Poincaré's early use of *Analysis situs* in nonlinear differential equation: Variations around the theme of Kronecker's integral

Jean Mawhin
Université de Louvain, Institut mathématique

Abstract. We analyze the chronological and conceptual evolution of the early use by Poincaré of *Analysis situs* tools, and in particular of *Kronecker's index* in his qualitative theory of nonlinear differential equations. We show in this way that prior to his famous series of subsequent papers on *Analysis situs,* Poincaré had already obtained or anticipated many important topological results.

Résumé. Nous analysons l'évolution chronologique et conceptuelle des premières apparitions d'outils d'*Analysis situs,* et en particuluer de l'*indice de Kronecker,* dans la théorie qualitative des équations différentielles de Poincaré. Nous montrons ainsi que, bien avant sa fameuse série de mémoires sur l'*Analysis situs,* Poincaré avait déjà obtenu ou anticipé de nombreux résultats importants de topologie.

Philosophia Scientiæ, 4 (1), 2000, 103–143.

1. Introduction

Henri Poincaré is considered by many mathematicians and historians of mathematics as the father of algebraic topology and it is commonly admitted that he created this branch as an autonomous disciplin of mathematics in a period of ten years starting in 1895, through a series of five substantial papers on *Analysis situs.* We can quote for example Jacques Hadamard [Hadamard, 1912]:

> Ses travaux sur les équations différentielles [...] devaient, tout d'abord, l'amener logiquement à perfectionner la *géométrie de situation.* [...] Il en est, en un sens, le premier fondateur, non qu'il ait été le premier à l'avoir abordée ; mais seul, il a indiqué exactement les éléments qu'on doit se donner pour définir, à cet égard, une figure : ces éléments avaient été énumérés incomplètement avant lui,

or Paul Alexandroff and Heinz Hopf [Alexandroff-Hopf, 1935]:

> Poincaré and Cantor dürfen wir als die eigentlichen und *unmittelbaren* Begründer der Topologie ansehen,

or Solomon Lefschetz [Lefschetz, 1930]:

> Perhaps on no branch of Mathematics did Poincaré lay his stamp more indelibly than on Topology,

or Paul Alexandroff [Alexandroff, 1972]:

> To the question of what is Poincaré's relationship to topology, one can reply in a single sentence: he created it,

or Marston Morse [Morse, 1967]:

> It is no mere coincidence that Poincaré was the first to comprehend fully the possibilities of analysis in the large, and at the same time was the father of modern topology.

Those decisive contributions to *Analysis situs* have been analyzed in a detailed way by Dieudonné [Dieudonné, 1989,1994] and Volkert [Volkert, 1994, 1996a].

However, this interest of Poincaré for *Analysis situs* has started at the very beginning of his career, as he mentions himself is his famous *Analyse de ses travaux scientifiques* written in 1901 and postumously published in 1921 [Poincaré, 1921]:

> Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis situs. J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de deux variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice. Enfin j'entrevoyais dans l'Analysis Situs un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné.

This fact is also emphasized by Alexandroff [Alexandroff, 1972]:

> The most remarkable and the earliest developed parts of homotopic topology there belong to the theory of vector (and polyvector) fields and their singularities, which is closely connected with the theory of fixed points of continuous mappings. The founder of this theory was, once again, Poincaré himself; back in the eighties he established the first relevant definitions and facts, in particular the fundamental concept of the singularity index of a vector field, in his works on the qualitative theory of differential equations, that is, before the creation of his proper topological tools.

Those qualitative studies on nonlinear differential equations, where Poincaré has been first confronted with questions of *Analysis situs,* have remained a constant stimulus in his topological researches, even if this motivation is only briefly recalled in the introduction of his first paper on *Analysis situs* [Poincaré, 1895]:

> D'autre part, dans une série de Mémoires insérés dans le *Journal de Liouville,* et intitulés : *Sur les courbes définies par les équations différentielles,* j'ai employé l'*Analysis Situs* ordinaire à trois dimensions à l'étude des équations différentielles. Les mêmes recherches ont été poursuivies par M. Walther Dyck. On voit aisément que l'*Analysis Situs* généralisée permettrait de traiter de même les équations d'ordre supérieur et, en particulier, celles de la Mécanique céleste.

After the series of memoirs on *Analysis situs,* Poincaré still uses some algebraic topological arguments in problems related to differential equations in his study of the geodesics on convex surfaces [Poincaré, 1905] et in his last geometric theorem [Poincaré, 1912].

The most important ingredient in Poincaré's contributions dealing with *Analysis situs* and prior to his series of memoirs on this subject starting in 1895 is undoubtly *Kronecker's characteristic (or index, or integral)* [Kronecker, 1869, 1878], that Poincaré may have learned, in dimension 2, from his mentor Hermite, whose work on Sturm theorem was instrumental in inspiring Kronecker's research. As noticed by Johnson [Johnson, 1981], this remarkable tool, essentially through its use by Poincaré, exerced also a great influence upon Hadamard [Hadamard, 1910] and Brouwer [Brouwer, 1911, 1912] in their pioneering work on algebraic topology:

> A month after submitting the paper on mappings of spheres, Brouwer produced a paper 'On continuous vector distributions on surfaces' (1909) for communication to the Dutch Academy (27 March 1909), the first of three on vector fields. His work in many ways parallels the great contributions of Poincaré on vector fields related to the qualitative theory of differential equations, but a letter to Hadamard of 24 December 1909 shows that he was not at first aware of Poincaré's 'Mémoires'. In addition, while his investigations were initially independent of the great Frenchman's, they were also more general, since his outlook was more fully topological. [...]
>
> Brouwer [...] asked the advice of the distinguished French mathematician Jacques Hadamard. [...] In the only letter of Hadamard to Brouwer which remains to us, probably written near the beginning of December 1909, he suggests a way of deriving the fixed point theorem from the singularity theory. [...] However, what is really significant in this exchange of letters is that Hadamard refers to Poincaré's Mémoires on the curves defined by differential equations. Upon reading these, Brouwer started to grapple with the concept of index for vector fields. In turn, this led him to his most important topological tool: the degree of a continuous mapping. [...]
>
> During the 1880's in a set of ground breaking 'Mémoires' on the qualitative theory of differential equations, Poincaré put the Cauchy index and Kronecker characteristic to good use in determining the distribution of singular points of differential equations and their corresponding vector fields. As mentioned early, Poincaré's ideas were an immediate influence on Brouwer as he was formulating this notion of mapping degree. [...]
>
> Jacques Hadamard perceived the great significance of the Cauchy-Kronecker index. Not only did he inform Brouwer of Poincaré's use of it, but also in 1910 he wrote a masterful exposition of the

> theory related to the concept with an emphasis on its powerful application. [...] Hadamard's note is markedly similar to Brouwer's classic paper defining the degree of a mapping (1911), which appeared a short time after the 'Note.' [...] The two men met in Paris around new year 1910 and discussed the ideas that are basic to both works.

H. Hopf also insists on the influence of Kronecker's index in the development of his researches [Hopf, 33]:

> Im Jahre 1920 [...] Erhard Schmidt ermutigte mich, weiter Topologie zu treiben; ich las einige Abhandlungen von Brouwer — das war eine saure Arbeit — sowie den Artikel von Hadamard *"Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker";* [...] der Erfolg waren einige Publikationen: *"Ueber die Curvatura integra gesschlossener Hyperflächen", "Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten"* und *"Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten".* [...] Zu der erwähnten Arbeit über die Vektorfelder möchte ich hier folgendes bemerken: Ihr Haupsatz *"Die Summe der Indizes der Singularitäten eines Vektorfeldes in einer geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit, welches nur endlich viele Singularitäten besitz, ist eine Invariante der Mannigfaltigkeit, nämlich ihre Eulersche Characteristik"* findet sich, ohne den Zusatz über die Charakteristik, bereits in der oben zitierten Note von Hadamard — jedoch ohne Beweis. [...] Der erste Beweis dürfte von Lefschetz stammen (1925). Mein Beweis (1925) beruht auf einem ziemlich schwerfälligen Induktionschluss — ich warne Neugierige. Heute erscheint mir am einfaschsten ein Beweis mit Hilfe meiner Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel (1928).

We analyze here the chronological and conceptual evolution of the use of this fundamental tool by Poincaré in his early applications of *Analysis situs* in differential equations. The reader can consult with benefit [Volkert, 1996b] for the role of *Analysis situs* in other aspects of Poincaré's work.

2. November 1881: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I

The results of this memoir were announced on April 24 1880 [Poincaré, 1880] and publication took place in November 1881 [Poincaré, 1881a]. In this first memoir of a famous series, which is analyzed in [Chabert-Dahan Dalmedico, 1992, Gillain, 1991, Sabina de Lis, 1996], Poincaré explains the viewpoint he will follow: like in function theory, the qualitative approach must preceed the quantitative one:

> L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :
>
> 1. Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;
>
> 2. Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.
>
> Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation.

It is interesting to notice that Poincaré already mentions Sturm's theorem for the number of real roots of an algebraic equation. Sturm appears like a forerunner of both the qualitative theory of ordinary differential equations (for linear equations, through his work with Liouville), and of the index theory (through his study of the number of real roots of a polynomial). Needless to say that Hermite's influence can be seen there: many aspects of Sturm theorem on the real roots of equations are treated in Hermite's lectures at the Ecole Polytechnique and the Sorbonne [Hermite, 1883]. The reader can consult the references [Mignosi, 1925; Runge, 1898; Sinaceur, 1988, 1991, 1992] for the history and developments of Sturm theorem.

In this memoir, Poincaré deals with *planar autonomous systems* of the form

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}, \tag{1}$$

or, equivalently

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{2}$$

where X and Y are polynomials. By projecting gnomonically, i.e. with the centre of the sphere as the center of perspective, the plan to the sphere (taken as a model of the projective plane, the doubly covering sphere of the projective plane), he reduces the study of this planar system to the study of a system on the 2-sphere. Poincaré's first interest is in analyzing the *singular points* of (2), i.e. of the solutions of the system

$$X(x,y) = 0, Y(x,y) = 0. \tag{3}$$

One of the first topological concepts freely used by Poincaré is a statement known today as *Jordan's curve theorem: A simple closed curve C* *(i.e. a homeomorphic image of a circle) in the Euclidian plane separates the plane into two open connected sets with C as their common boundary. Exactly one of these open connected sets (the "inner region") is bounded.* [Jordan, 1893].

> Un cycle sphérique divise la surface de la sphère en deux régions que nous appellerons, l'une, l'intérieur du cycle ; l'autre, l'extérieur ; on ne peut passer de l'une à l'autre sans couper le cycle.[. . .]
>
> Cela posé, nous allons introduire une considération nouvelle qui nous rendra les plus grands services. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'intérieur du cycle.
>
> Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, nous dirons qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle à sa gauche ; si au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur à sa droite.

Then, Poincaré introduces for the first time the concept of the *index of a cycle:*

> Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit
>
> $$i = \frac{h-k}{2};$$
>
> le nombre i s'appellera l'*indice* du cycle.

This definition is closely related to the concept of *index* introduced by Cauchy between 1831 and 1837, and widely teached by Hermite at the Ecole Polytechnique and the Sorbonne (see e.g. [Hermite, 1883]). As nicely summarized by Johnson [Johnson, 1981] (see also [Siegberg, 1981]):

> Augustin Louis Cauchy was the first mathematician to take up the idea of winding number in an explicit way. The concept of index or characteristic is implicit in Gauss's first, third and fourth proof of the fundamental theorem of algebra.
>
> In a pair of papers which appeared in 1836, Charles Sturm and Joseph Liouville put forward other proofs of Cauchy's index relation. [. . .] Then in a subsequent paper of Cauchy there is a development of the notion of index which is independent of residues

> and integrals (1837) and for pairs of continuous real functions for their simultaneous solutions within a given contour.
>
> Over thirty years later, Leopold Kronecker, in a brilliant paper (1869) generalised Cauchy's index from two to n dimensions and then drew out a wide diversity of applications to topics central to nineteenth-century mathematics. [...] Kronecker took his cue from an integral which Gauss had used in potential theory. [...] In a second paper of 1869, he links a special case of characteristic with Gauss' s curvatura integra.[...] Some years later Walter von Dyck then tried to prove the value of Kronecker's characteristic further by taking it into the relatively new domain of analysis situs.

Recall that if f is a rational real function and $[a,b]$ an interval, its *Cauchy index* $\mathcal{I}_a^b(f)$ on $[a,b]$ is defined by

$$\mathcal{I}_a^b(f) = \#\{t \in [a,b] : f(t-) = -\infty, f(t+) = +\infty\}$$
$$-\#\{t \in [a,b] : f(t-) = +\infty, f(t+) = -\infty\}.$$

Thus, if $(x(t), y(t)),\ t \in [a,b]$ with $x(a) = x(b), y(a) = y(b)$ is a parametric representation of the cycle $\mathcal{C}$ with the positive orientation, Poincaré defines the *index of the cycle* by

$$i(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\mathcal{I}_a^b\left(\frac{Y(x(\cdot), y(\cdot))}{X(x(\cdot), y(\cdot))}\right).$$

Of course it is not difficult to translate this expression into the usual integral form

$$i(\mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{YdX - XdY}{X^2 + Y^2},$$

but this form is not given or used by Poincaré here. Then Poincaré gives the *additivity property* of the index *(if a cycle is divided into two cycles, the index on the original one is the sum of the indices of the two cycles obtained by division):*

> Si l'on joint deux points A et C d'un cycle $ABCDA$ par un arc AMC situé tout entier à l'intérieur du cycle, le cycle $ABCDA$ se trouve décomposé en deux cycles $ABCMA$, $AMCDA$, et l'on a évidemment
>
> $$\text{ind.}ABCDA = \text{ind.}ABCMA + \text{ind.}AMCDA,$$
>
> de sorte que l'on peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent,

and the contraposed version of the *existence property* of a singular point inside a cycle when the corresponding index is not zero:

> Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice 0.

Poincaré goes on in distinguishing various types of singular points through their local indices. He classifies those singular points according to the nature of the eigenvalues of the jacobian matrix of the vector field at the singular point, and he introduces the now standard terminology of *nodes* (noeuds), *foci* (foyers), *saddle points* (cols) and *centers* (centres). Maybe his training as a Mining Engineer has been influential in the choice of the terminology.

> Si un cycle infiniment petit contient à son intérieur un point singulier, son indice est égal à ± 1. Il est égal à $+1$ si le point singulier est un col ; à -1 si le point singulier est un noeud ou un foyer.

Thus, *the local index of a saddle point is equal to one and the one of a node to minus one.* Poincaré then raises the important problem of the *computation of the index of a cycle in terms of the number and nature of singular points.*

> *Calculer l'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères.* Soit N le nombre de noeuds, F le nombre de foyers, C le nombre des cols contenus à l'intérieur du cycle. [...] L'indice du cycle donné sera donc $-(N+F-C)$.
>
> *Calculer l'indice de l'équateur.* Soit $2N'$ le nombre des noeuds, $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur. [...]
>
> $$i = N' - C' - 1.$$

With those results, Poincaré can prove the famous *formula $N+F-C=2$ relating the total number N of nodes, F of focus points and C of saddle points on the sphere:*

> Le nombre total des noeuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus 2.

This if of course, for the case of the sphere and of polynomial vector fields, a first statement of the famous *Poincaré-Hopf theorem* [Hopf, 1926] whose modern general statement asserts that *the sum of the indices of the singularities of a vector field over a compact orientable manifold is equal to its Euler characteristic.*

In particular, S^2 *does not admit a nonzero continuous tangent vector field,* a result extended in 1912 by Brouwer [Brouwer, 1912] in the form that S^n *admits a nonzero continuous tangent vector field if and only if* n *is odd,* and which is now called the *Poincaré-Brouwer theorem.*

3. August 1882: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle II

The results of this second part of the memoir were also announced on April 24 1880 [Poincaré, 1880], and published in August 1882 [Poincaré, 1882b].

An important part of the memoir is devoted to the study of *limit cycles,* i.e. closed orbits (cycles) which are attractors for t going to $+\infty$ or $-\infty$). So neighbouring orbits spiral to or from a limit cycle when $t \to +\infty$.

From the viewpoint of *Analysis situs,* this memoir essentially contains the following theorem:

> A l'intérieur et à l'extérieur d'un cycle limite quelconque, il y a toujours au moins un foyer ou un noeud.

This is a consequence of the computation of the index of the limit cycle, namely -1, and of the previous result on the index of a focus point or of a node.

One can also notice that Jordan's theorem is an essential ingredient in the proof of the so-called *Poincaré-Bendixson theorem* (completed by I. Bendixson [Bendixson, 1901]), which characterizes the nature of the attractors of a planar autonomous system.

4. July 1883: Sur les fonctions Θ.

In this memoir submitted on July 20 1883 to the French Mathematical Society and published in 1883 [Poincaré, 1883b], Poincaré considers a system of p functions Θ of p variables, having all the same multipliers, and determines the number of essentially distinct solutions of the equations obtained by equating those functions to zero. According to Hadamard [Hadamard, 1912]:

> C'est à cette occasion que Poincaré utilise, pour la première fois, le théorème par lequel Kronecker venait d'exprimer le nombre des solutions d'un système donné, admirable instrument qui semblait avoir été créé en vue d'un tel ouvrier, et que nous retrouverons à tant de reprises dans son oeuvre.

Of course "first time" only refers to the use of Kronecker index in dimension strictly greater than two.

This paper is not related to the qualitative theory of differential equations but is of primary importance for our purpose, because Poincaré mentions here for the first time *Kronecker's extension of Cauchy's index* to an arbitrary number of dimensions.

> Pour le démontrer, on se sert de la formule de Cauchy qui sert à calculer le nombre des racines d'une équation qui sont intérieures à un contour donné, et l'on applique cette formule au parallélogramme des périodes. Depuis, M. Kronecker a généralisé la formule de Cauchy de manière à exprimer sous forme d'une intégrale multiple définie le nombre des solutions communes à un système de n équations à n inconnues, lorsqu'on assujettit ces solutions à être comprises dans un domaine donné.

Notice that Hermite, in a letter of November 27 1880 [Dugac, 1986] had recommended his pupil to read all Kronecker's papers published in the *Monatsberichte*:

> Permettez-moi de vous engager à prendre surtout connaissance des travaux de Mr Kronecker qui m'a infiniment dépassé dans ce genre de recherches [...]. Mais il faut lire dans ce même recueil des *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin, et sans en rien omettre, tout ce qui est sorti de la plume du grand géomètre,

and Kronecker himself, in a letter of February 14 1883 [Dugac, 1989], had attracted Poincaré's attention to this generalization, after reading a note of the young Frenchman published in the Comptes-Rendus of January 22 1883, and devoted to complex functions of two variables [Poincaré, 1883a]:

> Ayant lu votre dernière communication dans les Comptes Rendus je désirerais appeler votre attention à un mémoire que j'ai publié en 1869 et que je prends la liberté de vous envoyer [...]. J'y ai développé la généralisation de cet important théorème de Cauchy, qui me semble contenir le vrai fondement de la théorie des fonctions. Il est très remarquable qu'il existe un théorème tout à fait analogue pour un nombre quelconque de variables.

Here is Poincaré's brilliant use of Kronecker's integral:

> En effet, considérons d'une manière générale l'intégrale de M. Kronecker, appliquée à un système d'équations quelconque et à un domaine quelconque, et supposons que ces équations dépendent de certains paramètres variables. L'intégrale ne pourra cesser d'être une fonction continue de ces paramètres que si l'expression sous le signe $\int$ devient infinie pour un point de la périphérie du domaine considéré. Or cela ne peut arriver que si une des solutions du système d'équations données se trouve sur cette périphérie. Mais notre intégrale représente un nombre positif essentiellement entier, de sorte que, toutes les fois qu'elle sera une fonction continue des paramètres envisagés, elle sera *constante.* Ainsi l'intégrale

> ne peut varier que si une solution entre dans le domaine ou si elle en sort [Poincaré 1883b].

Thus Poincaré shows that *Kronecker's integral does not change if the equations and the surface are continuously deformed in such a way that no solution occurs on the surface during the deformation.* Although Poincaré does not find necessary to explicit Kronecker's integral, his reasoning clearly shows that he is well aware of the *invariance of Kronecker's index with respect to a homotopy,* and has grasped its importance in existence theorem. The word *homotopy* will be introduced in [Dehn-Heegard, 1907]. Poincaré uses this invariance property to reduce the computation of a given index to a simpler one. It is fair to mention here that, in a paper published in 1878 [Kronecker, 1878], that Poincaré does not quote, Kronecker himself has stated the property:

> Die Characteristik nur dann eine Veränderung erfahren kann, wenn bei der Variation ein System von Funktionen passirt wird, welche sämmtlich für eines und dasselbe Werthsytem $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ verschwinden,

and used this invariance of its characteristic under some deformations of the functions in a proof of an existence result containing as a special case the fundamental theorem of algebra.

5. February 1884: Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps

The results of this paper were announced on July 23 1883 [Poincaré, 1883c], and published in February 1884 [Poincaré, 1884a]. From the viewpoint of *Analysis situs,* the interesting part is the following one:

> M. Kronecker a présenté à l'Académie de Berlin, en 1869, un Mémoire sur les fonctions de plusieurs variables ; on y trouve un important théorème d'où il est aisé de déduire le résultat suivant :
>
> Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n fonctions continues de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; la variable x_i est assujettie à varier entre les limites $+a_i$ et $-a_i$. Supposons que, pour $x_i = a_i$, ξ_i soit constamment positif, et pour $x_i = -a_i$ constamment négatif ; je dis qu'il existera un système de valeurs des x pour lequel tous les ξ s'annuleront.

This is Poincaré's first paper on a topics that he will constantly consider till the end of his life, the *periodic solutions of differential equations,* and in particular the equations of celestial mechanics. The initial conditions of a periodic solutions of a differential system in $\mathbb{R}^n$ must satisfy a system of n equations in n unknowns (we say to-day that they must be the fixed points of the *Poincaré's operator).* Poincaré then shows that the assumptions of an n-dimensional generalization of the intermediate value theorem are satisfied.

The version in the *Bulletin astronomique* [Poincaré, 1884a] is only slightly more explicit:

> M. Kronecker a donné, dans les *Monatsberichte* (1869), une formule qui donne le nombre des solutions de n équations à n inconnues qui satisfont à des inégalités données. Nous ferons l'application suivante de cette formule :
>
> *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n fonctions continues des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que X_i soit toujours positif pour $x_i = a_i$ et toujours négatif pour $x_i = -a_i$. Il existera au moins un système de valeurs des x qui satisfera aux inégalités*
>
> $$-a_1 < x_1 < a_1,\ -a_2 < x_2 < a_2, \ldots, -a_n < x_n < a_n \qquad (1)$$
>
> *et aux équations*
>
> $$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0 \qquad (2).$$
>
> Les équations (2) auront donc toujours une solution. Pour faire comprendre comment on peut démontrer ce théorème, supposons que nous n'ayons que deux variables x_1 et x_2, que nous regarderons comme les coordonnées d'un point dans le plan. Alors les inégalités (1) signifient que ce point est à l'intérieur d'un certain carré $ABCD$ dont les côtés ont pour équations
>
> $$AB : x_1 = a_1,\ CD : x_1 = -a_1,\ BC : x_2 = a_2,\ DA : x_2 = -a_2.$$
>
> La courbe $X_2 = 0$ part alors d'un point du côté AB pour aboutir à un point de CD; de même la courbe $X_1 = 0$, partant d'un point de BC pour aboutir à un point de DA, doit forcément rencontrer la première à l'intérieur du carré.

This is the first occurence (with both a suggestion of a correct proof using Kronecker's index and an uncomplete heuristic proof) of a *n-dimensional intermediate value theorem* stated as follows: *any continuous mapping on a n-dimensional cube whose i^{th} component has opposite signs on the two opposite i^{th} faces of the cube always has a zero in the cube.*

This result is usually referred as *Miranda's theorem,* after Miranda's proof [Miranda, 1940] of its equivalence with *Brouwer fixed point theorem: any continuous mapping of a n-dimensional cube into itself has at least one fixed point* [Brouwer, 1912]. Miranda's theorem has been the object of a passionate polemics between the Italian mathematicians S.

Cinquini and G. Scorza Dragoni, who, as well as Miranda, were unaware of Poincaré's anteriority (see [Mawhin, 1994a]). Cinquini's original and critizised "proof" was essentially Poincaré's heuristic argument applied to polynomials and extended to continuous functions via Weierstrass theorem. Just after the war, Scorza Dragoni and Zwirner, still unaware of Poincaré's contribution, gave various proofs based upon Kronecker index, Poincaré-Bohl theorem and Knaster-Kuratowski-Mazurkievicz lemma.

From his masterly use of the invariance with respect to an homotopy of Kronecker's integral, there is no doubt that Poincaré had the explicit proof of the so-called Miranda's theorem based upon Kronecker's index. The fact that the paper was published in an astronomical journal may explain that it escaped to the attention of the mathematicians till the seventies (see the Introduction of [Mawhin, 1979]).

A weak form of this result, the *Brouwer Verschiebungssatz,* stating that *if* $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}^n$ *is continuous and* $\|f(x) - x\| < \frac{1}{2}$ *for all* $x \in [-1,1]^n$, *then* $f([-1,1]^n) \supset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$, is of fundamental importance in Brouwer's proof of the *invariance of dimension* given in [Brouwer, 1911]. It is proved by Brouwer using *topological degree,* a topological version of Kronecker's index, introduced for this purpose. As observed by Johnson [Johnson, 1981]:

> The idea of circulation index or winding number and its generalizations, principally developped by Cauchy, Kronecker, and Poincaré, are direct ancestors of Brouwer's revolutionary topological concept.

Notice also that although Poincaré's n-dimensional version of the intermediate value theorem and Brouwer fixed point theorem were both very familiar to Hadamard (who was the first to publish it in [Hadamard 1910]), he apparently never suspected their equivalence.

6. January 1885: Sur les courbes définies par les équations différentielles III

This memoir is anounced in a note of December 5 1881 [Poincaré 1881b], which summarizes very well the results:

> J'étudierai l'équation
>
> $$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0,$$
>
> où F est un polynome entier. Je poserai
>
> $$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \frac{dy}{dx} = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

> où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des fonctions rationnelles en ξ, η, ζ; on en tirera
>
> $$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$
>
> [...] et l'équation différentielle définit certaines caractéristiques ou courbes tracées sur cette surface. [...] On aura pu choisir les fonctions rationnelles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ de telle sorte que la surface n'ait pas de branches infinies. Cette surface se compose alors d'un certain nombre de nappes fermées. Soit S une de ces nappes, p son genre, c'est-à-dire le nombre de cycles séparés que l'on peut tracer sur cette nappe sans la séparer en deux régions différentes (ainsi une sphère, et en général une surface convexe sera de genre 0, un tore sera de genre 1, une surface primitivement convexe dans laquelle on aurait percé p trous sera de genre p).
>
> Soient N, F et C les nombres des noeuds, des foyers et des cols qui seront situés sur S, on aura la relation
>
> $$N + F - C = 2 - 2p.$$

and published in a paper submitted on January 15 1885 and published the same year [Poincaré1885a].
In the memoir Poincaré makes a qualitative study of the *implicit ordinary differential equation*

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0, \tag{4}$$

where F is a polynomial. Poincaré's essential idea consists in associating to (4) the algebraic surface S of equation

$$F(x, y, z) = 0,$$

and to consider the solutions of (4) as the projections on the plane of curves traced over S. More precisely, those curves satisfy a system of equations

$$\frac{dx}{dt} = X, \frac{dy}{dt} = Y, \frac{dz}{dt} = Z,$$

where X, Y, Z are polynomials in x, y, z such that

$$X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + Z\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

So Poincaré is led to study what we call the *integral curves of a vector field tangent to S*. He transforms S into a surface without unbounded component, considers one of its compact connected components and notices that:

> Il est une notion qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui va suivre, c'est le *genre* de la nappe S_1, au point de vue de la géométrie de situation.

This is a concept that Poincaré has learned from Klein in July 1882 through their famous exchange of letters [Dugac, 1989]:

> Genre au sens de l'*Analysis situs* est attaché à toute surface fermée. Il est égal au nombre maximum de courbes fermées que l'on peut tracer sur la surface sans la morceler.

A *simply connected* surface is such that every loop can be continuously deformed into a point. More generally, a surface has *genus* g if $2g$ is the smallest number of simply connected pieces in which the surface can be decomposed through loops having same base point and forming the boundaries of the pieces. Here is how Poincaré uses this concept for his study of singular points:

> Reprenons la nappe S_1 de genre p, et supposons que cette nappe ne présente ni point conique, ni courbe multiple. Soient C le nombre des cols situés sur cette nappe, N le nombre des noeuds, F celui des foyers ; je dis qu'on aura la relation
>
> $$N + F - C = 2 - 2p.$$
>
> Traçons sur la surface S_1 un cycle quelconque. Ce cycle sera touché en certains de ses points par diverses trajectoires, mais les unes le toucheront extérieurement, les autres intérieurement. Soient E le nombre des contacts extérieurs, I celui des contacts intérieurs ; le nombre
>
> $$J = \frac{E - I - 2}{2}$$
>
> s'appellera l'*indice* du cycle. Si le cycle présente un point anguleux, il pourra arriver que la trajectoire qui passe par ce point traverse ce cycle en passant de l'extérieur à l'intérieur, auquel cas ce point ne doit pas compter pour un contact. Il pourra arriver aussi que cette trajectoire ne passe pas de l'extérieur du cycle à l'intérieur, mais reste constamment à l'extérieur si le point anguleux est saillant, ou constamment à l'intérieur si le point anguleux est rentrant. Alors le point anguleux devra compter pour un contact extérieur ou intérieur. [...] La somme des indices de tous ces cycles sera évidemment $C - F - N$.

It is of interest to notice that Poincaré introduces here a further definition for the *index of a cycle,* without worrying about proving its equivalence or relation with the previous definitions. This time, the index is defined as $\frac{E-I-2}{2}$, where E (resp. I) is the number of exterior (resp. interior) tangency points of the vector field to the cycle. Proving the equivalence between this new definition and the previous one is essentially the contents of what is called today the *Poincaré-Bendixson index theorem* [Bendixson, 1901].

Now Poincaré links this sum of indices to the genus of the surface, by using Euler theorem on polyedra:

> Pour évaluer, d'une autre manière, cette somme d'indices, nous assimilerons à un polyèdre régulier la figure formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes.
>
> Tout le monde connaît le *théorème d'Euler,* d'après lequel, si α, β, γ sont le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre *convexe,* on doit avoir
>
> $$\alpha - \beta + \gamma = 2.$$
>
> Ce théorème s'étend aisément au cas où le polyèdre, au lieu d'être convexe, forme une surface de genre p; on trouve alors
>
> $$\alpha - \beta + \gamma = 2 - 2p.$$
>
> Mais, en géométrie de situation, on n'a pas à s'inquiéter de la forme des faces et des arêtes ; nous n'avons donc pas besoin de supposer que les faces du polyèdre sont planes, et ses arêtes rectilignes. Il en résulte que la figure, formée par la nappe S_1, divisée en régions simplement connexes, est un véritable polyèdre curviligne auquel s'applique le théorème d'Euler.

Here, Poincaré has clearly realized the topological nature of Euler's theorem and of its extension to nonconvex surfaces. He continues the proof as follows:

> Nous chercherons à évaluer, pour l'ensemble de nos cycles, l'excès du nombre $\sum E$ des contacts extérieurs sur le nombre $\sum I$ des contacts intérieurs. [...] On a donc
>
> $$\sum E - \sum I = [\ldots] = 2\beta - 2\gamma.$$
>
> La somme cherchée des indices est, d'ailleurs, égale à
>
> $$\sum \frac{E - I - 2}{2} = [\ldots] = \beta - \alpha - \gamma = 2p - 2.$$
>
> Il vient donc
>
> $$C - F - N = 2p - 2.$$

This statement is clearly the *Poincaré-Hopf theorem for a surface of genus p*, or, equivalently, of Euler characteristic $2-2p$. The modern version of this theorem [Hopf, 1926] states that *the sum of the indices of the singularities of a continuous vector field over a compact orientable manifold is equal to its Euler-Poincaré characteristic, i.e. to the alternative sum of its Betti numbers.* According to Hadamard's analysis [Hadamard, 1912]:

> Ce n'est pas en effet le degré [de l'équation] qui joue ici un rôle essentiel : Poincaré rencontre une notion qui était apparue pour la première fois avec Riemann, mais dont les recherches que nous résumons en ce moment devaient montrer la véritable signification. C'est la *géométrie de situation.*

We can also quote Lefschetz [Lefschetz, 1967]:

> Poincaré also considered differential equations on an arbitrary surface and proved this superb theorem: The sum of the index of the critical points (assumed in finite number) is equal to the characteristic $2-2p$ of the surface. The relation to fixed point properties is obvious. Curiously my own work on fixed points, which includes the n-dimensional version of Poincaré's result and much more besides, was done in total ignorance of it.

Poincaré now gives consequences of his important theorem, in particular the possibility of vector fields without singular points on surfaces of genus one:

> Il résulte immédiatement de cette formule que les surfaces de genre 1 sont les seules qui puissent ne présenter aucun point singulier,

and existence results for singular points:

> Si un cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions dont une simplement connexe, cette dernière contient au moins un noeud et un foyer. [...] Supposons maintenant que le cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions pouvant toutes deux être multiplement connexes. Je dis qu'il y aura des points singuliers dans chacune de ces deux régions.

7. July 1885: Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation

In this paper, submitted on July 16 1885, published the same year [Poincaré, 1885b], and which is the founding father of *bifurcation theory,* Poincaré uses the Kronecker index to find a sufficient condition for the existence of a bifurcation. According to Hadamard [Hadamard, 1912]:

> Considérons une équation à une seule inconnue x, mais contenant un paramètre μ, soit
> $$f(x,\mu) = 0.$$
> [...] Pour qu'il y ait *bifurcation,* autrement dit point multiple, il suffit que $\frac{\partial f}{\partial x}$, en s'annulant, change de signe.
>
> Si maintenant on remplace l'équation unique qui précède par un système d'équations à un nombre égal d'inconnues, dépendant également du paramètre μ, on sait que le rôle de la dérivée considérée tout à l'heure est rempli par un déterminant fonctionnel. Grâce au théorème de Kronecker, Poincaré étend à ces nouvelles conditions la conclusion précédente : en d'autres termes, si, au cours d'une variation continue dans laquelle μ est constamment croissant ou constamment décroissant, le déterminant fonctionnel en question change de signe, il y a bifurcation.

Here is Poincaré's treatment:

> Considérons d'abord le cas où il s'agit d'un équilibre absolu et d'un système dont la position est définie par n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons qu'il y ait une fonction des forces $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de façon que l'équilibre ait lieu quand toutes les dérivées de cette fonction s'annulent et qu'il soit stable quand cette fonction est maximum. Je supposerai qu'outre les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il entre dans la fonction F un paramètre variable y, de telle sorte que les valeurs des x qui correspondent à l'équilibre dépendent de ce paramètre y.

Thus Poincaré discusses the bifurcation of the equilibra of a gradient system depending upon a parameter. He first restricts his discussion to the case of two variables.

> Supposons maintenant $n = 2$; de telle façon que nous ayons deux variables x_1 et x_2 définissant la position du système, et un seul paramètre y. [...] Les équations d'équilibre :
> $$\frac{dF}{dx_1} = 0,\ \frac{dF}{dx_2} = 0$$
> représenteront alors deux surfaces S_1 et S_2 dont l'intersection sera une courbe gauche C. Soient
> $$x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y)$$
> deux fonctions finies, continues et réelles de y et supposons que ces équations représentent une branche B de la courbe C. Soit M un point de cette branche B; supposons que si l'on suit la branche B dans le sens des y croissants, on voie [le hessien] Δ [de

F par rapport à $x_1, x_2, \ldots$] changer de signe au moment où l'on franchit le point M. Soient P et Q deux points de B ayant pour ordonnées $y = \beta - \epsilon, y = \beta + \epsilon$; (l'ordonnée du point M étant $y = \beta$). Au point P, Δ sera par exemple positif, et négatif au point Q. S'il en est ainsi, je dis qu'il passera par le point M une seconde branche de la courbe C. En effet, par les divers points de l'arc de courbe PQ faisons passer des plans parallèles au plan des $x_1 x_2$ et dans chacun de ces plans décrivons une circonférence de rayon r ayant son centre au point correspondant de l'arc PQ. Ces diverses circonférences engendreront une certaine surface Σ qui sera doublement connexe et limitée par les deux circonférences K et K' qui ont pour centres les points P et Q. De plus, d'après ce mode de génération aucun point de la branche B ne peut se trouver sur la surface Σ.

Pour trouver le nombre des points d'intersection de cette surface Σ avec la courbe C, il faut maintenant chercher ce que M. Kronecker appelle *(Berliner Monatsberichte,* mars 1869) la *caractéristique* du système des surfaces Σ, S et S_1. Le nombre des points d'intersections de ces trois surfaces (ou si l'on veut de la surface Σ et de la courbe C) qui satisfont à certaines conditions, diminué du nombre des points d'intersection qui ne satisfont pas à ces mêmes conditions, est égal, d'après le mémoire cité de M. Kronecker à une certaine intégrale. Cette intégrale est prise le long des limites du domaine Σ, c'est-à-dire le long des deux circonférences K et K'.

L'espace pourra être regardé comme partagé en quatre régions a, b, c, d suivant le signe des deux fonctions $\frac{dF}{dx_1}$ et $\frac{dF}{dx_2}$. Dans la région a par exemple, les deux fonctions seront positives ; dans la région b, $\frac{dF}{dx_1}$ sera positif et $\frac{dF}{dx_2}$ négatif, etc. Δ étant positif au point P, on rencontrera en suivant la circonférence K les quatre régions dans l'ordre circulaire *abcd*, pourvu toutefois que r soit suffisamment petit. Nous supposons qu'on ait parcouru K de façon à laisser à sa gauche le domaine Σ. L'intégrale de M. Kronecker le long de K est alors égale à 1. Δ étant négatif au point Q, on rencontrera en suivant K' les quatre régions dans l'ordre circulaire *adcb*, si l'on décrit cette circonférence dans le même sens que K. Mais si l'on veut laisser le domaine Σ à sa gauche, il faut décrire K' en sens contraire et alors les quatre régions se succèdent dans l'ordre *abcd*. L'intégrale est donc encore égale à 1 et l'intégrale totale est égale à 2. Le nombre des points d'intersection de Σ et de C est donc au moins égal à 2 ; et aucun de ces points ne peut appartenir à B. Il faut donc que par le point M passe une seconde branche de la courbe C. C.Q.F.D..

This is, in a rather sketchy way, the *first topological proof of the existence of a bifurcation point,* that we would translate in modern terms as follows. Consider the gradient system of two equations in two unknowns (x_1, x_2) depending upon one parameter y,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2; y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2; y) = 0,$$

and let B be a branch of their "curve" $C : x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y)$ of solutions in the 3-space (x_1, x_2, x_3). Follow this branch in the sense of increasing y and let $M = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$ be a point of B such that the Hessian of F with respect to (x_1, x_2) changes sign from positive to negative at M. So, for $\epsilon > 0$ sufficiently small, Δ will be positive in $P = (\varphi_1(\beta - \epsilon), \varphi_2(\beta - \epsilon))$ and negative in $Q = (\varphi_1(\beta + \epsilon), \varphi_2(\beta + \epsilon))$. Describe small circles parallel to the (x_1, x_2)-plane with center on the arc PQ and sufficiently small radius r so that the cylindrical surface Σ generated by the circles do not contain any point of B. Then the Kronecker index of the mapping $\Phi := \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ at $y = \beta - \epsilon$ and $y = \beta + \epsilon$ with respect to the corresponding circle is respectively equal to $+1$ and to -1. If there were no zero of Φ on Σ, the invariance of Kronecker's index with respect to homotopy (with parameter y) would imply that those two indices are equal. Thus, there must exist a zero of Φ on Σ (thus not on B), and hence, as r is arbitrary small, another "branch" of C emanating from M.

To help the reader, Poincaré makes explicit, for the two dimensional case, the relation between Kronecker's concept and the classical Cauchy's index:

> Dans le cas où le théorème de M. Kronecker s'applique à une multiplicité à deux dimensions et à deux fonctions X et Y, et où par conséquent son intégrale doit être prise le long d'une courbe fermée, on voit aisément que cette intégrale est égale à la demi-différence du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$,

and then mentions, without details, the possibility of an extension to an arbitrary number of dimensions:

> Le résultats s'étendrait sans peine au cas où nous aurions un plus grand nombre de variables. Le théorème de M. Kronecker serait en effet encore applicable.

8. December 1885: Sur les courbes définies par les équations différentielles IV

The results of this last part were announced in a note of February 4 1884 [Poincaré, 1884b], submitted on December 13 1885 and published in 1886

[Poincaré, 1886]. This fourth part of Poincaré's memoir is essentially an extension of the qualitative theory of the first two parts to the case of a *differential system in 3-space*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

where X, Y, Z are polynomials in x, y, z.

It is in this work that Poincaré makes a maximal use of Kronecker's concept, and, for the first time, recalls explicitly its definition. According to Hadamard's analysis [Hadamard, 1912]:

> Seulement cette fois la relation en question ne pourrait être démontrée si Poincaré ne partait de la formule de Kronecker. C'est surtout dans la théorie actuelle, en effet, que cette formule se présente comme l'auxiliaire indiqué et même indispensable dont l'apparition, à l'heure même où l'oeuvre de Poincaré allait naître, semble répondre à une sorte d'harmonie préétablie. Deux caractères : la manière dont il dépasse d'emblée le domaine local, et, d'autre part, le peu d'hypothèses qu'il implique, font que nul autre n'a pu, jusqu'ici, lui être substitué à ce point de vue.

Here is the relevant part of this memoir.

> Chapitre XVIII — *Distribution des points singuliers.*
>
> Ce Chapitre sera tout entier une application d'un théorème de M. Kronecker. Ce théorème est l'objet de deux mémoires intitulés : *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln,* et ont été insérés dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (mars 1869, août 1869). Soit
>
> $$F(x, y, z) = 0$$
>
> une surface quelconque que je supposerai fermée. Soit dw un élément quelconque de cette surface. Soient
>
> $$S = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \Sigma = +\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$
>
> $$R = \frac{1}{\Sigma} \begin{pmatrix} 0 & \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ X & \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ Y & \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ Z & \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{pmatrix}.$$
>
> L'intégrale
>
> $$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{R\, dw}{S^3},$$
>
> étendue à tous les éléments de la surface considérée ou d'une nappe fermée quelconque de cette surface, s'appellera l'*indice* de cette surface ou de cette nappe.

This is the first time that Poincaré *explicitely* defines *Kronecker's characteristic or index or integral,* which, in modern terms, is given by

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{F^{-1}(0)} \frac{X\,dY \wedge dZ + Y\,dZ \wedge dY + Z\,dX \wedge dY}{(X^2+Y^2+Z^2)^{3/2}}.$$

He continues as follows:

> Voici maintenant le théorème général qu'on peut déduire aisément de celui de M. Kronecker. Nous distinguerons deux types de points singuliers : les *points singuliers positifs,* pour lesquels le déterminant
>
> $$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$
>
> est positif, et les *points singuliers négatifs* pour lesquels ce déterminant est négatif. [...] D'après le théorème de M. Kronecker, l'indice d'une surface fermée quelconque est égal au nombre des points singuliers positifs situées à l'intérieur de cette surface, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

This property, telling that *the Kronecker's index is equal to the difference between the number of zeros of* (X, Y, Z) *with positive Jacobian and the number of zeros with negative Jacobian* is the starting point of most modern definitions of Brouwer's degree in analysis or in differential topology.

Then Poincaré introduces the important concept of *contactless surface,* that Lyapunov will recognize as the source of inspiration for his second method in stability theory (see [Mawhin, 1994b]).

> Supposons maintenant que la surface considérée soit une *surface sans contact,* c'est-à-dire qu'en aucun point réel de cette surface
>
> $$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = 0.$$
>
> Je distinguerai d'abord, parmi les surfaces sans contact, deux espèces différentes : l'*espèce positive,* pour laquelle
>
> $$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z > 0;$$
>
> et l'*espèce négative,* pour laquelle
>
> $$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z < 0.$$
>
> Pour distinguer ces espèces, il convient de choisir F de telle sorte que F soit plus grand à l'extérieur de la surface fermée qu'à l'intérieur de cette même surface.

A *contactless surface* for the vector field (X, Y, Z) is thus a surface of equation $F = 0$ such that $\frac{\partial F}{\partial x}X + \frac{\partial F}{\partial y}Y + \frac{\partial F}{\partial z}Z$ does not change sign on $F^{-1}(0)$. Poincaré shows that the index of a surface without contact is an intrinsic topological property of this surface:

> Cela posé, je vais montrer que *l'indice d'une surface sans contact ne dépend que de son espèce et de son genre (au point de vue de l'Analysis situs).* Je fais voir que l'indice d'une surface d'espèce positive ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$, et que celui d'une surface d'espèce négative ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $-\frac{dF}{dx}, -\frac{dF}{dy}$ et $-\frac{dF}{dz}$. Représentons, en effet, la vitesse du point mobile par une flèche dont les projections sur les trois axes seront X, Y et Z. Par chacun des points de notre surface passera donc une flèche ; toutes ces flèches seront dirigées vers l'extérieur, si la surface est positive, et toutes vers l'intérieur, si la surface est négative. Nous allons maintenant faire varier d'une manière continue X, Y, Z et F, de façon à déformer la surface et à faire varier les flèches. L'indice ne changera pas, pourvu qu'à aucune moment de la déformation la vitesse d'aucun point de la surface ne devienne nulle. C'est ce qui arrivera si la surface reste constamment sans contact, et si elle conserve son genre et son espèce.

In the above proof, Poincaré obtains a special case of a result now called the *Poincaré-Bohl theorem.* Poincaré's version is essentially the following one: if U and V are continuous vector fields in $\mathbb{R}^n$, and S a compact boundaryless surface such that $(U|V) > 0$ on S, then, denoting by *ind* the Kronecker's index or characteristic, we have

$$\mathrm{ind}[U, S] = \mathrm{ind}[V, S].$$

Poincaré applies it to $S = F^{-1}(0)$ for some $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, and to $V = \nabla F$. He obtains that

$$\mathrm{ind}[U, F^{-1}(0)] = \mathrm{ind}[\nabla F, F^{-1}(0)],$$

and the right-hand member only depends upon topological characters of the surface $F^{-1}(0)$. The right-hand member is essentially a computation of Gauss "curvatura integra" (i.e. of the degree of the Gauss map $n/\|n\|$) in the 2-dimensional case. Again the proof uses the homotopy invariance of Kronecker's index (already observed by Kronecker in 1878 and used by Poincaré in 1883 (see Section 4)). Among the statements of Bohl [Bohl, 1904], independently obtained using Kronecker's integral, the closest one is that if $U(x) \neq 0$ for all x in the closed domain bounded by the surface S, there exist $x \in S$ and $N < 0$ such that $F(x) = Nx$.

Poincaré's explicit conclusion is:

> Ainsi *l'indice d'une surface sans contact ne dépend que du genre et de l'espèce.* [...] Une surface sans contact de genre 0 a pour indice ± 1, selon qu'elle est positive ou négative.

According to Hadamard [Hadamard, 1912]:

> [Pour les] surfaces sans contact, [...] le nombre trouvé par la formule de Kronecker dépend alors de la *courbure totale* de S. Mais cette première conclusion se simplifie encore, et tout se ramène à une question de géométrie de situation, la courbure totale ainsi introduite dépend uniquement du genre de S. Les résultats de ce type devaient donner lieu, on le sait, à d'importantes recherches de M. W. Dyck.

So Poincaré gets essentially what is called the *Gauss-Bonnet formula,* whose modern formulation goes as follows [Hopf, 1925]: *if M is a compact orientable 2-dimensional Riemannian manifold, K its Gaussian curvature, and $\chi(M)$ its Euler-Poincaré characteristic, then*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\sigma = \chi(M).$$

Poincaré deduces from his results several existence conditions for critical points in various types of contactless surfaces:

> A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0, il y a toujours au moins un point singulier. [...] Entre deux surfaces sans contact de genre 0 et d'espèce différente, il y a toujours au moins deux points singuliers. [...]
>
> *L'indice d'une surface sans contact de genre* 1 *et positive est nul,* et il en serait de même de l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et négative. En raisonnant de la même manière, on verrait que *l'indice d'une surface sans contact de genre* p *est* $-(p-1)$ *si elle est positive, et* $+(p-1)$ *si elle est négative.*
>
> La conséquence immédiate de ce résultat est qu'à l'intérieur d'une surface sans contact quelconque, il y a toujours des points singuliers, à moins que cette surface ne soit de genre 1, auquel cas on ne sait rien.
>
> Soient deux surfaces sans contact, l'une extérieure à l'autre ; et soit E l'espace compris entre ces deux surfaces. Si ces surfaces sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient de même genre. Si ces deux surfaces sont l'une

positive et l'autre négative, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient l'une de genre 0 et l'autre de genre 2 ou toutes deux de genre 1.

Then Poincaré extends his theory to *n-dimensional systems.* He first recall the definition of Kronecker's index in this situation.

Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas général des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Soit, en effet,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

l'équation d'une multiplicité $(n-1)^{ième}$ *(Mannigfaltigkeit)* qui jouera dans l'espace à n dimensions le même rôle qu'une surface dans l'espace ordinaire.

Soit dw un élément quelconque de cette multiplicité. Soient

$$S = +\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2},$$

$$\Sigma = +\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)^2}.$$

Soit Δ un déterminant où le premier élément de la première colonne est 0; où le $(i+1)^{ième}$ élément de la première colonne est X_i; où le $(i+1)^{ième}$ élément de la première ligne est $\frac{dF}{dx_i}$; où enfin le $(k+1)^{ième}$ élément de la $(i+1)^{ième}$ colonne est $\frac{dX_k}{dx_i}$.

Soit ϖ l'intégrale

$$\int dw$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

L'intégrale

$$-\frac{1}{\varpi}\int \frac{\Delta\, dw}{\Sigma S^n},$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité $F = 0$, sera l'*indice* de cette multiplicité.

Then he states the relation of this index to the number of singular points with positive and with negative jacobians:

> La distinction des points singuliers positifs et négatifs se fera comme dans le cas particulier déjà étudié, et l'on verra que l'indice d'une multiplicité est égal au nombre de points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette multiplicité, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

In modern terminology, *Kronecker's integral* is defined by

$$-\frac{1}{\mathrm{vol}\ S^{n-1}}\int_{F^{-1}(0)}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{X_j dX_1\wedge\ldots\wedge dX_{j-1}\wedge dX_{j+1}\wedge\ldots\wedge dX_n}{(X_1^2+\ldots+X_n^2)^{n/2}}.$$

Poincaré extends the concept of contactless surface to that of *contactless manifold* in the n-dimensional case:

> On définira, comme on l'a fait plus haut pour les surfaces, les *multiplicités* $(n-1)^{ième}$ *sans contact,* qui pourront se répartir en deux espèces, l'espèce positive et l'espèce négative.

He then introduces the concepts of *Analysis situs* which replace the genus in the higher dimensional case, apparently refering wrongly to Brioschi instead of Betti [Betti, 1871] and to a wrong volume of the *Annali*:

> Une multiplicité $(n-1)^{ième}$ sera caractérisée au point de vue de l'Analysis Situs par ses $n-2$ ordres de connexion tels qu'ils sont définis par Riemann *(Gesammelte Werke*; Leipzig, Teubner, 1876, p. 448), et par Brioschi *(Annali di Matematica,* t.V).

He then states a somewhat implicit n-dimensional version of the *Poincaré-Hopf theorem* [Hopf, 1926]:

> *L'indice d'une multiplicité sans contact ne dépendra que de ses ordres de connexion et de son espèce.*

Like in the three dimensional case, he then give applications to the existence of singular points, and shows the importance of the parity of the dimension of the space.

> Considérons maintenant deux multiplicités sans contact, ayant mêmes ordres de connexion et étant l'une positive, l'autre négative; leurs indices seront égaux et de même signe si n est pair, égaux et de signe contraire si n est impair.
>
> Une multiplicité sans contact, simplement connexe et positive, aura pour indice $+1$. Le nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur surpassera d'une unité le nombre des points singuliers négatifs.
>
> *Si n est pair, les points singuliers de même espèce seront toujours de même signe, et nous aurons ainsi une relation entre le nombre*

> *de points singuliers des différentes espèces. Nous n'en aurons pas si n est impair. C'est ainsi que nous avons obtenu une pareille relation pour $n = 2$, et que nous n'en avons pas obtenu pour $n = 3$.*
>
> Soient M et M' deux multiplicités sans contact ayant mêmes ordres de connexion, la première positive, la seconde négative, la première extérieure à la seconde. Soit E l'espace compris entre M et M'. Lorsque n sera impair, l'espace E contiendra toujours des points singuliers si l'indice de M n'est pas nul, et en particulier si M est simplement connexe. Nous ne pourrons, au contraire, rien affirmer si n est pair.

Poincaré finally considers then the question of the *existence of cycles* in 3-dimensional systems, in the special case where there exists a contactless-torus:

> Parmi les trajectoires d'un point mobile, définies par les équations
>
> $$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$
>
> il peut y en avoir qui soient des courbes fermées. [...]
>
> Il faudrait d'abord savoir reconnaître s'il existe des trajectoires fermées ; mais je ne puis, pour le moment, donner à ce sujet beaucoup de développements. Je me bornerai, en me réservant de revenir plus tard sur ce point, à donner un exemple simple.
>
> Soit un tore sans contact à l'intérieur duquel il n'y ait aucun point singulier. Coupons-le par des plans méridiens, et supposons que ces plans n'aient non plus aucun contact avec les trajectoires à l'intérieur du tore. [...] Les plans méridiens $\omega =$ const. étant sans contact, $\frac{d\omega}{dt}$ sera constamment de même signe, constamment positif, par exemple. Quant au tore, je supposerai, pour fixer les idées, que c'est une surface sans contact négative, de telle sorte que le point mobile, une fois entré à l'intérieur du tore, ne puisse plus en sortir. Par le point M_0 intérieur au tore et ayant pour coordonnées
>
> $$\xi = \xi_0,\ \eta = \eta_0,\ \omega = 0,$$
>
> je fais passer une trajectoire ; au bout d'un certain temps t, le point mobile partir de sa position initiale M_0 se trouvera en un point M_1 intérieur au tore, et dont les coordonnées seront
>
> $$\xi = \xi_1,\ \eta = \eta_1,\ \omega = 2\pi.$$
>
> Posons
>
> $$\Xi = \xi_1 - \xi_0,\ H = \eta_1 - \eta_0;$$
>
> Ξ et H seront des fonctions holomorphes de ξ_0 et de η_0. Si l'on a
>
> $$\Xi = H = 0,$$

la trajectoire qui passe par le point M_0 sera fermée.

This is the famous *return map* of Poincaré reducing the existence of a cycle to that of a fixed point of this map in some *surface of section* (here a circular section of the torus). The arguments of *Analysis situs* are then introduced in this surface of section:

Dans le plan méridien $\omega = 0$, appelons *indice* d'une courbe quelconque

$$F(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

l'intégrale suivante

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{R\,ds}{S^2},$$

étendue à tous les éléments ds de cette courbe. Dans cette expression on pose, comme dans l'intégrale de M. Kronecker,

$$S = \sqrt{\Xi^2 + H^2},\ \Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{d\xi_0^2} + \frac{dF^2}{d\eta_0^2}}$$

et

$$R = \frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{d\xi_0} & \frac{dF}{d\eta_0} \\ \Xi & \frac{d\Xi}{d\xi_0} & \frac{dXi}{d\eta_0} \\ H & \frac{dH}{d\xi_0} & \frac{dH}{d\eta_0} \end{vmatrix}.$$

Considérons, en particulier, la courbe

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = r^2,$$

c'est-à-dire le cercle méridien du tore. Si l'on observe que l'on a constamment, le long de cette courbe,

$$\xi_0\Xi + \eta_0 H < 0,$$

et par conséquent,

$$\Xi\frac{dF}{d\xi_0} + H\frac{dF}{d\eta_0} > 0,$$

on verra sans peine que l'indice de notre cercle méridien est égal à $+1$. Donc il y a à l'intérieur de ce cercle au moins un point ξ_0, η_0 pour lequel Ξ et H s'annulent ; dont il y a à l'intérieur du tore une trajectoire fermée.

So Kronecker's index of the return map in the surface of section is used to define the *index of the cycle.* Finally Poincaré refers to his previous work on periodic solutions.

> Je rappellerai en outre que, dans une Note insérée au tome I du *Bulletin astronomique,* et intitulée *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps,* j'ai montré que les équations de la Mécanique céleste admettent certaines intégrales particulières qui peuvent, à un certain point de vue, être regardées comme représentant des trajectoires fermées.

This is the note discussed in Section 5.

9. The period 1888-1905

During this period, Poincaré continues to work, together with important contributions to mathematical and theoretical physics, in the qualitative theory of differential equations, celestial mechanics and in *Analysis situs.*

Recall that in 1889, he is awarded the famous King Oscar II Prize for his contributions to the equations of dynamics and the three body problem, the corresponding revised version of the crowned memoir being published in 1890 [Poincaré, 1890], popularized in [Poincaré, 1891], and developed in his famous monograph [Poincaré, 1892a], published between 1892 and 1899. This aspect of Poincaré's work is thoroughly treated in [Andersson, 1994; Barrow-Green, 1994, 1997; Dahan Dalmedico, 1996; Goroff, 1993; Mawhin, 1994b, 1996; Nabonnand, 1998].

Between 1895 and 1903, Poincaré wrote the series of memoirs on *Analysis situs* and its application to algebraic geometry [Poincaré, 1895, 1899b, 1900, 1902a, 1902b, 1904], anounced in a series of preliminary notes [Poincaré, 1892b, 1899a, 1901a, 1901b]. They really create algebraic topology as an autonomous part of mathematics, and have been masterly analyzed by Dieudonné [Dieudonné, 1989, 1994] and by Volkert [Volkert, 1994, 1996a].

However, in the period 1888-1905, there is almost no algebraic topology in his contributions to differential equations and dynamics, and no differential equations in his work on algebraic topology. The only exception is a paper on the geodesics of a convex body, submitted on January 1905 and published the same year [Poincaré, 1905]. There, Poincaré refers to his Memoir of 1881 to obtain a relation between the number of minima, maxima and saddle points of a function over a surface:

> Ainsi les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C. [...] Construisons les courbes $R =$ const., c'est-à-dire les courbes qui joignent les différents points P où la fonction R a la même valeur. Nous aurons une série de courbes telles que par chaque point de la sphère passe une de ces courbes et une seule. Aux

> minima et aux maxima de R correspondent des points isolés de ces courbes, aux minimax des points doubles à tangentes réelles.
>
> Un théorème d'Analysis Situs nous apprend que le nombre total des minima et des maxima, c'est-à-dire des points isolés, surpasse de deux unités celui des minimax, c'est-à-dire des points doubles. Je me bornerai à renvoyer à ce sujet à mon Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles (*Journal de Liouville,* (3) 7 (1881), p. 405).
>
> Le nombre total des minima, maxima et minimax est donc un multiple de 4, plus 2. Mais à chaque courbe C correspondent deux pôles P et P' diamétralement opposés, donc à chaque géodésique fermée correspondent *deux* minima, maxima ou minimax. *Le nombre total des géodésiques fermées est donc impair,* puisque c'est la moitié du nombre total des minima, maxima et minimax.

This is clearly a first step toward *Morse theory* [Morse, 1925], which relates the number of critical points of different type of a function on a manifold to the topological properties of this manifold . An extensive analysis of [Poincaré, 1905] can be found in [Nabonnand, 1996].

10. 1912: Sur un théorème de géométrie

Between 1906 and 1912, there is no explicit contribution of Poincaré to *Analysis situs* or to its applications to the qualitative theory of differential equations. However, the problem of periodic solutions in celestial mechanics remains a central preoccupation for Poincaré, as shown by the moving introduction to his *Circolo* paper of 1912 [Poincaré, 1912]:

> Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé ; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprendre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps ; le résultat laissait cependant encore à désirer ; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple [. . .]. J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. [. . .] Mais après les inutiles efforts que j'ai fait pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser

> le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années ; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour ; mais à mon âge je ne puis en répondre.

In this work, Poincaré convinces himself to present an incomplete proof of a fixed point theorem in an annulus which is of fundamental importance for the three body problem:

> Je désigne par x et y les coordonnées polaires d'un point et je considère une couronne circulaire comprise entre deux circonférences extrêmes, l'une extérieure $x = a$, l'autre intérieure $x = b$. Je considère une transformation ponctuelle biunivoque T de cette couronne en elle-même. Je désigne par x et y les coordonnées du point M, par X et Y celles de son transformé ; et je fais les deux hypothèses suivantes :
>
> *Première condition.-* [...] la transformation fait tourner sur elle-même chacune des circonférences extrêmes, tous les points de *chacune* des circonférences avançant *dans le même sens,* quoique en général de quantités inégales, mais de façon que les rotations des *deux* circonférences se fassent *en sens contraire.* [...]
>
> *Deuxième condition.-* La transformation conserve les aires ou, plus généralement, elle admet un invariant intégral positif.
>
> *Si ces deux conditions sont remplies, je dis qu'il existera toujours à l'intérieur de la couronne deux points qui ne seront pas altérés par la transformation.*

One recognizes the famous *Poincaré-Birkhoff fixed point theorem: any continuous and area-preserving mapping of an annulus into itself which rotates the two parts of the boundary in opposite directions has at least two fixed points.* Birkhoff [Birkhoff, 1913] will prove, the year following Poincarés death, this founding theorem of *symplectic topology.*

Poincaré discusses an alternative formulation and sketches the obtention of the second fixed point through Kronecker's index:

> Le théorème peut être présenté sous une autre forme, tout à fait équivalente, mais en quelque sorte inverse de la précédente. Imaginons que la transformation T remplisse toujours la première condition énoncée plus haut, *mais non pas la seconde,* en revanche elle satisfera à une
>
> *Troisième condition.- Il n'existe pas dans toute la couronne de point invariant.*
>
> *Je dis que s'il en est ainsi, la transformation T ne saurait satisfaire à la seconde condition, c'est-à-dire posséder un invariant intégral positif.*

> Il est clair que les deux énoncés sont équivalents ; si toute transformation qui satisfait aux conditions 1 et 3 ne saurait satisfaire à la condition 2, toute transformation qui satisfera aux conditions 1 et 2 ne pourra satisfaire à la condition 3 ; elle aura donc au moins un point invariant et, par conséquent, elle en aura au moins deux, puisque l'Analysis situs (et, en particulier le théorème de Kronecker) nous montre immédiatement qu'elle doit en avoir un nombre pair.

11. Conclusion

Analysis situs entered Poincaré's work in his first memoir of 1881 on the qualitative theory of nonlinear differential equations, in the form of a variant of the Cauchy's index. Various definitions of this index are then successively used, and, when higher dimensions require it, Poincaré immediately adopts and uses Kronecker's characteristic. The reader has a hard time to follow him as the concept is introduced through successive touches rather than by precise definitions. Kronecker's characteristic, which is the subject of Kronecker's ultime (and postumuous) paper of 1891, is still present in Poincaré's paper on his last geometric theorem of 1912.

In Poincaré's contributions to qualitative theory of differential equations, one finds the systematic use of Kronecker's index as an existence tool for solving equations, early version of the Poincaré-Hopf and Poincaré-Brouwer theorems on the indices of vector fields, various uses of Jordan's curve theorem, the explicit statement and use of the homotopy invariance of Kronecker index, a n-dimensional intermediate value theorem equivalent to Brouwer fixed point theorem, Poincaré-Bendixson's formula for computing the index in 2 dimensions, the first topological approach in bifurcation theory, a version of the Poincaré-Bohl and Gauss-Bonnet theorems, a topological method for finding periodic solutions, the first idea of a Morse theory and the beginning of symplectic topology.

The few other authors who used Kronecker's characteristic in the same period, gave, with the exception of Bohl, applications in other areas as differential equations. We may quote Boy [Boy, 1903], von Dyck [Dyck, 1890, 1895] in differential geometry and topology, and Davidoglou [Davidoglou, 1901] , von Dyck [Dyck, 1894], Phragmén [Phragmén, 1892], Picard [Picard, 1889, 1891a, 1891b, 1891c, 1892a, 1892b, 1892c], Tzitzéica [Tzitzéica, 1901] in the study of the number of roots of systems of equations (see also the surveys in [Mignosi, 1925] and [Runge, 1898]).

In his unique way, made of numerous spots of brillant and original insights characterized by a careless attitude for notations, definitions or details, together with an outstanding unity and deepness of thinking, and a unique geometric vision, Poincaré is not only the most impressive, but also the most impressionist mathematician of the end of the XIX and the beginning of the XXth century. This is specially apparent in his use of *Analysis situs* in the study of nonlinear problems.

References

Alexandroff, P.S.

1972 Poincaré and topology, *Russian Math. Surveys* 27 (1972), 157-168.

Alexandroff, P. and Hopf, H.

1935 *Topologie, I,* Berlin: Springer.

Andersson, K.G.

1994 Poincaré's discovery of homoclinic points, *Arch. History Exact Sci.* 48, 133-147.

Barrow-Green, J.

1994 Oscar II's Prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem, *Arch. History Exact Sci.* 48, 107-131.

1997 *Poincaré and the Three Body Problem,* Providence, RI: American Math. Soc.

Bendixson, I.

1901 Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Acta Math.* 24, 1-88.

Betti, E.

1871 Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, *Ann. Mat. Pura Appl.* (2) 4, 140-158.

Birkhoff, G.D.

1913 Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 14, 14-22.

Bohl, P.

1904 Ueber die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage, *J. Reine Angew. Math.* 127, 179-276.

Boy, W.

1903 Ueber die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, *Math. Ann.* 57, 151-184.

Brouwer, L.E.J.

1911 Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, *Math. Ann.* 70, 161-165.

1912 Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 71, 97-115.

Chabert, J.L. et A. Dahan Dalmedico

1992 Les idées nouvelles de Poincaré, in *Chaos et déterminisme,* Points Sciences S80, Paris: Seuil, 274-305.

Dahan Dalmedico, A.

1996 Le difficile héritage de Henri Poincaré en systèmes dynamiques, in *Henri Poincaré. Science et Philosophie,* Greffe, Heinzmann, Lorenz ed., Berlin: Akademie Verlag, 13-33.

Davidoglou, A.

1901 Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations I, *C.R. Acad. Sci. Paris* 133, 784-786; II *ibid.* 860-863.

Dehn, M., and Heegard, P.

1907 Analysis situs, *Enzykl. Math. Wiss.* III A B 3, Leipzig: Teubner, 153-220.

Dieudonné, J.

1989 *A History of Algebraic and Differential Topology,* Boston-Basel: Birkhäuser.

1994 Une brève histoire de la topologie, in *Development of Mathematics,* Pier ed., Basel-Boston: Birkhäuser, 35-155.

Dugac, P., ed.

1986 La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens, de A à H, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques,* 7, 59-219.

1989 La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens, de J à Z, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques,* 10, 83-230.

Dyck, W. von

1888 Beiträge zur Analysis situs I, *Math. Ann.* 32, 457-512; II, *ibid.*

37, 273-316.

1894 Sur la détermination du nombre des racines communes aux systèmes d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction dans ces points,I, *C.R. Acad. Sci. Paris* 119, 1254-1257; II, *ibid.* 120, 34-36.

1895 Beiträge zur Potentialtheorie I, *Sitzungsberichte der Königlichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München (Münchner Berichte)* 25, 261-277; II, *ibid.* 447-500; III, *ibid.* 28, 203-224.

GILLAIN, C.

1991 La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles, in *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences,* nouvelle série, 34, 215-242.

GOROFF, D.L.

1993 *Henri Poincaré and the birth of chaos theory: An introduction to the English translation of Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique céleste,* American Institute of Physics Press, I1-I107.

HADAMARD, J.

1910 Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, in J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* 2e éd., vol. 2, Paris: Hermann, Paris.

1912 L'oeuvre mathématique de Poincaré, *Acta Math.* 38, 203-287.

1922 The early scientific work of Poincaré, *Rice Institute Pamphlets,* IX, No. 3, 111-183.

1933 The later scientific work of Poincaré, *Rice Institute Pamphlets,* XX, No. 1, 1-86.

HERMITE, CH.

1883 *Cours de M. Hermite, professé pendant le 2e semestre 1881-82 à la Faculté des Sciences de Paris,* Paris: Hermann.

HOPF, H.

1925 Ueber die Curvatura Integra geschlossener Hyperflächen, *Math. Ann.* 95, 340-367.

1926 Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 96, 225-250.

1966 Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, *Jahresberichte der Deutsch. Math. Ver.* 68, 182-192.

Johnson, D.M.

1981 The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology, Part II, *Arch. History Exact Sciences* 25, 85-267.

Jordan, C.

1893 *Cours d'analyse,* 2e éd., Paris.

Kronecker, L.

1869 Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln I, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 68, 159-193; II, *ibid.* 688-698.

1878 Ueber die Charakteristik von Functionen-Systeme, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 145-152.

1891 Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *C.R. Acad. Sci. Paris* 113, 1006-1012.

Lefschetz, S.

1930 *Topology,* Amer. Math. Soc. Colloquium Public. XII, New York.

1967 Geometric differential equations: recent past and proximate future, in *Differential and Dynamical Systems,* New York: Academic Press, 1-14.

Mawhin, J.

1979 *Topological Degree Methods in Nonlinear Analysis,* CBMS Regional Conference Series in Math. No. 40, Providence: Amer. Math. Soc.

1994a Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations: from successive approximations to topology, in *Development of Mathematics,* Pier ed., Basel-Boston: Birkhäuser, 443-477.

1994b The centennial legacy of Poincaré and Lyapunov in ordinary differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 34, Suppl. Studies in the History of Modern Math. I, 9-46.

1996 The early reception in France of the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations, *Philosophia Scientiæ,* 1 (4), 119-133.

Mignosi, G.

1925 Teorema di Sturm e sue estensioni, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 49, 1-164.

Miranda, C

1941 Un' osservazione su un teorema di Brouwer, *Boll. Un. Mat. Ital.* (2) 3, 5-7.

Morse, M.

1925 Relations between the critical points of a real function of n independent variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* 27, 345-396.

1967 What is analysis in the large? in *Studies in Global Analysis and Geometry,* Washington: MAA, 5-15.

Nabonnand, Ph.

1996 Henri Poincaré et le problème des géodésiques sur une surface convexe, in *Henri Poincaré. Science et Philosophie,* Greffe, Heinzmann, Lorenz ed., Berlin: Akademie Verlag, 265-276.

1998 *La correspondance de Poincaré.* Volume I. *La correspondance entre Poincaré et Mittag-Leffler,* Publications des Archives Henri Poincaré, Basel: Birkhäuser 1999.

Phragmén E.

1892 Sur une extension du théorème de Sturm, *C.R. Acad. Sci. Paris* 114, 205-208.

Picard, E.

1889 Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *Nouv. Ann. Math.* (3) 8, 5-13.

1891a Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *C.R. Acad. Sci. Paris* 113, 356-358.

1891b Sur la recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *C.R. Acad. Sci. Paris* 113, 669-672.

1891c Du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *C.R. Acad. Sci. Paris* 113, 1012-1014.

1892a Observations relatives à la communication de M. Phragmén, *C.R. Acad. Sci. Paris* 114, 208.

1892b Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées, *J. Math. Pures Appl.* (4) 8, 5-24.

1892c *Traité d'Analyse,* 3 volumes, Paris: Gauthier-Villars.

Poincaré, H.

1880 Sur les courbes définies par les équations différentielles, *C.R. Acad. Sci. Paris* 90, 673-675.

1881a Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, *J. de Math. Pures et Appl.* (3) 7, 375-422.

1881b Sur les courbes définies par les équations différentielles, *C.R. Acad. Sci. Paris* 93, 951-952.

1882a Sur les points singuliers des équations différentielles, *C.R. Acad. Sci. Paris* 94, 416-418.

1882b Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle, *J. de Math. pures et appl.* (3) 8, 251-296.

1883a Sur les fonctions de deux variables, *C.R. Acad. Sci. Paris* 96, 238-240.

1883b Sur les fonctions Θ, *Bull. Soc. Math. France* 11, 129-134.

1883c Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps, *C.R. Acad. Sci. Paris* 97, 251-252.

1884a Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps, *Bulletin Astronomique* 1, 65-74.

1884b Sur les courbes définies par les équations différentielles, *C.R. Acad. Sci. Paris* 98, 287-289.

1885a Sur les courbes définies par les équations différentielles, *J. Math. Pures et Appl.* (4) 1, 167-244.

1885b Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, *Acta Math.* 7, 259-380.

1886 Sur les courbes définies par les équations différentielles, *J. Math. Pures et Appl.* (4) 2, 151-217.

1890 Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.* 13, 1-270.

1891 Sur le problème des trois corps, *Bulletin Astronomique* 8, 12-24.

1892a *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Paris: Gauthier-Villars, tome I (1892), tome II (1894), tome III (1899).

1892b Sur l'Analysis situs, *C.R. Acad. Sci. Paris* 115, 633-636.

1895 Analysis situs, *J. Ecole Polytechnique* (2) 1, 1-121.

1899a Sur les nombres de Betti, *C.R. Acad. Sci. Paris* 128, 629-630.

1899b Complément à l'Analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 13, 285-343.

1900 Second complément à l'Analysis situs, *Proc. London Math. Soc.* 32, 277-308.

1901a Sur l'analysis situs, *C.R. Acad. Sci. Paris* 133, 707-709.

1901b Sur la connexion des surfaces algébriques, *C.R. Acad. Sci.*

Paris 133, 969-973.

1902a Sur certaines surfaces algébriques. Troisième complément à l'Analysis situs, *Bull. Soc. Math. France* 30, 49-70.

1902b Sur les cycles des surfaces algébriques. Quatrième complément à l'Analysis situs, *J. Math. Pures Appl.* (5) 8, 169-214.

1904 Cinquième complément à l'Analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 18, 45-110.

1905 Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Trans. Amer. Math. Soc.* 6, 237-274.

1912 Sur un théorème de géométrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 33, 375-407.

1921 Analyse de ses travaux scientifiques, *Acta Math.* 38, 36-135.

Runge, C.

1898 Separation und Approximation der Wurzeln, *Enzykl. Math. Wiss.* I B 3a, 404-448.

Sabina de Lis, J.

1996 Poincaré y la teoria cualitativa de ecuaciones diferenciales, *preprint.*

Siegberg, H.W.

1981 Some historical remarks concerning degree theory, *Amer. Math. Monthly* 88, 125-139.

Sinaceur, H.

1988 Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch.F. Sturm, *Revue d'histoire des sciences* 41, 99-132.

1991 *Corps et Modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle,* Mathesis, Paris: Vrin.

1992 Cauchy, Sturm et les racines des équations, *Revue d'Histoire des Sciences* 45, 51-67.

Tietze, H., und Vietoris, L.

1929 Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie, *Enzykl. Math. Wiss.* III, AB-13, Leipzig: Teubner, 141-237.

Tzitzéica, G.

1901 Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations, *C.R. Acad. Sci. Paris* 133, 918-920.

VOLKERT, K.

1994 *Das Homöomorphieproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie,* Habilitationsschrift Univ. Heidelberg.

1996a The early history of Poincaré's conjecture, in *Henri Poincaré. Science et Philosophie,* Greffe, Heinzmann, Lorenz ed., Berlin: Akademie Verlag, 241-250.

1996b Le début de la pensée topologique chez Henri Poincaré, *Séminaire Histoire de la Géométrie,* Paris, 20-35.