PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

ALAIN MICHEL

Après Jean Cavaillès, l'histoire des mathématiques

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 1 (1998), p. 113-137
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998__3_1_113_0>

Après Jean Cavaillès, l'histoire des mathématiques

Alain Michel

Université de Provence

Philosophia Scientiae, 3 (1), 1998, 113-137

A la fin d'un texte retrouvé dans ses papiers après sa mort, et publié en 1949 par Georges Canguilhem sous le titre *Mathématiques et formalisme* , Jean Cavaillès remarque qu'il y a deux manières possibles de combler les lacunes dans l'édifice en devenir des mathématiques. L'une est pour ainsi dire locale, elle consiste à aller, "avec un peu d'agilité", d'un point à un autre de l'édifice. L'autre est globale, elle ne se satisfait que de la position d'un plan total où tout est relié. Ce dernier, note Cavaillès, n'est qu'un en soi, et il ajoute (nous soulignons) :

> *Les difficultés ne s'éliminent pas de cette façon* : le mode d'être des intuitions abstraites, la plasticité de matière qui permet les traductions de théories l'une sur l'autre, surtout les entrecroisements de méthodes, les "moments solennels" dont parle M. Brunschvicg, où deux disciplines se rejoignent, *autant de problèmes que la réflexion philosophique ne sait résoudre*. (...) le développement de la mathématique entière se fait selon un rythme nécessaire (...) En préciser les modalités en examinant de plus près *cette histoire, qui n'est pas une histoire, peut aider à comprendre*, non pas en tout cas à définir, si définition signifie réduction...[Cavaillès 1994, pp. 663-664].

Reconnaissance du fait que les mathématiques sont un devenir authentique, qui ne va pas sans lacunes, ni accidents imprévisibles, mais se révèle, à l'analyse, un développement nécessaire, refus de la position d'un en soi des mathématiques, identification, comme essentiels, des problèmes du statut des intuitions abstraites et de la constitution des théories, impossibilité, en tout cas illégitimité, d'une entreprise qui consisterait à vouloir définir la mathématique, au sens où définir c'est réduire, on aura reconnu, formulés dans le style inimitable, quelques uns des thèmes majeurs, et constants, de la pensée de Jean Cavaillès. Sans procéder à un examen, ou à un réexamen, de ces thèmes, qui conduirait presque nécessairement, tant l'unité en est forte, à un exposé d'ensemble, on peut les prendre comme autant de repères sûrs bornant en quelque sorte le champ de la réflexion.

On aura remarqué qu'ils ne sont proposés que comme développement d'un thème principal et pour ainsi dire unique. S'il est demandé d'éviter de céder à la tentation de définir l'activité mathématique, dont la dernière phrase du texte nous dit qu'elle «est objet d'analyse et possède une essence, (que), comme une odeur ou un son, elle est elle-même», c'est qu'on s'est d'abord proposé de la comprendre. Et c'est pour la comprendre qu'on veut examiner de plus près cette histoire dont il nous est dit qu'elle n'est pas une histoire —

ce que la fin de [Cavaillès 1981] précisait en ces termes : «du moins au sens de devenir opaque, saisissable seulement dans une intuition artistique». C'est à cette relation à l'histoire que je voudrais m'attacher comme à un des thèmes dont il est légitime de penser qu'il était, au moment où Cavaillès a réfléchi et écrit[1], le plus chargé de sens pour l'avenir, et qu'il reste aujourd'hui, pour ceux qui essaient de travailler après lui à l'intérieur de ce qu'ils voudraient voir se constituer en tradition, le plus éclairant, le plus fécond. Encore n'en sera-t-il ici question qu'indirectement, et pour y abriter des interrogations plutôt que pour y affirmer des certitudes.

Qu'un tel rapport soit intime, et touche à l'essentiel, nul ne saurait sérieusement en douter, et les justifications ne peuvent être ici que des rappels.

Il suffit en effet de rappeler que Cavaillès n'a pas cru pouvoir se prononcer philosophiquement sur les problèmes de toute sorte que soulevait, dans le temps même où il se formait à la réflexion, le développement des grandes théories mathématiques et logiques, sans commencer par en étudier l'histoire. Il suffit d'évoquer le style de traitement, toujours soigneusement historique, que la "grande thèse" [Cavaillès 1981] réserve aux problèmes posés par l'introduction de la théorie des ensembles abstraits dans l'analyse, et leur traitement par les analystes français, notamment Borel et Lebesgue, du développement des axiomatisations de la géométrie, etc. Quant à la théorie qui se situait alors au lieu que son analyse propre, et non une opinion empruntée, lui indiquait comme étant le point véritablement stratégique, et dont on sait que, pour cette raison même, il l'avait choisie comme sujet de thèse, de préférence à la théorie des probabilités, nous voulons parler bien entendu de la théorie abstraite des ensembles, il conviendrait de prendre l'expression même "en faire l'histoire" au sens le plus opératif du terme (selon le mot de Georges Canguilhem), puisqu'elle n'était alors qu'à peine abordée.

Ces rappels nécessaires ne seraient pas suffisants. Il conviendrait encore d'analyser la manière dont Cavaillès se représente cette "histoire qui n'est pas une histoire...", le rôle essentiel qu'elle joue dans l'expression, et dans la détermination même, de sa pensée ; de souligner comment, dans l'écrit posthume, la présentation, à la suite de la critique de Husserl, de la tâche philosophique comme celle d'avoir à rendre compte du progrès comme tel, atteste, sous une autre forme, l'intimité du lien à l'histoire. Nous sera-t-il permis d'ajouter que, si cette relation à l'histoire agit, dans l'œuvre de Cavaillès, comme un appel, une invitation au travail,

[1] Ce qui ne veut pas dire : à ses yeux même.

elle est aussi, en un autre sens, ce qui la protège — faut-il dire définitivement ? — de toutes les formes de commentaires hâtifs et d'interprétations intéressées dont elle a, jusqu'ici, été préservée, ce qui n'est pas si courant dans la tradition philosophique française.

Ces quelques remarques suffiront peut-être à justifier l'entreprise d'un essai de validation par l'histoire, au double sens où, comme devenir imprévisible, et caractérisé comme tel par Cavaillès, elle a continué après lui, et où, en tant que regard réfléchi que nous portons sur ce devenir, elle nous invite à modifier notre pensée sur ce qui est advenu. Ce n'est pas, me semble-t-il, se montrer infidèle à l'enseignement de Cavaillès que de poser aujourd'hui la question : que nous apprend l'histoire, si, cherchant à en dégager la leçon, on la confronte aux thèses auxquelles la réflexion sur cette histoire même l'avait conduit ?

Laissant délibérément de côté l'examen direct du difficile problème de l'interprétation de la pensée de Cavaillès sur l'histoire, on proposera, à propos d'un exemple, une réflexion sur un point d'histoire lié à la théorie des nombres, mais aussi à l'algèbre : la genèse du concept d'idéal — première étape dans la constitution d'une théorie des nombres algébriques.

Cavaillès, il est vrai, n'a pas explicitement traité la question dans son œuvre écrite : il n'empêche qu'elle touche cependant à l'essentiel. La référence à Dedekind et à Hilbert domine son premier travail (les deux thèses), pour des motifs qu'il ne faudrait peut-être pas réduire trop vite au rôle respectif des deux mathématiciens dans la genèse de la théorie des ensembles et de la méta-mathématique. Les deux mathématiciens jouent dans l'histoire de la théorie des nombres algébriques un rôle capital : on doit au premier, qui a écrit plusieurs mémoires sur la question, le concept même d'idéal, un des piliers de cette algèbre abstraite dont Hourya Sinaceur [Sinaceur 1987, 1994] a montré l'importance pour la maturation de la pensée de Cavaillès ; le second, auteur du célèbre *Zahlbericht* [Hilbert 1897] a mis la découverte par Kummer des nombres idéaux au centre de sa réflexion sur la nature de la généralisation mathématique. Or, il s'agit là d'un point décisif pour sa philosophie mathématique, et ses conceptions en sont directement issues.

Le point de départ du travail de Kummer est bien connu.

On dispose en arithmétique, probablement depuis longtemps (on a ce qu'on peut considérer comme un équivalent, mais non pas l'énoncé lui-même, dans l'arithmétique grecque), d'un résultat très important, qu'on appelle à cause de cela le plus souvent "théorème fondamental de l'arithmétique", qui consiste à affirmer que tout nombre entier naturel x est décomposable de manière unique en un produit d'entiers premiers entre eux, chacun d'eux étant éventuellement élevé à une certaine puissance :

$$x= a_1^{P1} a_2^{P2}...a_k^{Pk}$$

On sait que l'unicité de la décomposition n'est pas vérifiée dans certains ensembles de nombres qui ne sont pas sans intérêt. L'exemple le plus simple est sans doute celui de l'ensemble des nombres de la forme : $a+b\sqrt{-5}$ (a et b étant des entiers naturels), structuré en anneau, qu'on note $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (on a aussi $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$). Ainsi des exemples simples des nombres 6, 9 et 21 :

$$6=2.3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

$$9=3.3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$

ou :

$$21=3.7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})$$

On montre facilement que dans ces décompositions, les facteurs, tels que 2, 3, 7, ..., sont *irréductibles*, c'est à dire n'admettent pas de décomposition autre que la décomposition triviale (en l'unité et le nombre lui-même). Convenant de réserver le nom "premiers" aux nombres qui jouissent de la propriété, dite de Gauss, mais dont on trouve déjà un analogue chez Euclide, de ne pas diviser un produit sans diviser un des facteurs, on peut *dissocier* les deux propriétés traditionnelles des nombres premiers. On voit que, dans les ensembles tels que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, les éléments irréductibles ne sont pas nécessairement premiers (2 et 3 sont irréductibles — on le voit assez facilement —, mais non premiers : ils divisent le produit sans diviser le facteurs $(1+\sqrt{-5})$ et $(1-\sqrt{-5})$.

C'est bien là le phénomène fondamental pour Kummer : la constatation de l'échec de cette factorisation unique (valide pour des entiers "ordinaires") pour des entiers d'un type particulier, que Kummer est justement conduit à considérer. Non pas sans doute à propos d'un essai de démonstration du dernier théorème de Fermat — bien qu'il s'intéresse à cette "curiosité", et se montre conscient des applications possibles qu'on peut y faire des résultats —, mais beaucoup plus probablement à propos d'un problème interne et central de la théorie des nombres : la démonstration de théorèmes d'importance majeure, qu'on appelle les *lois de réciprocité* quadratique, dites "supérieures", énoncées et démontrées pour la première fois par Gauss, et exemples même, depuis Gauss et Legendre, de "théorèmes profonds" [2].

---

[2] La tradition en la matière remonte à Kurt Hensel, dans deux conférences

L'origine des recherches qui se développent alors sur les lois de réciprocité est un mémoire de 1839 de Jacobi [Jacobi 1839, 1843] dans lequel ce dernier considérait des nombres complexes particuliers, les mêmes que ceux que Lamé envisageait aussi, à peu près à la même époque, pour les besoins d'une démonstration générale qu'il croyait avoir trouvée du dernier théorème de Fermat. Ces nombres, qu'on appelle aujourd'hui "entiers cyclotomiques", mais que Jacobi et Kummer considèrent comme des nombres complexes d'un type particulier, sont construits (gebildeten) à partir d'une racine (complexe) primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité, soit α. Ils se présentent dans la pratique comme des polynômes en α à coefficients entiers, donc de la forme $a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n$ où les coefficients a_i sont entiers, et où $\alpha\neq 1$ est solution de $\alpha^n=1$, et ils sont appelés *cyclotomiques* à cause de l'interprétation géométrique possible de α comme un point sur un cercle du plan complexe, par exemple le cercle unité $|z|=1$.

Dans son mémoire (Gratulationschrift) de 1844 "sur les nombres complexes formés de racines de l'unité et de nombres entiers" [Kummer 1844], Kummer prend explicitement la suite de Jacobi et de son étude des lois de réciprocité, et développe le calcul sur les entiers cyclotomiques d'exposant premier.

Il envisage notamment le problème suivant : pour un nombre premier donné n, *décomposer* les entiers premiers p congrus à 1 modulo n (tel que $p\equiv 1 \mod n$) en produits de (n-1) entiers cyclotomiques. Kummer réussit à le faire pour $n \leq 19$, et $p \leq 1000$, mais il s'aperçoit (sans doute sur une suggestion de Jacobi) que la décomposition est impossible pour n=23 et p=47 : on *ne peut pas* décomposer 47, qui est bien un entier premier du type donné ($47\equiv 1 \mod 23$) en produits de 22 entiers cyclotomiques. C'est en considérant les choses de plus près que Kummer découvre le

---

prononcées en 1910 à la mémoire de Kummer, mais elle est sans grand fondement, bien qu'elle ait été reprise et répétée ensuite à satiété. Elle ne repose en effet, comme on le sait maintenant, que sur une information de troisième main, recueillie plus de 60 ans après la découverte. Voir les études de[Edwards 1975, 1977].

[3] Les nombreux calculs que Kummer avait faits pour l'exposant inférieur à 23 n'avaient pu que le renforcer dans la croyance, partagée alors par tous les mathématiciens, dans la validité de la factorisation unique (Euler, Lamé, Cauchy, etc.). Kummer lui-même était certainement très confiant dans sa validité pour les entiers cyclotomiques, d'où sa déception. Mais on peut se dire, comme Edwards [Edwards 1977] que, sans cet optimisme, il n'aurait pas été conduit à donner à la théorie la forme qu'il lui a finalement donnée : il croyait sans doute fermement qu'une modification de l'idée devait suffire à lui restituer

fondement d'un tel phénomène : l'unicité de la factorisation ne semble pas valide pour les entiers cyclotomiques construits au moyen d'une racine $23^{ème}$ de l'unité [3].

Dans les termes indiqués plus haut, la chose peut être présentée assez simplement.

Jacobi avait remarqué que, pour n=23, le nombre que l'on définit comme la norme de tout élément de $\mathbb{Z}[\alpha]$ (produit des (n-1) éléments conjugués — la conjugaison étant l'élévation de la racine à une puissance — était un entier de la forme $(x^2+23y^2)/4$. Le produit 4.47=188 étant impossible à écrire comme somme de deux carrés de la forme (x^2+23y^2), on voit qu'aucun entier cyclotomique, pour n=23, n'est de norme 47. Or, Kummer établit dans le même temps que, pour un entier cyclotomique tel que $f(\alpha)=(1-\alpha+\alpha^{21})$, on a :

$$N(1-\alpha+\alpha^{21})=47.139,$$

et que le nombre $N(1-\alpha+\alpha^{21})$ est donc tout à la fois *irréductible* (aucun facteur n'étant de norme 47) mais *non premier* (divise 47.139, mais ne divise ni 47, ni 139, car sa norme ne divise ni $N(47)=47^2$ ni $N(139)=139^2$). Ainsi la factorisation unique réussit pour les entiers cyclotomiques d'exposant inférieur à 23, mais échoue pour les entiers cyclotomiques d'exposant égal à 23. Le fait apparaît douloureux ("dolendum", dit-il) à Kummer [4]. De l'effort pour sauver l'unicité, et pour trouver un substitut, ou une forme affaiblie, de factorisation unique, susceptible de permettre de pénétrer l'étude des entiers cyclotomiques, sortira la théorie *des nombres (complexes) idéaux*. Le mémoire de 1846 *Zur Theorie der Complexen Zahlen* [Kummer 1846] développe effectivement une théorie de la factorisation nouvelle pour les entiers cyclotomiques d'exposants premiers, c'est à dire dans le cas général et non pas seulement dans le cas particulier d'entiers premiers congrus à 1 modulo n, théorie dont le mémoire suivant, de 1847, *Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren* [Kummer 1847] donnera le détail. Quant à ce qu'on peut considérer comme deux applications, les plus importantes aux yeux de Kummer, l'une, la démonstration (partielle : seulement pour certains types de nombres premiers dits "réguliers") du dernier

---

4 Il se référera plus tard à ce passage comme à une "lamentation" (Klage). En 1847, il écrit à Jacobi, à propos de la démonstration fautive du dernier théorème de Fermat par Lamé : «Quant à la proposition élémentaire qu'un nombre complexe composé est décomposable en facteurs premiers de façon unique, que vous citez très pertinemment comme un énoncé manquant dans cette démonstration, je peux vous assurer qu'elle n'est pas vraie en général.»

théorème de Fermat, se trouve déjà dans le mémoire de 1846, l'autre, celle des lois de réciprocité supérieures, n'apparaîtra qu'un peu plus tard, en 1859 [Kummer 1859].

Il s'agit de décomposer un entier cyclotomique en ses facteurs premiers. L'idée de Kummer est simple : dans les cas où ces facteurs n'existent pas, on va introduire des facteurs premiers dits "idéaux" [5]. Un trait remarquable de la Kummer ne cherche pas à préciser autrement la *nature* de ces facteurs premiers idéaux — se contentant

[5] Ainsi, dans notre exemple, le double fait que le nombre $N(1-\alpha+\alpha^{21})=47.139$ est produit de 22 facteurs, et qu'aucun entier cyclotomique n'est de norme 47, entraîne que 47 est sans facteurs premiers. Il s'agit alors de définir des facteurs premiers (nombres) idéaux de 47 de manière à maintenir la plus grande partie de leurs propriétés usuelles (qu'il énonce dans un passage de son second mémoire : lois sur le produit, etc.).Ainsi, si n est premier et plus petit que 23, on sait que l'entier cyclotomique $(1-\alpha+\alpha^{21})$ est décomposable comme produit de deux nombres premiers, l'un de norme 47, l'autre de norme 139. Mais, suivant un autre résultat de décomposition, on sait qu'on peut obtenir les deux nombres : 47 d'une part, 139 d'autre part, comme produits de 11 facteurs irréductibles de norme respective 47 et 139, d'où le produit 47.139 est exprimable aussi comme produit de 22 facteurs, pour moitié de norme 47^2, et pour moitié de norme 139^2. D'où l'idée de poser qu'il y a : 22 facteurs premiers *idéaux* de 47 (un pour chaque conjugué de $(1-\alpha+\alpha^{21})$), et, de même, 22 facteurs premiers *idéaux* de 139 (un pour chaque conjugué de $(1-\alpha+\alpha^{21})$), en visant le résultat suivant : il faut que, dans la décomposition $N(1-\alpha+\alpha^{21})=47.139$, chaque facteur du membre de gauche $N(1-\alpha+\alpha^{21})$ soit divisible par *deux* facteurs premiers irréductibles. On dira alors que *chacun* des 22 facteurs premiers est divisible par *deux* facteurs premiers *idéaux* des nombres 47 et 139.

[6] Voir.le mémoire de 1851 en français [Kummer 1851, p. 447] : "Qu'il me soit permis de signaler ici en peu de mots l'analogie de cette théorie avec les principes fondamentaux de la chimie. La composition des nombres complexes peut être envisagée comme l'analogue de la combinaison chimique; les facteurs premiers correspondent aux éléments, ou plutôt aux équivalents de ces éléments. Les nombres complexes idéaux sont comparables aux radicaux hypothétiques, qui n'existent pas par eux-mêmes, mais seulement dans les combinaisons; le fluor en particulier, comme élément qu'on ne sait pas représenter isolément, peut être comparé à un facteur premier idéal. (...) En comparant les méthodes de l'analyse chimique à celle de la décomposition des nombres complexes, on trouve encore des analogies surprenantes. Car, de même que les réactifs chimiques, joints à un corps en dissolution, donnent des précipités au moyen desquels on reconnaît les éléments contenus dans le corps proposé, de même les nombres que nous avons désignés comme étant réactifs des nombres complexes, font connaître les facteurs premiers contenus dans les nombres complexes en mettant en évidence un facteur premier analogue au

de développer une analogie chimique [6] — une caractérisation qui posait des problèmes redoutables, et qui occupera les efforts des mathématiciens longtemps après Kummer. Il ne cherche pas à décrire ces facteurs, il se contente de définir *ce que cela signifie de dire qu*'un nombre est divisible par eux [7]. Le fondement de la théorie est ainsi le concept de *diviseur premier.* Mais on ne définit pas tant le concept de diviseur, que ceux de *divisibilité* par un tel diviseur, et de *congruence* modulo un tel diviseur. On explique ce que cela signifie de dire qu'une entier cyclotomique donné est divisible par un diviseur premier. On définit l'énoncé : $h_1(\alpha)\equiv h_2(\alpha)$ mod $f(\alpha)$. On obtient une factorisation de l'entier cyclotomique, mais en *diviseurs* premiers, et non en *entiers* cyclotomiques premiers. On n'a une factorisation en entiers cyclotomiques *que* dans le cas où tout diviseur premier est le diviseur d'un entier cyclotomique. Pour n=23, les diviseurs premiers de p=47 ne sont pas diviseurs d'entiers cyclotomiques. Il y a alors échec de l'unicité de factorisation. En général, il y a deux situations. Dans les cas où le nombre a un diviseur premier existant ou *actuel* $h(\alpha)$, alors les deux types de divisibilité ou congruence (celle modulo ce $h(\alpha)$ existant (ou actuel) et l'autre modulo un diviseur premier idéal) coïncident : la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne, dès que celle-ci est valide. Mais la nouvelle est valide dans des cas où l'ancienne ne l'était pas. Dans l'exemple de n=23, la congruence modulo le diviseur premier de 47 est définie *même si on n'a pas* d'entier cyclotomique premier $h(\alpha)$ qui divise 47. Ainsi, dans les cas où il n'y a *pas* de diviseur premier existant (ou actuel), la divisibilité (et la congruence) modulo un diviseur premier devient la divisibilité (et la congruence) modulo un diviseur premier *idéal.* Les énoncés impliquant la divisibilité et la congruence mod un diviseur premier gardent une signification même dans les cas où il n'y a pas de diviseur premier existant (ou actuel).

Il y avait là une procédure originale, pour le résultat de laquelle

---

7 Appelant P le diviseur premier hypothétique de 47 qui divise $(1-\alpha+\alpha^{21})$, et $\psi(\alpha)$ le produit des conjugués de $(1-\alpha+\alpha^{21})$ autres que $(1-\alpha+\alpha^{21})$ lui-même, qui est divisible par P, on trouve que $\psi(\alpha)$ est divisible par tous les diviseurs premiers idéaux de 47, sauf P. D'où : le produit $f(\alpha)\psi(\alpha)$ est divisible par 47 si et seulement si $f(\alpha)$ contient le diviseur premier P manquant. Renversant la procédure, Kummer pose par définition dans ce cas qu'un entier cyclotomique $f(\alpha)$ est *divisible par P* si et seulement si le produit $f(\alpha)\psi(\alpha)$ est divisible par 47 — définition qui devra évidemment être donnée dans le cas général, et faire l'objet d'une élaboration, pour tenir compte de phénomènes liés à la multiplicité (avec laquelle un diviseur premier donné divise un entier cyclotomique donné) et à l'unicité (deux entiers cyclotomiques ayant même diviseur sont les mêmes *modulo* un multiple unité).

Kummer n'a pas trouvé mieux que le terme d'"idéal", qui n'était peut-être pas le meilleur, et que Dedekind reprendra. Et il faudrait donc parler pour la procédure elle-même d'"idéalisation", en remarquant qu'il ne s'agit pas tout à fait d'une généralisation du type de celles qu'on avait déjà opérées sur les nombres : un nombre idéal n'est pas vraiment une espèce (ou une classe) généralisée de nombres complexes : plusieurs nombres complexes différents déterminent le même nombre idéal, puisque des entiers cyclotomiques différents seulement par un multiple de l'unité ont le même diviseur.

Le seul exposé de la démarche montre bien tout ce que la théorie hilbertienne de la métamathématique doit, jusque dans sa formulation (la distinction entre énoncés idéaux et énoncés réels) à ce travail de Kummer, auquel Hilbert se réfère (notamment dans son grand mémoire sur l'infini) comme à un paradigme de la généralisation mathématique — qui trouvera le prolongement que l'on sait chez Cavaillès [8].

Quand on suit d'un peu près le contenu de ses premiers mémoires de Kummer, on est frappé par les origines modestement opératoires de la théorie. Kummer reste guidé, durant toutes ces recherches, par son *expérience* des calculs dans l'anneau des entiers cyclotomiques, et, son approche est fondamentalement *analytique et inductive* : on cherche alors à déduire assez d'information de la considération de nombres particuliers pour rendre possible la construction (explicite) des nombres premiers diviseurs $h(\alpha)$ dans un grand nombre de cas... C'est la constatation du fait qu'*il y a des cas* où cette méthode de construction échoue à produire le facteur attendu qui conduit Kummer à abandonner l'hypothèse naïve de l'unicité de la factorisation — un abandon ou une rupture rendus sans doute plus faciles par les contre-exemples connus depuis Fermat (par Euler, Liouville, Jacobi) — et la conscience depuis Gauss de la nécessité d'avoir en ces matières à produire une démonstration.

D'autre part, on l'a vu, alors qu'il définit soigneusement le concept de divisibilité par un facteur premier idéal et donne les propriétés qui en résultent, Kummer ne se prononce pas sur la *nature* d'un nombre idéal. Dès le début de la théorie, et dans toute la discussion qui porte sur les facteurs premiers idéaux, il parle des nombres idéaux sans jamais dire ce qu'une telle expression signifie, sans se demander à aucun moment : "qu'est-ce qu'un nombre

---

[8] Cavaillès admirera, et commentera avec profondeur, dans [Cavaillès 1981], les conceptions hilbertiennes. Il leur donnera une forme originale (distinction du thème et du paradigme) dans son écrit posthume Sur la logique et la théorie de la science [Cavaillès 1976].

idéal ?" [9] En fait, il se contente de décrire la manière possible de les *représenter*, et les *calculs* qu'on peut faire à leur propos. Le contexte de l'invention des idéaux est typiquement un contexte d'*usage*, et d'usage *opératoire* (on pourrait aller jusqu'à dire : algorithmique) : contexte d'usage des diviseurs. On définit l'énoncé $h_1(\alpha) \equiv h_2(\alpha)$ mod $f(\alpha)$ diviseur, et cette connaissance est suffisante pour déterminer le diviseur en question...

Le travail de Kummer (qui présentait des lacunes [10]) n'est que le premier d'une longue série de travaux consacrés à la théorie de la factorisation idéale des entiers algébriques. Kummer avait montré qu'une théorie de la factorisation était nécessaire et possible dans le cas des entiers cyclotomiques. Il allait revenir à Dedekind et Kronecker de donner, concurremment, les théories finales et générales.

Pour Dedekind, c'est celle des *idéaux*, (la première version, mise au point, de l'aveu même de Dedekind, après beaucoup d'efforts, date de 1871).

Pour Kronecker, c'est celle des *diviseurs*, mise au point dès 1859, mais la publication n'aura lieu qu'en 1882 : ce sont les célèbres *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* [Kronecker 1882].

Dans les deux cas, avec des styles mathématiques très différents, le but est clair : il s'agit de faire, pour un corps général de nombres algébriques, c'est à dire pour une extension algébrique du corps des rationnels, ce que Kummer a fait dans un cas particulier, celui des entiers cyclotomiques. C'est exactement une généralisation.

Elle se fonde sur une notion clé, celle d'*entier dans un corps de nombres algébriques*, l'important étant la détermination correcte de l'anneau auquel s'applique la théorie des idéaux. Il y a plusieurs

---

[9] Il semble avoir entendu simplement par là un *produit* de facteurs premiers idéaux. Son texte le plus explicite à ce propos est sans doute celui-ci : «Puisque les nombres complexes idéaux, comme facteurs des nombres complexes, jouent le même rôle que les facteurs existants, nous les désignerons désormais de la même manière que ceux-ci, par $f(\alpha)$ etc., de telle sorte que $f(\alpha)$, par exemple, sera un nombre complexe satisfaisant à un certain nombre déterminé de conditions caractéristiques pour les facteurs premiers idéaux, abstraction faite de l'existence du nombre $f(\alpha)$.» (§6 de son mémoire en français de 1851) [Kummer 1851, VI], cf. aussi le §8 de[Kummer 1847].

[10] Ces défauts ont été relevés notamment par A. Weil (Introduction to Collected Papers by E. Kummer, Oeuvres scientifiques, Paris, t. III, pp. 379-389) et [Edwards 1975].

manières de le déterminer. La première, celle de Dedekind dans [la deuxième édition des *Vorlesungen über die Zahlentheorie* de Dirichlet, consiste dans une généralisation directe de celle de Kummer [11].

Sans entrer dans les détails, on peut dire que la formulation de Dedekind s'inscrit entièrement dans (ce qu'on appelle aujourd'hui) l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques, qui peut être quelconque, K — et il est très caractéristique non seulement de la pratique, mais encore de la philosophie, mathématique de Dedekind, de le voir choisir pour représenter l'ensemble des éléments du corps considéré comme symbole la lettre seule, sans indication de coordonnée, K (de préférence à $K[\alpha]$ qui suggère une base particulière — pour Dedekind c'est le corps qui importe, et la représentation explicite du corps dans la forme $\mathbb{Q}(\alpha)$ par exemple (solution d'une équation algébrique sur $\mathbb{Q}$), qui procède d'un choix arbitraire, peut, et donc doit, être évitée [12].

Comme pour Kummer, le problème pour Dedekind était de définir les "facteurs premiers idéaux" de telle sorte que les propriétés fondamentales restent valides. Sa première formulation, celle de 1871 (du Supplément à la troisième édition des *Leçons...* de Dirichlet), n'est, de ce point de vue, comme il le reconnaîtra plus tard, que la théorie de Kummer, présentée dans des "habits nouveaux" [13].

Kummer avait fait jouer un rôle fondamental à la notion de *divisibilité* d'un idéal par un autre, et l'avait définie par des conditions de congruence (deux nombres idéaux sont *égaux* s'ils sont divisibles par les mêmes nombres idéaux premiers, de même multiplicité). Et il avait décrit ses "diviseurs premiers idéaux" par le moyen de *tests de divisibilité*. On aura exactement la même définition dans le cas général, et toutes les définitions de Dedekind dans ce mémoire sont des généralisations assez naturelles de celles de Kummer.

---

[11] Voir [Dirichlet 1871]. Il y a eu de nombreuses autres éditions. Les deux autres sont la version ultérieure, qu'on pourrait appeler "deuxième théorie", de Dedekind (en fait les différentes versions ultérieures) et celle de Kronecker.

[12] Il déclare à Lipschitz qu'il a "défiguré" (verunziere) le concept de corps de nombres en introduisant le signe $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans son exposé français (lettre du 10 juin 1876, *Rudolph Lipschitz Briefwechsel*, W. Scharlau, ed., Vieweg, 1967, pp. 238-239, ou Dedekind.Ges. Werke, vol. 3, p. 469 ; citée par H. Edwards, *The Genesis of Ideal Theory*, Archive for History of Exact Sciences, 23, 1980, p. 343, note ++)

[13] Voir. le Xème Supplément des *Vorlesungen über die Zahlentheorie* de Dirichlet, [Dirichlet 1877, § 162 (fin)].

Dedekind veut apporter une réponse radicale aux questions qu'il considère comme ayant été laissées en suspens par Kummer — en laissant de côté les erreurs dont la plus importante sera corrigée plus tard (1856) par lui[14]. Kummer, on l'a vu, ne s'était guère préoccupé de définir ses "nombres idéaux" — se contentant de les décrire par le moyen d'énoncés opératoires, conduisant à la mise en œuvre de tests de divisibilité.

Une telle situation était profondément insatisfaisante aux yeux de Dedekind, et ceci pour deux raisons.

D'abord à cause du vague et de l'obscurité, qu'il souligne à plusieurs reprises, des définitions de Kummer :

> Kummer n'a pas défini les nombres idéaux eux-mêmes, mais seulement la divisibilité par ces nombres... Bien que cette introduction de nouveaux nombres soit tout à fait légitime, il est toutefois à craindre d'abord que, par le mode *d'expression* que l'on a choisi, dans lequel on parle de nombres idéaux déterminés et de leur produits, et aussi par l'*analogie présumée* avec la théorie des nombres rationnels, on ne soit entraîné à des conclusions précipitées et par là à des démonstrations insuffisantes, et en effet cet écueil n'est pas toujours évité.[...] Cette constatation m'a conduit naturellement à fonder toute la théorie des nombres du domaine D sur cette définition simple entièrement délivrée de toute obscurité et de l'admission des nombres idéaux[15].

Et il cherche une construction qui permette de caractériser les diviseurs premiers *sans* les trouver, ou les exhiber, explicitement — qui rende possible une description de la théorie qui soit vraiment abstraite — c'est à dire qui n'oblige pas à exposer la construction effective des diviseurs premiers.

La situation ne pouvait satisfaire Dedekind pour une autre raison, non moins importante, c'est que la formulation de Kummer dépend d'une *représentation explicite et particulière* du facteur — l'entier Ψ qui définit le test de divisibilité est objet d'un un choix arbitraire. Dedekind veut construire une théorie fondée sur les propriétés intrinsèques des facteurs. Et il se réfère explicitement à ce propos la théorie riemannienne des fonctions, qui se fonde sur le seul concept (général) de fonction et ne veut considérer que leurs

---

[14] *Über die den Gaussischen Perioden der Kreisteilung entsprechenden Congruenzwurzeln der Gleichung $\omega^n=1$ gebildet sind, wenn eine zusammengesetzte Zahl ist,* Math Abh... 1-47; C. P., 1, 583-629.

[15] Voir [Dedekind 1969], vol. 3, pp. 268 et 271-272.

propriétés essentielles, en renonçant à toute représentation explicite. L'exigence riemannienne est érigée par Dedekind en principe : l'objet mathématique doit être donné par ses propriétés caractéristiques plutôt que par des représentations toujours particulières, donc toujours suspectes d'arbitraire. On ne peut, et on ne doit, rien fonder en mathématiques sur les formes de la représentation.

Dedekind pouvait ici trouver des cautions à la fois chez Riemann et chez Dirichlet. Citant Riemann, Dedekind se réfère explicitement à la définition que donne ce dernier des fonctions par «les propriétés internes, caractéristiques, desquelles les formes de leur représentation naissent par nécessité» — un texte qui aurait sans nul doute intéressé Cavaillès, et aux "principes de Riemann"[16]. Il est aussi occupé, à ce moment, par la publication de la seconde édition des *Vorlesungen...* de Dirichlet, et on sait que sa première version de la théorie des idéaux paraît comme X$^{\text{ème}}$ supplément des *Vorlesungen...* Il y trouve appliqué ce que Minkowski appelait l'autre principe de Dirichlet : «aborder les problèmes avec le minimum de calcul aveugle, le maximum de pensée lucide».

Dedekind part du point suivant. La propriété essentielle d'un nombre (complexe) idéal retenue par Dedekind est celle de diviser ou non un nombre (complexe) actuel. On connaît tout ce qu'il y a à connaître d'un nombre idéal si l'on connaît les nombres (actuels) qu'il divise. D'où il est naturellement conduit à considérer l'ensemble des entiers du corps qui sont divisibles par un produit donné de facteurs premiers idéaux et à choisir cet ensemble comme représentant de ce produit — c'est l'idéal. On a remplacé le problème de définir le nombre idéal par celui de définir l'ensemble appelé idéal.

Il le caractérise alors comme une partie (il dit "système") de la collection des entiers (en fait, partie d'un anneau commutatif unitaire) fermée par rapport à l'addition et à la multiplication par un élément de l'anneau — les deux propriétés classiques, si remarquablement simples qui s'expriment ici — dans le cas des entiers cyclotomiques (en fait dans celui des entiers *d'un corps* K) :

(1) la somme de deux entiers cyclotomiques appartenant à un idéal donné appartient encore à cet idéal.

---

[16] Voir la section 5 du mémoire *Über die Begündung der Idealtheorie*, Nachr. Königl. Ges. wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1895, pp. 106-113, ou *Werke*, vol. 2, pp. 50-58, et la lettre à Lipschitz citée dans la note 20. Dans la préface à la seconde édition des *Vorlesungen* (Vieweg, Braunschweig, 1871 ; Werke, vol. 3) [Dirichlet 1871], il déclare : "... j'espère que la recherche des propriétés caractéristiques fondamentales, qui dans d'autres parties des mathématiques, a été couronnée d'un si beau succès, ne m'aura pas complètement fait défaut..."

(2) le produit d'un entier cyclotomiques appartenant à un idéal donné par un entier cyclotomique quelconque appartient à l'idéal donné.

On obtient une correspondance *bijective* — et même un *isomorphisme* (pour les opérations correspondantes) entre nombres idéaux et (ensembles) idéaux (abstraction faite du fait cas de l'idéal $\{0\}$, qui ne correspond à aucun nombre idéal).

Dès lors, on peut dérouler toutes les conséquences de la théorie en termes d'idéaux : définir la notion d'idéal *premier* (sans factorisation non triviale), le produit de deux idéaux, etc.

Dedekind a parfaitement conscience d'être ainsi parvenu à la théorie générale dont il avait posé l'exigence[17]. Cette correspondance entre nombre idéal et ensemble idéal est qualifiée par lui de «fait de la plus haute importance», qu'il avoue n'avoir pu établir rigoureusement «qu'au terme de beaucoup d'efforts stériles, et après avoir surmonté beaucoup de difficultés». La reformulation de la théorie de Kummer dans ce que Dedekind appelle les «nouveaux habits» de la théorie des idéaux[18] n'a été inspirée «que par la peur que l'adoption de la terminologie ordinairement utilisée dans le traitement des nombres actuels pourrait d'abord instiller un doute à l'égard de la rigueur des méthodes de démonstration».[19]

Il s'agit d'une théorie ensembliste : Dedekind a souligné lui-même l'analogie étroite de sa définition des idéaux et de sa définition des nombres réels par les coupures. La théorie des idéaux, qui date de 1871 peut donc être considérée comme la première approche du point de vue ensembliste. Dedekind a donné la date exacte de naissance, 24 Novembre 1858, de l'idée de décrire les nombres réels en termes de coupures. L'origine semble bien en être pédagogique. Maître de l'exposition des notions, c'est par insatisfaction des exposés existants, et pour donner une forme acceptable à ses yeux, lors du premier cours de calcul différentiel et intégral qu'il ait eu à

[17] Chez Dedekind, on le sait, mais on le vérifie bien dans tous ses travaux relatifs aux idéaux, la force de généralisation n'altère jamais la capacité d'innovation.

[18] Edwards donne une version de la théorie de Dedekind du point de vue qui avait été celui de Kummer, et en évitant toute référence au concept d'idéal, [1975, 6].

[19] Voir encore la lette à Lipschitz citée dans la note 16 [Dedekind 1967] : "les difficultés que j'ai dû surmonter il y a six ans, lorsque j'ai créé cette théorie générale (la théorie des idéaux) sans aucune exception, naissent selon moi, du fait que, à côté de cette théorie, qui contient tous les entiers d'un corps donné, il y a toujours une infinité de théories qui sont encombrées d'exceptions parce qu'elles ne traitent que d'une partie des entiers..."

donner à Zürich, en, aux concepts du calcul, qu'il construit son concept de coupure. Un nombre réel produit une division des nombres rationnels en deux ensembles, ceux qui sont inférieurs, ceux qui sont supérieurs, à lui. Renversant la procédure, Dedekind pose que la division des rationnels est, ou du moins représente, un nombre réel. L'analogie est évidente avec les idéaux. Un nombre idéal dans un anneau est représenté par l'ensemble des nombres actuels de l'anneau qu'il divise, *de même qu*'un nombre réel est représenté par l'ensemble des nombres rationnels plus grands (ou plus petits) que lui. Le problème vient de la validité de cette représentation. Elle ne l'est pas pour Gauss, et pour la quasi totalité de la tradition mathématique, qui rejette l'infini actuel. Elle l'est pour Dedekind, qui l'accepte.

La généralité, la puissance, l'élégance, de cette formulation de Dedekind sont indéniables[20]. Il n'est guère d'exposé d'algèbre qui, aujourd'hui, ne fasse appel à cette formulation en concepts ensemblistes et son succès mérite, de ce point de vue, d'être comparé à celui de la notation leibnizienne pour le calcul infinitésimal — qu'on songe à la mobilisation si féconde des "formes différentielles". Son rôle historique, dans le développement de l'algèbre abstraite, a été immense. Tous ces traits réunis lui ont attiré l'admiration unanime des mathématiciens. Il est, avec Cantor et Hilbert, un des mathématiciens que Cavaillès admirait le plus, et il ne saurait naturellement être question de refuser à l'auteur de la théorie des idéaux ses titres de gloire. Mais l'histoire a ses exigences, qui ne permettent pas d'identifier à un jugement le fait de prendre acte d'une reconnaissance, même unanime, même pleinement sanctionnée par le succès. De ce point de vue, la légitimation, au moins partielle, dans les mathématiques contemporaines, de l'exigence constructive engage à soumettre à un nouvel examen, de ce point de vue, les

[20] Sur ce point comme sur d'autres : sa définition des nombres réels par les coupures offrirait des exemples du même style mathématique. De fait, Dedekind consacre une longue note de son exposé français sur la théorie des nombres algébriques [Dedekind 1877] à l'analogie de sa définition des idéaux et de sa définition des nombres réels par coupures. leur relation est pour lui très étroite. Or la théorie des idéaux, qui date de 1871 peut donc être considérée comme la premiére approche du point de vue ensembliste. En 1882, Weber et Dedekind (qui avaient édité ensemble les oeuvres de Riemann en 1876, et ont pu exercer une influence mutuelle) publient un traité fondamental sur les fonctions algébriques d'une variable. Il s'agit d'un traitement purement arithmétique et algébrique de la théorie riemanienne des fonctions algébriques, qui, sans faire référence aus concepts d'idéaux et de modules du Xéme Supplément à la deuxiéme édition des Vorlesungen [Dirichlet 1871].

énoncés et les théories. Inévitablement historique et comparatif, un tel examen conduit à se demander si l'on peut continuer à accorder à la théorie de Dedekind une suprématie aussi absolue.

Il y a d'abord la question des *limites de validité* de la théorie de Dedekind.

Il apparaît plus nettement aujourd'hui qu'en dépit de sa puissance, elle ne saurait réunir tous les avantages. La volonté, d'inspiration riemannienne, de débarrasser l'étude de l'objet de toutes les représentations particulières n'est pleinement justifiée que si l'on est assuré d'avoir préalablement extrait de l'objet toutes ses propriétés essentielles. En substituant au facteur premier idéal l'ensemble des entiers qu'il divise, Dedekind remplace un objet explicitement défini — une définition est trop explicite aux yeux de Dedekind lorsqu'elle implique une représentation particulière — par un concept qu'on est parfaitement en droit de juger trop vague, et, au contraire, insuffisamment défini. Un mathématicien d'aujourd'hui, s'il est de ceux qui ne se laissent plus aussi facilement convaincre de la validité inconditionnée de la formulation ensembliste[21], peut légitimement demander : quelles sortes de systèmes d'entiers accepte-t-on comme idéaux, et comment les décrire ? En bref, le doute constructif pèse sur la validité de la méthode de Dedekind.

Il y a surtout le travail de Kronecker.

En 1859, dans son mémoire sur les lois de réciprocité, Kummer avait annoncé la publication d'un travail de Kronecker dans lequel, selon les propres termes de Kummer, "la théorie des nombres complexes les plus généraux se trouvait développée complètement et avec la plus grande simplicité..." Ce n'est pourtant que plus de 20 ans après, en 1882, que Kronecker se décide enfin à publier ses Fondements d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques, [Kronecher 1882] — la raison donnée de ce long délai étant qu'il n'avait pas alors trouvé la généralisation du "genre associé", une découverte qui aurait impliqué en fait le développement de la théorie générale du corps de classe !

On sait aujourd'hui, par les travaux de M. Eichler, de H. M. Edwards, et, éminemment bien sûr, d'A. Weil [Eichler 1963, 1966], [Edwards 1969], [Weil 1950], que l'approche de Kronecker ne le cédait en rien, d'un point de vue mathématique, à celle de Dedekind. Et H. Weyl lui-même a exprimé sa préférence pour la théorie de Kronecker, dont il développe, dans son livre sur la théorie algébrique

[21] Il n'est pas besoin de supposer pour cela qu'il aille jusqu'à se réclamer ouvertement de l'intuitionnisme brouwerien, ou de la version constructiviste qu'en a donnée E. Bishop.

des nombres, une version modernisée [Weyl 1940].

Sur le contenu d'une théorie dont l'expression est notoirement difficile d'accès, même aux mathématiciens chevronnés[21], on devra se contenter de quelques indications. Il s'agit essentiellement d'une théorie des *diviseurs*, et c'est ainsi d'ailleurs que lui-même l'appelait. A l'inverse de ce qui se passe chez Kummer et Dedekind, lesquels donnent le premier rôle aux facteurs premiers idéaux, et énoncent presque immédiatement le théorème fondamental d'*équivalence* de la divisibilité par un idéal avec la divisibilité par ses facteurs premiers, le concept d'idéal premier n'y occupe plus la place centrale, et les facteurs premiers ne sont introduits qu'assez tard dans le développement.

Kronecker explique qu'il ne pouvait pas l'être parce qu'il s'agit d'un concept *relatif*, qui dépend du corps particulier que l'on considère, et qui, en particulier, présente à ses yeux l'inconvénient de changer si l'on procède, comme on est conduit à le faire en algèbre, à une *extension* de ce corps. Il n'est introduit qu'au § 17 [Kronecker 1882], et sert à démontrer le second théorème fondamental. Il ne développe qu'ensuite la factorisation unique en facteurs premiers. Ce n'est pas cette dernière qui est importante, mais le concept de *plus grand commun diviseur.*

Le point principal est effectivement la définition d'un diviseur, celle de la divisibilité d'un diviseur par un autre, de l'équivalence absolue entre diviseurs (si chacun divise l'autre), et l'interprétation d'un nombre algébrique comme un diviseur. L'idée sous-jacente, ainsi que l'ont souligné A. Weil et H. Edwards, consiste à plonger l'anneau des entiers du corps en question dans l'anneau plus grand des polynômes à coefficients entiers. Dans cet anneau plus grand, les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui sont primitifs (c'est à dire dont les coefficients n'ont pas de commun diviseur plus grand que 1) sont conventionnellement posés comme unités. En bref, l'idée de Kronecker est de *considérer les formes primitives comme des unités.* Dès lors, la forme-somme des $u_i x_i$ ($u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_kx_k$) représente, d'une manière très concrète, le plus grand commun diviseur des x_i, et l'on peut développer à partir de là une théorie, qui, en dépit de ses difficultés (Kronecker laissait à son lecteur de nombreuses lacunes, que même Dedekind trouvait difficiles à combler !), est essentiellement complète.

D'une part, la théorie des diviseurs de Kronecker fait

[21] Jordan dit des ouvrages de Kronecker qu'ils sont "l'envie et le désespoir du géomètre", et, à la lecture de [Kronecker 1882], Dedekind se plaint à plusieurs reprises de ne pas comprendre!

exactement ce que faisait la théorie des idéaux de Dedekind : la généralisation de la théorie de Kummer de la factorisation idéale, d'un corps de nombres cyclotomiques à un corps de nombres algébriques. Il paraît donc assez difficile de soutenir qu'il y ait eu ici *nécessité*, comme certaines formulations de Dedekind pouvaient le laisser croire, de faire intervenir les idéaux au sens d'ensembles.

D'autre part, elle permet d'éviter deux défauts majeurs de la théorie de Dedekind aux yeux de Kronecker, à savoir : le défaut de caractère intrinsèque ; l'absence d'une *construction explicite* des diviseurs. Comme Kummer, Kronecker décrit le mode de *représentation* des diviseurs plutôt qu'il ne dit ce qu'ils sont en eux-mêmes. Il énonce ce que cela signifie de dire que deux représentations représentent *le même* diviseur (ou que deux diviseurs sont "absolument équivalents"). Il définit ses "diviseurs" en expliquant comment on calcule avec eux : ce qui revient à fournir un *algorithme* pour déterminer, un ensemble de générateurs (entiers a_1, ..., a_k du corps K) de nombres algébriques étant donné, si un élément donné du corps appartient ou non à l'idéal engendré par les nombres a_1, ..., a_k. On n'a rien de tel chez Dedekind, pour qui la définition d'un idéal n'est jugée complète et satisfaisante que si elle donne l'idéal comme un ensemble (infini), sans critère d'appartenance.

D'autre part, Kronecker fait remarquer que le concept de nombre premier est *relatif* au corps de nombres que l'on considère. Dans une extension de ce corps, ce qui était premier ne le reste pas. Avec les idéaux, quand on passe d'un corps à un autre, on doit manipuler les idéaux en prenant les intersections avec l'ancien corps, si le nouveau est plus petit, et en prenant l'idéal dans le plus grand qu'ils engendrent, si le nouveau est le plus grand. Rien de tel dans la théorie de Kronecker : sa définition des diviseurs et telle que rien ne change si le corps est étendu ou restreint[22].

Ces traits qu'on n'a rappelés que parce qu'ils intéressent directement notre thème, ne sont bien entendu qu'un aspect tout à fait partiel, une infime partie, du travail de Kronecker dans ses *Grundzüge*... Ils permettent pourtant de se demander si l'on doit juger de la grandeur d'une œuvre mathématique à la seule jauge de son succès, mathématique, sinon philosophique.

---

[22] Les deux théorèmes principaux de la théorie des diviseurs sont : (1) la factorisation unique en premiers est valide pour les diviseurs; (2) un diviseur est le PGCD de ses coefficients (ou : un diviseur divise tous ses coefficients, ou : deux formes ayant les mêmes coefficients sont équivalentes). Mais la factorisation unique est de moindre importance pour lui. Il en traite uniquement parce qu'elle est nécessaire à la démonstration de (2).

La proportion dans laquelle les œuvres mathématiques donnent lieu au commentaire philosophique — l'œuvre de Dedekind, analogue en cela à celle de Cantor, y donnait plus qu'une autre prise [23] — varie, on s'en doute, avec le style de leurs auteurs, mais on sait, ou on devrait savoir, qu'elle n'est pas fonction de sa profondeur proprement mathématique. Il n'est pas question de discuter ici dans le détail les conceptions doctrinales, dites abusivement "philosophiques" et trop souvent caricaturées, de Kronecker, en les comparant à celles de Dedekind, ou à celles de son vieil adversaire, Cantor. Bornons nous aux mathématiques. H. Edwards l'a remarqué : au XX$^{\text{ème}}$ siècle, l'œuvre mathématique de Kronecker a eu peu de lecteurs, mais ces lecteurs ont été d'une rare qualité : Erich Hecke, Hermann Weyl, Carl Ludwig Siegel, A. Weil. Ce dernier affirmait devant le congrès international de mathématiques de Cambridge en 1950, mais il ne semble pas que les choses aient beaucoup changé depuis : «alors que chaque ligne du XIème supplément de Dedekind, dans ses trois versions successives toujours plus "pures" a été scrutée et analysée, axiomatisée et généralisée, les pourtant célèbres *Grundzüge...* de Kronecker sont presqu'oubliés, ou ne sont perçus que comme présentant une méthode inférieure et moins pure pour obtenir les mêmes résultats...» [Weil 1950, 442-452]. Et A. Weil indiquait en quoi le but de Kronecker était beaucoup plus ample que le traitement des problèmes fondamentaux de la théorie des idéaux, qui formait le sujet principal de Dedekind. Il s'agissait pour lui de décrire et d'inaugurer une nouvelle branche des mathématiques, qui aurait embrassé à la fois, mais comme des branches particulières, *la théorie des nombres et la géométrie algébrique*. C'était une conception véritablement grandiose, qu'il n'avait pas, à lui seul, les moyens de mener à bien, mais sur laquelle les développements que ces branches ont connus dans la période récente nous permettent d'avoir une vue sans doute plus juste que celles que nous procurent les quelques misères condescendantes auxquelles on la réduit généralement.

Le succès final et entier de la théorie cantorienne des ensembles infinis, et sa conséquence essentielle, la reconnaissance comme objet fondamentalement légitime des mathématiques, de la

---

[23] Dedekind avait sans aucun doute une *doctrine*, que certains diraient "idéologique", et cette doctrine s'est traduite en un *programme*, que les mêmes diraient caché. Une des pièces de ce programme est qu'il n'est pas nécessaire, ni même souhaitable, de fournir un fondement algorithmique aux concepts qu'on introduit : ici, par exemple, il est inutile de demander qu'un calcul nous permette de déterminer si un élément de l'anneau est ou non dans l'idéal. L'admettre ici serait l'admettre aussi pour l'analyse, et le concept dedekindien de coupure n'y satisfait pas.

totalité infinie complète, érigée en une doctrine condamnée par Kronecker, ont eu raison de son projet. A cet égard, les efforts, tant de Dedekind exposant les fondements dans son style de clarté et de lucidité, que de Hilbert écrivant [Hilbert 1897] pour mettre sous une forme accessible aux étudiants les travaux de Kummer et de Kronecker, visant ainsi au fond à rendre obsolètes leurs travaux, ont parfaitement réussi. Ils n'ont pu faire en sorte que ces travaux ne contiennent beaucoup plus que ce que le *Rapport...* même avait pu en retenir. Ce que Kronecker considérait comme la plus grande vertu de son travail propre : construire ses définitions, donner des démonstrations d'existence en des termes algébriques, finis, et pour tout dire *algorithmiques*, s'est trouvé pour longtemps, obscurci. Non pas cependant définitivement. L'histoire préparait à Kronecker sa revanche, sous la forme de l'avènement des calculatrices, et le succès d'une nouvelle école, celle que pour faire court, on peut appeler de la tendance à la pensée algorithmique. La possibilité de tester les hypothèses, de calculer les données avec une rapidité et une facilité qu'on n'avait jamais connues dans le passé, ont sans doute modifié, non seulement la manière de traiter, mais encore de penser, les problèmes. D'où l'on peut découvrir, chez le maître de Berlin, beaucoup plus, et beaucoup mieux, que l'affirmation indéfiniment répétée que Dieu a donné aux hommes les nombres entiers — à condition de ne pas refuser de voir le point fondamental, qui maintenant apparaît en pleine lumière : le fait que Kronecker pensait les mathématiques, même si c'était avec des exigences différentes de celles d'aujourd'hui (il ne pense pas à la réalisation pratique), en termes algorithmiques.

Sans plus insister ici sur ces différences, qui nous renvoient au contexte historique, soulignons un dernier point, dont les remarques d'A. Weil nous permettent de prendre toute la mesure. C'est que l'on trouverait plus sûrement la clé de ce qui a été l'ambition mathématique de Kronecker, et peut-être de ses positions doctrinales, si on consentait à la replacer dans son véritable cadre. Celui-ci est *algébrique*, bien plus qu'arithmétique. En dépit de l'insistance de la géométrie algébrique moderne sur l'usage de corps de base arbitraires, il y a un sens très réel dans lequel tout théorème accessible aux méthodes de l'algèbre (et non de la topologie ou de l'analyse) est pensable comme un théorème sur des corps de base absolument algébriques : corps finis ou corps de nombres algébriques.

Telle est semble-t-il la signification profonde du point de vue de Kronecker. Alors même que sa méthode apparaît d'abord étroite aux yeux d'un moderne, elle comprend en fait tous les cas susceptibles d'être traités par les méthodes *algébriques*.

Ainsi, dit A. Weil, peut-on se proposer l'étude de la géométrie algébrique sur un anneau, par exemple l'anneau des entiers, ou celui des entiers d'un corps de nombres algébriques, ou celui des entiers dans un corps padique (anneau local des entiers padiques): un programme que la théorie des schémas de Grothendieck a dans une large mesure rempli.

Ainsi Kronecker procède-t-il dans la théorie des fonctions abéliennes, qu'il traite comme une partie de l'algèbre. Si l'analyse et ses démonstrations non constructives d'existence sont ici selon lui superflues, c'est que de son point de vue, toute la matière peut être subsumée sous une théorie entièrement algébrique, où les démonstrations d'existence sont des démonstrations constructives fondées sur la méthode de Galois d'adjonction des racines des équations. C'est (sans doute) ce type de construction *algébrique* qui constituerait le meilleur exemple de condition constructive à l'existence mathématique d'une quantité.

Nous étions parti, sans chercher à en faire plus avant l'exégèse, d'un fait : celui de la relation de la pensée mathématique de Cavaillès à l'histoire. Prendre acte de ce fait, c'est accepter par avance les leçons d'une histoire qui, après lui, a continué. En mathématiques, comme en toute matière scientifique, cette histoire, doit être, selon l'expression si juste de Georges Canguilhem, conjuguée au passé réfléchi.

Comme Galois en algèbre (encore qu'il ne répugne pas à fonder sa théorie sur le choix arbitraire d'une résolvante de Lagrange), comme Dirichlet et Riemann en théorie des nombres et des fonctions, Dedekind est sans aucun doute un représentant, et un des plus grands, de la "pensée conceptuelle" en mathématiques. Mais il apparaît qu'il n'y a pas *a priori* de privilège proprement mathématique à une telle position. Il n'y en a pas non plus, sans doute, pour une expression ensembliste des concepts, même reconnus comme fondamentaux. De fait, ni Dirichlet, ni Gauss, dont le style mérite également d'être dit conceptuel, et qui avaient également une conception ferme de la généralisation, n'auraient sans doute entrepris de formuler les concepts mathématiques fondamentaux en termes d'ensembles, pas plus qu'ils n'auraient accepté la légitimité de l'usage d'un infini comme entité complétée. Le refus que Kronecker oppose à ce dernier ne l'empêche pas de formuler comme un principe la «conservation de la détermination des concepts (Begriffsbestimmung) dans le passage des rationnels aux nombres algébriques», et de se laisser guider par lui dans son étude des nombres et fonctions algébriques — satisfaisant les conditions mises en évidence par Cavaillès dans son analyse (plusieurs fois reprise[24]) de l'idéalisation (paradigme) mathématique.

Ce que *Transfini et continu* appelle "l'arithmétisme fin" de Kronecker, et qu'il compare, sans nuance dépréciative, aux tentatives analogues de Weierstrass (arithmétisation du calcul infinitésimal), de Hilbert (finitisme) et de Dedekind lui-même (dont il cite la devise : «l'homme toujours arithmétise»), mérite sans nul doute une réévaluation. Loin d'altérer, ou d'affaiblir, l'héritage de Cavaillès, elle devrait restituer toute sa force à une pensée qui, non liée à son temps au point d'être solidaire de ses préjugés, avait su accepter la pluralité, et faire place à l'imprévisible. Cavaillès a pensé les mathématiques comme irréductibles à toute définition, devenir authentique, image d'une pensée véritable. A l'éclairage de l'histoire, se vérifie la pertinence de la remarque de Roger Martin dans son introduction au volume de *Philosophie mathématique* : l'œuvre de Cavaillès est capable de supporter l'épreuve de ses nécessaires mises en question.

BIBILIOGRAPHIE

Cavaillès, Jean

1949 Mathématiques et formalisme. Texte édité par G. Canguilhem. *Revue internationale de philosophie* 3, n°8, 158-165.

1964 *Philosophie mathématique*. Paris, Hermann.

1976 *Sur la logique et la théorie de la science*. Paris, Hermann.

1981 *Méthode axiomatique et formalisme*. Paris, Hermann.

1994 *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris.

Dedekind, Richard

1877 Sur la théorie des nombres entiers algébriques.

1895 *Über die Begündung der Idealtheorie*, Nachr. Königl. Ges. wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.

1930 *Dedekind Gesammelte Werke*, G. W. R. Fricke, E. Noether & O. Ore eds, en 3 vols, Braunxchweig, Vieweg, vol. 3.

1980 The genesis of Ideal Theory, *Archive for History of Exact Sciences*. 23.

Dirichlet, Gustav Peter Lejeune

1871 Dirichlet, *Vorlesungen über die Zahlentheorie*, herausgegeben von R. Dedekind, 2nd ed. Braunschweig, Vieweg.

---

[24] Voir dans [Cavaillès 1994, 1949, 1962, 1976, 1981].

1966 *Introduction to Algebraic Theory of numbers and fonctions*, New York.

1969 *Advanced Calculus*, Boston.

1975 The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes. *Archive for history of exact sciences*, 14.

1977 *Postcript to "The background..."*, ibid., 17.

Eichler, M

1963 *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen*, Bâle.

1966 *Introduction to Algebraic Theory of numbers and fonctions*, New York, trad. anglaise de [Eichler 1963].

Hilbert, David

1897 *Bericht : Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. (*Rapport : la théorie des nombres algébriques). (G. A., 1, 63-363).

Jacobi, Carl Gustav Jacob

1839 Über die Complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der 5ten, 8ten und 12ten Potenzen zu betrachten sind (Sur les nombres premiers complexes exprimables dans la théorie des restes des 5ème, 8ème, 12ème puissances). *Berlin, Monatsber.*

Kronecker, Leopold

1882 *Grundzüge einer arithmetischen Teorie der algebraischen Zahlen.* Journal reine angew. Math 99.

Kummer, Ernst Eduard

1846 Sur la théorie des nombres complexes, *Monatsber. Berlin*, 87-96; C. P., 1, 203-210 (traduction anglaise, malheureusement peu fiable, dans le recueil de D. E. Smith, *Source book in mathematics*, 1929).

1847a De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris intégris realibus constant, Sur les nombres complexes formés de racines de l'unité et de nombres entiers, Gratulationschrift der Univ. Breslau zur Jubelfeier der Univ. Königsberg; republ. *Journal de Math.*, 1847, C. P., vol. 1, 165-192 (la première publication, en 1839, à l'université de Breslau, était dédiée à l'université de Köngisberg pour la célébration du jubilé de cette université).

1847b Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres complexes construits avec les racines de l'unité, *Journal für Mathematik* (Crelle), 327-367; C. P., 1, 211-251.

1851 Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines

1859 *Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und* de l'unité et de nombres entiers, Collected Papers, Vol. 1.

Introduction to collected papers, Œuvres scientifiques, Paris, t. III.

Sinaceur, Hourya

1987 Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès. *Revue d'histoire des sciences*, XL-1, Janvier-Mars. 117-129.

1994 *Jean Cavaillès, Philosophie mathématique.* Paris, PUF.

Weil, André

1950 *Number-theory and algebraic geometry. Œuvres scientifiques*, vol. 2.

Weyl, Hermann

1940 *Algebraic Theory of numbers*, Princeton.