, la géométrie doit être dictée par le physicien lui-même, le conventionnaliste s'ôte le droit d'émettre un tel jugement épistémologique ; puisque, selon lui, il n'existe aucune structure que la géométrie puisse véritablement décrire plutôt qu'imposer à un univers malléable.

Nous avons déjà admis que les écrits de Poincaré touchant l'alternative réalisme-ou-conventionnalisme n'ont pas toujours été consistants. Mais la teneur de toute son épistémologie est que la commodité n'est pas une qualité subjective conférée après coup à une hypothèse empiriquement adéquate ; elle est au contraire une marque de vérisimilitude tout à fait objective ; et le degré de commodité d'une géométrie ne fait nullement exception à cette règle. Malgré ce parallèle indéniable entre la méthodologie réaliste classique d'une part, et la position de Poincaré de l'autre, la première s'avère plus cohérente que la seconde. Soutenant que toutes les propositions sont en droit vraies ou fausses, le réaliste peut justifier l'emploi systématique d'une logique dont la fonction principale est de transmettre la vérité 'vers le bas', c'est-à-dire des prémisses aux conclusions. Même les conventionnalistes qui inclinent vers le réalisme intégral — tels Duhem et Poincaré — ne peuvent pas en faire autant. Conscient de cette lacune dans sa position philosophique, Duhem invoqua un Dieu décrétant que l'esprit humain obéit aux canons de la logique classique et surtout au principe de non-contradiction. Quant à Poincaré, bien qu'il ait eu de fortes tendances intuitionnistes dans sa philosophie de la logique, on a l'impression très nette qu'il n'était pas prêt à consentir les sacrifices exigés par une approche non-classique des fondements de la connaissance. Il poursuivit ses recherches — en mathématiques comme en physique — dans le cadre de la logique traditionnelle, tout en espérant que son constructivisme ne serait qu'un simple commentaire sur une pratique restée, dans son ensemble, très classique.

Abréviations utilisées dans le texte.

CST	Conventionnalisme Sémantique Trivial ;
GES	Géométrie Euclidienne Synthétique ;
GHS	Géométrie Hyperbolique Synthétique ;
PGI	Principe Général d'Inertie ;
PPST	*Philosophical Problems of Space and Time* (Œuvre d'Adolf Grünbaum ; voir Bibliographie) ;

SH	*La Science et l'hypothèse* (Œuvre d'Henri Poincaré ; voir Bibliographie) ;
T.M.	Transformation de Möbius ;
VS	*La Valeur de la science* (Œuvre d'Henri Poincaré ; voir Bibliographie).

Bibliographie

ALBERT, H.

1975 *Traktat über kritische Vernunft* (Mohr-Siebeck, Tübingen).

DUHEM, P.

1914 La Théorie physique : son objet, sa structure (Marcel Rivière, Paris).

EDDINGTON, A. S.

1923 *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge).

EINSTEIN, A.

1934 Geometrie und Erfahrung, dans *Mein Weltbild* (Ullstein, Frankfurt am Main).

1949 Autobiographical Notes, dans Schilpp, P. A. (ed.) : *Einstein : Philosopher-Scientist* (Tudor, New York).

1950 *Out of my Later Years* (Adams & Co., New Jersey).

GRÜNBAUM, A.

1973 Philosophical Problems of Space and Time (PPST), (Reidel, Dordrecht/Boston).

LAKATOS, I.

1975 *Proofs and Refutations* (Cambridge University Press, Cambridge).

1976 'History of Science and its Rational Reconstruction' dans Howson, C. (ed.) : *Method and Appraisal in the Physical Sciences* (Cambridge University Press, Cambridge).

POINCARÉ, H.

1902 *La Science et l'hypothèse* (Flammarion, Paris).

1906 *La Valeur de la science* (Flammarion, Paris).

1916 *Œuvres*, Volume 2 (Gauthiers-Villars, Paris).

POPPER, K. R.

1934 *Logik der Forschung* (Springer, Wien).

REICHENBACH, H.

1928 *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre* (Walter de Gruyter, Berlin).

SCHRÖDINGER, E.

1950 *Space-Time Structure* (Cambridge University Press, Cambridge).

STILLWELL, J.

1985 *Henri Poincaré : Papers on Fuchsian Functions* (Springer, New York).

ZAHAR, E. G.

1987 'Les Fondements des Mathématiques d'après Poincaré et Russell' (*Fundamenta Scientiæ* 8, Pergamon, Paris).

1989 *Einstein's Revolution, a Study in Heuristic* (Open Court, La Salle, Illinois).