PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

MARCEL GUILLAUME

Essai sur la genèse de la méthode des tableaux de Beth

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 4 (1998-1999), p. 235-277
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998-1999__3_4_235_0>

Essai sur la genèse de la méthode des tableaux de Beth.

Marcel Guillaume
LLAIC, Université d'Auvergne, IUT d'Aubière

Abstract. We relate how, from 1951 till 1955, and without knowing, before the end of 1954, what will be its achievement, Beth worked out the classical semantic tableaux method. Our conclusions are supported by correspondences and drafts of projected works, rediscovered in Beth's papers. With the support of documents of the same nature, we study afterwards the working out, this time conscious of its aim, and mainly technical, of the intuitionistic semantic tableaux, completed as soon as 1956, but giving rise to objections. We note in passing that, as soon as the end of 1955, Beth writes that a negated formula is valid on a tree, if that tree has no subtree in which this formula is valid. Finally, we tell how, substituting the intuitive study of the deducibility to that of models, and avoiding so the debates just evoked, Beth renamed his previous intuitionistic semantic tableaux 'deductive tableaux', and reconsidered the manner in which he gave their vindication.

Résumé. Nous relatons comment, entre 1951 et 1955, et sans savoir, avant la fin 1954, où il va aboutir, Beth élabore la méthode des tableaux sémantiques classiques. Nos conclusions sont étayées par des correspondances et des ébauches de travaux, retrouvées dans les papiers de Beth. Nous appuyant sur des documents de même nature, nous étudions ensuite l'élaboration, consciente de sa fin cette fois, et surtout technique, des tableaux sémantiques intuitionnistes, achevée dès 1956, mais qui suscite des objections.

Philosophia Scientiae, 3 (4), 1998-1999, 235-277

Nous notons, au passage, que dès la fin 1955, Beth écrit qu'une formule niée est valide dans un arbre, si cette formule n'est valide dans aucun de ses sous-arbres. Nous disons enfin comment, substituant l'étude intuitive de la déductibilité à celle de modèles, et esquivant ainsi les discussions précédemment évoquées, Beth requalifie ses tableaux sémantiques intuitionnistes en tableaux déductifs, et en reconsidère la méthode de justification.

Quel a donc été l'itinéraire intellectuel qui a conduit Beth à la méthode des tableaux sémantiques, et plus tard, déductifs ? Il n'est, hélas, plus possible de l'interviewer sur ce point, et si cela était, peut-être se contenterait-il de répéter les indications sommaires publiées à divers endroits, et les brefs commentaires sur ses travaux, leurs dates et leurs enchaînements, qu'il en fit parfois dans sa correspondance. On ne peut aller plus loin sans entrer dans le mode de l'hypothèse, si vraisemblable puisse-t-elle apparaître au vu des documents. C'est une première raison pour qualifier d'*essai* le présent travail ; une seconde raison découle de ce que le dernier mot n'y est peut-être pas dit : il reste possible que la découverte de nouveaux documents, pas seulement dans les papiers de Beth, vienne dans le futur changer quelque donnée.

Bien sûr, une première approche consiste à utiliser les indications sommaires évoquées ci-dessus, qui sont juste des renvois à des travaux antérieurs, et à scruter avec attention le texte de ces travaux. Une approche plus fine résulte de la prise en compte des écrits laissés par Beth et déposés aux Rijksarchief in Noord-Holland. Dans l'accomplissement de cette tâche, j'ai trouvé une aide inestimable dans l'incomparable outil de travail que constitue l'*Inventory of the papers of Evert Willem Beth (1908-1964), philosopher, logician and mathematician* [Velthuys-Bechthold 1995], réalisé par P.M.J. Velthuys-Bechthold, incorporant l'Aide à la recherche de J.C.A.P. Ribbering et P. van Ulsen. Les multiples références croisées de cet ouvrage permettent de *soupçonner*, souvent à juste titre, qu'un document donné est susceptible de contenir des indications sur un sujet tel que celui qui nous occupe aujourd'hui. Il faut ensuite consulter ces documents, mais aussi *d'autres encore*, relatifs aux périodes où les autres indications laissent entendre qu'ils peuvent contenir des renseignements intéressants. Je ne saurais ici assez remercier M. Henk Visser de la participation active qu'il a prise à mon entreprise, effectuant pour moi cette consultation des archives, découvrant souvent des documents cruciaux, que je ne pouvais soupçonner a priori : ses yeux et sa tête ont été les miens dans cette recherche, et il est ainsi pour une bonne moitié dans l'ouvrage que je vais maintenant vous présenter.

I. Sur la genèse des tableaux sémantiques pour la logique classique.

Le premier de ses travaux, où Beth situera plus tard un début mise en œuvre de certaines des idées qui l'ont conduit par la suite aux tableaux sémantiques pour la logique classique[1], est la Note *A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel* [Beth 1951].

Cette Note commence par le rappel de l'idée d'une preuve topologique du théorème de complétude de la logique élémentaire, lancée, trois années auparavant, au 10^e^ Congrès International de Philosophie, qui s'est précisément tenu à Amsterdam en 1948, par Mostowski [Mostowski 1949]. Une telle preuve a d'ailleurs déjà été fournie, deux ans après, nous dit la Note, par Rasiowa et Sikorski [Rasiowa et Sikorski 1950], en utilisant la notion d'*ensemble de première catégorie* de Baire, alors qu'au même moment, Tarski, dans son adresse [Tarski 1952] au Congrès International des Mathématiciens qui se tient en 1950, interprète ce théorème comme un théorème de compacité.

Beth ne dit pas expressément que le théorème de Löwenheim [Löwenheim 1915] assure que les modèles dénombrables constituent une sémantique adéquate pour la logique élémentaire (cette façon de dire les choses n'est d'ailleurs pas de celles que l'on employait à l'époque), ni qu'il s'ensuit qu'il suffit de considérer les modèles dénombrables, et d'introduire les *numérals*[2] comme *noms* pour les éléments de ceux-ci, mais c'est ce qu'il fait en fait en utilisant, implicitement, un système formel où ces numérals sont utilisés comme constantes individuelles.

Il introduit une *«logique réduite»*, qui n'est autre que le calcul des énoncés engendré, dans ce système, par les énoncés atomiques clos ou dominés par un quantificateur et clos. Sur l'ensemble des valuations de ce calcul des énoncés, les ensembles des valuations qui satisfont une expression donnée forment les voisinages de la topologie de Stone associée à l'algèbre de Boole, que nous appellerions aujourd'hui l'algèbre de Tarski-Lindenbaum associée à ce

---

[1] Voir, par exemple, [Beth 1955a], [Beth 1955b], [Beth 1956a], [Beth 1957]. Du second de ces travaux, il dit aussi, dans une lettre envoyée à Hintikka le 12 juillet 1955 : «C'est la suite d'une série d'articles, publiés en 1951 et les années suivantes.»

[2] Il nous paraît tout à fait conforme à l'esprit de la langue française d'introduire, à titre de néologisme, le substantif 'numéral' pour rendre le substantif anglais 'numeral'. Et comme nous voulons éviter toute confusion avec 'les numéros', d'en former le pluriel sur le modèle des exceptions telles que 'bal', 'cal', 'chacal', 'régal', etc...

calcul. Cette topologie est compacte, et la complétude de la logique des énoncés s'y manifeste par le fait que les négations des identités logiques coïncident avec l'ensemble des énoncés qu'aucune valuation ne satisfait.

Il s'agit d'exploiter ces faits pour en tirer la complétude de la logique élémentaire, en tenant compte de ce que les valuations associées aux modèles doivent vérifier des relations entre les atomes détaillés ci-dessus : ces valuations doivent être *normales*, c'est-à-dire qu'elles doivent, pour tout indice p de rang dans une énumération fixée de toutes les expressions à une variable libre, satisfaire à l'expression $(x)\,X_p\,(x)$ *si et seulement si* elles satisfont à toutes les expressions $X_p\,(r)$ obtenues par substitution d'un numéral r à la variable x dans $X_p\,(x)$. Beth sépare les deux implications comprises dans les équivalences soulignées ci-dessus, et ce qu'il écrit, en descendant, soit jusqu'aux ensembles de valuations satisfaisant des expressions atomiques de la logique réduite, soit jusqu'aux ensembles de valuations satisfaisant des négations de telles expressions, revient à écrire que ces valuations normales satisfont à toutes les expressions $(x)X_p(x) \to \bigwedge_r X_p(r)$ (ici notée A_p) et $\overline{(x)X_q(x)} \to \bigvee_s \overline{X_q(s)}$ (ici notée N_q), pour tous les entiers positifs p et q. Ainsi donc, pour écrire qu'une suite C_1, C_2, ... , C_k d'expressions *closes*[3] n'a pas de modèle, Beth écrit-il que les ensembles de valuations qui vérifient les C_k, A_p, et N_q, où les trois indices prennent toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, ont une intersection vide[4]. Si ces ensembles sont tous des fermés, on pourra en extraire une sous-famille finie dont l'intersection est vide. Il y a

[3] Et appartenant, donc, à la logique réduite.

[4] Il faut même considérer toutes les formules résultant de celles qu'il écrit par toutes les substitutions, à x, des variables individuelles du système, distinguées les unes des autres par leurs indices de rang, ce qui conduit à considérer deux indices de plus ; cette correction est indiquée par Beth lui-même dans la Note [Beth 1953a] qu'il présente à la suite de celle dont nous traitons maintenant. Nous ne tiendrons pas compte de cette correction dans les explications qui suivent, car elle ne change ni l'argument du raisonnement utilisé ni ses conséquences. D'ailleurs, au printemps 1954, lorsqu'il traite de ces questions dans les conférences à la Sorbonne dont les textes constituent les chapitres de *L'existence en mathématiques* [Beth 1956a], Beth suppose une enumération *avec répétitions* des variables d'individus, qui affecte à chaque variable l'indice de la formule dans laquelle elle apparaît, astuce qui lui permet d'économiser un indice.

une difficulté avec les N_q : l'ensemble des valuations qui vérifient une N_q donnée est la réunion *infinie* de l'ensemble des valuations qui vérifient $(x)X_q(x)$ et des ensembles des valuations qui vérifient les expressions $\overline{X_q(s)}$, quand on donne à s toutes les valeurs numérales ; et une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. Mais, si dans une famille d'ensembles dont l'intersection est vide, on remplace des termes par des termes d'extension moindre, la nouvelle intersection obtenue restera vide ; il suffira donc de remplacer chacune de ces réunions infinies par un de ses termes, savoir, par l'ensemble des valuations qui vérifient une certaine $\overline{X_q(s(q))}$, ensemble qui sera un fermé ; on obtiendra de la sorte une famille de fermés, dont l'intersection est vide.

Or, la vacuité de l'intersection d'une sous-famille finie de cette dernière famille, dit d'une certaine formule de la logique réduite, dans laquelle les entiers k, p, q, r, s restent *bornés*, qu'elle est universellement non valide, et donc, de sa négation, qu'elle est universellement valide : cette négation sera donc «un théorème de la logique réduite». Par des transformations du calcul des énoncés, on donne à cette formule la forme d'une implication de la négation de la conjonction de ce qu'il y reste des C_k par une conjonction de formules des formes $(x)\, X_p(x) \rightarrow X_p(r)$ et $X_q(s(q)) \rightarrow (x)X_q(x)$. Les formules de la première forme sont des axiomes de la logique élémentaire ; donc, par *modus ponens*, on peut les faire disparaître de l'antécédent de l'implication, sans cesser d'être en présence d'un théorème de la logique élémentaire ; les formules de la seconde forme s'éliminent de même, en position d'antécédent d'une implication, pourvu que le numéral $s(q)$ *ne figure pas, en dehors de* $X_q(s(q))$, *dans cette implication* [5], mais justement, Beth avait gardé *libre* le choix de la *fonction s*, et il peut finir en la déterminant de telle sorte que $s(q)$ soit, pour toutes les valeurs de q, le premier numeral dépassant toutes les valeurs $s(i)$ pour les numérals $i \leq q$, ainsi que tous les numérals figurant dans $X_q(x)$[6]. Ainsi, une sous-famille finie des C_k est formellement réfutable - *on a une preuve formelle,* dans un système *«de type Hilbert»,* de la négation de sa conjonction - et la famille entière est par là même prouvablement incompatible.

[5] Sous cette condition, de $[X_q(s(q)) \rightarrow (x)X_q(x)] \rightarrow \Gamma$, on dérive $(Ey)\ [X_q(y) \rightarrow (x)\, X_q(x)] \rightarrow \Gamma$ légitimement, puis - toujours sous cette condition - $[(y)\ X_q(y) \rightarrow (x)\, X_q(x)] \rightarrow \Gamma$, et donc Γ.

[6] Les C_k sont implicitement supposés sans occurrences de numérals.

Cette *preuve formelle* est réexaminée, de façon plus approfondie, et remaniée, dans la Note *On Padoa's method in the theory of definition* [Beth 1953b], présentée par Heyting le 27 juin 1953, et où Beth donne, du théorème auquel on a donné son nom, une démonstration[7] en termes de *dérivabilité* - donc, ne recourant qu'à un nombre fini d'axiomes, qu'on peut ainsi contracter en leur conjonction T, supposée close - et toujours dans un système implicitement supposé «de type Hilbert», mais *explicitement comparé,* cette fois, aux systèmes *«de type Gentzen»* - nous dirons dans un moment d'où cela vient. Beth va utiliser le théorème de complétude sous la forme de l'équivalence entre l'*absence de modèle de la négation* $\bar{T}$ de T, l'existence d'une preuve formelle de T, et l'existence d'une identité Z de la logique réduite, de la forme décrite plus haut[8], avec T dans le rôle que jouait auparavant la négation de la conjonction d'une partie finie des C_k. Aussitôt, il compare cette formule à la *«Mittelsequenz»* des preuves normalisées considérées dans les *Untersuchungen über das logische Schliessen* [Gentzen 1934] de Gentzen, car : la preuve de T se fait dans la logique réduite, c'est-à-dire en naviguant dans le calcul des énoncés, jusqu'à ce qu'on ait obtenu Z, et se poursuit jusqu'à T en recourant, «à partir de Z, à la seule théorie de la quantification». Mais, dans l'état où son travail a laissé cette formule Z, elle n'a pas, à l'inverse de la «Mittelsequenz», la *propriété des sous-formules :* les formules X_p et X_q ne sont pas forcément des sous-formules de T. «Cependant», poursuit Beth, «il est possible de rendre l'analogie complète» ; et il montre en détail comment modifier le raisonnement pour que ce soit le cas[9]. Et il commente :

---

[7] Il est en possession de cette démonstration au plus tard le 16 avril 1953, où il la décrit dans une lettre qu'il écrit à Kleene pour lui demander si le résultat est connu. Kleene répond le 14 mai que non, à sa connaissance, conseillant de consulter Tarski. Le 31 mai, Beth l'informe de ce qu'a dit Tarski : le résultat est bien nouveau ; il lui décrit des résultats qu'il a obtenu *au-delà* de ceux de la Note, et se dit «très satisfait de tout ce que j'ai fait jusqu'ici, considérant que j'ai commencé seulement le 19 mars [...].»

[8] Il tient bien sûr compte, là, de la correction concernant les variables, évoquée dans la Note [Beth 1953a] intervenue entre temps.

[9] Bien sûr, fondamentalement, ce qui joue est que, selon une valuation normale, «la valeur d'une formule ne dépend que des valeurs de ses sous-formules», comme il le dit, plus tard, dans la lettre à G. Hasenjaeger mentionnée ci-après. Dans sa lettre à Kleene, du 16 avril 1953, il formule le même argument sous une forme plus technique.

notre énoncé est légèrement plus général que celui de Gentzen, car nous n'avons pas besoin de supposer *T* prénexe[10].

Ensuite, dans l'application qu'il fait de son théorème de complétude à la preuve de son théorème de définissabilité, une autre innovation se présente. La formule dont il veut montrer qu'elle est un «théorème de la logique élémentaire» est une disjonction qui comporte, entre autres termes, la formule

$$C \qquad (x_1)(x_2)...(x_k)\,[\mathrm{a}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leftrightarrow \mathrm{b}(x_1, x_2, \ldots, x_k)]$$

où a et b sont des symboles de prédicats. L'énumération des variables est alors arrangée de façon à commencer par $x_1, x_2, \ldots, x_k$, et l'énumération des formules est arrangée de façon à commencer par C, et à se continuer, pour j croissant de 1 à k, par les sous-formules issues de C par suppression des j premiers quantificateurs et remplacement concomitant des variables figurant dans C, et d'indices au plus égaux à j, par les numérals $s(j)$ correspondants. Ceci permet de prendre $s(j)=j$ pour j croissant de 1 à k, et préfigure le traitement appliqué à un tableau, en présence d'une formule quantifiée universellement supposée non valide, avec introduction d'un nom d'individu frais, qui peut être un simple numéral[11].

C'est en analysant le problème traité dans cette Note, avant de l'avoir résolu, que Beth a été conduit à prendre en compte les propriétés métamathématiques des systèmes «de type Gentzen» et à l'idée de transposer ces propriétés aux systèmes «de type Hilbert». Sur ce point, et au-delà, sur l'attitude adoptée à cette époque par Beth vis à vis de ces deux types de systèmes formels, nous sommes informés par une lettre qu'il adresse, plus tard, le 8 février 1955, à G. Hasenjaeger, et dont nous serons amenés à citer plusieurs passages, car c'est là que Beth évoque avec le plus de précision les diverses étapes qui, dans ses travaux, depuis le moment où il préparait cette Note, ont fini par l'amener à introduire les tableaux sémantiques classiques :

> Par le passé, dit-il, je n'ai jamais pu me faire aux méthodes de Gentzen. Il me semblait toujours bien que l'on devait tout de même finir par

---

[10] De même, envoyant à Tarski, le 3 juillet 1954, une première ébauche d'une théorie analogue envisagée pour le calcul des énoncés, dont nous parlerons plus loin, il souligne : «En passant, il semble intéressant que j'obtienne un théorème de complétude pour le calcul des énoncés dans lequel tout travail intérieur à ce calcul est évité».

[11] Les premières lignes du tableau correspondant à ce traitement de la formule ci-dessus constituent une des figures des *Foundations of Mathematics* [Beth 1959a] (p. 291).

revenir aux méthodes traditionnelles[12] [...]. Lorsque je me suis alors attaqué, en 1952, au problème Padoa, je me suis finalement rendu compte qu'on avait besoin de quelque chose comme le théorème des sous-formules, mais dans une version non-finitiste et sémantique. Et il était évident que quelque chose comme le théorème des sous-formules, envisagé sous l'angle sémantique, est tout-à-fait trivial; car la valeur d'une formule ne dépend que des valeurs de ses sous-formules. J'ai ainsi trouvé un substitut non finitiste et sémantique pour le théorème des sous-formules et pu alors en effet résoudre le problème Padoa.

C'était à se demander si, réciproquement, je ne pourrais pas appliquer mes méthodes de façon finitiste, là où, d'habitude, on se sert des méthodes de Gentzen ou encore des epsilonn-théorèmes[13]. Ce sont bien là les objets de ma première tentative, remontant à 1953. Mais j'ai réglé assez complètement ces questions dans mes conférences à Paris (avril 1953)[14], qui vont bientôt paraître. Dès lors, il était clair à mes yeux qu'avec mes méthodes je pouvais faire de manière naturelle tout ce pour quoi l'on utilise habituellement les méthodes de Gentzen ou la méthode des epsilonn-théorèmes.

En fait, le printemps 1953 a été l'une des périodes les plus créatrices de Beth. Il est déjà en possession, à ce moment-là, de la presque totalité des matières et des résultats qu'il va exposer, entre le 29 mars et le 7 avril 1954, à la Sorbonne, et qui vont être publiés par Gauthier-Villars, en 1956, sous le titre *L'existence en mathématiques* [Beth 1956a]. Ceux-ci reprennent pour une grande part ceux des Notes [Beth 1951] et [Beth 1953b] dont nous avons parlé. La théorie générale présentée dans le chapitre III suit les mêmes arguments que dans cette dernière Note, tout en leur apportant des simplifications et des améliorations ; mais les paragraphes 15 à 17 apportent une explication, sommaire mais aboutie, encore non publiée au printemps 1954, de la manière dont on peut établir divers (méta)théorèmes sur le calcul des prédicats, dont

[12] Il écrit cela à un moment où il vient de parvenir à *dominer* les calculs de Gentzen classiques grâce à la théorie de ses tableaux, et où il compte en faire autant dans le cas intuitionniste.

[13] Ces théorèmes sont issus des *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert-Bernays 1939].

[14] La seconde date n'est pas la bonne, car les conférences recueillies dans *L'existence en mathématiques* [Beth 1956a] ont eu lieu en 1954.

ceux d'Herbrand [Herbrand 1930] et de Bernays [Bernays 1936][15], en s'aidant de la fonction s pour tenter de construire, par extensions progressives de leurs domaines finis emboîtés, des modèles représentés par des valuations «régulières» (c'est à dire, normales et satisfaisant aux formules (Ex_p) $U_p(x_p) \rightarrow U_p(s(p))$ pour toute valeur de p) - tentatives dont les extensions progressives se retrouveront sous la forme des «stades» progressifs de prise en compte des formules quantifiées, dans les tentatives de construction de contre-modèles représentées plus tard par la formation de tableaux sémantiques. Or, dans une lettre qu'il écrit à Kleene, le 31 mai 1953, Beth mentionne les résultats exposés aux paragraphes 15 et 16 comme obtenus, et les questions auxquelles est consacré le paragraphe 17 comme en cours d'attaque (il s'agit du théorème de Bernays, et d'une possibilité d'extension non-finitiste de celui-ci).

Il n'est donc pas surprenant que, lorsqu'il traite *brièvement* des sources de ses idées, ce soit surtout sur la Note [Beth 1953b] concernant la méthode de Padoa qu'il mette l'accent[16], comme il le fait, le 3 juillet 1953, dans une lettre à J. Schmidt, après avoir affirmé :

> Je crois pouvoir prouver les résultats de Gentzen et bien d'autres encore par une nouvelle méthode, qui se rapporte semblablement à la formalisation *habituelle* de la logique du premier ordre.

C'est nous qui soulignons : le projet consiste à trouver, pour les systèmes «de type Hilbert», des analogues de divers théorèmes métamathématiques, dont ceux qui s'appliquent aux systèmes «de type Gentzen» - mais aussi ceux qui s'obtiennent à l'aide des «epsilonn-théorèmes», comme nous l'apprend le contenu des paragraphes 15 à 17 de *L'existence en Mathématiques* [Beth 1956a] et le confirme explicitement la teneur de la lettre à Hasenjaeger déjà citée.

> Ce qui est nouveau dans *L'existence en mathématiques* apparaît dans le premier paragraphe du chapitre II, paragraphe qui doit servir d'introduction informelle aux développements qui suivent, et reprennent à l'exposé de la «logique réduite». Ce paragraphe commence par la présentation d'un *«tableau»* (qui n'est pas encore qualifié de

[15] Ce théorème a plus tard été incorporé, sous le nom de «Widerspruchsfreiheitstheorem», au tome II des *Grundlagen der Mathematik* [Hilbert-Bernays 1939], pp. 36 et suivantes.

[16] Voir, par exemple, les lettres : à J. Schmidt, qui va être citée tout de suite ; à Feys, du 12 février 1955, citée plus loin ; à Quine, du 7 juillet 1955.

> «sémantique», et qui n'est d'ailleurs pas présenté tout à fait sous la forme que prendra plus tard un tableau ainsi qualifié), destiné à montrer la validité de l'expression
>
> (A) $(x)(y)\,[\mathrm{a}(x) \rightarrow \mathrm{b}(y)] \rightarrow \{(Eu)\,\mathrm{a}(u) \rightarrow (v)\,\mathrm{b}(v)\}$
>
> [...] en montrant l'impossibilité de construire un contre-exemple. En effet, pour qu'on ait un contre-exemple, il faut que (A) et ses formules partielles prennent les valeurs de vérité indiquées dans le tableau suivant : [...].

Ce tableau comporte, *sans séparation,* une colonne intitulée «Vrai», puis une autre intitulée «Faux», cette dernière commençant par «(A)». Une implication apparaît à la cinquième ligne de la colonne de gauche, mais il ne s'ensuit *pas de scission,* car l'antécédent de cette implication apparaît à la troisième ligne dans la même colonne, et c'est en application de la règle dite *modus ponens* que le conséquent de cette implication est inscrit sur la sixième ligne. Cette dernière formule - «b(2)» - est la même que celle qui figure à la quatrième ligne de la colonne de droite, mais le tableau n'est pas qualifié de «clos», ni clôturé par une double barre horizontale.

> Or, [continue bien sûr le texte], il est impossible que b(2) prenne en même temps les deux valeurs Vrai et Faux. Par conséquent, il est impossible de trouver un contre-exemple. L'expression (A) est donc ce qu'on a coutume d'appeler une identité logique.
>
> Ceci posé, on peut poser la question de savoir s'il n'est pas possible d'établir une méthode permettant de *transformer* notre discussion *non formelle* en une *dérivation formelle* [...] la réponse à cette question est affirmative. [C'est nous qui soulignons.]

La dérivation bien entendu présentée aussitôt après ces préliminaires est bien différente de celles que Beth présentera quelques mois plus tard : c'est *encore* une dérivation *«de type Hilbert».* Quatre «axiomes», dont deux de la «théorie des quantificateurs», implicitement utilisés pour la constitution de la colonne de gauche, et deux autres correspondant à l'introduction d'individus «frais», $(Eu)\mathrm{a}(u) \rightarrow \mathrm{a}(1)$ ['1' ne figure pas dans (Eu) a (u)] et $\mathrm{b}(2) \rightarrow (v)\,\mathrm{b}(v)$ ['2' ne figure pas dans (v) b(v)], sont énumérés, dont

> il est patent que déjà la seule logique des énoncés nous permet de dériver (A).

Puis, il est dit que : «En vertu du théorème de la déduction», l'implication de (A) par la conjonction de ces quatre axiomes est

> une thèse de la logique des énoncés, ou plutôt, elle *résulte d'une thèse de la logique des énoncés par une substitution appropriée* ; en partant de ce résultat, il sera possible de compléter la dérivation de (A) au moyen de la théorie des quantificateurs[17]. [C'est nous qui soulignons.]

On mesure le chemin accompli là depuis la Note sur la méthode de Padoa [Beth 1953b] : l'absence d'un modèle de la négation de T est devenue *l'absence d'un contre-exemple* invalidant (A) ; et dans le traitement, nouveau mais encore en devenir, de l'exemple concernant (A), la formule Z est *reconstruite* en cherchant à infirmer l'hypothèse opposée, celle de l'existence d'un contre-exemple, au lieu que Z soit tirée de l'application d'un théorème de compacité qui n'en délimite le contenu que de façon imprécise. Cependant, il ne s'agit que d'une heuristique destinée à déboucher sur la théorie générale de la Note, complétée par les résultats de travaux effectués à peu près au moment de la présentation de celle-ci, comme nous l'avons fait remarquer plus haut. Et l'insistance sur le retour à une preuve formelle «du type Hilbert» donne une première idée du chemin qui reste à parcourir.

Deux mois après ces conférences en Sorbonne, cette insistance se retrouve encore, le 30 juin 1954, dans une lettre que Beth écrit à Tarski, et qu'il commence en disant qu'il voudrait

> trouver pour le calcul des énoncés bivalent un théorème des sous-formules correspondant au théorème des sous-formules pour le calcul des prédicats du niveau le plus bas, que j'ai appliqué dans mon article sur la méthode de Padoa. Il m'est apparu qu'il serait intéressant d'avoir un tel théorème, car il entraînerait immédiatement une solution d'un problème que vous avez énoncé à Princeton en 1946 [...] «pouvoir décider si un ensemble de formules est un système d'axiomes adéquat.» Je pense que j'ai finalement réussi à résoudre ces deux problèmes, et je suppose que vous pouvez être intéressé par le texte provisoire d'un article sur ce sujet.

Nous avons, dans les papiers de Beth, deux ébauches, qui portent la mention «provisory version», qualification que Beth applique, à la fin de cette

---

[17] On aura noté que (A) ne comporte ni occurrence de '1', ni occurrence de '2'.

lettre dont nous n'avons cité que le début, au texte envoyé. Sous le titre *A subformula theorem for the sentential calculus, and a characterisation of its axiom systems,* chacune de ces ébauches est dédiée à Robert Feys. L'une d'entre elles garde les traces d'une élaboration en deux temps. L'autre est *vraisemblablement* une copie du texte adressé à Tarski ; en tout cas, c'est la seule qui *puisse* l'avoir été, car c'est la seule qui comporte un «Corollaire 3» que Tarski mentionne dans sa réponse.

> On croit souvent, écrivait Beth au commencement de chacun de ces textes, que dans le calcul des énoncés, les méthodes introduites par Gentzen et développées par divers auteurs présentent des avantages essentiels par rapport à l'approche classique qui débute avec un certain nombre d'axiomes, dont les théorèmes du calcul des énoncés [...] sont ensuite dérivés par substitution et modus ponens.
>
> Dans cette communication, j'entends montrer qu'au contraire, quelques-uns au moins des avantages couramment imputés aux méthodes de Gentzen peuvent aussi être dérivés des méthodes plus familières que je viens de mentionner. Dans mes preuves, j'applique une certaine généralisation de la méthode bien connue des tables de vérité, et qui, en elle-même, offre déjà certains des avantages de la méthode de Gentzen. Considérons la formule :
>
> $$(1) \qquad p \to [q \to (p \to q)]\,,$$
>
> et essayons de trouver une valuation pour laquelle elle prend la valeur Faux ; le résultat de notre tentative peut se résumer dans le ~~tableau~~ [biffé dans le texte] diagramme suivant :

True	False
	(1)
p	$q \to (p \to q)$
q	$p \to q$

> Sur ce diagramme, il apparaît que, si nous voulons rendre fausse la formule (1), nous devons assigner à p , q et $p \to q$ *des valeurs de vérité qui ne concordent pas avec les règles de valuation habituelles.* [C'est nous qui soulignons.]
>
> Or, continue-t-il, nous tendons à interpréter les axiomes du calcul des énoncés comme un ensemble de prescriptions par lesquelles un tel assignement est régi. Si cette interprétation est correcte, il devrait suffire

> d'appliquer ces prescriptions exclusivement aux formules qui apparaissent dans le diagramme. En d'autres termes, il devrait être possible de dériver la formule (1) en substituant d'abord, dans ces axiomes, cette formule et ses sous-formules, puis en appliquant *modus ponens*. [...] J'espère montrer [...] que <u>tout</u> système d'axiomes du calcul des énoncés, si tant est qu'il soit adéquat, a une propriété qui n'est qu'à peine moins commode.

Ce début est commun aux deux ébauches, à la formule près, à partir de laquelle le «diagramme» est construit. Ce qui vient ensuite est un *programme de travail* dont la mise en œuvre est juste esquissée. «Des conjectures hâtives», dit Beth à la fin de sa lettre. En fait, le 14, il écrit à Tarski :

> J'ai trouvé quelques lacunes dans la «Provisory version».

Cette lettre croise la réponse de Tarski, du 13 juillet 1954 :

> Je n'ai pas encore eu le temps d'étudier votre papier, mais il y a une remarque à faire tout de suite. Votre Corollaire 3 (qui donne une réponse affirmative à un problème formulé dans ma conférence à Princeton) est en contradiction directe avec un résultat énoncé par Lineal et Post dans le Bulletin of the Amer. Math. Soc. vol 55, 1949, p. 50.

Le 22, Beth remercie Tarski de la référence au travail de Lineal et Post, et s'étonne de ce

> qu'un résultat aussi important et frappant n'ait été cité nulle part, et que jusqu'ici, aucune preuve complète n'en ait été publiée[18].

(La référence donnée par Tarski renvoie à un court résumé d'une communication présentée lors d'un colloque.)

Entre temps, la réponse de Tarski a déclenché une décision qui devait mûrir depuis quelques temps, puisque les ébauches successives évoquées ne semblaient pas déboucher : nous savons, par la correspondance entre Beth et Paulette Destouches-Février, qui dirigeait alors la collection, publiée par Gauthier-Villars, dont *L'existence en mathématiques* [Beth 1956a] fait partie, que le 21 juillet, Beth lui en réexpédie le manuscrit

> que j'avais repris lors de ma dernière visite à Paris. J'avais alors l'intention de récrire le Chapitre I, tenant compte des résultats de certaines recherches que je croyais abouties. Cependant, je viens de

---

[18] Le 24, il écrit à Post, dont il apprendra en retour, par la femme de celui-ci, le décès.

> constater que mes conclusions étaient, en partie, incorrectes, ce qui rend douteuse la possibilité du traitement de la logique des énoncés que j'avais anticipé [...] il vaut mieux renoncer à la révision de mon texte.

Et il s'en tient juste à quelques corrections mineures à la Préface.

Les démarches esquissées dans les deux ébauches, et d'autres indications fournies par la correspondance, jettent quelque lumière sur le projet de Beth. De ce qui précède, il ressort déjà qu'il était satisfait de ce qu'il avait acquis sur «la théorie de la quantification» ; mais il avait le sentiment que quelque chose d'analogue, concernant le calcul des énoncés, lui échappait[19], et il cherchait à tirer cela au clair à l'aide d'un traitement conçu *par analogie* avec celui qui lui avait apporté ces satisfactions relatives au traitement des formules quantifiées. Dans ce domaine, il apparaissait qu'il y a des valuations pour la logique réduite, et parmi ces valuations, à cause des axiomes propres au maniement des quantificateurs, des valuations normales ; puis, du théorème de compacité et du caractère récursif du calcul des valeurs d'une valuation normale, résultait qu'une formule déductible avait une preuve formelle où n'intervenaient que des sous-formules de cette formule. N'y aurait-il pas, de même, dans une logique des énoncés plus primitive que la logique bivalente usuelle elle-même, des fonctions à deux valeurs, plus générales que les valuations elles-mêmes, satisfaisant à des propriétés de compacité et de complétude, et parmi ces *pseudo-valuations*, comme il les appelle dans les ébauches, les valuations usuelles, qualifiées de «régulières» dans l'ébauche qu'il a gardée par devers lui ? Et ces pseudo-valuations régulières, n'était-ce pas pour avoir à satisfaire à des axiomes adéquats qu'elles présentent leurs particularités ? Ne se ferait-il pas, par compacité et compte tenu de la récursivité du calcul de leurs valeurs, qu'en raison de la satisfaction imposée de ces axiomes, résulte, pour une formule déductible, l'existence d'une preuve où n'interviendraient, pour substitution, que des sous-formules de cette formule ? Et même, ne serait-ce pas là un critère auquel on reconnaîtrait que des axiomes sont adéquats ?

Voilà pourquoi, dans la partie présentée ci-dessus de ces ébauches, le tableau - pardon, le diagramme - manifestement clos si l'on y pense en termes de valuations, n'est pas traité comme tel : Beth le pense *en termes de pseudo-valuations,* et le commentaire déjà cité, qui suit ce «diagramme», exprime sous une autre forme la conception que nous venons de décrire, assortie de l'impact

---

[19] Voir ci-dessous, à ce sujet, une citation de la lettre à Hasenjaeger, du 8 février 1955, déjà citée ; ainsi qu'une citation d'une lettre à Hintikka, du 12 juillet suivant, dans la note 23.

d'une première difficulté rencontrée - les premiers essais ont fait voir qu'au stade des substitutions en début de preuve, il se pourrait que l'on doive aussi substituer des négations de sous-formules, ainsi qu'une tautologie qui joue le rôle d'une constante logique toujours vraie, et sa négation.

On trouve une autre confirmation nette de cette recherche, en logique des énoncés, d'une situation analogue à celle qui avait été rencontrée en logique élémentaire, dans un passage de la lettre, déjà citée, que Beth écrit à Tarski, le 14 juillet :

> [...] j'énumère toutes les formules, définis une certaine fonction $s\,(n)$, et introduis des axiomes supplémentaires posant que la formule n° n et l'atome n° $s\,(n)$ s'impliquent l'un l'autre. En ajoutant des axiomes qui posent que E (une identité logique) implique l'atome n° $s\,(n)$ ou que l'atome n° $s\,(n)$ implique $\Box$, je peux reproduire la méthode des tables de vérité.
>
> D'un autre côté, nous pouvons restreindre l'application de la règle de substitution à la substitution de la formule n° n à l'atome n° $s\,(n)$.

L'analogie de cette fonction $s\,(n)$ avec celle des Notes [Beth 1951] et [Beth 1953b] citées plus haut, saute aux yeux ; bien sûr, il faut appliquer cette fonction aux rangs d'énumération des formules, et non aux numérals, puisqu'on veut opérer en dehors de toute substitution portant sur une variable d'individu.

Dans l'ébauche qu'il a gardée par devers lui, Beth emploie, au lieu de s, une fonction A, associant à chaque formule un atome qui lui est propre. A Tarski, il ne dit rien de difficultés qui apparaissent ensuite, et l'ont amené, dans l'ébauche envoyée, à faire disparaître cette fonction, au profit de procédés de réécriture de preuves, moyennant des substitutions appropriées à transformer un contre-exemple fourni par une pseudo-valuation, en un contre-exemple fourni par la valuation engendrée par les valeurs prises par cette pseudo-valuation sur les atomes ; sans doute Beth voulait-il encore, le 14 juillet, tout reprendre au début[20]

[20] En fait, comme il apparaît par ailleurs dans la conférence de M. D.H.J. de Jongh, Beth ne cessera, par la suite, de revenir sur ces idées ; le 11 février 1955, tout en lui expédiant le texte de sa première Note sur les tableaux sémantiques [Beth 1955a], il écrit à Tarski : «il y a encore la notion de pseudo-valuation, dont j'espère toujours qu'elle sera utile sous certains rapports».

Nous n'en dirons pas plus à ce sujet, car il n'entre pas dans notre propos d'analyser les détails techniques des quelques développements de ces ébauches abandonnées, si ce n'est sur les points qui nous indiquent où la réflexion de Beth sur un critère de déductibilité/validité en était arrivée à cette date. C'est seulement pour mieux fixer les idées que nous mentionnerons qu'une pseudo-valuation est définie dans ces ébauches comme une fonction à deux valeurs soumise aux deux conditions d'attribuer le Faux à une implication $U \to V$ quand elle attribue le Vrai à U et le Faux à V, et d'attribuer le Faux à la négation $\overline{U}$ de U quand elle attribue le Vrai à U. Ce sont les conditions minima pour constituer une sémantique saine pour la déductibilité sous hypothèses par «modus ponens» *presque* seul, mais tout de même, si l'on regarde le texte de près, avec adjonction de la règle $\frac{U \quad \bar{U}}{V}$ (où $\overline{U}$ note la négation de U). Un lemme de complétude, tenu pour évident, est aussitôt énoncé en termes d'*absence d'invalidation* de séquents.

Cette condition laisse d'ailleurs entrevoir, en dépit, ou peut-être, en raison de l'ambition d'en étendre les résultats aux systèmes «de type Hilbert», un approfondissement de la prise en compte, par Beth, des systèmes «de type Gentzen». Dans un post-scriptum, daté du 3 juillet 1954, à sa lettre à Tarski, du 30 juin, il prévoit de compléter son argumentation, mais aussi, d'«énoncer de manière moins polémique les remarques sur les méthodes de Gentzen». La réponse de Tarski, lui signalant le résultat de Lineal et Post, ne pouvait manquer de réorienter sa pensée. Et sept mois plus tard, le 26 février 1955, dans la Note *Remarks on natural deduction* [Beth 1955a], dédiée à R. Feys, et qui est l'acte de naissance, dans la sphère publique, des tableaux sémantiques, la nouveauté, outre les tableaux, c'est que la déduction associée à la recherche avortée d'un contre-modèle est désormais une *déduction naturelle,* et que c'est là la clef de voûte qui achève de donner sa tenue à tout l'édifice.

Voici ce que Beth en dit, dans les jours qui précèdent. A Feys, le 8 février 1955, il écrit :

> il y a déjà plus d'une demi-année que je vous ai envoyé un projet de travail, que j'avais l'intention de vous dédier. Mais il n'en est rien advenu, car le résultat que j'entrevoyais s'est révélé faux.
>
> Malgré tout, j'ai continué ensuite à travailler dans la même direction, et je suis parvenu maintenant à un résultat mieux fondé, que j'ai tout de

> même pu soumettre à quelques confrères, de telle sorte qu'il est désormais bien vérifié. Je vous envoie ci-joint un projet d'article, dont je souhaite pouvoir vous dédier le texte définitif. [...]
>
> J'espère que cet essai vous intéressera, car il procure une élucidation et un fondement sémantiques des méthodes de Gentzen.

Parmi les confrères consultés, H. Scholz a montré l'ouvrage à G. Hasenjaeger, et celui-ci vient d'écrire à Beth, le 4 février, pour le prier de transmettre à un collègue de son choix une invitation à un colloque de programmation, et de saisir

> l'occasion de vous dire que votre approche de la déduction naturelle, que le Prof. Scholz m'a montré, m'a beaucoup intéressé. Elle procure, par une transformation conceptuellement simple, quelque chose qui m'a manqué jusqu'ici : une preuve de complétude adaptée au calcul symétrique de séquents - peut-être même en êtes-vous parti.[21]

C'est à cette lettre que Beth répond, le même 8 février, par la lettre à Hasenjaeger dont nous avons déjà cité plusieurs passages ; sur la question touchant le calcul symétrique (voir, par exemple, [Hasenjaeger 1952]) en tant que point de départ, il lui dit : «ce n'est pas tout à fait ça, mais ça s'en rapproche tout de même.» Puis, il lui raconte brièvement le cheminement de ses idées, dans les termes cités plus haut, et que nous reprenons au point où nous nous étions arrêtés :

> [...] avec mes méthodes, je pouvais faire de manière naturelle tout ce pour quoi l'on utilise habituellement les méthodes de Gentzen ou la méthode des epsilonn-théorèmes. Il restait juste à montrer que ces dernières méthodes pouvaient pour ainsi dire être développées à partir de mes méthodes. Pour la méthode des epsilonn-théorèmes, ce n'était pas difficile [...]. Pour les méthodes de Gentzen, j'avais déjà une approche partielle au moment des conférences à Paris, mais il y manquait quelque chose d'essentiel, jusqu'à ce qu'en décembre 1954, j'en vienne à la *scission* des colonnes [C'est nous qui soulignons].

Ainsi, il a fallu tout le laps de temps qui sépare, en 1954, les derniers jours de juillet des premiers jours de décembre, pour faire le **pas décisif**

[21] Hasenjaeger continue en évoquant la proximité de la méthode avec l'idée d'une «machine à démontrer des théorèmes» ; cette question se situe en dehors de notre propos.

d'*abandonner*, en fait, la recherche de preuves *«de type Hilbert»* auxquelles soient *transposées les belles propriétés des preuves «de type Gentzen»*, et de découvrir que les *«déductions naturelles»* sont celles que fournissent les tableaux construits de manière *informelle* [22] lorsque leur clôture signe l'échec de la recherche d'un contre-modèle.

Tout vient alors à la fois : les tableaux, de simples résumés informels de tentatives systématiques de construction de contre-modèles, deviennent des *figures formelles,* dont certaines (celles qui se «closent») sont des *preuves formelles*. Ils se construisent selon des *règles purement formelles,* «typographiques», bien qu'elles ne fassent que formaliser les significations *communes* des seules notions logiques représentées par les quantificateurs et les connecteurs, et par l'identité : ces tableaux seront donc qualifiés de *sémantiques ;* leurs règles de construction peuvent être constituées en système formel, ou transposées en règles de calculs de séquents, ou en règles de calculs de déduction naturelle. Certaines introduisent des scissions en sous-tableaux conjugués, de telle sorte que la construction d'un tableau se fait selon un déploiement borné arborescent autorisant des choix réglés, analogue aux déploiements admis en mathématiques intuitionnistes : cela va, d'un côté, permettre une réduction des démarches non finitistes du traitement métamathématique des tableaux, grâce au recours au lemme de König sur les arbres infinis, et va, d'un autre côté, ouvrir une *perspective d'extension* de la méthode à la logique intuitionniste - extension déjà implicitement appelée, en fait, par l'argumentation esquissée dans les ébauches dont nous avons parlé auparavant ; et même, en substituant, au lemme de König, le théorème fondamental de Brouwer sur les déploiements bornés, il y a peut-être une chance que l'on trouve une preuve intuitionniste du théorème de complétude ; et l'on peut, encore, au moins au niveau propositionnel, penser à étendre la méthode aux logiques modales (certaines entretiennent avec la logique intuitionniste, et avec la topologie, des rapports étroits, étudiés par Gödel [Gödel 1933], Tarski [Tarski 1935] [Tarski 1938], McKinsey [Mc Kinsey 1941], McKinsey et Tarski [Mc Kinsey-Tarski 1944] [Mc Kinsey-Tarski 1946] [Mc Kinsey-Tarski 1948], et les arbres eux-mêmes sont porteurs de topologies). Enfin, le système formel constitué par les tableaux sémantiques, sans précédent par les liens étroits que ce système établit entre sémantique et théorie de la dérivabilité, permet un traitement métamathématique de la logique atteignant,

---

[22] Dans une lettre qu'il adresse à Kleene le 11 juin 1955, Beth dit de ses tableaux sémantiques : «Ils se sont avérés très utiles pour moi, en tant que méthode heuristique [...]».

avec bien plus d'aisance, des résultats aussi célèbres et profonds que le théorème d'Herbrand [Herbrand 1930], le théorème de Löwenheim-Skolem-Gödel, le théorème des sous-formules de Gentzen [Gentzen 1934] ainsi que son «théorème capital étendu», et le théorème de compatibilité de Bernays [Bernays 1936]. Tout ceci se trouve, au moins en perspective, dans le mémoire *Semantic entailment and formal deducibility* [Beth 1955b] présenté le 9 mai 1955 à la Classe des Lettres de l'Académie Royale Néerlandaise des Sciences. Et tout cela, avec une transparence et un naturel stupéfiant, «allant de soi», presque, ce qui fait dire à Beth, dès le 8 février, à la fin de la lettre qu'il écrit à Hasenjaeger et dont nous avons cité les passages relatifs aux étapes de l'élaboration de sa méthode :

> Tout a l'air maintenant si simple que c'est à peine si l'on comprend pourquoi il a fallu se donner tout ce mal.

Avant d'achever la mise en forme de ce mémoire, Beth avait donc pris date, de deux façons. D'une part, en rédigeant la Note *Remarks on natural deduction* [Beth 1955a] dont nous avons déjà dit un mot. Après Feys, le 8 février, il en envoie le projet à Tarski, le 11 ; le 12, il remercie Feys de lui avoir donné son accord pour la dédicace, et commente :

> le procédé décrit n'est au fond qu'une variante de celui que j'ai appliqué dans mon article sur la méthode de Padoa, et j'ai déjà la conviction que ce dernier fournit pour la logique classique <u>tous</u> les résultats qui ont été obtenus au moyen des procédés décrits par Gentzen, Curry, Kleene et Quine, et encore, par dessus le marché, les résultats annexes, non-finitistes, qui ont été laissés de côté par les auteurs précités ; la nouvelle variante fournit donc aussi tous ces résultats, mais de façon beaucoup plus transparente.

Et cette Note est présentée par Heyting le 26 février 1955.

D'autre part, une *Note complémentaire* en français, dont la teneur est en grande partie semblable, paraîtra en annexe à *L'existence en mathématiques* [Beth 1956a], au moment de la sortie de ce fascicule, en 1956. Une lettre de Beth à Paulette Destouches-Février, du 26 avril 1955, nous apprend que l'envoi de cette Note complémentaire a eu lieu «dans son temps». Quand exactement ? Nous n'en avons pas trouvé la trace, mais il y a tout lieu de penser que cette Note complémentaire a été rédigée à peu près au même moment que les *Remarks on natural deduction ;* peut-être même avant celles-ci, car Beth s'attendait à une parution rapide de l'ouvrage[23], et il a pu ressentir comme une urgence d'en compléter le manuscrit.

Les *Remarks* et la *Note complémentaire* débutent les unes comme l'autre par la présentation d'un tableau paradigme clos, et se continuent par la présentation de la déduction naturelle en laquelle il se transforme. Les unes comme l'autre évoquent alors les démarches à accomplir en vue d'établir un traitement rigoureux, et décrivent brièvement les règles les plus délicates. Les séquents testés dans les unes et dans l'autre sont proches, mais différents. Dans la *Note complémentaire*, comme au début du chapitre II de *L'existence en mathématiques*, les colonnes portent les en-têtes «Vrai» et «Faux», tandis que dans les *Remarks* et dans les exemples traités dans *Semantic entailment and formal derivability* [Beth 1955b], elles portent les en-têtes «Valide» et «Non-valide». A Quine, qui s'en étonne dans une lettre du 22 juin 1955, Beth répond, le 7 juillet suivant :

> je parle d'énoncés vrais ou faux, mais de formules valides ou non valides. La raison en est que la validité d'une formule dépend de son interprétation, ce qui n'est pas le cas des énoncés.

Il nous semble cependant qu'il y a d'autres raisons à cela, plus profondes, et qui remontent au moins aux interprétations non classiques de la logique des énoncés implicites dans les ébauches de l'été 1954 ; dans celles-ci, des deux valeurs attribuables par une pseudo-valuation, il est dit :

> on peut interpréter `0' par Faux et `2' par Vrai ; mais il est, peut-être, plus approprié de présenter `2' comme Affirmé, et `0' comme Non-affirmé.

---

23 Le 12 juillet suivant, il écrit à Hintikka qu'il en attendait la parution avant celle du mémoire *Semantic entailment and formal derivability ;* mais des corrections concernant la Note complémentaire et des annotations bibliographiques sont encore adjointes à une lettre à Paulette Destouches-Février, du 17 mai 1955.
Dans la même lettre à Hintikka, Beth raconte : «Dans mes conférences à la Sorbonne (au printemps 1954), j'ai récapitulé ce qui était disponible à ce moment-là. Mais je sentais que quelque chose manquait qui, finalement, pourrait simplifier considérablement toute la construction. Ce n'est qu'après l'envoi du manuscrit à l'éditeur que j'ai trouvé (en novembre ou décembre dernier) comment combler ce manque en construisant un tableau sémantique et en le transformant en une déduction formelle. J'ai alors décidé d'ajouter à mon manuscrit une brève postface (analogue à mon court article *Remarks on Natural Deduction*) et de revenir sur les tableaux sémantiques de façon plus approfondie dans un mémoire séparé.»

II. Sur la genèse des tableaux pour la logique intuitionniste.

Au début de sa communication *Construction sémantique de la logique intuitionniste* [Beth 1958b] au Colloque International de Logique organisé à Paris par le C.N.R.S. durant les derniers jours de septembre 1955, Beth rappelle la Note *Semantical considerations on intuitionistic mathematics* [Beth 1947], rédigée, confie-t-il en bas de page de cette dernière, en juillet 1945.

Ainsi, lorsque, dans les *Remarks on natural deduction* [Beth 1955a], il inclut

> une autre remarque [...] il est bien connu que, si nous restreignons de façon appropriée les règles du système F, nous obtenons un système intuitionniste correspondant F^* ,

juste pour le plaisir d'être amené à poser une question qui revient à la suivante : ne peut-on conjecturer l'existence d'une procédure de décision triant, parmi les formules de la logique élémentaire classiquement dérivables de certaines hypothèses, celles qui le sont aussi du point de vue intuitionniste ? - lorsque donc, toujours dans la même Note, il pose cette question après avoir fait cette remarque et mentionné des «cas concrets» d'«analyse d'un tableau sémantique» qui situent des obstructions à une preuve intuitionniste, il revient à d'anciennes préoccupations[24].

Déjà, il sait dans quelle direction chercher, puisque, dans le cas classique, il connaît, et dit, l'équivalence entre le système F et les systèmes de Gentzen[25]. Cependant, le 11 juin, il hésite encore au sujet des règles propres au cas intuitionniste ; il écrit à Kleene :

---

[24] Celles-ci se manifestent même dans la Note sur la méthode de Padoa [Beth 1953b], où il écrit : «[...] nos méthodes de preuve ne sont pas du tout finitistes, et notre argumentation ne s'étend pas à la logique élémentaire intuitionniste ; mais cela reste un sujet de recherches ultérieures.»

[25] Le 11 février 1955, écrivant à Tarski pour lui envoyer le projet des *Remarks*, il lui dit : «J'ai l'impression que mes conclusions ont de l'importance pour les gens qui s'intéressent aux calculs de Gentzen <*in Gentzen calculi* >, car elles pourvoient à une preuve facile de la complétude de ces calculs.» Le 29 avril suivant, écrivant à Kleene, il mentionne explicitement «un Calcul de Déduction Naturelle» *et* «un Calcul de Séquents».

> Je suis content d'apprendre que vous trouvez les tableaux sémantiques intéressants. Ils se sont avérés très utiles pour moi, en tant que méthode heuristique, et je suis en train d'essayer de les adapter aux exigences intuitionnistes. La plus grande difficulté est, bien sûr, de traiter X v Y dans la colonne de droite. Jusqu'ici, j'ai trouvé deux moyens (le second découle du premier) :
>
> (i) si A est un prédicat décidable, remplacer X v Y par (Et)(A(t) impl X & non-A(t) impl Y) ;
>
> (ij) introduire une seconde manière de scinder des tableaux, telle que le tableau d'origine est clos si un de ses sous-tableaux est clos.

Entre temps, le 29 avril, il a déjà écrit à Kleene pour lui soumettre la conjecture, déjà mentionnée, par laquelle se terminent les *Remarks on natural deduction* [26], et Kleene vient de lui répondre, le 7 juin :

> Il ne peut pas y avoir de procédé de décision pour le problème «soit *U* une formule valide au sens classique ; est-ce que *U* est encore valide du point de vue intuitionniste ?».

Il lui donne (en des termes différents de ceux qui vont être employés) l'argument que voici : supposons la formule J prouvable en logique classique, mais non en logique intuitionniste ; soit $K(x)$ un prédicat récursivement énumérable mais non récursif ; alors, $J \vee K(x)$ est prouvable en logique classique, mais il ne peut exister de procédé récursif pour décider, pour un x donné, si $K(x)$ - et *a fortiori* $J \vee K(x)$ - possède une preuve intuitionniste.

J'incline à penser, sans en avoir d'indices matériels, que sa méditation sur cet exemple a aidé Beth dans sa recherche des règles de constitution des tableaux sémantiques dans le cas intuitionniste. Le 7 juillet 1955, il écrit, dans une lettre à Quine, à propos des tableaux sémantiques : «je pense que j'ai trouvé un procédé intuitionniste analogue» ; le 15, il écrit à Paulette Destouches-Février :

> je voudrais continuer mes recherches sur les tableaux sémantiques. Pour le cas classique, tous les problèmes principaux ont été résolus [...]. Je viens d'entamer le cas de la logique intuitionniste et j'espère pouvoir présenter à Paris les premiers résultats dans cette direction.

---

[26] Après lui avoir expliqué les tableaux sémantiques pour la logique classique, il allègue : «Tout, du procédé, paraît être entièrement adapté à la logique bivalente. Mais je suis surpris qu'il ait aussi quelque rapport avec la logique intuitionniste.»

Il s'agit du Colloque dont nous avons déjà dit un mot, et qui va en effet marquer un grand progrès. La plus ancienne ébauche de sa contribution dont nous disposions, sous le titre *Conséquences sémantiques et dérivations formelles,* est antérieure au 20 juillet[27]. Dès ce moment, la question de la règle devant s'appliquer en présence d'une disjonction à droite est tranchée, par le choix de la «scission disjonctive», et Beth est en possession d'une série de «règles de réduction d'une conséquence»[28] qui

> ne dépendent pas de la définition précise que l'on adopte pour la notion d'un modèle intuitionniste.

Ces règles sont des règles de recherche de situations de clôture, requérant toujours l'introduction des sous-formules immédiates d'une formule non atomique dans des colonnes déterminées du tableau, et aussi souvent que possible, l'élimination de cette formule. A partir de l'avant-dernière version connue du texte, ces règles sont écrites formellement sous la forme de règles d'un calcul de séquents, règles dont il est dit que si les séquents en dessous de la ligne horizontale sont valides, ainsi en va-t-il du séquent au-dessus ; et il est clair, pour qui connaît les systèmes de Heyting [Heyting 1930], qu'il en va bien ainsi, si l'on interprète le signe $\vdash$, qui sépare l'antécédent du conséquent, comme représentant l'existence d'une preuve formelle. Convenablement transposées, ces règles fournissent *une partie* des directives pour la construction de tableaux sémantiques. Ainsi, et bien que la question soit posée à la fin du texte définitif comme à résoudre, l'observation de ces règles garantit, *à nos yeux, avec le recul accordé par le temps écoulé,* que la clôture d'un tableau pour une «conséquence» donnée atteste qu'on peut tirer, du tableau, une preuve formelle de celle-ci.

Or, il manque à ce texte un relevé précis des directives pour la construction d'un tableau. Une section des deux premières ébauches, supprimée lors des corrections du 4 août, était consacrée à ce point, mais la comparaison avec les présentations ultérieures de ces directives montre que Beth s'est peu à

---

[27] Cette ébauche n'est pas datée, mais une seconde, sous le même titre, datée du 20 juillet, et portant des corrections manuscrites reprises dans les versions suivantes, reproduit les corrections portées sur la première, et comporte, par rapport à celle-ci, quelques compléments. Parmi les corrections portées sur cette seconde ébauche, figure la date du 4 août.

[28] C'est le mot par lequel il traduit en français, à l'inverse de la pratique barbare actuelle, le terme allemand *Sequenz* utilisé par Gentzen. Dans les corrections du 4 août, il renvoie aussi à l'article «Konsequenzenlogik» [Hasenjaeger 1952] de G. Hasenjaeger.

peu rendu compte qu'il lui fallait prendre le temps de les examiner soigneusement et de les compléter avant d'en achever la détermination. Dans le texte définitif, qui est daté du 8 novembre 1955, il est montré, sur des exemples, que ces directives doivent comporter, outre les instructions qui résultent des règles de réduction précédentes, des instructions supplémentaires, en particulier quant à *l'ordre* dans lequel il convient d'employer certaines d'entre elles. Beth était donc fondé, au moment de la rédaction de ce texte, à ne pas tirer de conclusion trop hâtives de la pertinence intuitionniste des «règles de réduction» ; sous réserve de ce qu'il n'y ait à leur adjoindre que des codifications sur leur ordre d'emploi, ce dont il n'était pas tout à fait sûr à ce moment-là, il savait qu'

> une comparaison de ces règles avec le système intuitionniste G3 de Kleene montre que nos tableaux offrent un substitut adéquat pour les formalisations courantes de la logique intuitionniste

- comme il le dit dans la première version du texte, le répète en substance dans les deux suivantes, puis le laisse tomber dans la version définitive [Beth 1958b] en raison d'un changement d'orientation dans sa pensée, intervenu à partir de la troisième - nous aurons à commenter le changement du titre - mais le reprend en public, en mars 1956, dans le mémoire développé planifié depuis l'été 1955, *Semantic contruction of intuitionistic logic* [Beth 1956b], et trois ans plus tard, dans la conférence [Beth 1960] donnée au Congrès International des Mathématiciens d'Edimbourg.

Mais

> il se pourrait que ces formalisations fussent incomplètes par rapport au raisonnement intuitionniste

continue le texte de la première version de la conférence de 1955, remarque dont le sort, dans les versions suivantes de cette conférence, suit celui de la remarque précédemment citée ;

> mais nous démontrerons le caractère complet de notre méthode de dérivation dans un sens qui exclut cette possibilité

- disent les trois versions provisoires de cette conférence ; seule la version définitive [Beth 1958b] fournit une première définition en forme d'une notion de modèle intuitionniste, sur laquelle nous reviendrons - les autres versions ne font que suggérer des modèles arborescents, en en présentant des exemples - et pose juste en problème pour l'avenir la recherche d' une démonstration du caractère complet de notre méthode de dérivation par tableaux sémantiques par rapport au raisonnement intuitionniste élémentaire.

Car, selon toutes les versions,

> un système formel est caractérisé par un certain nombre de règles de dérivation [...] on choisira ces règles de telle manière que la notion de dérivabilité coïncide avec la notion de conséquence.

Ce point avait appelé le titre des deux premières versions : *Conséquence sémantique et dérivation formelle.*

Dans la première ébauche, cependant,

> si nous prenons maintenant le point de vue classique (non intuitionniste et non finitiste)

- la complétude, alors, est implicite, ainsi que dans la seconde version, du 20 juillet, qui vise à plus de précision sur ce point :

> Dans la construction des tableaux sémantiques, nous nous sommes adaptés complètement au point de vue intuitionniste. Maintenant, au niveau métamathématique, nous adoptons un point de vue classique.

Car, continue le texte de l'une et de l'autre de ces versions,

> il est facile de voir[29] que la construction d'un tableau sémantique doit toujours aboutir d'une de deux manières :
>
> (i) Après un nombre fini d'opérations, la construction s'arrête ; alors on a, ou bien une dérivation intuitionniste, ou bien un contre-modèle fini ;
>
> (ii) La construction continue indéfiniment ; alors, [...] il y a[30] une suite infinie de sous-tableaux cohérents et non clôturés ; les valeurs de vérité indiquées par les formules dans cette «branche»[31] déterminent un contre-modèle intuitionniste (ou même classique). Les valeurs indiquées

---

[29] «montrer», dans la seconde.

[30] «aura», dans la seconde version.

[31] «dans les colonnes gauches de ces tableaux», selon la seconde version.

> par la colonne droite ne comptent que pour la formule initiale, étant donné qu'il n'y a pas de «<u>stockage</u>» dans cette colonne[32].
>
> Après coup, il n'est pas difficile de rattacher notre construction aux idées de Tarski, Mostowski et Rasiowa[33].

Dans la seconde version, Beth ajoute après cette dernière phrase :

> Mais ces auteurs prennent la logique intuitionniste pour un donné[34], tandis que nous sommes partis du point de vue intuitionniste pour démontrer le caractère complet de la logique de Heyting par rapport aux raisonnements qui à ce point de vue sont concluants.

Laissons de côté les restrictions qui suivent cette dernière assertion, pour constater que dans la troisième version, du 8 août, soit quatre jours après ses corrections du 4, ce qu'il ajoute à la place de la dernière citation commence par :

> Mais quant à notre point de vue, il y a une grande différence. Les auteurs mentionnés acceptent la logique intuitionniste comme un système formel

---

32 «Les valeurs indiquées par les formules dans les colonnes droites ne comptent pas, étant donné qu'il n'y a pas de «<u>stockage</u>» dans une telle colonne», selon la seconde version.
Dans chacune des deux versions, Beth prend d'abord soin de marquer une réserve sur l'interprétation des inscriptions de formules des côtés gauche et droit, en entourant de parenthèses les en-têtes des colonnes, qui se présentent sous les formes respectives «(Vrai)», «(Faux)». Puis, une des corrections manuscrites qu'il apporte le 4 août à la seconde version, et qu'on retrouve dans les versions suivantes, consiste à supprimer les parenthèses entourant «Vrai». Dans le texte définitif (et aussi dans son manuscrit), des parenthèses manquent aussi, dans certains tableaux, autour de «Faux» : il s'agit vraisemblablement d'un simple oubli.
Ces en-têtes deviendront respectivement, dans le mémoire *Semantic construction of intuitionistic logic* [Beth 1956b] et dans les *Foundations of Mathematics* [Beth 1959a], «valid» et «(not valid ?)», et seront de nouveau modifiées, plus radicalement, en 1959 ; voir, à ce sujet, la note 48.

33 [Rasiowa 1951] et [Rasiowa 1954] sont cités dans la bibliographie qui vient peu après. Les mêmes auteurs, commentés de la même façon, les mêmes travaux, et [Tarski 1938], sont mentionnés dans le mémoire Semantic construction of intuitionistic logic [Beth 1956b] et dans la conférence Completeness results for formal systems [Beth 1960].

34 «une donnée», corrige-t-il le 4 août.

> donné ; pour nous, il s'agit de partir des conceptions intuitionnistes et de construire un système logique qui leur correspond.» [C'est nous qui soulignons.]

Et pour bien indiquer que désormais c'est là que se situe le point central de sa contribution, il en *change le titre,* en *Construction sémantique de la logique intuitionniste.* Il s'agit désormais, et il s'agira dans ses travaux futurs sur les tableaux, de partir de considérations intuitives sur le sens des termes fondamentaux de la logique, ou, plus tard, sur la signification de la déductibilité, de traduire ces façons de voir en règles de construction de tableaux, et de tirer, de l'étude de ceux-ci et de leur structure, les caractéristiques de systèmes formels, tant de type Hilbert que de type Gentzen, rendant compte de ces conceptions intuitives.

Entre temps, Beth et Hintikka sont entrés en relations épistolaires, depuis que le 22 juin, Quine, réagissant à l'envoi d'une copie du manuscrit de *Semantic entailment and formal deducibility,* a pointé la ressemblance de la méthode des tableaux avec «des travaux récents de K.J.J. Hintikka» [Hintikka 1953][35], [Hintikka 1955], et a communiqué l'adresse de ce dernier à Beth. Dans sa réponse, déjà évoquée, du 7 juillet, celui-ci dit qu'il a trouvé cette lettre, en même temps que les épreuves de son mémoire, à son retour de vacances.

> J'ai immédiatement écrit à Hintikka et espère être en mesure de rendre justice à son travail.

Il joint des tirages de ses travaux à sa lettre à Hintikka.

En ce qui concerne la logique classique, pour laquelle la méthode des tableaux a déjà trouvé sa forme définitive à ce moment-là, il est hors de notre sujet de suivre par le menu les échanges de lettres qui s'ensuivent jusqu'à l'automne suivant, entre Hintikka qui répond le 10 juillet, tout en envoyant des tirages de ses propres travaux, et Beth qui répond à son tour le 12, tout en lui adressant une copie de la postface qu'il a l'intention de joindre au texte du mémoire [Beth 1955b]. Mais, dans cette période où Beth, élaborant l'extension de la méthode au cas intuitionniste, définit une approche de la logique dont il ne se départira plus, nous porterons notre attention sur ce qui se dit au sujet de la logique intuitionniste dans cette correspondance.

Le 12 juillet justement, Beth écrit, vers la fin de sa lettre :

---

[35] Ce n'est sans doute pas la meilleure référence à donner à des travaux de Hintikka parus en 1953 sur ce sujet, mais c'est celle que donne Quine.

> [...] je voudrais contester vos remarques sur l'intuitionnisme. Afin de montrer que U entraîne V sémantiquement parlant, on doit montrer que tout modèle de U est un modèle de V . Ce que vous et moi faisons, toutefois, est de montrer qu'on ne peut pas trouver un modèle de U qui n'est pas un modèle de V . Cela revient au même du point de vue classique, mais <u>pas</u> du point de vue intuitionniste.

Il s'attire, le 20 juillet, une réponse clairvoyante de Hintikka. Celui-ci suggère d'abord une correction à la postface, acceptée par Beth dès le 22. Lorsque Hintikka en vient à «l'extrêmement intéressant problème de l'intuitionnisme», c'est d'abord pour dire qu'il hésite à s'y lancer.

> J'attends avec le plus grand intérêt - continue-t-il - votre traitement des matières disponibles, sous un point de vue intuitionniste. Je pense que je peux apprécier votre point de vue ; mais je doute que ce soit le seul possible. Le point sur lequel j'aimerais insister, c'est qu'aux preuves résultant de la construction d'un ensemble modèle[36] (ou de la construction d'un tableau sémantique), il puisse être donné une interprétation intuitionniste.

Et parmi les commentaires partant dans plusieurs sens qu'il fait ensuite, vient cette remarque prophétique :

> Seulement voilà, je doute que les méthodes de preuve véritablement constructives entrent dans le champ de la logique élémentaire. J'ai le pressentiment que nous ne pourrons profitablement discuter ces méthodes qu'après avoir introduit des idées supplémentaires, qui sont plus ou moins étrangères à la logique élémentaire.

Nous laisserons aussi de côté la plupart des détails de discussions à propos de la justification de quelques points *techniques* relatifs au projet de Beth, sur lesquels Hintikka, alors très pris[37], accroche dans un premier temps. Le 22 juillet, Beth lui écrit qu'il lui envoie, «sous un pli séparé, une copie d'une

---

[36] Il s'agit d'ensembles de formules que Hintikka utilise dans ses travaux au lieu des valuations. La colonne de gauche d'une branche non close d'un tableau sémantique développé jusqu'à que chaque occurrence de formule y ait reçu le traitement réclamé par les règles, contient des formules qui constituent un ensemble modèle, et tout ensemble modèle peut être obtenu ainsi.

[37] «Pour le moment, je suis très occupé par un certain nombre d'autres choses», écrit-il le 19 août.

ébauche» du texte de sa future conférence à Paris[38]. Aux remarques de Hintikka concernant la logique intuitionniste, il répond :

> Il semble clairement ressortir, des résultats de mon nouvel article, que la logique intuitionniste présuppose un plus large ensemble de modèles. Dans votre terminologie, elle admet des modèles qui ne remplissent pas la condition (C.4)(b)[39]. Ceci est dû au fait qu'elle ne considère pas un modèle comme une «totalité achevée fermée». Car si l'ensemble considéré est obtenu par une construction pas à pas, même si toutes les formules K(a/x) lui sont successivement adjointes, nous ne pouvons jamais, durant le processus, être forcés d'adjoindre (Ux)K .
>
> Donc, du point de vue intuitionniste, nous ne pouvons pas tirer un trait entre les ensembles de formules qui satisfont la condition (C.4)(b) et ceux qui n'y satisfont pas. [...]
>
> Puis-je ajouter que les modèles bizarres qui doivent être admis en s'appuyant sur ces considérations et dont j'ai montré un exemple dans mon article pour Paris ont été effectivement mis en oeuvre par Brouwer et Heyting en vue de prouver la fausseté intuitionniste de certaines formules.

---

[38] Nous ne savons pas s'il s'agit de l'ébauche du 20 juillet, où les remarques sur les travaux de Hintikka : «une méthode qui se rapproche de la nôtre», suivent, dans la *Bibliographie*, les références à ces travaux, ou s'il s'agit d'une nouvelle frappe de cette ébauche, dont il ne serait pas resté de copie, et où auraient été effectuées les corrections manuscrites mentionnées dans la note 27, parmi lesquelles, en particulier, la substitution de la date du 4 août, et le report, à l'introduction, des remarques sur «les travaux de M. K.J.J. Hintikka qui, pour le cas classique, contiennent une construction tout à fait analogue à la mienne. Toutefois, M. Hintikka ne donne pas les tableaux sémantiques qui se sont avérés un instrument de travail fort précieux, et il n'a pas appliqué ses idées au cas intuitionniste.»
Il est clair qu'entre temps, Beth s'est mieux familiarisé avec ces travaux. D'autre part, la «règle de réduction» (i) des deux premières ébauches porte d'autres étiquettes dans les versions ultérieures ; or, lorsque Beth, dans ses lettres à Hintikka des 7 et 11 octobre 1955, renvoie à une «règle (i)», c'est bien de celle-là qu'il s'agit.

[39] (Ux)K appartient à un «ensemble modèle», s'il en va de même de K(*a* /x) pour toute constante individuelle *a* admettant une occurrence dans une formule de cet ensemble.

Ces modèles bizarres, ce sont les déploiements arborescents dont les noeuds peuvent être étiquetés, lorsque Beth les présente à Paris à la fin de septembre 1955 [Beth 1958b], par des formules, et plus tard, par des «jonctifs» <*junctives*>, et dont tous les sous-arbres valident l'étiquette de leur point d'«arrêt d'élagage»[40]. Il faut en effet créer une sémantique intuitionniste[41], et il est parfaitement naturel d'avoir l'idée de remplacer le domaine d'individus d'une structure classique par un déploiement, borné par surcroît, dans la stricte orthodoxie des mathématiques intuitionnistes. Les contre-modèles *éventuels* appartiendront à cette *espèce* (au sens donné par Brouwer à ce terme). Mis à part le remplacement des formules par des «jonctifs», c'est de cette notion de modèle que Beth se servira dans tous ses travaux ultérieurs sur les tableaux intuitionnistes.

La question de la complémentation des directives de construction d'un tableau sémantique en vue de garantir un examen exhaustif de toutes les combinaisons de successions d'applications des règles sera réglée, dans les travaux faisant suite au texte définitif de la *Construction sémantique de la logique intuitionniste* [Beth 1956b], à partir d'une idée contenue dans un additif, inclus dans ce texte, à la règle visant le traitement d'une formule niée $\overline{X}$ apparue à gauche :

> Dans une tentative systématique, on envisagera les deux démarches à la fois[42], ce qui, dans le langage des tableaux sémantiques, donne lieu à la règle de construction suivante : si, dans la colonne gauche, il se présente la formule $\overline{X}$ tandis que la colonne droite contient la formule Z, alors le tableau est scindé en deux sous-tableaux disjonctivement connexes, dont les colonnes droites contiennent respectivement X et Z [...].»

Développée, cette idée va conduire, dans le mémoire *Semantic construction of intuitionistic logic* [Beth 1956b], à incorporer à un calcul de séquents (dont les règles ne sont plus qualifiées de «règles de réduction»), une règle de scissions disjonctives commandant l'ouverture d'un sous-tableau

40 Cette expression imagée est nôtre. Notons qu'il se peut qu'il n'y ait pas de branche à couper à ce point-là.

41 «La vraie difficulté», dit Beth écrivant à Hintikka le 5 novembre, «se rapporte à la notion de contre-exemple intuitionniste».

42 Substituer X à tout ce qui figure à droite, ou repousser l'application de cette règle et ne l'appliquer qu'après l'application d'autres règles, susceptibles d'introduire auparavant de nouvelles formules à gauche, constituant autant de nouvelles chances d'aboutir à une clôture.

disjonctif débutant à droite par la seule formule présentée auparavant à droite au premier rang, et d'un autre sous-tableau disjonctif où se retrouvent à droite les mêmes formules qu'auparavant, mais dans l'ordre résultant de l'ordre d'auparavant par déplacement au dernier rang de la formule qui, auparavant, occupait le premier rang - règle moyennant laquelle les règles concernant une disjonction, à droite, et une négation, à gauche, sont tout simplement ramenées aux règles correspondantes dans le cas classique. En dépit des petits changements qui affecteront par la suite ce calcul de séquents, à l'initiative de Beth lui-même ou en réponse à des objections ou suggestions de divers critiques, ces règles ne varieront pas quant à leur fond, jusqu'à leur présentation définitive dans les *Foundations of Mathematics* [Beth 1959a].

Les clauses de détermination de la validité d'une formule dans un modèle, notions dont de premières définitions sont données dans la *Construction sémantique de la logique intuitionniste* [Beth 1958b] présentée à Paris, seront elles aussi modifiées par la suite.

Elles font l'objet de deux lettres de Beth à Heyting, des 18 et 19 novembre 1955. Le 18, Beth est sous le coup d'une inspiration subite (la lettre du lendemain nous apprend qu'ils ont parlé d'une Note que Beth fait parvenir à Heyting en le priant d'attendre pour la présenter, le temps de prendre l'avis de Tarski) :

> Notre entretien, en effet, a eu pour conséquence que, ce matin, le sens de la scission disjonctive m'a tout à coup sauté aux yeux.
>
> On doit dès le début considérer des séquents du type général
>
> $$U_1 , U_2 , \dots , U_m \vdash V_1 , V_2 , \dots , V_n ,$$
>
> à quoi il faut attacher la signification suivante : tout modèle de U_1 , U_2 , ... , U_m est la réunion d'un nombre fini de sous-modèles, dont chacun remplit une des conditions V_1 , V_2 , ... , V_n .
>
> Alors, nous n'allons pas tenter de construire un contre-modèle, mais de construire un calque <*inpassing* > comme Brouwer l'a décrit. Nous nous trouvons face à un modèle déterminé des *U* et face à un modèle non encore déterminé, qui est une réunion de sous-modèles comme dit plus haut. Appelons M et N ces modèles.
>
> Nous allons scinder chacun de M et de N en sous-modèles, de plus en plus loin. Scinder M donne dans le tableau une scission conjonctive, scinder N , une scission disjonctive. La construction s'achève avec

> succès lorsque nous avons partagé M en pièces, dont toutes s'ajustent à une pièce de N .
>
> L'interprétation ci-dessus conduit naturellement à une révision extensive de tout le travail. Nous pouvons supposer l'arbre de M donné, l'arbre de N peut être construit suivant une prescription (tableau sémantique) fixée. Supposons les pièces de N numérotées. Si le séquent est prouvé de manière intuitionnistiquement acceptable, il y a devant chaque branche de l'arbre de M le numéro attaché à la pièce de l'arbre de N où elle se loge. Ce fait fournit la base d'une application du théorème de Brouwer.

Il apparaît le lendemain que la mise en œuvre requiert des résultats plus forts que prévu, et qu'elle est plus malaisée qu'il ne semblait de prime abord :

> Visiblement, le théorème de Brouwer repose sur des hypothèses très fortes quant au caractère de preuve intuitionnistiquement admissible.

Néanmoins, le 3 février 1956, Beth écrit à Craig au sujet des liens entre leurs résultats respectifs (le théorème de Beth sur la définissabilité, et le lemme d'interpolation de Craig), et, après lui avoir dit un mot de *«Semantic Entailment»* ([Beth 1955b]), lui annonce :

> J'ai maintenant achevé un traitement semblable de la logique intuitionniste, incluant une preuve intuitionniste de complétude.

En effet, le mémoire *Semantic construction of intuitionistic logic* [Beth 1956b] va être présenté à la Classe des Lettres de l'Académie Royale Néerlandaise des Sciences le 5 mars suivant. Beth y achève ce qu'il avait esquissé dans la conférence donnée à Paris en septembre 1955, et y met en œuvre le programme décrit à Heyting le 18 novembre suivant. Le calcul des séquents répertoriant les règles de réduction y prend une forme quasi définitive[43], de même que les directives pour la constitution des tableaux ; les règles définitives, définissant la validité d'une formule dans un arbre étiqueté, appelé un *semi-modèle* [44], se présentent ainsi (nous omettons les conditions qui

---

[43] Juste en raison de l'omission d'une formule dans une des règles, omission relevée par divers correspondants, et réparée dans la règle correspondante, dans les *Foundations of Mathematics*.

[44] C'était le terme en usage à l'époque, après la parution d'un article de Kemeny, *Models of logical systems* [Kemeny 1948], pour désigner ce que nous appelons aujourd'hui une *structure*. Beth lui-même emploie «structure» en cette acception dans *Formal Methods* [Beth 1962], mais c'est six années après.

concernent les conjonctions et les formules dominées par un quantificateur universel, règles qui ne font pas intervenir de sous-arbre) :

un atome est valide dans un tel arbre, si cet arbre est la réunion d'un nombre fini de sous-arbres dont le point d'«arrêt d'élagage»[40] est étiqueté par un «conjonctif» où cet atome figure (cette condition, révisée par rapport à celle de 1955, qui prévoyait la présence de l'atome sur chaque branche, revient au même) ;

> une négation est valide dans un arbre si elle n'est valide dans aucun de ses sous-arbres (il est remarquable qu'une telle condition ait été énoncée dès 1955 !) ;
>
> une disjonction est valide dans un arbre, si cet arbre est la réunion d'un nombre fini de sous-arbres dans chacun desquels l'un ou l'autre des termes de cette disjonction est valide (condition énoncée dès 1955) ;
>
> une implication est valide dans un arbre, si chacun des sous-arbres de celui-ci, qui satisfait l'antécédent, satisfait le conséquent (condition énoncée dès 1955) ;

une formule $(Ex)Y(x)$ est valide dans un arbre, si cet arbre est la réunion d'un nombre fini de sous-arbres dans chacun desquels une formule de la forme $Y(a)$ se trouve valide (pour un a qui peut dépendre du sous-arbre concerné ; en 1955, la condition n'était imposée qu'à l'arbre entier).

Beth justifie la substitution des *sous-arbres* aux *branches* par la volonté de ne faire appel qu'à des propriétés déterminées par des segments initiaux des branches, donc après un nombre fini de choix entre celles-ci : une attitude intuitionniste est ainsi substituée à l'attitude classique, qui raisonne sur les branches considérées séparément, une à une.

Le point essentiel du mémoire est bien sûr le théorème de complétude pour le système des tableaux : tout séquent «vrai» («intuitionnistiquement», précisera-t-il en reprenant cette question dans les *Foundations of Mathematics,* mais dans le mémoire de 1956, cela va sans dire) au sens sémantique, c'est-à-dire tel que tout modèle de son antécédent se décompose en un nombre fini de sous-arbres dont chacun vérifie une des formules composant le conséquent, est dérivable dans ce sytème, autrement dit, admet un tableau sémantique clos. Beth en donne deux preuves, l'une (du point de vue) classique, l'autre du point de vue intuitionniste tel qu'il le voit. Du point de vue classique, un tableau non clos (relevant de la logique intuitionniste) fournit un contre-modèle intuitionniste, c'est à dire du type expliqué il y a un instant.

Il n'entre pas dans notre propos, et cela constituerait d'ailleurs la matière de tout un autre travail, de rapporter les contestations, les débats, et les corrections suscitées par la publication de la *Semantic construction of intuitionistic logic* [Beth 1956b]. Les *Foundations of Mathematics* [Beth 1959a] évoquent à ce sujet Heyting (il faut sans doute y adjoindre Brouwer), Kreisel, et Gödel. Nous nous contenterons ici de citer un passage d'une lettre que Beth écrit à Kreisel le 23 décembre 1957, et où, après avoir une fois de plus plaidé sa cause, il reconnaît :

> Je conviens tout à fait que tous ces arguments ont l'air plus ou moins fallacieux, mais il me semble que cette situation ne peut être améliorée autrement que (i) en instaurant certains standards formels pour la logique d'ordre supérieur intuitionniste, et (ii) en donnant un énoncé plus élaboré du théorème de complétude, dans lequel les explications données ci-dessus n'apparaissent plus comme faisant partie de la preuve, mais sont incorporées aux hypothèses du théorème (ou plutôt, peut-être, aux axiomes de la logique d'ordre supérieur).

Et vu le retard pris par la publication des *Foundations of Mathematics*, il annonce sa décision de s'en tenir

> [...] à inclure un résumé de mon matériel dans son état présent, et à mentionner et le fait que certaines objections ont été élevées et ma propre position [...][45].

---

[45] Avant son départ pour les Etats-Unis, au début de 1957, Beth avait confié à l'Auteur de ces lignes le soin de rechercher une extension de la méthode à divers systèmes de logique modale. Le 11 avril 1957, en possession des «bonnes règles» pour les systèmes T et T' (équivalent à S4) de Feys-Von Wright, l'Auteur en rend compte dans une ébauche de manuscrit qu'il joint à une lettre à Beth. Ces règles sont des règles de transformation de déductions, règles qui sont «réversibles» (de réduction, de haut en bas), ce qui a pour corollaire l'équivalence entre déductibilité et clôture dans le cas du système T mais n'en fournit pas l'équivalent dans le cas de T' . La complétude fait défaut dans les deux cas, faute d'une notion de modèle appropriée. Beth répond le 19 mai en indiquant de définir la validité de MA sur une branche par l'accessibilité de A à partir de tous les nœuds de cette branche, en allant vers le bas. En août suivant, lorsque l'auteur, en possession de preuves d'équivalence entre clôture et déductibilité justifiant ces règles (et reposant sur une preuve finitiste du «Hauptsatz» en termes de tableaux), reprend contact avec Beth, de retour des Etats-Unis, celui-ci trouve dans

Mais déjà, pour ce qui est du traitement de la logique intuitionniste par des tableaux dont les règles de construction sont énumérées dans les *Foundations*, Beth est en train de changer son fusil d'épaule. Faute d'une sémantique intuitionniste universellement acceptée, il reprend, du début, une justification des règles d'écriture des tableaux à partir des éléments bien assurés de la logique intuitionniste - à savoir, les règles de déduction de celle-ci. Le 8 janvier 1958, il écrit à M. Guillaume :

> [...] pendant ces dernières semaines, j'ai réussi de constituer la méthode des tableaux sémantiques *sans avoir recours à des considérations d'ordre sémantique*. Je crois avoir reconstruit, dans la mesure du possible, les idées de Gentzen [...] [C'est nous qui soulignons].

Dans sa conférence *Completeness results for formal systems* [Beth 1960] au Congrès International des Mathématiciens qui se tient à Edimbourg, en août suivant, il

> observe que les règles de construction des tableaux sémantiques, quoique motivées par la sémantique, peuvent être énoncées en termes syntaxiques[46]. Ainsi, un tableau sémantique peut aussi bien être

---

son courrier le fascicule de Kanger, *Provability in logic* [Kanger 1957], présentant les mêmes calculs de séquents et une sémantique très différente, que les travaux de Kripke ont fait oublier, bien qu'elle anticipe, dans un cadre inhabituel, la sémantique de Kripke [Kripke 1959].

L'auteur se souvient que Beth lui a aussi montré, à cette époque, une esquisse de traitement de divers systèmes de logique modale au moyen de tableaux comportant des *tableaux collatéraux*, écrite par Kripke ; il est renvoyé à ce travail dans une note de la communication de Beth au Congrès International des Mathématiciens d'Edimbourg [Beth 1960], en 1958, et à des travaux de Kripke à ce sujet (notamment [Kripke 1959]) dans [Beth 1961]. La question du rôle de Beth dans la genèse des travaux publiés par la suite par Kripke sur la logique modale et sur la logique intuitionniste apparaît comme digne d'une étude approfondie ultérieure, qui pourrait s'avérer du plus grand intérêt. Dans [Beth 1961], dont un mot sera dit ci-dessous, Beth et Nieland traitent de la construction sémantique et de la complétude des parties «implicative» et «strictement implicative» des systèmes S4 et S5.

46 Même remarque à propos du cas «classique» dans le texte de la conférence *Construction sémantique de la logique intuitionniste* [Beth 1958b], prononcée à Paris en 1955 (tout comme, déjà, dans les textes de chacune des ébauches de cette conférence) : «les règles de construction et de clôture pour les tableaux sémantiques,

> considéré comme une démonstration formelle dans une certain système formel F , qui est trivialement complet, pour ainsi dire.

Et le fait qu'on puisse toujours transformer un tableau en preuve formelle dans un système de Gentzen prouve la complétude de ce dernier. La nouvelle orientation de la pensée de Beth transparaît quand, après avoir évoqué les objections élevées par Kreisel et Kleene quant au support sémantique de sa construction de la logique intuitionniste par les tableaux, il note :

> En tous cas, ma version intuitionniste de la méthode des tableaux sémantiques constitue un substitut adéquat aux autres formalisations existantes de la logique intuitionniste [...]. En outre, il semble qu'elle offre les avantages qui caractérisent la versions classique [...] je peux citer le fait que les résultats topologiques de complétude bien connus, de Tarski pour les calcul des énoncés intuitionnistes, et de Mostowski et Rasiowa pour la logique élémentaire intuitionniste[33] peuvent être améliorés en ceci que tous les espaces topologiques requis sont des parties du discontinu de Cantor.
>
> Afin de ne pas donner une idée incorrecte des avantages de la méthode des tableaux sémantiques, je voudrais alors mentionner les résultats métamathématiques nécessaires pour justifier l'application de tableaux sémantiques clos en tant que dérivations formelles.
>
> (I) Il faut avoir prouvé que la clôture d'un tableau sémantique ne dépend pas de l'ordre relatif dans lequel les formules sont soumises à décomposition.
>
> (II) Il faut avoir prouvé que, toutes les fois que les tableaux pour $K' \vdash L', X$ et pour $K'', X \vdash L''$ sont clos, ainsi en va-t-il du tableau pour $K', K'' \vdash L', L''$.
>
> (III) Il faut avoir prouvé que, toutes les fois que U est une identité logique, le tableau pour le séquent $\varnothing \vdash U$ est clos.

Cette conférence commence par la présentation d'un tableau sémantique classique clos pour la *loi de Peirce* $[(p \to q) \to p] \to p$, et se continue par un retour aux valuations *non-régulières,* présentées en public en tant qu'instruments de preuves d'indépendance. Ces faits, que d'autres

---

bien qu'elles soient inspirées par des considérations d'ordre sémantique, peuvent être énoncées de manière purement formelle.»

corroborent[47], témoignent d'une réflexion sur les points où intervient l'écart entre les règles classiques et intuitionnistes, appuyée sur un retour aux préoccupations antérieures à l'écriture des deux mémoires majeurs sur les tableaux sémantiques, *Semantic entailment and formal derivability* [Beth 1955b] et *Semantic construction of intuitionistic logic* [Beth 1956b]. L'écart est déjà sensible dans la seule théorie de l'implication (de ce point de vue, justement, la loi de Peirce est paradigmatique), et, en prenant les choses du côté classique, Beth avait déjà, dès le 31 mai 1958, présenté une Note *On the completeness of the sentential logic* [Beth 1958a], où il avait prouvé que la sémantique des valuations répondant aux tables de vérité usuelles est complète pour les identités logiques où ne figurent que négation et implication, connecteurs déjà seuls pris en compte dans les ébauches de 1954 dont nous avons parlé, vu leur capacité à définir explicitement - du point de vue classique - les autres connecteurs.

Le 31 décembre suivant, il écrit à Craig :

> Sous un pli séparé, je vous envoie un tirage de ma preuve de complétude pour la logique des énoncés en négation et implication. Plus tard, j'ai trouvé l'astuce qui permet d'appliquer un argument analogue au cas de la logique des énoncés en implication seule. Cette preuve est habituellement très compliquée en raison du fait que cette version de la logique des énoncés est fonctionnellement incomplète. L'astuce consiste tout simplement à observer que les règles de construction des tableaux sémantiques peuvent être simplifiées dans le cas particulier où $(U \rightarrow V) \rightarrow V$ apparaît dans une colonne de droite, de telle sorte qu'on évite la scission qui serait requise par la règle générale.

Ces recherches en sont à leur terme au moment où Beth écrit les *Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par séquences* [Beth 1959b]. Il a été contesté que les tableaux utilisés pour construire la logique intuitionniste puissent être qualifiés de *sémantiques ?* Les voilà qualifiés, ce qu'on ne pourra contester, de *déductifs*. Beth écrit des *schémas de réduction,* mais cette fois présentés, à l'inverse de ce qu'il avait fait à Paris en 1955, sous forme de fragments de tableaux, représentant une *réduction d'un problème de déduction à un autre.* Un tableau déductif est constitué en itérant des applications des règles correspondantes[48]. Le premier à se présenter est

[47] En ce qui concerne les valuations non-régulières, voir la conférence de M. de Jongh.

[48] Corrélativement, les en-têtes des colonnes de gauche et de droite dans les tableaux déductifs deviennent respectivement «Prémisses» et «Conclusions», dans les

d'ailleurs un tableau pour la loi de Peirce $[(A \to B) \to A] \to A$, qui n'est pas clos, puisque les règles appliquées sont celles qui concernent les implications dans le cas intuitionniste. Beth avait eu l'occasion, le 7 octobre 1955, d'expliquer à Hintikka, mais avec des arguments implicitement sémantiques, pour quelles raisons ces règles «sont les mêmes» que dans le cas classique, à ceci près qu'elles ne s'appliquent à une implication apparue à droite que si cette formule y figure seule. Dans les *Considérations heuristiques,* il montre pourquoi cette seule restriction empêche le sous-tableau non clos de ce tableau de se clore, et rappelle comment - ce sous-tableau présente deux formules du côté droit ; la seconde apparue «supplante» la première intervenue, dira-t-il dans ses ouvrages ultérieurs sur cette question, dont nous dirons encore un mot plus bas. Dans ce tableau dont on attend la clôture selon les règles relatives au cas classique et qui n'est pas clos parce que l'on n'est pas dans ce cas, n'y a-t-il pas comme une réminiscence des tableaux relatifs à des pseudo-valuations n'obéissant qu'à une partie des tables de vérité, présents dans les ébauches de *A subformula theorem for the sentential calculus...*? En tous cas, les *Considérations heuristiques* justifient la complétude de quatre systèmes d'axiomes-schémas, pour l'implication seule (comportant juste deux des schémas, indépendants, déjà écrits sous forme d'axiomes par Frege [Frege 1879]), ou pour l'implication et la négation seules, en logique intuitionniste, ainsi qu'en logique classique moyennant, dans l'un et l'autre cas, la seule adjonction de la loi de Peirce.

Les idées esquissées dans les *Considérations heuristiques* sont reprises et sommairement développées dans le rapport CETIS (Centre de traitement de l'information scientifique, d'Euratom) n° 1, du 1 mai 1961, *Méthodes de déduction,* par E.W. Beth, figurant dans le *compte-rendu des travaux effectués par l'Université d'Amsterdam dans le cadre du Contrat Euratom n° 010-60-12,* [Beth 1961] présenté par E.W. Beth en août 1961. On y voit présenter et traiter, côte à côte, pour la logique classique, les tableaux sémantiques, et pour la logique intuitionniste, les tableaux déductifs, construits selon les mêmes règles que les anciens tableaux sémantiques, mais reposant sur des justifications se rapportant aux déductions. Avec les mêmes deux dénominations des tableaux selon leur domaine d'application, et les mêmes deux justifications selon la logique considérée, les esquisses présentées dans ce document sont développées en détail dans le livre de Beth, *Formal methods* [Beth 1962], qui paraît l'année suivante.

Considérations heuristiques... et dans les ouvrages ultérieurs traitant des tableaux ainsi qualifiés.

Et c'est en raison de cette intervention, en fin de compte, de tableaux déductifs, et pour rendre hommage à notre Maître, que dès 1964, nous avons mêlé, sous l'appellation de **tableaux de Beth** [Guillaume 1966], tableaux sémantiques et tableaux déductifs.

Bibliographie

Bernays, Paul.

1936 *Logical Calculus.* Notes on Lectures at the Institute for Advanced Study 1935-36, prepared with the assistance of F. A. Ficken. Mimeographed. Inst. for Adv. Study, Princeton N.J., 125 pp.

Beth, Evert Willem

1947 Semantical Considerations on Intuitionistic Mathematics. *Indagationes mathematicae* 9, 572-577.

1951 A Topological Proof of the Theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel. *Indagationes mathematicae* 13, 436-444.

1953a Some Consequences of the Theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel-Malcev. *Indagationes mathe-maticae* 15, 66-71.

1953b On Padoa's Method in the Theory of Definition. *Indagationes mathematicae* 15, 330-339.

1955a Remarks on Natural Deduction. *Indagationes mathematicae* 17, 322-325.

1955b Semantic Entailment and Formal Derivability. Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Afd. Letterkunde, N.R. 18, n° 13, 309-342.

1956a *L'existence en mathématiques.* Gauthier-Villars, Paris, et Nauwelaerts, Louvain, 1956, 60 pp.

1956b Semantic Construction of Intuitionistic Logic. Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Afd. Letterkunde, N.R. 19, n° 11 (1956), pp. 357-388.

1957 Remarks on Elementary Predicate Logic. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3, 58-62.

1958a On the Completeness of the Classical Sentential Logic. *Indagationes mathematicae* 20, 434-437.

1958b Construction sémantique de la logique intuitionniste. Le raisonnement en mathématiques et en sciences expérimentales. Colloque International du C.N.R.S. 70 (Paris, 26 sept.-1 oct. 1955), 77-84.

1959a The Foundations of Mathematics. A study in the Philosophy of science. North-Holland, Amsterdam, 1959, xxvi+741 pp.

1959b Considérations heuristiques sur les méthodes de déduction par séquences. *Logique et Analyse*, n.s. 2, 153-159.

1960 Completeness Results for Formal Systems. *Proceedings of the international Congress of Mathematicians 1958.* Cambridge University Press, 1960, pp. 281-288.

1961 Compte-Rendu des travaux effectués par l'Université d'Amsterdam dans le cadre du Contrat Euratom n° 010-60-12. EURATOM - C.C.R. ISPRA. Rapport CETIS n° 26, Logique, Août 1961.Miméographié. 170 pp.

1962 Formal Methods. An Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic. Reidel, Dordrecht, 1962, xiv+170 pp.

Frege, Gottlob

1879 Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Nebert, Halle, 1879, x+88 pp.

Gentzen, Gerhard.

1934 Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210, 405-431. Traduction française par Ladrière, J. (avec notes de Feys, R. et Ladrière, J.) sous le titre *Recherches sur la déduction logique.* Presses Universitaires de France, Paris, 1955. XII+170 pp.

Gödel, Kurt

1933 Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 3, 39-40.

Guillaume, Marcel

1966 Quelques remarques sur les "tableaux de Beth". *Synthèse* 16, 27-33. Reproduit dans *E.W. Beth Memorial Colloquium. Logic and Foundations of Science. Paris, Institut Henri Poincaré, 19-21 May 1964.* Ed. by J.L. Destouches. Reidel, Dordrecht, 1967, pp. 39-45 .

Hasenjaeger, Gisbert

1952 Konsequenzenlogik, dans : Hermes, H. und Scholz, H. Mathematische Logik. *Enzyklopädie der mathematischen Wissenchaften* 1 Berlin 1952.

Herbrand, Jacques

1930 Recherches sur la théorie de la démonstration. Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III Sciences mathématiques et physiques, n° 33, 128 pp.

Heyting, Arend

1930 Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1930, pp. 42-56.

Hilbert, David et Bernays, Paul

1939 *Grundlagen der Mathematik,* II. Springer, Berlin, 1939, xii+498 pp.

Hintikka, K.J. J.

1953 Distributive Normal Forms in the Calculus of Predicates. *Acta Philosophica Fennica* 6, 1-71.

1955 Form and Content in Quantification Theory. *Acta Philosophica Fennica* 8, 7-55.

Kanger, Stig

1957 *Provability in Logic.* Stockholm Studies in Philosophy I, Almquist and Wiksell, Stockholm 1957, 47 pp.

Kemeny, John G.

1948 Models of Logical Systems. *Journal of Symbolic Logic* 13, 16-30.

Kripke, Saul A.

1959 A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* 24, 1-14.

Löwenheim, Leopold

1915 Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen* 76, 447-470.

Mc Kinsey, John Charles Chenoweth

1941 A Solution of the Decision Problem for the Lewis Systems S2 and S4, with an Application to Topology. *Journal of Symbolic Logic* 4, 117-134.

Mc Kinsey, John Charles Chenoweth and Tarski, Alfred

1944 The Algebra of Topology. *Annals of Mathematics* ser. 2, 45, 141-191.

1946 On Closed Elements in Closure Algebras. *Annals of Mathematics* ser. 2, 47, 122-162.

1948 Some Theorems about the Sentential Calculi of Lewis and Heyting. *Journal of Symbolic Logic* 13, 1-15.

Mostowski, Andrzej

1949 Sur l'interprétation géométrique et topologique des notions logiques. *Library of the 10th International congress of Philosophy (Amsterdam 1948).* Ed. Beth, E.W., Pos, H.J., Hollak, H.J.A. North Holland, Amsterdam, 1949, pp. 767-769.

Rasiowa, Helena

1951 Algebraic Treatment of the Fonctional Calculi of Heyting and Lewis. *Fundamenta Mathematicae* 38, 99-126.

1954 Algebraic Models of Axiomatic Theories. *Fundamenta Mathematicae* 41, 291-310.

Rasiowa, Helena, and Sikorski, Roman

1950 A Proof of the Completeness Theorem of Gödel. *Fundamenta Mathematicae* 37, 193-200.

Tarski, Alfred

1935 Grundzüge der Systemenkalkül, Erster Teil. *Fundamenta Mathematicae* 25, 503-526.

1938 Der Aussagenkalkül und die Topologie. *Fundamenta Mathematicae* 31, 103-134.

1952 Some Notions and Methods in the Borderline of Algebra and Metamathematics. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., 1950)* I. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1952, pp. 705-720.

Ithuys-Bechthold, P.M.J.

1995 Inventory of the Papers of Evert Willem Beth (1908-1964), Philosopher, Logician and Mathematician. 1920-1964 (c. 1980). Inventarisreeks Rijksarchief in Noord-Holland 4, Haarlem, 1995, 342 pp.