PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

GERHARD HEINZMANN

La pensée mathématique en tant que constructrice de réalités nouvelles

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 1 (1998), p. 99-111
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998__3_1_99_0>

La pensée mathématique en tant que constructrice de réalités nouvelles

Gerhard Heinzmann

Université Nancy 2

Philosophia Scientiae, 3 (1), 1998, 99-111

> Le but de ce travail est de dégager, sous l'enchaînement contingent des inventions en apparence arbitraires, les nécessités intelligibles qui ont conditionné l'apparition des notions essentielles de la théorie des ensembles. C'est au départ une analyse historique et psychologique d'une création mathématique, mais orientée vers une reflexion critique sur les conditions de la pensée mathématique en tant que constructrice de réalités nouvelles.[...] Dans son progrès il n'y a pas seulement une histoire mais un développement soumis à une nécessité interne.

Telles sont les premières lignes d'un manuscrit non-daté, transcrit par Paul Cortois, d'un rapport de Jean Cavaillès, rapport préliminaire en vue d'une thèse pour le doctorat d'Etat qu'il consacre à l'histoire de la théorie des ensembles. On y discerne les traits essentiels de son épistémologie :

> Il définit son travail comme à la fois soumis à l'histoire et critique de celle-ci. [Sinaceur 1985, p. 979][1]

> L'activité mathématicienne a [...] une réalité *sui generis*s [Sinaceur 1985, p. 980]

Le devenir mathématique est imprévisible dans son développement historique mais nécessaire dans sa structure interne intelligible.

L'un des buts visés par le philosophe consiste dans une réflexion critique sur les conditions de la pensée mathématique en tant que constructrice de réalités nouvelles.

C'est ce dernier point que je me propose d'examiner en m'appuyant sur l'étude de la théorie des ensembles. Refusant à la fois un ciel platoniste, une approche hypothético-déductive, un constructivisme strict et la conception formaliste d'un jeu de symboles que nous considérons pour "illégitime" après Gödel, Cavaillès s'efforce d'accompagner les processus de génération d'objets, au niveau conceptuel, de la description d'une transformation

---

* Cet article, augmenté d'une préface, a été publié dans M. Astroh / D. Gerhardus / G. Heinzmann (éds), *Dialogisches Handeln*, Heidelberg / Berlin / Oxford : Spektrum Verlag 1997. Des extraits en langue allemande se trouvent dans le chapitre 3.3 de [Heinzmann 1995].

1 La rédaction de ce travail ayant été achevée en janvier 1994, je renvoie le lecteur intéressé au petit livre de H. Sinaceur paru en août 1994, qui constitue une excellentte vue d'ensemble sur la philosophie des mathématiques selon Cavaillès. Cf. [Sinaceur 1994].

corrélative de l'intuition. La relation "uniforme" entre "langage et travail"[2] et sa conception sous-jacente d'une intuition rigide ainsi que d'un progrès linéaire doivent être soit abandonnées soit transformées à une dialectique du concept :

> Ce n'est pas une philosophie de la conscience, mais une philosophie du concept qui peut donner une doctrine de la science. La nécessité génératrice n'est pas celle d'une activité, mais d'une dialectique. [Cavaillès 1981, p. 180]
>
> Le lien entre [la] ... superposition intuitive et la dialectique du concept reste le problème fondamental de la philosophie mathématique» [Cavaillès 1962, p. 273]. Il faut que «l'intuition dans sa quiddité progresse parallèlement à l'enchaînement dialectique du concept. [ibid.]

La dialectique en question consiste dans une interaction "rétroactive" : l'indépendance de "l'expérience" en face d'un "procédé donné" [cf. Cavaillès 1981, p. 181] ne conduit pas seulement à la découverte d'une nouvelle "traduction dans une institution immuable" [Cavaillès 1962, p. 272] mais à une transformation même dans la "zone intuitive" [Cavaillès 1981, p. 179]. Et "intuitif" est ici synonyme de conscience effective (ou effectuante) [...] relativement à un système conceptuel donné" [Cavaillès 1962, p. 274]. Le système conceptuel est considéré comme objet. Cavaillès use du mot "dialectique" comme lien entre signes et gestes, entre concept et intuition ou, en invariance du niveau considéré, entre théorie et pratique[3] où les contraires ne sont que les aspects différents d'une même totalité. En soutenant que les contraires ne sont autres chose que les aspects complémentaires d'une même réalité, que la construction d'entités requiert à la fois une activité théorique et une activité pratique, Cavaillès adopte un point de vue que Gonseth avait déjà formulé, en des termes semblables certes, mais avec une conception différente de l' "expérience" [Gonseth 1939, p. 43 sq]. Les deux auteurs tenaient, à l'instar de Kant, les concepts sans

---

2 Voir [Cavaillès 1983, p. 182] et [Cavaillès 1937, p. 136], cf. pour ce paragraphe [Heinzmann 1987, p; 40 sq].

3 Les différents couples de termes qui expriment chez Cavaillès les aspects de cette relation sont : "discours et expériences" [Cavaillès 1981, p. 179], "langue et travail" [Cavaillès 1976, p. 29], "symbole et opération intuitive" [Cavaillès 1937, p. 1936], "usage du signe et expérience sur les symboles" (mention du signe)[Cavaillès 1981, p. 96-97], "penser et faire" [Cavaillès/Lautman 1939, p. 33], "nécessaire et contingent" [Cavaillès/Lautman 1939, p. 9] et [Cavaillès 1937, p. 137], et "multiplicité et singulier/actualisation" [Cavaillès 1962, p. 271 et 273].

intuition pour vides et les intuitions sans concepts pour aveugles [cf. Kant, *Kr.d.r.V., B 75*]. Avec, toutefois, la différence que, chez Kant, les termes de la liaison sont préalablement donnés[4].

Reste le problème crucial de la réalisation technique de cette dialectique ; "comment peut-on réaliser ces expériences ?" [Cavaillès/Lautman 1939, p. 10].

Cavaillès donne la "formalisation" et "l'idéalisation" comme exemples de processus d'engendrement. [5]

L'idéalisation consiste à libérer les opérations des conditions extrinsèques à leur accomplissements, "et ceci par la position d'un système d'objets qui ne coïncide plus avec les objets de l'intuition" [ibid.] Certes, mais comment contrôler cette libération, comment reconnaître que ces conditions sont bien extrinsèques ? Comment distinguer un langage "fictif" d'un langage libéré des limitations extrinsèques ? Montrons comment Cavaillès caractérise dans notre manuscrit l'engendrement d'un élément nouveau par la procédure *du passage à la limite* à l'exemple de la construction des nombres transfinis. L'élément nouveau est alors défini au moyen d'une suite infinie d'éléments tel que :

1° il soit complètement déterminé par la suite infinie

2° il soit situé hors de cette suite et se présente donc par rapport à elle comme une réalité nouvelle

3° quoique d'une espèce différente, il se trouve appartenir au même genre que les éléments de la suite et jouisse en particulier de la même propriété de pouvoir servir comme élément d'une nouvelle suite infinie". [Manuscrit non daté de Cavaillès, p. 7].

Il est aisé de concevoir que l'éditeur de la correspondance de Cantor et de Dedekind pense à la théorie des ensembles en tant que genre, et plus particulièrement à la notion de bon ordre qui établit un lien intrinsèque entre les nombres anciens et les nouveaux. On dit qu'une relation **R** est un bon ordre sur un ensemble **X** si **R** est un ordre linéaire sur **X**, et si chaque sous-ensemble de X contient par rapport à **R** un premier élément. En 1884, Cantor écrit :

---

[4] Cf. [Cavaillès 1981, p. 178] : "C'est ici le sens plein de l'expérience, dialogue entre l'activité consciente en tant que pouvoir de tentatives soumises à des conditions et ces conditions mêmes. Distinguer l'une comme l'entendement, les autres comme sensibilité n'avancerait que si, d'un côté au mois, une structure était possible à préciser".

[5] Cf. [Cavaillès 1981, p. 177 ; Cavaillès/Lautman 1939, p. 10]

> Ma conviction que ces concepts [les nombres transfinis] doivent être interprétés comme nombres est fondée sur la détermination concrète de leur relation mutuelle, et sur le fait qu'ils peuvent être subsumés sous le même point de vue que les nombres entiers ordinaires. Depuis quelque temps déjà j'ai trouvé un fondement aux nombres [...].
>
> Je commence avec le concept de l'ensemble bien ordonné et j'appelle des ensembles bien ordonnés du même type (or de la même *Anzahl*) s'ils peuvent être mis en relation biunivoque de telle sorte que la suite des éléments soit réciproquement préservée.
>
> J'entends par nombre le symbole ou le concept d'un type bien défini d'un ensemble bien ordonné. Si l'on décide de se restreindre aux ensembles finis, on obtient de cette manière les nombres entiers finis. Mais si l'on généralise en considérant tous les types d'ensembles bien ordonnés de la première puissance, on est nécessairement conduit vers les nombres transfinis de la deuxième puissance.[6]

Le concept de nombre transfini est donc mise en relation avec celui de nombre naturel grâce aux concepts de nombre ordinal et de type de bon ordre. Puisqu'il existe des nombres finis qui correspondent aux bons ordres finis, il est naturel d'hypostasier les nombres transfinis correspondant aux bons ordre infinis. [Hallett 1986, p. 53]

Compte tenu du fait que le concept de bon ordre est utilisé comme critère d'analogie entre nombres finis et transfinis, que faut-il entendre par : existence d'un bon ordre sur l'ensemble des nombres naturels ou, exprimée en termes équivalents, quel processus établit la validité du principe d'induction complète ? Ce mécanisme une fois trouvé, on peut espérer le transférer ou l'adapter aux nombres transfinis.

> De même, écrit Cavaillès [Cavaillès 1981, p. 96], que WEIERSTRASS a sauvé le passage à la limite que semblait conditionner l'infini potentiel, en précisant la notion finie de convergence, de même est-il possible de donner un sens admissible à ces interventions de l'infini actuel.

Donnons le nom de "terme" à toute séquence de traits verticaux construits selon le schéma **R** suivant :

R: *a)* $\Rightarrow I$ (construis le terme I !)

b) $n \Rightarrow nI$ (construis le terme nI à partir de n!)

---

6 Cantor, lettre du 24 août 1884 à Kronecker, citée dans [Hallett 1984, p.50].

et soit IC l'induction complète

IC: $[\ A(I) \wedge \forall n(A(n) \rightarrow A(nI))] \rightarrow A(a)$

posant que, «si le terme I a une propriété A, et que, si cette propriété est telle que, chaque fois qu'elle appartient à un terme n, elle appartient également à nI (construit selon **R**), alors tout terme possède la propriété A».

Reste la question essentielle : ce principe est-il démontrable ? En vue de la trancher, tentons d'en effectuer la démonstration déductive :

Soit A une propriété donnée, et m un terme quelconque. Selon la première condition de l'hypothèse d'induction on a

(1) A(I) ;

si m = I, la preuve est faite.

Soit m ≠ I; selon la 2e hypothèse d'induction et **R,** on a :

(2) A(I) → A(II).

Soit m = II, on obtient par *modus ponens* (1,2) : A(II). Etc.

Pour éviter cet "etc.", il faudrait appliquer l'induction complète. Bien qu'on trouve facilement pour chaque m une démonstration de A(m), on ne peut disposer d'un schème uniforme de démonstration : la longueur de la démonstration dépend en effet de m, c'est-à-dire du nombre d'applications du *Modus ponens*. En d'autres termes, la structure interne d'une démonstration d'une instance particulière ne peut pas être considérée (ou *dite*) comme instance d'un schème de démonstration sans qu'on passe à un niveau externe ou supérieur. Cependant, bien que la démonstration envisagée ne *démontre* rien, elle semble *montrer* quelque chose. Les démonstrations des instances sont elles-mêmes des instances qui *montrent* le résultat. Le passage de la structure interne de la démonstration d'une instance à la structure externe de différentes démonstrations est ce que Cavaillès appelle une *thématisation* par *séparation verticale* [cf. Cavaillès 1976, p. 27]. Cette *thématisation proprement dite* désigne la construction itérative de différents plans de langage. "La transformation d'une opération en élément d'un champ opératoire supérieur" [Cavaillès 1937, p. 138] et le principe qui le guide, n'entraîne pas notre croyance à une certaine proposition tenue jusqu'alors pour douteuse, mais "nous montre *ce que* nous croyons". [Wittgenstein 1969, p. 375]. De ce point de vue je lis Cavaillès avec les yeux de Wittgenstein.

Dans quelle mesure sommes-nous en droit d'affirmer que *ce que* nous croyons en postulant l'existence de nombres transfinis appartient au même genre de croyance par lequel nous admettons l'existence des nombres finis ? Efforçons-nous de préciser la question en tenant compte du fait qu'une classe de bons ordres similaires — à savoir des relations d'ordre pour lesquelles existe une application biunivoque telle que leur ordre est préservée — représente un nombre ordinal unique, et qu'un ensemble ordonné est un bon ordre si et seulement si l'induction transfini y est applicable[7]. Dans ces conditions, nous sommes en mesure de formuler la question dans les termes suivants : A la forme de quel *tertium comparationis* sommes-nous en droit de comparer deux intuitions : celle dont nous avons besoin pour accepter le principe ordinaire de récurrence et celle qui nous est nécessaire pour que nous acceptions la démonstration d'une induction transfinie appliquée à un ensemble ordonné ?

Quand on connaît les conditions dans lesquelles Cavaillès a rédigé en 1940 son article *Transfini et Continu*, on ne peut que s'étonner de sa capacité de suivre et d'analyser la recherche logique de son temps telle qu'elle apparaît dans les articles de Bernays, Gentzen, Kleene et Church publiés entre 1938 et 1940. Il nous rapporte en effet que la séparation entre deux modes de construction des ordinaux ne coïncide pas avec le passage à la deuxième classe de nombres, c'est-à-dire aux classes de bons ordres similaires dénombrables, appelées types d'ordre dénombrables, mais qu'elle "s'opère à l'intérieur des ordinaux de la classe II" [Cavaillès 1962, p. 261]. Il se réfère évidemment à la démonstration de Gentzen de la non-contradiction de l'arithmétique élémentaire qui emploie une induction transfinie jusqu'à un élément de la 2e classe, dénoté par ε_0, le premier ordinal α tel que $\omega^\alpha = \alpha$. On a considéré cette démonstration de cohérence au moyen de l'induction transfinie comme une généralisation légitime du programme finitiste de Hilbert, puisque, dans la démonstration, "l'induction jusqu'à ε_0 n'est utilisée que sur des énoncés sans quantificateurs, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une induction [dans un certain sens] élémentaire" [Girard 1983, p. 45]. Cavaillès nous affirme que Bernays avait "fourni une ingénieuse démonstration du principe d'induction complète pour le segment ε_0 par le moyen de l'induction ordinaire" [Cavaillès 1962, p. 261]. Il faut d'emblée remarquer que le système de notation inventé par Bernays ne signifie évidemment pas qu'on puisse formaliser dans l'arithmétique formelle du premier ordre cette induction transfinie. Si l'on allait autrement, la démonstration de non-contradiction entière y deviendrait formalisable, ce qu'interdit le théorème de Gödel [Martin 1964, p. 177/178]. En fait, Bernays avait introduit une relation

7 Cf. e.g. [Suppes 1960, p; 230 sqq]. Principe de l'induction transfinie :
$\forall\alpha\,[\,\forall\beta\,(\beta < \alpha \rightarrow A(\beta)) \rightarrow A(\alpha)] \rightarrow A(\gamma)$.

d'ordre qui dépendait d'un nombre n de la manière suivante :

"$a <_0 b$" signifie la relation d'ordre habituelle entre les nombres naturels.

"$a <_{n+1} b$" signifie que $b \neq 0$, $a = 0$ ou b contient un facteur premier p_k qui possède un exposant plus grand que p_k dans a et que ce numéro k est dans l'ordre $<_n$ le plus grand numéro des facteurs premiers qui ne possède pas le même exposant dans les deux nombres.[cf. Hilbert/Bernays 1968/1970, p. 374.]

Exemples :

i) $3 = 2^0 \times 3^1$

$8 = 2^3 \times 3^0$

donc: $8 <_1 3$

ii) $5 = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0$

$7 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^1$

donc $5 <_1 7$

Mais : 5 est le 3e nombre premier et 7 est le 4e nombre premier

$3 = 2^0 \times 3^1$

$4 = 2^2 \times 3^0$,

donc $4 <_1 3$, d'où $7 <_2 5$.

Selon $<_1$ les nombres se trouvent rangés comme suit:

$1, 2, 2^2, 2^3$,........................

$3, 3x2, 3x2^2, 3x2^3$,..........

$3^2, 3^2x2, 3^2x2^2$,...............

3^3,...

....

$5, 5x2, 5x2^2$,......................

....

3 correspond à ω_0, 3^2 à $2\omega_0$, 5 à $\omega_0{}^2$, toute la suite à $\omega_0{}^{\omega_0}$. La suite de tous les ordres $<_n$ correspond à ε_0.

Bernays montre que $<_n$ est un bon ordre, c'est-à-dire que

(5) $\forall\alpha\ [\ \forall\ \beta\ (\beta <_n \alpha \rightarrow A(\beta)) \rightarrow A(\alpha)] \rightarrow\ A(\gamma)$.

Pour n = 0, le schéma (5) prend la forme du principe de l'induction complète, puisque chaque nombre différent de 0 possède un précédesseur. Par conséquent, pour démontrer (5), il suffit de déduire la validité du schéma pour $<_{n+1}$ de sa validité supposée pour n. C'est ce que Bernays fait dans sa démonstration.

Ainsi, la thèse selon laquelle le type du bon ordre ε_0 est réductible au type de la suite naturelle des entiers signifie que la "numérotation transfinie ne doit pas être comprise comme exigeant, pour être effectuable, une représentation intuitive d'un infini actuel. Ce dont il s'agit, c'est du passage d'un processus progressif à sa conception métamathématique, de façon analogue à ce qui se passe déjà dans l'induction complète, lorsque nous dépassons la constatation progressive des propositions particulières A(0), A(1), A(2).... par la constatation générale métamathématique que nous pouvons parvenir à A(n) pour tout n." [Bernays 1941, p. 150]. Nous avons à nouveau rejoint nos considérations sur l'induction complète, avec, toutefois, la différence que l'objet de nos "thématisations" ne sont pas des *modi ponentes, mais des inductions*.

Cependant, nous ne sommes pas au bout de nos peines. Car est-ce qu'on peut étendre l'arithmétique élémentaire de telle sorte qu'elle contienne exactement les bons ordres de certains nombres transfinis qui sont encore acceptables au sens de Cavaillès ? En d'autres termes, est-il possible que les considérations nécessaires pour justifier les bons ordres de certains nombres transfinis ne soient qu'une autre espèce du même genre que les considérations qui nous conduisaient à accepter l'induction ordinaire ? "Jusqu'où, se demande Cavaillès, peut s'étendre dans la classe II cette définition quasi finitiste des nombres ordinaux, tel est donc un problème intéressant à la fois la technique méta-mathématique et en elle-même la notion de transfini" [Cavaillès 1962, p. 263].

Cette question n'a pas une réponse unique. Chaque réponse dépend en effet du système de notation choisi, c'est-à-dire des propriétés qu'on admet comme constructives dans les définitions des fonctions utilisées. En 1969, John N. Crossley a publié un ouvrage entier portant sur la recherche d'un système de notation d'un bon ordre "naturel" pour les ordinaux plus petits que ε_ω, la ωe solution de $\omega^\alpha = \alpha$ [cf. Crossley 1968]. En 1964, Feferman et Schütte ont découvert qu'un certain nombre ordinal limite Γ_0 joue pour l'analyse un rôle analogue à celui de ε_0 pour l'arithmétique: pour chaque bon ordre de type $\alpha < \Gamma_0$, il existe une démonstration formelle précisant que l'ordre en question est un bon ordre et utilisant exclusivement des types d'ordre $< \alpha$. Dans un mémoire de mathématique,[cf. Heinzmann 1977] je me suis posé la question de savoir si les critères posés par Cavaillès en vue de faire accepter cet ordinal limite sont toujours respectés. La réponse au troisième critère n'est pas triviale. Peut-il exister pour les deux nombres limites, ε_0 et Γ_0, une notation mettant en évidence que les nombres qui leurs sont inférieurs appartiennent toujours à une espèce du même genre ? En d'autres termes, sous réserve qu'on accepte ε_0 grâce au processus d'une thématisation répétée, est-on en mesure d'établir l'acceptation de Γ_0 en fonction d'une analogie concernant le caractère commun de la suite des prédécesseurs des deux ordinaux ?

La réponse est affirmative. Voici quelques traits de sa justification :

Déf. 1 Un ordre partiel est un wpo (well partiel ordering), si chacune de ses extensions à un ordre linéaire est un bon ordre.

Déf. 2 Appelons $\sigma\,(X,\leq)$ le type d'ordre d'une extension maximale d'un wpo $\leq$ sur X à un bon ordre .

Déf. 3 Définissons X comme suit:

$0 \in X$

$a, b \in X \Rightarrow f(a,b) \in X$

Déf. 4 Définissons comme suit le wpo $(X, \leq)$:

$a \leq a$

$a \leq f(a,b)$

$b \leq f(a,b)$

$a \leq a', b \leq b' \Rightarrow f(a,b) \leq f(a',b')$

$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Théorème 1

$\sigma\,(X, \leq) = \varepsilon o$

Déf. 5 Soit f une fonction binaire définie sur On.

CLf (α) est la clôture de α sous f, c'est-à-dire le plus petit ensemble M tel que

$0 \in M,\ \alpha \subseteq M,\ x,y \in M \Rightarrow f(x,y) \in M$

Déf. 6 Soit f une fonction binaire définit sur On.

f est monotone ssi $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow$

$f(x_1,x_2) \leq f(y_1,y_2)$

f est ascendante ssi $xi \leq f(x_1,x_2)$

f est saturée ssi $a \in On \Rightarrow$ CLf $(a) \in On$

Théorème 2

Soit f une fonction binaire, monotone, ascendante et saturée de On2 à On. Il existe alors une surjection monotone de s (X, ≤) sur CLf (0). Donc: CLf (0) ≤ εo, c'est-à-dire εo est une borne supérieure de f ou le plus grand nombre atteinte par CLf (0).

Déf. 7 Définissons comme suit le wpo (X, ≤') :

$0 \in X$,

$a, b \in X$ fi $f(a,b) \in X$

$g(a,b) \in X$

$a \leq' a$

$a \leq' f(a,b)$, $a \leq' g(a,b)$

$b \leq' f(a,b)$, $b \leq' g(a,b)$

$a \leq' a', b \leq' b' \Rightarrow f(a,b) \leq' f(a',b')$

$g(a,b) \leq' g(a',b')$

$a \leq' b, b \leq' c \Rightarrow a \leq' c$

Théorème 3

$\sigma (X, \leq') = \Gamma_0$

Γ_0 est défini de la manière suivante:

κ: $On^2 \mapsto On$, avec

$\kappa (0,0) = 0$

$\kappa (0, \beta) = \varepsilon_{\beta-1}$ $[\kappa (0, 1) = \varepsilon_0]$

La fonction $\lambda\beta\ \kappa(\alpha,\beta)$ énumère les nombres critiques de $\kappa(\gamma,\beta)$, c'est-à-dire les β tels que $\kappa(\gamma,\beta) = \beta$ pour tout $\gamma < \alpha$.

Γ_0 est le nombre critique tel que $\kappa(\Gamma_0,0) = \Gamma_0$.

Théorème 4 Soient **f** et **g** deux fonctions binaires, monotones, ascendantes et saturées de On^2 à On.

Il existe alors une surjection monotone de σ (X, ≤') sur $CL_{f,g}$ (0). Donc: $CL_{f,g}$ (0) ≤ Γ_0, c'est-à-dire Γ_0 est une borne supérieure de **f** et **g** ou le plus grand nombre atteinte par $CL_{f,g}$ (0).

Les deux nombres ε_0 et Γ_0 sont en effet constructibles comme espèces différentes d'un même genre: ils peuvent être compris comme bornes de fonctions ordinales binaires, monotones, ascendantes et saturées par rapport à des extensions maximales de certains ordres partiels à des bons ordres. Le nombre ε_0 est une borne pour une seule fonction de cette sorte, Γ_0 est une borne par rapport à deux fonctions. Pour obtenir ce dernier resultat, il nous fallait adopter un processus d'abstraction non pas vertical, mais longitudinal: "*C'est le moment de la variable*" [Cavaillès 1976, p. 29], c'est le passage d'*une* variable fonctionnelle à une deuxième. Le langage reste au même plan. Par contre, pour la construction de ε_0, il nous fallait changer de plan.

Je termine mes réflexions comme je les ai commencées : avec une citation de Cavaillès:

> On voit le double enchevêtrement des deux procès [de séparation : le *thématique* et le *paradigme*] ; d'une part non seulement l'un et l'autre sont issus de la même surrection du sens, mais encore l'abstraction du premier favorise le second. [ibid., p. 32]

Références

Bernays, Paul

1941 Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie Hilbertienne de la démonstration, in: *Entretiens de Zürich 1938*, Zürich, Leemann & Co, pp. 144-152.

Cavaillès, Jean

1937 Réflexions sur le fondement des mathématiques (Congrès Descartes, t. VI), *Actualités Scientifiques et Industrielles* **535**, Paris, Hermann, pp. 136-139.

1939 La pensée mathématique. *Bulletin de la Société Francaise de Philosophie* 40 (1946), pp. 4-13.

1962 Philosophie mathématique, Paris, Hermann.

1976 Sur la logique et la théorie de la science ([1]1947), Paris, Vrin.

1981 Méthode axiomatique et formalisme, *Paris, Hermann.*

Cortois, Paul

1994 De wetenschapstheorie volgens Jean Cavaillès. Sur la logique et la théorie de la science: incleiding en kommentaar. Brussel, Koninklijke Academie voor Wetenschappen en Schone Kunsten.

Crossley, John

1969 Constructive Order Types, Amsterdam, North-Holland.

Girard, Jean-Yves

1983 Le théorème d'incomplétude de Gödel. In: *Cinq conférences sur l'indécidabilité*, organisées en 1982 à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (Hrsg. N. Bouleau/J.V. Girard/ A. Louveau), Paris.

Gonseth, Ferdinand

1939 Validité universelle dans notre connaissance du monde extérieur; Communication faite aux Entretiens d'Amersfoort 1939, in: *Actualités Scientifiques et Industrielles* 849, Paris, Hermann, pp. 1-19 & pp. 35-65 (Discussion).

Hallet, Michael

1984 Cantorian Set Theory and Limitation of Size, Oxford, Clarendon Press.

Heinzmann, Gerhard

1977 Diplomarbeit: *Eine Charakterisierung der Ordinalzahl* Γ_0, Heidelberg, Mathematisches Institut.

1987 La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques et sa différence avec celle de Lautman, *Revue d'histoire des sciences* 40, 1987, pp. 31-47.

1992 L'engangement de Jean Cavaillès: philosophie et résistance. *In*: Ph. Soulez (éd.), *La guerre et les philosophes. De la fin des années 20 aux années 50.*, Paris, PUF, pp. 145-154.

1995 Zwischen Objektkonstruktion und Strukturanalyse. Zur Philosophie der Mathematik bei Jules Henri Poincaré, Göttingen.

Hilbert, David/Bernays, Paul

1968/70 *Grundlagen der Mathematik* I, II (Berlin/Heidelberg ^{1}1934/1939), Berlin, Heidelberg, New York, Springer.

Martin, Roger

1964 Logique contemporaine et formalisation, Paris, PUF.

Sinaceur, Hourya

1981 L'épistémologie de Jean Cavaillès. *Critique* 461 (1985), pp. 974-988.

1994 *Jean Cavaillès. Philosophie mathématique.* Paris, PUF.

Suppes, Patrick

1960 *Axiomatic Set Theory.* Princeton/New Jersey, Van Nostrand.

Wittgenstein, Ludwig

1987 *Philosophische Grammatik* (ed. R. Rhees), Frankfurt, Suhrkamp.