PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

JULES VUILLEMIN

La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques

Philosophia Scientiæ, tome 3, nº 3 (1998-1999), p. 1-62
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1998-1999__3_3_1_0>

© Éditions Kimé, 1998-1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Philosophia Scientiæ » (http://poincare.univ-nancy2.fr/PhilosophiaScientiae/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

La méthode platonicienne de division et ses modèles mathématiques*

Jules Vuillemin
Collège de France

Résumé. Le*Sophiste* et le *Politique* platoniciens procèdent par essais et erreurs pour parvenir à donner une définition canonique de la méthode de division. Comment rendre compte de l'apparence et de l'approximation ? Deux modèles mathémathiques orientent le philosophe : d'une part une théorie primitive des ensembles, héritée du pythagorisme et associée aux arbres classificatoires pour démontrer par l'absurde l'existence des irrationnelles, d'autre part l'algorithme euclidien (*anthuphairesis*) pour construire leur approximation.

Abstract. Plato's *Sophistes* and *Politicus* proceed by trial and error in order to obtain a canonical definition of his method of division. The question is how to account for appearance and approximation. Two mathematical models are used by the philosopher : on the one hand a crude set theory associated with classificatory trees by which irrational quantities are demonstrated to exist through a *reductio ad absurdum*, on the other hand Euclid's algorithm (*anthuphairesis*) by which their approximation is achieved.

**Je remercie Philippe Nabonnand et Roshdi Rashed pour leurs corrections et leur aide amicales.*

Philosophia Scientiae, (3) 3, 1998-1999, 1-62

Platon recourt constamment à des modèles mathématiques pour illustrer sa doctrine. Il le fait implicitement, lorsqu'à la fin du Livre VI de la *République*, il utilise l'image de la ligne et de ses divisions conformes à la 'section d'or' [Vuillemin 1990, 417-437]. Il le fait explicitement pour éclairer la nature de la méthode qui lui est propre, la méthode de division. Il le fait systématiquement lorsque, dans les deux dialogues jumeaux du *Sophiste* et du *Politique*, il expose les deux conséquences philosophiques principales auxquelles conduit cette méthode.

La première est la distinction de l'être et de l'apparence. Elle exige qu'on renonce au monisme parménidien en accordant que le non être est en quelque façon et elle rend possible la définition du sophiste. La seconde est la distinction entre cité de Dieu et cité des hommes. Elle exige que, des principes du gouvernement idéal, valables pour les hommes tels qu'ils devraient être, on passe aux principes du gouvernement le meilleur compatible avec les hommes tels qu'ils sont, et elle rend possible la définition des régimes constitutionnels.

Ces deux conséquences appelleront deux conceptions de la méthode de division, la seconde supposant la première tout en garantissant qu'on pourra l'appliquer à la réalité. À chacune de ces conceptions, Platon a pris soin d'assigner son modèle mathématique. Le carré qui admet pour côté la diagonale d du carré unité de côté c présente aux yeux l'égalité : $d^2 = 2c^2$. À qui n'est pas sur ses gardes la construction suggère cette fausse apparence : il existerait un rapport, compris entre $\frac{1}{1}$ et $\frac{2}{1}$, entre diagonale et côté. Pour dissiper l'apparence, Platon prend pour modèle une théorie primitive des ensembles, héritée du pythagorisme, et les arbres classificatoires utilisés pour démontrer par l'absurde l'existence des irrationnelles. Étranger qu'il est aux nombres rationnels, le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ ou l'entité mathématique qui en tient lieu peut être approché par une suite infinie de nombres rationnels. Platon fait usage de l'algorithme euclidien pour construire ces approximations et il introduit les définitions infinies ainsi requises.

Euclide et ceux qui l'ont suivi utilisent l'algorithme dit «euclidien» sans en préciser l'origine et sans en formuler les lois. Quant aux ensembles infinis de nombres naturels et aux arbres, Eudoxe les a exclus des mathématiques officielles. Ces dernières ont occulté la tradition atomiste et les traditions des Pythagoriciens et des Platoniciens qui défendaient avec l'unité des mathématiques le primat de l'arithmétique. Contraire à l'axiomatique euclidienne, ce primat a suscité des recherches fécondes pour penser en termes d'ensembles de nombres et d'approximation par fractions continues le problème des irrationnelles. Si la rigueur logique fait défaut à ce premier recours aux ensembles infinis et si les difficultés propres aux fractions continues affectent également leurs rudiments, souvenons-nous que le principal obstacle auquel les mathématiques grecques ont achoppé est l'idée de nombre réel et qu'on verra Théodore concevoir les racines des entiers naturels non carrés comme limites de suites infinies d'approximation rationnelles, et Théétète regrouper dans un ensemble nommé ensemble des «puissances» les carrés de ces racines, à côté de l'ensemble des nombres carrés, orientant ainsi, sinon l'arithmétique qui sépare nombres (entiers) et rapports, du moins la logistique, vers l'arithmétisation du continu.

I. Qu'est-ce qu'une division canonique ?

I.1. Division des ensembles infinis et arbres classificatoires

Avons-nous cependant quelque raison d'attribuer à Platon et *a fortiori* aux Pythagoriciens une sorte de théorie primitive des ensembles et l'extension aux ensembles des opérations arithmétiques ou de leurs analogues (union, produit, division) ?

Il y a, en premier lieu, le témoignage d'Aristote (*Métaphysique* A 5 986a24 sqq.) qui place en tête des oppositions pythagoriciennes fondamentales le couple infini / fini. D'autre part le concept de nombre contient implicitement chez Euclide et explicitement chez de nombreux Pythagoriciens cette précision que tout nombre est fini[1]. Mais si tout nombre est fini, l'infini, second principe de l'arithmétique pythagoricienne, ne peut convenir qu'à une chose différente des nombres individuels, à savoir à l'ensemble ou à des ensembles de tels nombres. Un texte de la *Physique* aristotélicienne précise la nature de l'infini pythagoricien en le rapprochant et en le distinguant de l'infini platonicien.

> Certains, comme les Pythagoriciens et Platon, font de l'infini un principe dans le sens d'une substance existant par elle-même et non pas comme l'accident d'une autre chose. Seulement, tandis que les Pythagoriciens placent l'infini dans les choses sensibles (ils ne regardent pas le nombre

[1]Ainsi en va–t–il pour la Définition 2 du Livre VII des Éléments : un nombre est une multitude composée d'unités (τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος) ; une multitude ou collection composée d'unités est nécessairement finie. Nicomaque et Eudoxe le Pythagoricien parlent de multitude définie ou bornée (πλῆθος ὡρισμένον), discours très proche de celui qu'Aristote tient lorsqu'il évoque une multitude finie (πλῆθος το ` πεπε-ρασμένον, *Métaphysique* Δ 13 1020a13) : références de Heath [1956, II, p. 280].

> comme séparé de celles-ci) et affirment que ce qui est au delà du ciel est infini, Platon nie qu'un corps existe au delà (les idées ne sont pas au delà puisqu'elles ne sont nulle part), l'infini étant présent non seulement dans les objets des sens, mais également dans les idées. De plus, les Pythagoriciens identifient l'infini avec le pair. Car ce dernier, disent-ils, quand l'impair le sépare, l'enclôt et le limite, fournit aux choses (τοῖς οὖσιν) l'infinité. Un signe de ceci, c'est ce qui arrive aux nombres (ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν). Si les gnomons sont placés sans l'un, la forme devient toujours autre ; s'ils sont placés autour de l'un, elle reste toujours la même. Quant à Platon, il admet deux infinis, le Grand et le Petit (*Phys.* III 4 203a4-16).

Toute la difficulté de l'identification pythagoricienne de l'infini et du pair tient dans cette simple remarque : en divisant un nombre pair donné quelconque un nombre *fini* de fois par 2, on parvient à un résidu impair et il est donc impossible d'assimiler sans plus de procès l'infini aux nombres pairs et le fini aux nombre impairs. La conscience de cette impossibilité a très probablement inspiré le commentaire de Simplicius au texte d'Aristote.

> Ceux-ci [les Pythagoriciens] appelaient infini le nombre pair parce que le pair tout entier, comme disent les exégètes, est divisé en parties égales, et que ce qui est divisé en parties égales est infini selon la dichotomie ; la division en parties égales et faite par le milieu va en effet à l'infini; quant à l'impair ajouté, il limite le pair car il interdit sa propre division en deux parties égales... Il est évident qu'ils ne prennent pas la division à l'infini comme s'appliquant aux nombres, mais aux grandeurs (*In Phys.* 455, 20)[2].

Le seul infini légitimé dans les opérations mathématiques selon Aristote étant la dichotomie des grandeurs géométriques, c'est elle qu'invoque Simplicius. Ce faisant, il contredit l'interprétation arithmétique de l'identification pythagoricienne explicitement revendiquée par Aristote. L'opposition de deux sortes de gnomons par laquelle Aristote illustre son propos pose une question difficile d'interprétation[3], mais une chose est claire : la question est celle de la

---

[2]Cité par Diels-Kranz [1960, I, p. 459, 22-25].

[3]Voir, par exemple Ross [1936, 542-545]. Michel [1950, 311-321] a examiné systématiquement la question, qui revient aux différents sens du mot 'hétéromèque' dans l'arithmétique pythagoricienne. Je fais mienne sa conclusion (p. 321) : «... L'opposition parallèle des couples carré-hétéromèque, impair-pair, limité-illimité se conçoit sans peine. Le carré est fondé sur l'unité et engendré par la somme des im-

permanence de la forme ou de l'idée de nombre — selon qu'on parle le langage pythagoricien ou platonicien — quand on fait croître le nombre des unités qui le composent. Le fini n'est autre que la marque de l'invariance, l'infini celle de la variation. Simplicius a eu l'intuition juste que la condition nécessaire pour qu'il y ait invariance est que la forme ou l'idée numérique ne se prête pas à la dichotomie et que la condition nécessaire pour qu'il y ait variation est que l'application de la dichotomie sépare la forme ou l'idée numérique en deux parties égales. Ces deux conditions ne faisant pas sens pour lui lorsque «la division à l'infini s'applique aux nombres», il a abandonné l'enquête et remplacé le nombre par la grandeur.

Mais revenons aux nombres en considérant leurs ensembles. Pour accorder les textes avec cette supposition, il faudrait un modèle dans lequel l'ensemble des nombres impairs représenterait la partie finie, l'ensemble des nombres pairs la partie infinie de la partition dichotomique. On aurait ainsi concilié infini et *nombre* pair. À ces conditions nécessaires s'ajouteraient des conditions suffisantes, plus fortes, propres à la dichotomie numérique. À chaque opération dichotomique en effet, il faudrait qu'il y eût, dans l'une des moitiés paires reproduction de l'invariant impair (multiplié par un facteur approprié), l'autre moitié présentant le reste de tous les pairs. Enfin, l'interprétation numérique de la dichotomie, écartée sans examen par Simplicius, éclairerait — et serait seule à même d'éclairer — la dernière phrase du texte d'Aristote. Car, une fois distingué nombre et grandeur, deux formes de dichotomie s'imposent : l'une, géométrique, allant vers l'infiniment petit, l'autre, numérique, allant vers l'infiniment grand, conformément au dualisme platonicien.

Dans les livres M et N de la *Métaphysique*, Aristote présente une classification de la réalité selon Platon, dont l'interprétation la plus probable[4] est la division quadripartite :

---

pairs ; l'hétéromèque est fondé sur la dyade et engendré par la somme des pairs ; le carré est toujours semblable au carré, toujours le *même* ; les hétéromèques successifs sont perpétuellement différents, toujours *autres*. D'un côté la fixité parfaite, de l'autre une modulation sans fin ; d'un côté l'unité immuable de la perfection ; de l'autre la diversité, le devenir, l'éternelle poursuite de cette perfection sans cesse approchée de plus près, jamais atteinte». Dans cette conception — qui sera celle de Théodore (voir plus bas, note 12) — l'ensemble des carrés joue le rôle de l'ensemble des impairs, l'ensemble des hétéromèques celui de l'ensemble des pairs.

[4]moyenne entre celle de Léon Robin [1908, 470] et celle de David Ross [1924, lxvi].

1.	Nombres Grandeurs	} idéaux
2.	Idées	
3.	Nombres Grandeurs	} mathématiques
4.	Sensibles	

En nous bornant à l'arithmétique et en laissant de côté les grandeurs géométriques, nous rencontrons donc les types de réalité suivantes :

1. Les nombres idéaux. Ce sont les *ensembles* de nombres, ensembles infinis rangés dans l'ordre naturel. Les tableaux pythagoriciens des nombres polygonaux définis par récursion en fournissent l'exemple le plus ancien[5]. Ce sont les ensembles qui sont objets de division et qui doivent figurer dans les arbres de division, typiquement : l'ensemble des impairs à titre d'invariant, les ensembles pairs, indéfiniment divisibles, occupant les nœuds de la branche infinie de droite. Ce que Platon appelle Un et Dyade indéfinie — en écho aux Pythagoriciens — est l'algorithme de la méthode d'analyse applicable à toute idée, c'est-à-dire à tout ensemble, qu'il s'agisse des idées proprement dites — celle du sophiste, celle du politique —, ou des idées mathématiques, arithmétiques en l'occurrence. Étant donné que les opérations de multiplication, appliquées aux ensembles, doivent aboutir à les diviser en deux parties exclusives, on voit en quoi et pourquoi les éléments de ces ensembles ne se mélangent pas (ἀσύμβλητοι, comme dit Aristote).

2. Les idées se définiront correctement grâce à cette méthode de division, résumée dans l'algorithme des nombres idéaux. Les exemples du *Sophiste* et du *Politique* en font foi : le recours aux nombres idéaux n'aboutira pas à confondre la philosophie, et en particulier la morale, avec les mathématiques.

3. Les nombres arithmétiques sont les éléments des ensembles infinis de nombres.

4. Vient enfin l'usage des nombres pour compter les choses sensibles, partie empirique de l'arithmétique et de la logistique.

Les dialogues platoniciens du *Sophiste* et du *Politique* précisent et confirment les conclusions qu'on a tirées des textes aristotéliciens. Ils

[5] Nicomaque, *Introduction à l'arithmétique*, ii. 12. 2-4, ed. Hoche 96.11 - 97.17 ; Ivor Thomas [1951, I, 97-98].

fournissent une seconde raison, décisive, d'attribuer une conception à tout le moins pré-ensembliste aux Pythagoriciens, parce qu'ils explicitent le caractère ensembliste de l'opération de division, ou, plus précisément, de division par moitié. Platon, observera-t-on, à bon droit, n'est pas Pythagore. Mais l'analyse platonicienne sur laquelle portent les deux dialogues cités prend constamment appui sur des concepts mathématiques dont l'origine pythagoricienne est indubitable. Ce n'est pas un hasard, si, au moment de caractériser les sous-ensembles légitimes d'un ensembles numérique, l'Étranger du *Politique* (262e) évoque la division naturelle du genre humain en mâle et femelle, couple pythagoricien cité dans la liste aristotélicienne. Si, en présentant polémiquement pythagorisme et platonisme dans sa *Métaphysique*, Aristote a laissé un témoignage historiquement sûr, c'est, comme l'a remarqué Ross [1924, xlv-li], à propos de la filiation entre ces deux doctrines.

Des dialogues de Platon, on retiendra une double leçon. La première, générale, s'applique aux idées et à leur division. On en récapitulera les thèmes en tant qu'ils peuvent guider l'enquête sur l'arithmétique ensembliste. La seconde leçon, plus allusive, introduira directement à cette enquête arithmétique.

En premier lieu, presqu'à titre de programme alors qu'il propose une première division propre à définir le pêcheur à la ligne, Platon exige de chaque division des idées — il utilise indifféremment le mot technique de section mathématique (τμῆμα, *Soph.* 221b) ou le mot général d'analyse (διαιρεῖν, *Soph.* 235b) — qu'elle procède dichotomiquement : la partie d'une idée ou d'un ensemble doit être une moitié (τὸ μὲν ἥμισυ μέρος, *Soph.* 221b). La suite des divisions s'apparente à une chasse. On traque le sophiste pour l'isoler dans une classe obtenue au moyen d'un nombre fini de dichotomies, étant entendu[6] que l'on doit rejeter toute classe, même bien avérée comme celle de l'être, lorsque sa définition entraîne contradiction : la réduction à l'absurde équivaut à fermer au chasseur ou au gibier une issue. L'analyse révélera qu'il est nécessaire de poser cinq genres suprêmes pour assurer la validité universelle de la méthode de division, en l'occurrence pour pouvoir définir par son moyen sophiste, erreur et apparence. Ces genres sont l'être, le mouvement et le repos, le même et l'autre (*Soph.* 254d-E).

Ils ne sont autres que les cinq concepts qu'utilise toute division de classes canonique, c'est-à-dire conforme aux réquisits de la science, et les

---

[6] À propos du sophiste et du non-être, mais aussi à propos des cosmologies (*Soph.* 241b, 243e, 253d).

relations qu'ils entretiennent mutuellement définissent précisément les conditions de possibilité d'une telle division. Leur pertinence s'impose au terme d'essais infructueux. On avait cherché à spécifier la technique sophistique en divisant les activités techniques en deux classes, selon qu'elles visent à fabriquer ou à acquérir. Comme l'activité du sophiste est étrangère à la fabrication, c'est dans la classe de l'acquisition qu'on espérait la localiser, et voilà qu'en fin de compte le fabriquant d'illusion surgit dans la classe exclue. On aurait dû s'assurer d'abord qu'en divisant le genre des activités techniques, on le divisait *complètement*, donc en deux sous ensembles exhaustifs et exclusifs et sans oublier qu'on peut fabriquer non seulement des choses réelles, mais aussi des images de celles-ci (*Soph.* 264-266). Cette première condition à laquelle doit obéir une division canonique a pour contre-partie philosophique l'abandon des thèses parménidiennes : on est en droit et on est même contraint de parler en un sens relatif du non être et d'abandonner la question du non être absolu, entendu comme l'opposé (τοὐναντίον, *Soph.* 258e–259a) de l'être. En quel sens le non être est-il ? La division va le préciser. Il faut qu'elle soit complète pour que la classe cherchée X se trouve dans l'une des parties, mais non dans les deux comme il était arrivé d'abord pour le sophiste. Or, la division complète de A en deux classes B et C exhaustives et exclusives a pour condition immédiate non seulement d'opposer et donc de distinguer B et C, mais d'identifier chacune des trois classes avec elle-même et de la distinguer des deux autres (*Soph.* 250)[7].

Représentons maintenant la division par un arbre. Si X coïncide avec B ou avec C, la question est résolue. Sinon il faut continuer la division et, sous peine de laisser échapper son gibier, la continuer en exigeant de chaque nouvelle division qu'elle soit pour sa part complète. Par convention, toutes les branches qui sont abandonnées dans la suite des divisions — et elles le sont définitivement pour que la division soit canonique — seront placées à gauche, la division opérant seulement sur les branches de droite. Chaque branche de gauche constitue donc un arrêt ou *repos*, la seule branche de droite représentant le *mouvement* de la division[8]. La convention retenue stabilise la division suivant

[7]Logiquement, soit A la classe universelle (*l'être*). On ne la divisera complètement dans les deux classes B et C que si $A = B \cup C$ et $B \cap C = \varnothing$, B et C étant des parties propres (et dont aucune n'est supposée vide) de A, ce qui suppose les identités $A = A$, $B = B$, $C = C$ (*le même*), et les différences $A \neq B$, $A \neq C$ (et truistiquement $B \neq C$) (*l'autre*).

[8]Je suis, sur ce point Taylor [1960, 378-379]. Pour que la convention s'accorde avec l'opposition pythagoricienne, en vertu de laquelle fini, impair, droit et repos appartiennent à la même famille et s'opposent respectivement à infini, pair, gauche et mouve-

l'opposition des deux derniers genres suprêmes exclusifs l'un de l'autre[9]. La stabilité a pour conséquence essentielle l'impossibilité de concevoir les genres suprêmes en les faisant entrer eux-mêmes dans une division canonique. Si l'on subsumait sous l'être repos et mouvement, pour subdiviser ensuite l'un d'eux selon le même et l'autre, ces deux derniers genres ne pourraient avoir quelque 'communion' que ce soit avec le genre exclu par la subdivision précédente, et il serait interdit de prédiquer soit du repos, soit du mouvement quelque identité ou quelque altérité que ce soit. Et si l'on divisait l'être selon l'opposition du même et de l'autre, pour subsumer ensuite sous l'un de ces genres le repos et le mouvement, il serait alors interdit de prédiquer ces derniers soit du même soit de l'autre. La conséquence que l'Étranger tire, en passant, des relations de communicabilité entre genres suprêmes en indique allusivement la portée philosophique. Le mouvement, dit-il, participe au même comme il participe à l'autre. Il est stationnaire dans le premier cas ; il devient déplacement dans le second (*Théétète* 161c-d ; *Soph.* 256a-b). On peut, on doit aller plus loin. Le repos et le mouvement auxquels on vient de se référer prennent place dans le monde sensible, simples images du repos et du mouvement intelligibles, car il faut donner aux classes ou idées du mouvement et du repos leur sens actif et littéral : d'un côté, comme Platon le dira ailleurs, une idée qui se meut et met en mouvement, d'un autre côté une idée qui s'arrête et arrête. Les genres suprêmes sont donc ce qu'on appellera des transcendentaux. Non seulement ils définissent en effet les conditions de possibilité de toute classification et, comme l'indique le mot dialectique (*Soph.* 253d-e), leur validité s'étend à travers tous les genres proprement dits, mais ils valent encore à travers tous les degrés du réel, comme l'indique l'opposition du divin et de l'humain, qui vient, à point nommé (*Soph.* 265d-e) croiser celle de la chose et de l'image et annonce de la sorte la seconde conception de la méthode de division, une conception qu'on se gardera de tenir pour acquise, comme Socrate, au tout début du *Politique* (258a-b), reproche à Théodore de le faire.

---

ment, il faut choisir gauche et droite non du point de vue du lecteur, mais du point de vue objectif de la division, les 'repos' se trouvant à droite, le 'mouvement' à gauche. Ces choix cependant dépendent des questions traitées, une relativité en accord avec celle de la notion d'incommensuralibilité [Vuillemin, 1962, 537], et l'essentiel est l'abandon sans équivoque des repos, la continuation des mouvements (*Soph.* 267a–b). C'est au point de vue du lecteur qu'on se conformera dorénavant.

[9] ἐναντιώτατα (*Soph.* 250a). Mouvement et repos sont seuls, parmi les genres suprêmes, à vérifier cette relation. Ils sont, par ailleurs, identiques à eux-mêmes et différents de tous les autres genres.

Il est temps, en second lieu, de pénétrer dans l'analyse du modèle mathématique. Bien que nous nous soyons gardés d'identifier le nombre avec l'être, nous avons reconnu que les nombres existent et que tout ce qui est est nombrable (*Soph.* 238a *sq.*). Les relations logiques entre les ensembles numériques forment un parallèle facile avec les relations instituées par toute classification canonique, car celles-ci ont pour modèle celles-là, ou plutôt la plus simple d'entre elles : la dichotomie au sens propre et étroit du terme. Avec tous les ensembles numériques, les ensembles dichotomiques proprement dits offrent les caractères suivants :

1. Ils sont définis en extension. Au vu de celui qui le suit, ce caractère paraît paradoxal. Car n'est-il pas impossible d'épuiser un ensemble infini en produisant effectivement son extension par une énumération complète ? Aussi bien, lorsque, donnés les trois premiers éléments de l'ensemble {2, 4, 8, ...}, l'esclave du *Ménon* nomme immédiatement le quatrième (*Ménon* 83), il le fait certes parce qu'il comprend que le quatrième est le double du troisième, la multiplication par deux caractérisant précisément l'ensemble par sa compréhension. Toutefois, la loi consistant à relier un nombre avec son successeur immédiat, chaque élément de l'ensemble est, par elle, accessible dans son individualité, à la différence de ce qui a lieu dans les classifications aristotéliciennes, lorsque la différence spécifique laisse les individus indéterminés, Callias ne se distinguant de Socrate que par des accidents étrangers à la généralité et à la science. Quelle qu'elle soit, une division arithmétique n'a pas à se soucier de savoir si elle obéit à un critère essentiel et nécessaire ou accidentel et contingent. C'est tout un pour elle[10].

2. Les ensembles numériques sont infinis.

3. Ils sont divisibles en deux sous-ensembles canoniques et infinis, comme le montre la division fondamentale :

$$\text{Nombres entiers positifs} = \text{Pairs} \cup \text{Impairs}, \text{Pairs} \cap \text{Impairs} = \emptyset.$$

Le *Phédon* et le *Théétète* ont déjà évoqué une division de ce genre[11].

---

[10] Burnett [1911/1939, 101] note que Socrate nomme l'extension d'une classe (τὴν ἐπωνυμίαν ἴσχειν, *Phaed.* 102b) par un mot spécifique qui la distingue de sa compréhension.

[11] Comme le note Burnett [1911/1939,103]. Référence au *Phédon* 104a (ὁ ἥμισυς τοῦ ἀριθμοῦ ἅπας : «la moitié entière de la série numérique»), au *Théétète* 147e.

4. Diviser un ensemble, c'est le multiplier. C'est sous forme de rébus que l'Étranger se demandera comment ce qui est cherché dans l'ensemble du double peut être trouvé dans l'ensemble de la moitié (... ἆρ' ἐννοεῖς πῇ τις ... τὸ ζητούμενον ἐν διπλασίοισι τὰ νῦν ἐν τοῖς ἡμίσεσιν εἰς τότε ποιήσει ζητεῖσθαι; *Pol.* 262a). Il insiste alors sur la nécessité de couper les ensembles par leur moitié (*Pol.* 262b). Multiplier un ensemble par un nombre, c'est multiplier tous les éléments par ce nombre. Si $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble de tous les nombres naturels positifs, l'ensemble A des multiples de 6, soit $A = 6\,\mathbb{N}$ s'écrira : $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...\}$. Pourquoi cette multiplication revient-elle à diviser l'ensemble $\mathbb{N}$? Pour que la division soit canonique, formons B, complément de A dans $\mathbb{N}$, soit $B = \mathbb{N} - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, ...\}$. L'ensemble B ne comprend ni 6 ni aucun multiple de 6, tandis que l'ensemble A les comprend tous et seulement eux. C'est pourquoi ils sont disjoints. Mais c'est aussi pourquoi la division pourra être stable. Multiplions en effet l'ensemble A par 6 : $A_1 = 6A = \{36, 72, 108 ...\}$ comprend tous les multiples de 36, mais également ceux de 6^3, 6^4, ... En revanche, l'ensemble $A - A_1 = 6B = B_1 = \{6, 12, 18, 24, 30, 42, ...\}$ comprend tous les nombres divisibles par 6, et non divisibles par 6^n $n \geq 2$. De même, l'ensemble $A_2 = 6A_1$ comprend tous les nombres divisibles par $216=6^3$, et $A_1 - A_2 = B_2 = 6B_1$ tous les nombres divisibles par 6^2 et non divisibles par 6^n $n \geq 3$. On dispose, par cette méthode, d'une énumération sans redondance de tous les multiples d'un nombre donné, le nombre multiplicateur de l'ensemble fixant la puissance de divisibilité et l'ensemble B énumérant les facteurs relativement indivisibles du nombre cherché. On a ainsi, dans un nombre, isolé sa partie stable, toujours identique à elle-même, l'ensemble-repos B, et sa partie mobile courant sur l'exposant du multiplicateur. Multiplication et complémentation garantissent la division canonique des ensembles.

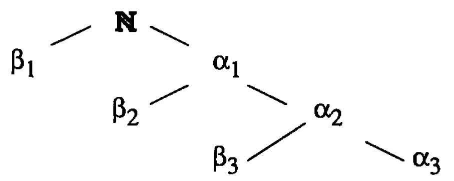
C'est que, si toute idée ou tout ensemble en tant que tels contiennent des parties, ces parties ne sont pas toutes des idées ou des ensembles (*Pol.* 263b). Ce n'est pas seulement qu'une partie peut ne contenir qu'un seul élément, comme il arriverait si l'on isolait la myriade parmi les nombres (*Pol.* 262d). L'essentiel tient à la nature de la division. Lorsqu'on divise l'humanité en Héllènes et Barbares, ces deux parties du genre restent divisibles en parties, sans être cependant divisibles en idées proprement dites, car, résultant d'une division anthropomorphique et non pas naturelle, elles ne sont pas elles-mêmes des idées. La division naturelle de l'homme est entre masculin et féminin, celle du nombre entre impair et pair (*Pol.* 262e). Si l'Étranger refuse de s'engager dans une discussion sur la nature de l'ensemble et de ses parties (*Pol.* 263), il revient sur les rapports de la division et de la parité (*Pol.* 264e) et fait allusion aux puissances de 2 (*Pol.* 266a).

La division d'un ensemble, précisons-le, est 'naturelle' non pas absolument, mais relativement à une classe de questions. L'ensemble des entiers naturels se divise donc dichotomiquement de façon aussi naturelle dans l'ensemble des pairs et l'ensemble des impairs que dans l'ensemble des multiples de 3 (ou de 17) et l'ensemble des entiers naturels non divisibles par 3 (ou par 17). Si le modèle dichotomique fondamental est celui de la division en pairs et impairs, c'est qu'il a servi d'archétype aux autres dichotomies, en nombre infini, qui ont servi à démontrer l'irrationalité des racines des nombres naturels non carrés. L'*idée* de dichotomie est ce qu'elles ont toutes en commun.

Nous sommes maintenant en mesure de reconstituer le modèle fondamental, celui de la dichotomie proprement dite. Écrivons sur une ligne l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$. Multiplions par 2 cet ensemble; nous obtenons l'ensemble des nombres pairs, α_1 ; l'opération x2, appliquée à $\mathbb{N}$, produit donc une partition en deux de $\mathbb{N}$, selon le rébus proposé par l'Étranger. Si nous appelons β_1 l'ensemble des impairs, $\beta_1 \cup \alpha_1 = \mathbb{N}$, première dichotomie. Multiplions par 2 l'ensemble α_1. Cette opération produit une partition en deux de $\alpha_1 = \beta_2 \cup \alpha_2$, avec $\beta_2 = 2\beta_1$ et $\alpha_2 = 2\alpha_1 = 4\ \mathbb{N}$, seconde dichotomie. On multiplie par 2 l'ensemble α_2. Cette opération produit une partition en deux de $\alpha_2 : \alpha_2 = \beta_3 \cup \alpha_3$, avec $\beta_3 = 2\beta_2 = 4\beta_1$ et $\alpha_3 = 2\alpha_2 = 8\ \mathbb{N}$. On continue la dichotomie à l'infini. Le tableau peut être représenté par l'arbre évoqué par Platon. Les parties gauches et droites de l'arbre, β_n, α_n, représentent respectivement les produits 2^{n-1} x β_1 et 2^n x $\mathbb{N}$. Les branches gauches reproduisent l'ensemble des impairs multiplié par 2^{n-1} ; les branches droites l'ensemble des entiers multiplié par 2^n ou l'ensemble des pairs multiplié par 2^{n-1}. On comprend l'association du pair avec l'infini, de l'impair avec le fini. On comprend aussi comment l'algorithme, à chaque opération, reproduit le même, puisque $\alpha_n \cup \beta_n = \alpha_{n-1}$, et l'autre, puisque l'impair et le pair se trouvent multipliés, le premier à gauche et le second à droite, par un facteur 2^{n-1}.

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
α_1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
β_2	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38
α_2	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
β_3	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76
α_3	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80

Tableau dichotomique général



Arbre dichotomique à proprement parler

I.2. Démonstrations apagogiques d'incommensurabilité

Plusieurs interventions de Théétète dans le *Sophiste* (261a-b, 264b) évoquent celle dans laquelle (*Théét.* 147d) il divisait les nombres en carrés {1, 4, 9, ...} et en oblongs {2, 3, 5, ...}, les racines des carrés constituant l'ensemble des naturels, celles des oblongs constituant l'ensemble infini des 'puissances' ou anciennes irrationnelles dont la puissance est un entier naturel[12]. C'est dire que l'épreuve décisive pour la théorie de la division dichotomique, ce sera sa fécondité dans les démonstrations d'irrationalité des 'puissances'. On l'éprouvera sur les racines de 2 et de 3.

I.2.1. $\sqrt{2}$

Le tableau et l'arbre dichotomiques des carrés sont entièrement semblables au tableau et à l'arbre dichotomiques des entiers positifs, à ceci près

[12]Théétète attribue explicitement cette division à Théodore. Elle exige qu'on étende considérablement le concept de multiplication d'un ensemble, puisque, pour obtenir l'ensemble des carrés, il faut multiplier chacun des éléments de $\mathbb{N}$ par lui-même.

que ce sont les opérations au carré qu'on appliquera aux ensembles. En le multipliant par 4, carré de 2, on divise C, ensemble des carrés, en deux moitiés. Le résultat est la partition de C dans l'ensemble des carrés impairs, B, et l'ensemble des carrés pairs, A :

$$C = B \cup A,\ A = 4 \times C,\ B \cap A = \varnothing.$$

Une seconde dichotomie partage A en deux moitiés en multipliant A par 4 :

$$A = B_1 \cup A_1,\ \ A_1 = 4 \times A = 16 \times C,\ \ B_1 = 4 \times B,\ \ B_1 \cap A_1 = \varnothing.$$

Une troisième dichotomie partage A_1 en deux moitiés en multipliant A_1 par 4 :

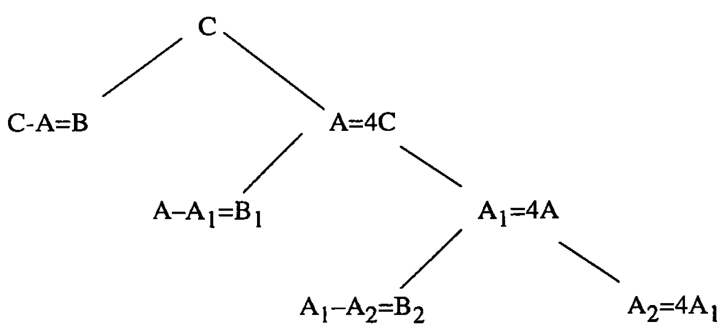
$$A_1 = B_2 \cup A_2,\ A_2 = 4 \times A_1 = 16 \times A = 64 \times C,$$
$$B_2 = 4 \times B_1 = 16 \times B,\ A_2 \cap B_2 = \varnothing$$

et ainsi de suite indéfiniment :

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13...
C	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169...
B	1	9	25	49	81	121	169	...					
A	4	16	36	64	100	144	196	256	324	...			
B_1	4	36	100	196	324	...							
A_1	16	64	144	256	400	...							
B_2	16	144	400	...									
A_2	64	256	...										

Tableau dichotomique des carrés

Un arbre correspondant représente cette dichotomie.



Arbre dichotomique pour la démonstration d'irrationalité de $\sqrt{2}$

L'allusion mentionnée du *Politique* (266a) pouvait avoir en vue la décomposition d'un carré quelconque en deux facteurs : un facteur pair pur, constitué par une puissance de 4 et un facteur impair ($48 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$). La division de C étant canonique, on trouvera nécessairement un nombre carré quelconque sur la branche *gauche* de l'arbre dichotomique, qui détermine le problème en précisant quelle puissance de 4 multiplie exactement tout carré impair :

$$B_n = 4^n \times B, \quad B = \text{ensemble des carrés impairs} = (2k+1)^2.$$

(1) Les facteurs (μέροι, Euclide VII, Déf. 3) 4^n et $(2k+1)^2$ sont relativement premiers (Euclide VII, Déf. 12).

(2) En divisant tous les ensembles B_n par B, on élimine, avec l'ensemble des carrés impairs, le facteur impair du carré pair considéré. Il reste les facteurs pairs 4^n :

(3) Pris dans l'ordre, ces facteurs forment la progression géométrique :

$$\frac{B}{B} = 1, \frac{B_1}{B} = 4^1, \frac{B_2}{B} = 4^2, \frac{B^3}{B} = 4^3, \ldots, \frac{B_n}{B} = 4^n$$

$$\frac{1}{4^1} = \frac{4^1}{4^2} = \frac{4^2}{4^3} = \ldots$$

Pour démontrer que l'arbre énumère seulement et tous les carrés pairs, il faut et il suffit de démontrer (4) que tous les éléments de cette progression (3) sont les parties «pairement paires» (Euclide IX, Prop. 32) des carrés pairs, et (5) que toutes ces parties sont énumérées par (3).

(4) Tous les éléments de la progression sont pairs. Sinon l'un d'eux serait impair, ce qui contredirait (1). — Tous les éléments sont des carrés (Euclide IX, Prop. 9 qui précise que $64=4^3$ est également un cube).

(5) Toutes les parties paires des carrés sont énumérées. La Proposition VIII 11 d'Euclide, due à Platon (*Timée*, 32 a-b ; Heath 1956, II 294-295) permet de plonger la progression (3) dans la progression géométrique de raison 2 ou dyade platonicienne (ensemble des pairement pairs d'Euclide IX, Prop. 32) :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} \ldots$$

En d'autres termes, Platon spécialise à la dyade la partition dichotomique que Théétète a définie pour l'ensemble des entiers naturels (*Théétète*, 147 d) :

$$\text{Dyade} = \{1, 4^1, 4^2, 4^3, \ldots\} \cup \{2, 8, 32, 128, \ldots\}.$$

Le carré a au carré un rapport double de celui que le côté a au côté :

$$1.4 = \underline{4}^1 = 2.2 = \underline{2}^2$$
$$4.4 = \underline{4}^2 = 2.8 = 2^1.2^3 = \underline{2}^4$$
$$4.16 = \underline{4}^3 = 8.8 = 2^3.\ 2^3 = \underline{2}^6$$
$$16.16 = \underline{4}^4 = 8.32 = 2^3.2^5 = \underline{2}^8, \ldots$$

À gauche, toutes les 'longueurs' appartiennent à ce que nous appelons les puissances de 4 ; elles énumèrent toutes les parties paires des carrés. À droite figurent ce que Théétète appelle «puissances» paires : mises au carré ou multipliées par d'autres puissances, elles donnent des carrés pairement pairs, et «sont commensurables avec les 'longueurs' non quand on les mesure selon la longueur, mais en puissance selon la surface» (ὡς μήκει μὲν οὐ ξυμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνα ται, *Théétète* 148 b 1-2).

H. Supposons, à présent, qu'il existe des nombres carrés doubles d'autres nombres carrés, c'est-à-dire des entiers positifs d et c, solutions de l'équation $d^2 = 2c^2$.

1.	$(\exists p, k)\ d^2 = 4^p\,(2k+1)^2 = 2c^2$	H, (1)
2.	$c^2 = \dfrac{d^2}{2}$ est, comme d^2, un carré pair	1
3.	$(\exists q)\ c^2 \in B_q$ et $(\exists p)\ d^2 \in B_p$	2
4.	$c^2 < d^2 \equiv 2c^2 < 4c^2$	
5.	$c^2 \in B_q < d^2 \in B_p < 4^2 \in B_{q+1}$	4, 3, arbre
6.	$p = q + \dfrac{1}{2}.$	5

La branche B_p d'indice non entier n'existe pas, non plus que le nombre c^2 dont le double d^2 serait un carré.

On transporte aisément la réduction à l'absurde de l'arbre dichotomique pour la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ sur l'arbre dichotomique à proprement parler, dont on reprend les notations :

$$B_p = 4^pB = 2^{2p}B \text{ et } \beta_p = 2^{p-1}\beta_1 \quad (B : \text{carrés impairs}, \beta : \text{impairs})$$

Il est évident que $B \subset \beta_1$.

Lemme $B_p = 2^{2p}B \subset 2^{2p}\beta_1 = \beta_{2p+1}$ (arbre H.)

4' $d^2 \in \beta_{2p+1}$ 2, Lemme

5' $c^2 \in \beta_{2p}$ 1, 4'

6' $(\exists k)\ k > 1$ tel que $c^2 \in B_k$ et $c^2 \in \beta_{2k+1}$ 3, Lemme

7' $2p = 2k + 1$. 5', 6'

I.2.2. $\sqrt{3}$

Voilà ce qu'on peut conjecturer pour la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Voici ce qu'on peut assurer pour celle de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Une proposition de Théon de Smyrne (*Expositio* I, 20) déclare que «les carrés ont cette propriété d'être exactement divisibles par trois, ou de le devenir étant diminués d'une unité. Il sont aussi exactement divisibles par 4, ou le deviennent après soustraction d'une unité». Cette proposition sur la divisibilité des carrés par 3 et 4 revient à exprimer les entiers sous l'une des formes : 6n, 6n ± 1, 6n ± 2, 6n ± 3, où n peut prendre toutes les valeurs[13], y compris 0 et 1. Les carrés des nombres des quatre formes distinguées se distribuent dans quatre classes disjointes dont l'union forme l'ensemble des carrés, soit :

H : $(6n)^2 = 36n^2$: nombres divisibles par 9 et par 4 ;

D : $(6n \pm 3)^2 = 36n^2 \pm 36n + 9 = 9\ (4n^2 \pm 4n + 1)$: nombres divisibles par 9 et indivisible par 4 ;

---

[13]Thomas [1951, I, 102-105] (citant KARPINSKI : «C'est ici la première parution d'une étude sur la congruence, une notion fondamentale dans la théorie moderne des nombres») ; Michel [1950, 359-360]. Ainsi pour les entiers de 1 à 20 :

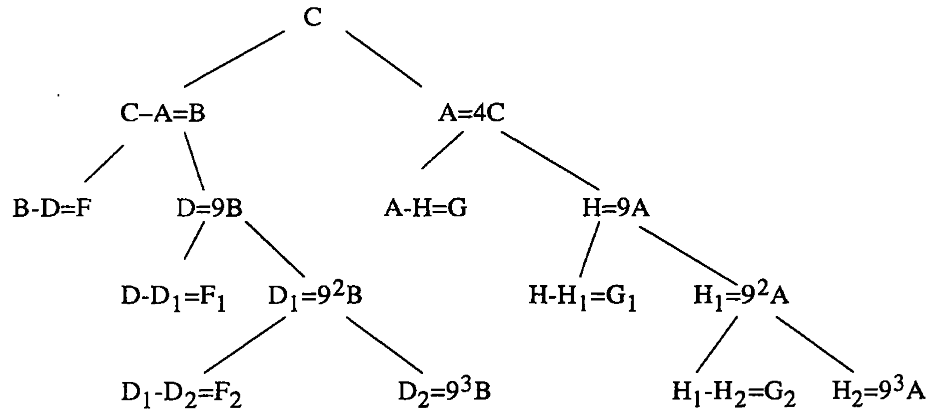
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6n+1	6n+2	6n+3	6n-2	6n-1	6n	6n+1	6n+2	6n+3
	n = 0				n = 1			

11	12	13	14	10	15	16	17	18	19	20
6n-1	6n	6n+1	6n+2	6n-2	6n+3	6n-2	6n-1	6n	6n+1	6n+2
		n = 2						n = 3		

G : $(6n \pm 2)^2 = 36n^2 \pm 24n + 4 = 4\,(9n^2 \pm 6n + 1)$: nombres divisibles par 4 et indivisible par 9 ;

F : $(6n \pm 1)^2 = 36n^2 \pm 12n + 1$: nombres qui ne sont divisibles ni par 9, ni par 4.

Reprenons, avec le principe platonicien : diviser un ensemble, c'est le multiplier, le premier embranchement de l'arbre de la démonstration d'irrationalité de $\sqrt{2}$.



Arbre de démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$

Formons l'ensemble des carrés C. Multiplions-le par 4 : A = 4 C. L'ensemble des carrés impairs est complément de A : B = C – A. Puisque la question qu'on se pose est celle de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, multiplions B par $3^2 = 9$: D = 9 B énumère tous les carrés impairs divisibles par 9. Quant au complément F = B – D, il énumère tous les carrés impairs non divisibles par 9. De l'autre côté, branche droite des pairs, multiplions A par 9. Il vient H = 9 A = 36 C, qui comprend tous les carrés divisibles à la fois par 4 et par 9. Quant au complément G = A – H, il énumère tous les carrés pairs non divisibles par 9. On voit ainsi figurer aux seconds embranchements de l'arbre les quatre ensembles de Théon, dont on devine à présent l'usage. Il s'agit, en effet, d'énumérer et d'énumérer une seule fois les carrés multiples de 9 et de ses puissances successives. Cette énumération se fera sur les F_i $(i \geq 1)$ et sur les G_i $(i \geq 1)$ selon que le carré cherché est impair ou pair : les F_i énumèrent tous les carrés impairs exactement divisibles par 9^i, tandis que les G_i énumèrent tous les carrés pairs exactement divisibles par 9^i.

H. Soit maintenant l'équation proposée

$$d^2 = 3c^2,$$

dans laquelle les nombres d^2 et c^2 ont même parité.

1	$(\exists p, k, n)\ d^2 = 9^p\, 4^k\, (6n\pm1)^2 = 3c^2$	H, arbre
2	$c^2 = \dfrac{d^2}{3}$ est, comme d^2, un carré multiple de 9.	1
A_3	(Parité) $(\exists q)\ c^2 \in G_q$ et $(\exists p)\ d^2 \in G_p$	2, arbre
A_4	$c^2 < d^2 \equiv 3c^2 < 9c^2$	1
A_5	$c^2 \in G_q < d^2 \in G_p < 9c^2 \in G_{q+1}$	A_3, A_4
A_6	$p = q + \frac{1}{2}$, pas de solution sur les G_i.	A_5
B_3	(Imparité) $(\exists q)\ c^2 \in F_q$ et $(\exists p)\ d^2 \in F_p$	2, arbre
B_4	$= A_4$	
B_5	$c^2 \in F_q < d^2 \in F_p < 9c^2 \in F_{q+1}$	B_3, B_4
B_6	$p = q + \frac{1}{2}$, pas de solution sur les F_i.	B_5

La réduction à la dichotomie se fait comme pour $\sqrt{2}$. On construit l'arbre de dichotomie pour les multiples de 3. Posons :

$$B_p = 9^pB = 3^{2p}B \qquad \text{et} \qquad \beta_p = 3^{p-1}\beta_1$$

(B : carrés non multiples de 9, β_1 : nombres non multiples de 3).

Lemme : $B_p = 3^{2p}B \subset 3^{2p}\beta_p = \beta_{2p+1}$.

De $d^2 \in B_p$, on conclut que $d^2 \in \beta_{2p+1}$ et que $c^2 \in \beta_{2p}$. Mais, puisque c^2 est divisible par 9, il existe un $k > 1$ tel que $c^2 \in B_q \subset \beta_{2k+1}$. D'ou l'égalité :

$$2p = 2k + 1.$$

Le principe de cette démonstration est le même[14] que pour $\sqrt{2}$: 1) seule une division canonique permet d'exprimer un nombre en un produit de facteurs relativement premiers, 2) la contradiction inhérente à l'égalité $d^2 = 3c^2$ ne laisse pas de place pour $\sqrt{3}$ sur l'arbre de division, 3) elle illustre la vaine chasse, la place du nombre irrationel et du sophiste n'est qu'un leurre.

---

[14]À cette démonstration d'incommensurabilité par une dichotomie "longue", on peut opposer, pour reprendre la suggestion du *Politique* (265a), une démonstration par une dichotomie courte et rapide. Elle consiste, pour $\sqrt{2}$, en une seule dichotomie carrée ($C \times 4 = A_1$) et une multiplication de C par 2 (qui n'est pas une dichotomie) pour obtenir l'ensemble D des doubles de carrés :

C	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
D	2	8	18	32	50	72	98	128	162	200
A_1	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400

Le tableau établit une correspondance entre éléments de même rang de C, de D et de A_1.

Par construction et quelque soit n :

$$(1) \qquad \frac{\text{carré de rang n}}{\text{double du carré de rang n}} = \frac{\text{double du carré de rang n}}{\text{carré de rang n dans } A_1}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad (\text{ par exemple } \frac{25}{50} = \frac{50}{100}).$$

Les termes extrêmes sont respectivement les premiers éléments de C et de A_1. Ce sont des carrés. Le terme moyen est le premier élément de D. Il n'est pas un carré et, en vertu de l'identité entre (2) et (1), il transmet cette propriété à tous les éléments de D.

Pour $\sqrt{3}$, on obtiendrait un tableau faisant correspondre aux carrés leurs triples et leurs produits par 9. Quelque soit n :

$$(3) \qquad \frac{\text{carré de rang n}}{\text{triple du carré de rang n}} = \frac{\text{triple du carré de rang n}}{\text{carré de rang n dans l' ensemble } 9 \times C}$$

$$(4) \qquad \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \qquad (\text{ par exemple } \frac{25}{75} = \frac{75}{225}).$$

Les termes extrêmes sont respectivement les premiers éléments de C et de 9 x C. Ce sont des carrés. Le terme moyen est le premier élément de 3 x C. Il n'est pas un carré et, en vertu de l'identité entre (4) et (3), il transmet cette propriété à tous les élément de 3 x C. On trouve dans Euclide IX 9 (mentionnée p. 15 (4)), une preuve qui prolonge et développe ce genre de considération. On extrait immédiatement du Tableau la progression géométrique : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \ldots$ sur laquelle on vérifie par exemple que 4, 16, 64 ... sont carrés, 8, 64, ... sont cubes et surtout que 2, 8, 32, ... ne sont pas carrés (IX 10).

II. L'excès et le défaut

L'incommensurabilité de la diagonale et du côté une fois démontrée, reste à déterminer une approximation d'un rapport impossible. On peut présumer que des essais d'approximation auront précédé la démonstration d'incommensurabilité et il est vraisemblable qu'il en a été ainsi d'abord pour les approximations monotones. La méthode d'approximation alternée paraît, en revanche, résulter directement de la démonstration d'incommensurabilité.

II. 1. La division subordonnée à la distinction de l'idéal et du réel

C'est l'objet propre du *Politique* de subordonner la méthode de division à la méthode d'approximation alternée, à la surprise de Théodore maintenant sollicité non plus comme géomètre, mais comme logisticien. Dans le *Sophiste* on avait dû attribuer l'existence au non être pour distinguer du philosophe son rival, le sophiste. Dans le *Politique*, où l'on examine quels sont les rivaux du roi-philosophe (267e), on aura besoin de montrer que ce qui est susceptible du grand et du petit est également susceptible d'une mesure non plus relative, mais absolue, obtenue par la production d'une véritable moyenne (284b-c).

Le *Politique* s'écarte donc de la *République* ou du moins la précise et l'amende dans le sens des *Lois*. Une erreur a été commise dans la division de l'idée de pasteur qui doit conduire l'Étranger à définir l'homme d'État. Cette erreur provient de la confusion entre une cité idéale régie par le gouvernement direct du dieu et une cité réelle régie par des hommes au moyen d'une constitution. Mais ce qui caractérise la cité réelle la meilleure, c'est qu'elle tend par approximation, c'est-à-dire par une suite infinie tempérée de défauts et d'excès, vers l'ordre idéal toujours inaccessible. L'ensemble infini des approximations fait donc ici partie intégrante de l'idée.

La division à laquelle on s'est tenu jusqu'ici localisait une espèce ou un nombre en affinant progressivement les exclusions dichotomiques, jusqu'au moment où cette espèce ou ce nombre venait occuper la seule case restante, ou bien, ne pouvant l'occuper, révélait sa propre inconsistance. Apagogique dans ce dernier cas, la méthode identifiait l'espèce en invoquant l'opposition entre être et apparence. Quant au nombre impossible, il pose la question de l'approximation. En eux-mêmes, les procédés d'approximation, qui remontent à la plus haute antiquité, n'impliquent pas que le calculateur ait pris conscience d'une impossibilité révélée par une réduction à l'absurde ; fréquemment, il les utilise pour éviter simplement l'usage de grands nombres. On distinguera donc approximations empiriques et approximations mathématiques, celles-ci assignant les erreurs avec exactitude.

La méthode exacte la plus ordinaire procède par approximations monotones du rapport donné à partir d'une sous évaluation ou d'une surévaluation à laquelle on ajoute ou retranche suivant une règle des sous multiples de l'unité. Le langage réserve souvent des noms déterminés ou des formations régulières spéciales aux applications les plus simples de la méthode[15]. Platon exclut d'emblée ces approximations mathématiques monotones — finies ou infinies — en faisant appel au mythe des âges de l'homme (*Pol.* 268-269) et du renversement cyclique des mouvements de l'univers (ἀνακύκλησις, dit l'Étranger en 269e)[16].

C'est seulement une fois les approximations confinées dans l'alternance de défauts et d'excès, qu'il oppose les deux métrétiques, en donnant à l'opposition une triple précision, graduelle semble-t-il.

1) Analysant l'art du tissage, l'Étranger oppose (*Pol.* 281d–e) les causes concourantes ou auxiliaires (τὴν μὲν γενέσεως οὖσαν ξυναίτιον) de la genèse et sa cause propre (τὴν δ' αὐτὴν αἰτίαν).

2) Il conclut qu'il faut rapporter l'art de la séparation à l'art de la composition, l'analyse (διακριτική) à la synthèse (συγκριτική).

3) Les deux premières oppositions introduisent à celle du relatif à l'absolu, seule propre à assurer à la seconde métrétique son statut d'idée. En effet, la décomposition canonique d'un logos, qu'il s'agisse d'une proportion numérique ou d'une proportion entre grandeurs, exige uniquement la comparaison relative entre défauts et excès successifs. Cette première métrétique a trait à ce qui est commun à la grandeur et à la petitesse relativement l'une à l'autre (κατὰ τὴν πρὸς ἄλληλα μεγέθους καὶ σμικρότητος κοινωνίαν, *Pol.* 283d). L'Étranger s'explique : «N'est-ce pas selon la nature (κατὰ φύσιν) qu'il te paraît que du plus grand il faut dire qu'il n'est rien d'autre que plus grand que le plus petit, et du plus petit qu'il n'est rien d'autre que plus petit que le plus grand» (*Pol.* 283d) ? Mais, continue-t-il, s'en tenir à cette relativité, ce serait, dans le discours et dans les œuvres (ἐν

[15]Cas des épimores, des épimères et de leurs multiples en grec et en latin [Michel 1950, 353-357]. Les Égyptiens paraissent n'avoir connu que les fractions 'naturelles' de numérateur unité, mais des accidents de langage nomment des fractions telles que 2/3 et 3/4 [Van der Waerden, 1966b, 33].

[16]voir également *Tim.* 40e – 41c.

λόγοις εἴτε καὶ ἐν ἔργοις, 283e) rendre impossible la distinction du bien et du mal. L'art du politique disparaîtra alors avec l'art du tisserand. Il faut ainsi passer à la seconde partie de la métrétique qui porte sur l'essence nécessaire de la genèse (κατὰ τὴν τῆς γενέσεως οὐσίαν, 283d).

Quelqu'allusives et indirectes que soient les indications platoniciennes et surtout bien que l'idée d'idéal développée dans le *Politique* n'appartienne pas plus que l'idée d'apparence développée dans le *Sophiste* aux modèles mathématiques auxquels les deux dialogues ne cessent de recourir pour en donner une image suggestive et acceptable, c'est bien la liste des conditions auxquelles ces modèles devront obéir qu'on a dressée. La méthode de division nous place en face de quantités dont le rapport n'est pas celui de deux entiers. Comment définir alors la notion de rapport, en sorte d'englober les cas rebelles tout en continuant de recouvrir les rapports 'rationnels' ? Décrivons par division progressive les caractères requis par la définition nouvelle.

II.2. Algorithmes de l'excès et du défaut

II.2.1. Exclusion d'une définition implicite du rapport

La définition du rapport doit être explicite. En pleine connaissance de la réforme d'Eudoxe, qui se contente de définir le rapport implicitement (Euclide, L. V), Platon exige du grammairien, à la fin du *Théétète* (207a-b), qu'il énumère non seulement les syllabes, mais les lettres des noms, car il n'y a pas connaissance tant que l'opinion droite ne se combine pas avec l'énumération exhaustive des éléments qui composent le tout. Une telle énumération, éventuellement illimitée pour faire place aux incommensurables, revêtira la forme d'un algorithme associé à une construction géométrique pour la preuve d'existence.

II.2.2. Exclusion d'une définition monotone du rapport

Pour être canonique, l'algorithme qui définit le rapport doit être alterné. Célèbre comme logisticien et comme géomètre (*Pol.* 257a), Théodore a vraisemblablement restreint la logistique théorique aux séries alternées : selon l'Étranger, son art n'a-t-il pas pour objet de connaître de la *différence* dans les nombres (*Pol.* 259e) ? Si les calculs d'approximation monotone peuvent recevoir une forme canonique en ce qu'elle est unique[17], les logisticiens avaient

---

[17]On peut exprimer un rapport par une infinité de sommes différentes de diviseurs de l'unité. Par exemple [Fowler 1987, 237] :

aperçu que l'alternance du défaut et de l'excès, de l'addition et de la soustraction, révélait des lois significatives de succession entre réduites. Sans être insensible aux avantages mathématiques de l'excès et du défaut, Platon a toutefois indiqué qu'il avait choisi ce modèle pour des raisons philosophiques et morales, en confiant au mythe des âges de l'humanité et au modèle (παράδειγμα, *Pol.* 279a) du tissage le soin d'éliminer les séries monotones.

$$\frac{12}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\frac{1}{34}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{34}+\frac{1}{102}.$$

La division à quotients non entiers étant exclue ($\frac{12}{17}$ = 0,70588235294117 64,705...), on remédie aisément à ce défaut d'unicité en ne retenant à chaque fois, pour les éléments de la somme des sous-multiples de l'unité exprimant une fraction réduite, que les dénominateurs les plus petits tels que leur produit par le numérateur de la fraction est plus grand que son dénominateur, soit :

$$\frac{12}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$$, puisque 2 est le plus petit nombre n tel que n.12>17.

$$=\frac{1}{2}+\frac{7}{34}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{x}$$, puisque 5 est le plus petit nombre n tel que $\frac{1}{5}=\frac{7}{35}<\frac{7}{34}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{170}$$

On définirait, de même, l'approximation canonique monotone de $\sqrt{2}$. Puisque $y^2 = 2x^2$, $x < y < 2x$, la partie entière de $\frac{y}{x}$ est $1 = \frac{p_1}{q_1}$ pour une approximation croissante. A chaque $\frac{p_n}{q_n}$ on ajoutera un sous-multiple de l'unité $\frac{1}{r}$, tel que r soit l'entier le plus petit satisfaisant aux conditions :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n}+\frac{1}{r},\ (rp_n+q_n)^2 < 2\,(rq_n)^2.$$ Ainsi : $\frac{y}{x}= 1 + \frac{1}{3}+ \frac{1}{13}+ \ldots$,

avec les 'réduites' successives : $1, \frac{4}{3}, \frac{55}{39}, \ldots$

II .2. 3. Recours aux algorithmes de l'excès et du défaut

II. 2 .3. 1. 'L'algorithme du Parménide'; son insuffisance

Plusieurs algorithmes exprimant une telle alternance nous sont connus.Le plus archaïque d'entre eux se fonde sur un théorème qui figure dans le *Parménide* platonicien[18] : si p, q, r, s sont des entiers et que

$$\frac{p}{p}<\frac{r}{s}, \frac{p}{q}<\frac{p+r}{q+s}<\frac{r}{s}.$$

On en tire un critère du p.g.c.d. de deux nombres et un algorithme de réduction des fractions[19]. Que, de l'égalité pythagoricienne : $y^2 = 2x^2$ on tire maintenant l'inégalité : $x < y < 2x$, en divisant par x,

---

[18]*Parm.* 154b-d. Fowler [1987, 42-51] a identifié l'algorithme et montré de quelle utilité il peut être dans les calculs d'anthuphairesis. Voir également, à propos de Chuquet, J. Itard [1984, 43 et 171].

1.	Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, $ad < bc$	
2.	$ad + ab < bc+ab$ et donc $a\,(b+d) < b\,(a+c)$	1
3.	$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$	2
4.	$ad + cd < bc + cd$ et donc $d\,(a+c) < c\,(b+d)$	1
5.	$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.	4

Le théorème est démontré par 3 et 5. On en tire aisément le théorème correspondant pour l'égalité :

$$\text{si}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

[19]Un exemple suffira pour indiquer la marche de la démonstration. Soit à réduire $\frac{p}{q}=\frac{8}{6}$. Puisque $\frac{8}{6}=\frac{6}{6}+\frac{2}{6}$ la plus grande borne inférieure $\frac{1}{1}<\frac{8}{6}$, et la plus petite borne supérieure $\frac{8}{6}<\frac{2}{1}$ sont immédiatement fixées. On applique une première fois le théorème : $\frac{1}{1}<\frac{3}{2}<\frac{2}{1}$. Comme $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}>\frac{8}{6}, \frac{3}{2}$ remplace l'ancienne borne supérieure $\frac{2}{1}$ qui a cessé d'être la plus petite : $\frac{1}{1}<\frac{8}{6}<\frac{3}{2}$. On applique une seconde fois le théorème : $\frac{1}{1}<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}; \frac{r}{s}=\frac{4}{3}$ est la fraction réduite, car $\frac{r.q}{s.q}=\frac{24}{18}=\frac{p.s}{q.s}$ $(s < q)$.

$$\frac{1}{1} < \frac{y}{x} < \frac{2}{1}.$$

On appliquera indéfiniment le théorème de Parménide en prenant soin, après chaque application, d'examiner si, dans la nouvelle réduite obtenue $\frac{p_n}{q_n}$, $p_n^2 > 2q_n^2$, auquel cas $\frac{p_n}{q_n}$ remplacera l'ancienne borne supérieure qui a trouvé plus petite qu'elle, ou si $p_n^2 < 2q_n^2$, auquel cas $\frac{p_n}{q_n}$ remplacera l'ancienne borne inférieure qui a trouvé plus grande qu'elle. On obtient la suite de réduites :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{17}{12}, \ldots$$

$$- \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$$

C'est la une 'suite de Farey', douée de la propriété :

$$p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \pm 1,$$

mais avec cette particularité que défauts et excès se suivent par paires et non par alternance simple. La différence $| p^2 - 2q^2 |$ sera donc égale à 1 quand la réduite a un indice impair, mais à 2 quand elle a un indice pair[20]. L'algorithme s'écrit :

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{1},$$

$$p_{2n+1} = p_{2n} + p_{2n-1}, \quad p_{2n} = p_{2n-1} + p_{2n-3}$$

---

20 1. $|p_1^2 - 2q_1^2| = 1, \quad |p_2^2 - 2q_2^2| = 2$

Soit la condition d'induction :

H. $|p_{2n-1}^2 - 2q_{2n-1}^2| = 1, |p_{2n}^2 - 2q_{2n}^2| = 2$

2. $|(p_{2n+1} - p_{2n})^2 - 2\,(q_{2n+1} - q_{2n})^2| = 1$

et, en vertu de l'algorithme :

3. $|p_{2n+1}^2 - 2p_{2n}p_{2n+1} + p_{2n}^2 - 2q_{2n+1}^2 + 4q_{2n}q_{2n+1} - 2q_{2n}^2| = 1$

4. $|p_{2n+1}^2 - 2q_{2n+1}^2| = 1 - |2q_{2n}^2 - p_{2n}^2 + 2p_{2n}p_{2n+1} - 4q_{2n}q_{2n+1}|$
$= 1 - |2 + 2 - 4| = 1.$

5. Un même raisonnement montre que
$|p_{2n+2}^2 - 2q_{2n+2}^2| = 2$. Donc :

6. $|p^2 - 2q^2| = 1$ pour les indices impairs et 2 pour les indices pairs.

$$q_{2n+1} = q_{2n} + q_{2n-1}, \quad q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-3}\,.$$

Simple et puissant, l'algorithme est lent et long, mais, comme le répète Platon, longueur et brièveté qualifient accessoirement une définition. La question essentielle étant celle de la pertinence, observons que l'algorithme mime une approximation euclidienne ralentie (Tableau 1). Du retour périodique qu'on constate entre les écarts, on aura conclu à l'infinité du développement. Mais, dans toutes les opérations de rang pair, les restes sont plus grands que les diviseurs ; le quotient est uniformément égal à l'unité, à condition de calculer alors deux fois le diviseur sous-estimé, d'abord en fonction du reste trop grand, ensuite en fonction du nouveau reste laissé par cette opération. C'est dire qu'on n'a pas su isoler les 'causes essentielles' et qu'on les a traitées à égalité avec les 'causes auxiliaires' : ce premier algorithme double l'estimation des restes. Ici, la lenteur marque qu'on n'a pas rapporté la succession des défauts et des excès à sa loi et à sa cause, à savoir précisément à la division véritable et simplement alternée en ce que le reste de la division doit toujours être plus petit que le diviseur.

	Opération de division			'Réduite parménidienne'	Écart par rapport à $y^2 = 2x^2$
1	$y = 1.x + (y-x)$	$y = x,$	$\frac{y}{x} = \frac{1}{1}$	$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$	-1
2	$x = 1.(y-x) + (2x-y)$	$2x = y,$	$\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$	$\frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{1}$	$+2$
3	$y-x = 1.(2x-y) - (3x-2y)$	$2y = 3x,$	$\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$	$\frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{2}$	$+1$
4	$y-x = 1.(3x-2y) + (3y-4x)$	$4x = 3y,$	$\frac{y}{x} = \frac{4}{3}$	$\frac{p_4}{q_4} = \frac{4}{3}$	-2
5	$3x-2y = 1.(3y-4x) - (5y-7x)$	$5y = 7x,$	$\frac{y}{x} = \frac{7}{5}$	$\frac{p_5}{q_5} = \frac{7}{5}$	-1
6	$3x-2y = 1.(5y-7x) + (10x-7y)$	$10x = 7y,$	$\frac{y}{x} = \frac{10}{7}$	$\frac{p_6}{q_6} = \frac{10}{7}$	$+2$
7	$5y-7x = 1(10x-7y) - (17x-12y)$	$12y = 17x,$	$\frac{y}{x} = \frac{17}{12}$	$\frac{p_7}{q_7} = \frac{17}{12}$	$+1$

Tableau 1

Le défaut en matière de causes est lié à la question controversée du statut des fractions [Heath 1956, II, 279]. Dans un texte souvent cité de la *République* (VII 525d-e), Platon évoque la constance des maîtres «à repousser et à ridiculiser quiconque chercherait dans ses calculs à diviser l'unité en soi, et, si vous divisez, ils multiplient en prenant soin que jamais l'un paraisse ne pas être un, mais multiple et fractionné». Mais, tandis qu'Aristote attribuera à l'unité une indivisibilité absolue du même type que celle du point[21] et consacrera de la sorte le dualisme radical entre arithmétique et géométrie, Platon qui, dans la même *République* [22], fait référence à l'algorithme de Théon ne l'entend pas de la sorte. L'indivisibilité théorique de l'unité[23] n'entraîne pas, pour lui, l'exclusion de la logistique, mais seulement la distinction stricte entre arithmétique des fractions ou logistique, et arithmétique des entiers ou arithmétique proprement dite. Subordonner la première à la seconde, c'est s'engager à éliminer en principe les égalités et inégalités entre fractions en les réduisant à des égalités et à des inégalités entre entiers. Or cette réduction interprète explicitement les additions portant sur les numérateurs et les dénominateurs de fractions comme des opérations de division entière. Donnons à cette division tout son sens en cherchant le plus grand des multiples du diviseur inférieur au dividende, et l'on passe de l'algorithme de Parménide à un algorithme d'approximation alternée pour chaque opération de division.

---

[21] *Métaphysique* N 2 1089b35, Δ 61016b25, cités par Heath [1956, II, 279]. Il est significatif que le mot λογιστική au sens technique d'art du calcul fait défaut dans l'*Index Aristotelicus* de Bonitz. Il semble qu'Aristote fasse sienne la définition eudoxéenne des rapports de grandeurs (Euclide, Livre V), de laquelle découle, en effet, qu'on réserve la notion de nombre aux entiers naturels (plus précisément >1) [Bourbaki 1984, 185-188].

[22] *Rep.* VIII, 546b-c ; allusion à $\frac{7}{5}$, troisième réduite de $\sqrt{2}$ [Michel 1950, 42].

[23] Van der Waerden [1966a, 189]. Outre le texte de la *République*, l'auteur cite ici Théon de Smyrne (Hiller, p. 18, 11.18-21) : «Lorsque l'unité est divisée dans le domaine des choses sensibles, elle est assurément, en tant que corps, rapetissée et divisée en parties, qui sont plus petites que le corps lui-même, lorsque la section a lieu. Mais selon le nombre, elle est agrandie ; car, à la place de l'un on a plusieurs choses», ce qui peut s'interpréter à la façon des anciens Pythagoriciens [Heath 1956, II, 279].

II.2.3.2. L'algorithme d'Euclide et l'algorithme de Théon

Seul, donc, reste en lice l'algorithme d'approximation alternée à chaque opération. Dans son usage proprement arithmétique[24], cet algorithme se présente au début du Livre VII d'Euclide sous une forme unique et non problématique, puisqu'une division de p par q (p > q) est euclidienne quand on a trouvé le plus grand des multiples de q inférieurs à p. La diminution constante des restes assure l'arrêt de l'algorithme au terme d'un nombre fini de divisions. La Proposition 1 démontre que, deux entiers inégaux étant donnés, p, q, p > q, ces nombres sont relativement premiers si le dernier reste de la division et lui seul est égal à l'unité. La Proposition 2 indique comment trouver le p.g.c.d de deux nombres.

Les réquisits platoniciens sont automatiquement satisfaits. Appelons les entiers positifs quotients successifs de la division 'éléments partiels du logos'.Tout rapport ou logos peut en effet se définir par la suite complète de ses éléments partiels. Le premier d'entre eux désigne la partie entière ; un élément de rang n désigne le quotient de la division de rang n. On écrira ainsi :

$$\frac{19}{7} = 2,122.$$

L'élimination des écritures fractionnaires, caractéristiques de la logistique théorique, au profit d'égalités entières proprement arithmétiques est donc acquise d'emblée. On revient de l'arithmétique à la logistique en décomposant le rapport entre deux nombres p, q, p > q, en une série canonique

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \ldots \pm \frac{1}{q_{n-1} q_n},$$

dans laquelle $\frac{p_1}{q_1}$ exprime la partie entière du rapport, et les défauts et excès successifs aboutissent en $\frac{p_n}{q_n}$ à la 'juste mesure' ou égalité avec $\frac{p}{q}$; chaque quantité ajoutée est un sous-multiple de l'unité et chaque réduite $\frac{p_j}{q_j}$ est une fraction[25]. Deux rapports égaux admettent même logos[26]. Les rapports sont des

[24]Bourbaki [1984, 110 note] regarde cet usage comme postérieur à son usage général ou géométrique, puisqu'il y voit «la transposition dans le domaine des entiers de la méthode des soustractions successives» dans le domaine des grandeurs.

[25]Sur l'exemple choisi :

quantités : on peut les ordonner suivant les relations du plus petit, de l'égal et de l'inégal[27].

Euclide n'étudie pas l'algorithme dont il se sert. Il suffit de s'en servir pour en découvrir les deux lois fondamentales, p_n, q_n et a_n désignant respectivement le dividende, le diviseur et le quotient de rang n :

$$\frac{|p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}|}{q_n q_{n+1}} = \frac{|1|}{q_n q_{n+1}}$$

et

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Les deux premières propositions du livre VII d'Euclide relèvent de la logistique théorique. Les calculs algébriques nécessaires pour la généralité des démonstrations appellent une représentation géométrique — celle des nombres par des segments de droite — propre à fournir de façon truistique la garantie

---

(1) $\frac{p}{q} = \frac{19}{7} = \frac{2}{1}\left(+\frac{5}{7}\right) \equiv 19 = 2.7 + 5\ ;\ \frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}$

(2) $\frac{5}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} \equiv 7 = \mathit{1}.5 + 2\ ;\ \frac{p}{q} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1}\left(-\frac{2}{7}\right)\ ;\ \frac{p_2}{q_2} = \frac{3}{1}$

(3) $\frac{2}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \equiv 7 = 2.2 + 2.1 + 1 = 2.3 + 1[5 = 2.2 + 1 \text{ et } 2 = 2.\mathit{1}]\ ;$

$\frac{p}{q} = \frac{3}{1} - \frac{1}{3}\left(+\frac{1}{21}\right)\ ;\ \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{3}$

(4) $\frac{p_4}{q_4} = \frac{8}{3} + \frac{1}{21} = \frac{19}{7}$

$\frac{p}{q} = \frac{19}{7} = (\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}) = (\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{19}{7}) = \frac{2}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{21}.$

On a mis en italique les éléments du logos $\frac{19}{7}$, caractéristiques de son développement en fraction continue. Sur les relations entre algorithme euclidien de recherche du plus grand commun diviseur et fractions continues [Émile Borel 1949, Note I, 240-256 ; 1950, 30-34].

[26]Euclide, *Élements*, L. VII, Prop. 2.

[27]Un rapport est égal à un autre s'il a même logos. Il est plus grand que lui si sa partie entière est plus grande que celle de l'autre. Si deux rapports sont identiques jusqu'au rang n, si ce rang n est un défaut, est plus grand celui dont le défaut est plus petit, ou s'il s'agit d'un excès celui dont l'excès est le plus grand.

d'existence[28]. L'application de l'algorithme d'Euclide aux grandeurs a pour effet de laisser généralement le logisticien dans l'incertitude sur la question de savoir si l'algorithme doit ou non s'arrêter, c'est-à-dire sur la nature rationnelle ou irrationnelle du rapport. Ainsi en va-t-il pour le rapport de la circonférence et du diamètre du cercle[29]. Lorsqu'au Livre X Proposition 2, Euclide établit que, si l'algorithme ne s'arrête pas, les grandeurs sont incommensurables, il ne fournit aucune critère permettant de décider qu'il y aura ou non arrêt. La périodicité attestée du developpement et elle seule est un tel critère. On peut donc présumer que, placés devant cette situation, les logisticiens ont relégué dans la logistique empirique l'algorithme d'Euclide appliqué aux grandeurs et qu'ils ne l'ont retenu dans la logistique rationnelle que lorsqu'on était en mesure de l'associer avec une preuve de périodicité, preuve de nature algébrique et donc appariée avec une construction géométrique pour garantir l'existence de l'objet. Le témoignage de Théon de Smyrne (*Expositio*, I, chap. 31, Hiller 42,10-45,9)[30]

---

[28]Heath [1956, II, 297]. La garantie est truistique, car ces représentations n'entrent pas, comme telles, dans les démonstrations mêmes. Deux rapports sont identiques si, lorsqu'on représente respectivement en coordonnées cartésiennes les dénominateurs en unités sur l'axe des x, soient x_1 et x_2, les numérateurs en unités sur l'axe des y, soient y_1 et y_2, les droites y_1x_1 et y_2x_2 sont parallèles.

[29]Voir sur ce point Fowler [1987, 35-42 et 240-246]. — Le calcul des 75 premiers termes du logos de la racine cubique de 2 (problème délien de la duplication du cube) ne révèle aucune propriété permettant de décider si son développement est fini ou non, bien que nous disposions d'une preuve indirecte de réduction à l'absurde, semblable à la preuve par l'absurde de l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ [Fowler 1987, 119]. — C'est en 1770 que Lagrange démontrera qu'on peut donner une forme périodique au développement de toute irrationnelle quadratique en fraction continue. Même si l'on peut présumer que Théodore, prince reconnu des mathématiciens de son temps (κρατίστου dit le *Pol.* 257a), a disposé d'une méthode générale pour calculer les nombres latéraux et diagonaux solutions de l'équation de Fermat $y^2 + 1 = Nx^2$ et assigner leur périodicité, il aura dû, dans chaque cas particulier, recommencer la démonstration, souvent malaisée ($\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$ ont respectivement une période d'ordre 4 et d'ordre 5). En cherchant une cause intrinsèque du dépérissement des mathématiques grecques, on note et chez le plus grand des savants de cette époque, Archimède, une sorte d'inaptitude à abstraire et à classer les problèmes par ordre de difficulté [Bourbaki 1984, 206-211 et 224]. Dans le cas de Théodore, les difficultés de l'approximation alternée fournissent la cause de l'inaptitude ou plutôt de l'incapacité.

[30]Cf. Zeuthen [1886, 27-28], Heath [1956, 388-401], Michel [1950, 430-444]. Contre : Itard [1984, 67].

permet de reconstruire une telle spécialisation de l'algorithme euclidien. On l'éprouvera sur $\sqrt{2}$, puis sur $\sqrt{3}$ en étudiant successivement l'équation de périodicité, l'algorithme numérique et la construction géométrique.

II.2.3.2.1. $\sqrt{2}$

1. Puisqu'on a démontré par l'absurde que l'égalité arithmétique $y^2 = 2x^2$ est impossible et que le géomètre construit aisément un carré double d'un carré donné, si l'on applique l'approximation alternée aux grandeurs géométriques et non plus aux nombres, nous sommes assurés que cette application n'aboutira pas à un logos fini, étant donné que jamais la grandeur plus petite soustraite de la grandeur plus grande ne laissera un reste qui la mesure. L'indéfinité de l'approximation alternée est critère d'incommensurabilité.

Soit donc l'équation d'irrationalité

$$1 .\ y^2 = 2x^2$$

On ajoute le produit yx dans les deux membres : $y^2 + yx = 2x^2 + yx$, d'où l'on tire :

$$2 .\ \frac{y}{x} = \frac{2x+y}{y+x}$$

qu'on peut développer indéfiniment :

$$\frac{y}{x} = \frac{2x+y}{y+x} = \frac{3y+4x}{3x+2y} = \frac{10x+7y}{5y+7x} = \ldots,$$

avec[31] :

$$\frac{x}{y+x} = \frac{1}{2+\dfrac{x}{y+x}},$$

équation qui garantit l'indéfinité du développement. Si nous nommons respectivement c et d deux grandeurs correspondant au côté et à la diagonale du

---

31

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{x}{y+x} = 1 + \frac{y+x}{3x+2y} = 1 + \frac{3x+2y}{5y+7x} = \ldots ;$$

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{1+\dfrac{y}{x}} \text{ et } \frac{x}{y+x} = \frac{y+x}{3x+2y} = \frac{1}{2+\dfrac{x}{y+x}}, \ldots$$

carré et c' et d' les grandeurs qui leur succèdent en vertu de 2, on obtient l'algorithme :

$$(A) \quad c' = c + d, \;\; d' = 2c + d.$$

2. L'algorithme de Théon va exploiter les relations (A) en les interprétant numériquement en terme de nombres (entiers) 'latéraux' et 'diagonaux' . Théon entend d'emblée ces nombres comme une extension des nombres polygonaux des Pythagoriciens (Hiller, 42,10-43,5). «De même, dit-il, que les nombres ont le pouvoir de faire des triangles, des carrés, des pentagones et les autres figures, nous trouvons également les proportions latérales et diagonales (πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους) rendues manifestes dans les nombres selon les définitions génératrices (κατὰ τοὺς σπερματικοὺς λόγους), car ce sont de ces derniers que les figures tirent leurs forme». L'extension est hardie, en ce que, à la différence des nombres polygonaux définissables isolément, les nombres latéraux et diagonaux ne sont définissables que par couples. Une définition génératrice n'est autre qu'une définition récursive. Et Théon se met donc en demeure de fixer les valeurs de départ des nombres c_1 et d_1 qui correspondront aux longueurs respectives des côtés et des diamètres du carré avant de préciser la loi de succession immédiate pour deux valeurs quelconques de ces nombres. Si nous désignons les nombres latéraux et diagonaux respectivement par les majuscules C et D, il justifie le choix des conditions intiales $C_1 = 1$, $D_1 = 1$ «en supposant deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car l'unité, étant principe de tout, doit être en puissance (δυνάμει) aussi bien côté que diagonale». Naturellement ce choix de départ est une approximation en ce qu'il introduit une erreur par défaut d'une unité, la plus petite possible arithmétiquement, très grande relativement. Quant à la clause d'induction, elle est simplement calquée sur (A), soit :

$$(A)_1 \quad c' = d + c, \quad d' = d + 2c,$$

ce qui donne la suite des couples de Théon : (1,1), (2,3), (5,7), (12,17), ... Ces approximations ou réduites successives ne combleront jamais l'erreur de départ, mais la rendront relativement de plus en plus petite. «Le carré construit sur la diagonale», remarque en effet Théon, «sera tantôt plus petit, tantôt plus grand d'une unité que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables». Il a sous les yeux[32] l'énumération suivante des défauts et des excès :

$$1^2 = 2\,(1^2) - 1$$

---

[32]comme le remarque Michel [1950, 428].

$$3^2 = 2\,(2^2) + 1$$
$$7^2 = 2\,(5^2) - 1$$
$$17^2 = 2\,(12^2) + 1, \ldots,$$

car c'est cette énumération qui justifie le passage de (A) à $(A)_1$ en déterminant l'erreur commise à chaque défaut et chaque excès et, comme cette erreur demeure identique à l'unité en valeur absolue, en faisant voir, puisque les nombres latéraux et diagonaux ne cessent de croître suivant $(A)_1$, que l'erreur relative, quelque grand qu'on choisisse le nombre k, pourra être rendue inférieure à $1/k$ à condition d'aller jusqu'à une réduite de rang sufissamment grand.

3. Reste à retrouver la construction apte à fournir le lien direct et intuitif entre algorithme géométrique et algorithme arithmétique. Une conjecture de P. Bergh[33], convenablement interprétée, suggère cette interprétation et peut, à cet égard, être regardée comme la figuration pythagoricienne de l'approximation de $\sqrt{2}$. On prolonge le triangle rectangle isocèle ABC de diagonale d_1 = CB et de côté c_1 = AB en ajoutant à AB la grandeur BD = d_1. Les triangles EBD et ACB sont égaux par construction (angle A = angle E = 1 dr., angle ABC = angle BDE, CB = BD). Donc ED = AB = c_1. Les deux triangles ABC et ADG sont semblables et illustrent l'analogie :

$$\frac{d_1}{c_1} = \frac{d_1 + 2c_1}{d_1 + c_1}.$$

On prolonge AD en DH en comptant DH = $Dh_1 + h_1h_2 + h_2H = d_1 + c_1 + c_1$. Le triangle IDH est égal au triangle ADG par construction (angle I = A = 1 dr., angle ADG = angle DHI, DH = DG). Donc IH = AD = $d_1 + c_1$. Les triangles ADG et AHK sont semblables et illustrent l'analogie :

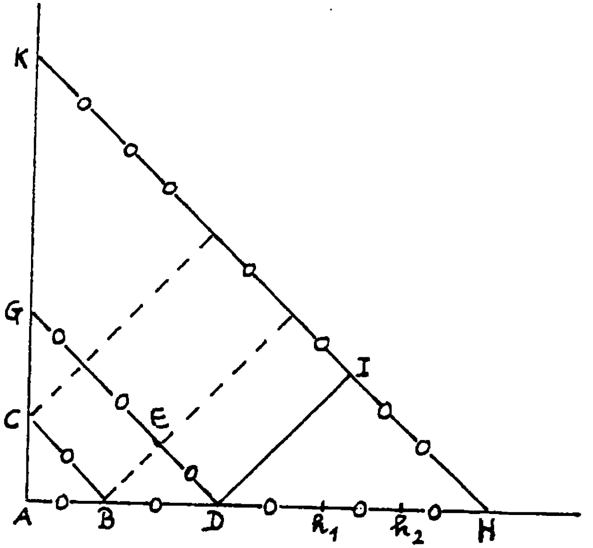
$$\frac{d_1 + 2c_1}{d_1 + c_1} = \frac{3d_1 + 4c_1}{2d_1 + 3c_1}.$$

Cette construction, qui se prolonge indéfiniment, correspond à l'algorithme (A). Mais suivons la leçon de Théon sur l'unité, principe de toute chose, potentiellement à la fois côté et diamètre. Figurons donc la mesure arithmétique approchée de AB et de CB par un point-monade. Un même point-monade et un seul marque désormais chaque segment ajouté, que ce segment soit diagonal ou latéral, et qu'il soit ajouté au côté ou compté sur la diagonale des triangles

---

[33]voir Heath [1956, II, p. 401].

successifs : ABC, ADG, AHK, etc. La figure de Bergh ainsi prolongée et interprétée, fournit la figuration schématique des nombres de Théon, qui correspond à l'algorithme $(A)_1$.



Figuration arithmétique du schéma de Bergh ($\sqrt{2}$).

Théon, qui ne mentionne pas la construction géométrique, ne mentionne pas non plus le lien de l'algorithme $(A)_1$ avec l'algorithme euclidien, qui exige qu'un reste soit toujours inférieur au diviseur, les réduites successives étant obtenues lorsqu'on annule le reste correspondant.

Restituons le lien (Tableau 2) :

	Algorithme d'Euclide	Algorithme de Théon	Lien entre les deux algorithmes
1	$y = x+(y-x)$ $x<y<2x$ $(x^2<y^2<4x^2)$	$C_1=D_1=1$	$\frac{x}{y}=1+\frac{y-x}{x}=1+\frac{y}{y+x}$
	Si $y = x$, $= \frac{y_1}{x_1}=\frac{1}{1}$	$\frac{D_1}{C_1}=\frac{1}{1}$	$x^2=y^2-x^2$
2	$x = 2(y-x)+(3x-2y)$ $2(y-x)<x<3(y-x)$ $2y<3x : 4y^2=8x^2<9x^2$ $4x<3y : 16x^2<9y^2=18x^2$	$\frac{D_1}{C_1}\to\frac{D_2}{C_2}=\frac{D_1+2C_1}{D_1+C_1}$	$\frac{x}{y-x}=2+\frac{3x-2y}{y-x}=$ $2+\frac{y+x}{3x+2y}$
	Si $3x = 2y$, $\frac{y_2}{x_2}=\frac{3}{2}$	$\frac{D_2}{C_2}=\frac{3}{2}$	$y^2-x^2=9x^2-4y^2$
3	$y-x = 2(3x-2y)+(5y-7x)$ $2(3x-2y)<(y-x)<3(3x-2y)$ $7x<5y : 49x^2<25y^2=50x^2$ $7y<10x : 49y^2=98x^2<100x^2$	$\frac{D_2}{C_2}\to\frac{3D_1+4C_1}{2D_1+3C_1}$	$\frac{y-x}{3x-2y}=2+\frac{5y-7x}{3x-2y}$ $=2+\frac{3x+2y}{5y+7x}$
	Si $5y = 7x$, $\frac{y_3}{x_3}=\frac{7}{5}$	$\frac{D_3}{C_3}=\frac{7}{5}$	$9x^2-4y^2=25y^2-49x^2$

Tableau 2

II.2.3.2.2. $\sqrt{3}$.

L'algorithme de Théon remplit-il les conditions requises par Platon dans le *Politique* ? Nous ne disposons ici d'aucun témoignage univoque[34]. D'autre part, l'examen des équivalences entre algorithmes par défauts et excès n'est pas décisif dès lors qu'on le limite au cas particulier de $\sqrt{2}$. On précisera la

[34] L'allusion de la *République* (VIII, 546b-c) à la troisième réduite de Théon n'identifie pas la méthode de réduction, puisque l'algorithme de Parménide produit 7/5 comme quatrième réduite. La valeur 7/5 n'exclut pas même l'approximation par défauts et excès d'Archytas [Michel, 1950, 427], bien que 7/5 ne soit pas une réduite de la suite d'Archytas $\left(\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{24}{17},\frac{17}{12}\right)$. Après tout, Archytas donne un exemple d'une approximation dont il n'a pas spécifié qu'elle était unique.

question posée en étudiant quelles difficultés Théodore ou l'un de ses prédécesseurs a rencontrées lorsque, pour la première fois, il a étendu la méthode de Théon à $\sqrt{3}$.

1. Les algorithmes parlant d'eux-mêmes, contentons-nous de placer l'une en face de l'autre les équations correspondantes pour les deux approximations :

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$y^2 = 2x^2$	$y^2 = 3x^2$
$y^2 + xy = 2x^2 + xy$	$y^2 + 2xy = 3x^2 + 2xy$
$\dfrac{y}{x} = \dfrac{y+2x}{y+x}$	$\dfrac{y}{x} = \dfrac{2y+3x}{y+2x}$
(A) $c' = d + c,\ d' = d + 2c$	(B) $c' = d + 2c,\ d' = 2d + 3c$

2. Poursuivons l'analogie en disant que l'unité est en puissance tant un nombre latéral qu'un nombre diagonal. On obtiendra la suite des réduites :

$$\frac{1}{5}, \frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}, \frac{265}{153}, \frac{989}{571}, \ldots,$$

Mais loin de représenter une suite alternée de défauts et d'excès, toutes les équations définissantes conduisent ici au défaut – 2. Certes ce défaut constant devient relativement de plus en plus petit, mais la suite exprime une approximation monotone.

Revenons donc à la preuve apagogique de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Elle différait de la preuve correspondante pour $\sqrt{2}$ en ce que l'arbre de réfutation se trouvait dédoublé, deux séries différentes énumérant respectivement la première tous les carrés impairs, la seconde tous les carrés pairs exactement divisibles par 9. Nous n'avons jusqu'ici, dans la suite d'approximations, énuméré que des carrés, tous impairs, triples de carrés impairs au défaut près -2. Un tel défaut interdit, en effet, ici l'occurrence de carrés pairs. En vertu de l'équation définissante :

$$(2n)^2 = 3\,(2m)^2 - 2 \quad \text{ou} \; 4n^2 = 12m^2 - 2,$$

il viendrait :

$$4\,(n^2 - m^2) = 8m^2 - 2 = 2\,(4m^2 - 1),$$

et, en divisant par 2, un pair serait égal à un impair. Quant aux deux formes :

$$(2n)^2 = 3\,(2m+1)^2 - 2, \quad \text{et} \; (2n+1)^2 = 3\,(2m)^2 - 2,$$

elles sont impossibles à cause de la parité. En revanche un carré pair simple saute aux yeux pour l'excès : $y = 2$, puisque $2^2 = 3.1^2 + 1$. Généralement, si l'équation $y^2 = 3x^2 + 1$ a des solutions, si x est impair, y est pair et si x est pair y est impair. Partant donc de la réduite d'excès $\frac{2}{1}$ appliquons lui l'algorithme (B). Nous obtenons la suite :

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}, \frac{97}{56}, \ldots,$$

qui, tous sont des excès par rapport à l'unité. Insérons cette suite intercalaire dans la suite précédente. L'insertion fournit la véritable énumération 'théonienne' pour $\sqrt{3}$:

$$1^2 = 3.1^2 - 2$$

$$2^2 = 3.1^2 + 1$$

$$5^2 = 3.3^2 - 2$$

$$7^2 = 3.4^2 + 1$$

$$19^2 = 3.11^2 - 2, \ldots$$

L'alternance des défauts et des excès est à présent rétablie, mais la suite

$$\begin{array}{ccccc} \frac{y}{x}, & \frac{y+x}{x}, & \frac{2y+3x}{y+2x}, & \frac{2y+5x}{y+3x}, & \ldots, \\ -, & +, & -, & + & ,\ldots, \end{array}$$

se décompose en deux systèmes distincts ; le premier comprend les défauts, le second les excès ; on passe d'un défaut au prochain défaut au moyen de (B) avec la condition initiale 1/1, et d'un excès au prochain excès toujours au moyen de (B) avec la condition initiale 2/1. L'algorithme (B) n'énumère donc les inégalités $y^2 = 3x^2 - 2$, $y^2 = 3x^2 + 1$ qu'à partir de deux valeurs différentes du rapport, point de départ de l'algorithme.

3. Mais revenons à l'algèbre géométrique, seule garante des calculs. Partons du triangle rectangle isocèle de côtés $AB_1 = B_1E = 1$ et de diagonale $AE = \sqrt{2}$. Portons cette dernière longueur sur le prolongement du côté B_1E, soit $B_1C_1 = AE$. Joignons A et C_1 : $AC_1 = \sqrt{3}$. Le triangle AB_1C_1 construit le premier défaut : $AC_1{}^2 = 3\ AB_1{}^2$, mais, en identifiant AC_1 avec l'unité AB_1 on commet l'erreur -2 : $1^2 = 3.1^2 - 2$. Sur le prolongement de AC_1, portons $C_1F = AC_1$ et $FC_2 = 3\ AB_1$ et, sur le prolongement de AB_1 portons $B_1C'_1 = AB_1$; abaissons la perpendiculaire C_2B_2 sur le prolongement de AC'_1. C_2B_2 est alors parallèle à B_1C_1 et les triangles AB_1C_1 et AB_2C_2 sont semblables. Le

segment C'_1B_2 est donc égal[35] à $\sqrt{3}$. Le triangle AB_2C_2 construit alors le second défaut :

$$\frac{AC_2}{AB_2} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$ Si l'on identifie AC_1 à AB_1,

$\frac{AC_2}{AB_2} = \frac{5}{3}$, second défaut –2, puisque $5^2=3.3^2-2$. L'algorithme (B),

$\frac{y}{x} = \frac{2y+3x}{y+2x}$ a donc une existence géométrique.

Pour obtenir la suite des excès, construisons le point B'_1 intersection des cercles (A, AC_1), c'est-à-dire (A, $\sqrt{3}$) et (C'_1, AB_1), c'est-à-dire (C'_1,1). $AC'^2_1 = C'_1B'^2_1 + AB'^2_1$, (4 = 1+3); donc $AB'_1C'_1$ est rectangle en B'_1, et le rapport cherché

$$\frac{\sqrt{3}}{1} \text{ est donc égal à } \frac{AB'_1}{B'_1C'_1} = \frac{2AB'_1}{2B'_1C'_1} = \frac{2AB'_1}{AC'_1}$$

Si l'on identifie l'hypothénuse $AC'_1=2$ au côté $AB'_1=1$, on obtient le premier excès $2^2=3.1^2+1$. On prolonge AB'_1 jusqu'en B'_2 tel que $AB'_2 = AB'_1 + B'_1H + HB'_2$ avec $B'_1H = AB'_1 = AC_1$ et $HB'_2 = 3AB_1$: $AB'_2 = 2AC_1+3AB_1$. On abaisse la perpendiculaire $B'_2C'_2$ à AB'_2. Les triangles $AB'_1C'_1$ et $AB'_2C'_2$ sont semblables :

$$\frac{AB'_1}{AC'_1} = \frac{AB'_2}{AC'_2} = \frac{2AC_1+3AB_1}{2AB_1+C'_1C'_2} \text{ ou}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+C'_1C'_2} \text{ d'où } C'_1C'_2 = 2+2\sqrt{3} \ ;$$

$$\frac{AB'_2}{AC'_2} = \frac{2\sqrt{3}+3}{4+2\sqrt{3}} \text{ et } \frac{2AB'_2}{AC'_2} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+\sqrt{3}} = \frac{2AB'_1}{AC'_1} = \sqrt{3}$$

Mais on a identifié $AC'_1= 2$ à $AB'_1= \sqrt{3}$, ce qui revient à poser $2 = \sqrt{3}$:

---

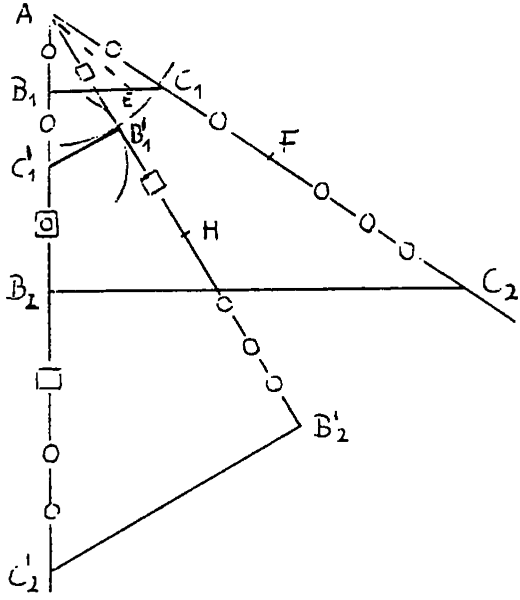
[35]puisque
$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{2AC_1+3AB_1}{2AB_1+C'_1B_2} \ ;$$
$$\text{donc } \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+C'_1B_2} \rightarrow 2\sqrt{3}+3 = 2\sqrt{3}+(C'_1B_2)\sqrt{3} \rightarrow C'_1B_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\frac{AB'_2}{AC'_2} = \frac{4+3}{4+4} = \frac{7}{8}, \text{ c.à.d. } \frac{2AB'_2}{AC'_2} = \frac{7}{4}$$

deuxième valeur par excès, puisque $7^2 = 3.4^2 + 1$. On passe du premier excès $\sqrt{3} = \dfrac{AB'_1}{B'_1C'_1}$ au second $\sqrt{3} = \dfrac{2AB'_2}{AC'_2}$ par l'Algorithme (B)[36],

$$\frac{y}{x} = \frac{2y+3x}{y+2x}\left(\frac{2}{1} \rightarrow \frac{7}{4}\right),$$

ce qui complète la conversion arithmétique du schéma théonien.



Figuration arithmétique du schéma géométrique de $\sqrt{3}$.

---

[36] $AB'_2 = 2AC_1 + 3AB_1 = 2AB'_1 + 3B'_1C'_1$ et $AC'_2 = 2AB_1 + C'_1C'_2$ avec :

$C'_1C'_2 = 2 + 2\sqrt{3} = 2AB_1 + 2AC_1$.

Donc : $AC'_2 = 4AB_1 + 2AC_1 = 4B'_1C'_1 + 2AB'_1$: $\sqrt{3} = \dfrac{AB'_2}{\frac{1}{2}(AC'_2)} = \dfrac{2AB'_1 + 3B'_1C'_1}{2B'_1C'_1 + AB'_1}$

Les points figurent une unité; les carrés deux unités; entre C'_1 et B_2 le point se rapporte au triangle AB_2C_2, le carré au triangle $AB'_2C'_2$: $AB'_2=7$, $AC'_2=8$.

Nous voici cependant en face d'un algorithme unique à double période à partir de deux conditions initiales indépendantes de défaut et d'excès. Appliqué à l'une des conditions, il présente une suite d'approximations monotones croissantes pour les défauts, décroissantes pour les excès. Les lois des fractions continues ne s'appliquent donc pas[37]. On n'obtient une suite alternée de défauts et d'excès qu'en intercalant les excès entre les défauts. Considéré en lui-même, l'algorithme de Théon se révèle analytiquement adéquat en ce qu'il contient tous les éléments du logos et, à la différence de l'algorithme de Parménide, eux seulement. En revanche les conditions initiales extérieures le brisent en développements indépendants et monotones dès que la période n'est plus l'unité et une opération, également extérieure, doit composer les pièces diverses pour en faire un algorithme alterné dont on ne ressaisit pas immédiatement l'unité. Bref le cardage qui sépare les fils est bien là, le tissage aussi qui les unit[38], mais comme s'ils appartenaient à deux arts opposés plutôt que complémentaires. Les deux séries de réduites, celle des défauts, celle des excès sont telles en effet que chacune d'entre elles est désignée comme telle, la première en relation avec le seul défaut — une réduite est plus petite que toutes celles qui la suivent —, la seconde avec le seul excès — une réduite est plus grande que celles qui la suivent —, sans qu'on fixe leur relation réciproque (*Pol.* 283c-e). Or les deux termes de ce rapport sont précisément les deux unités différentes qu'on a posées en étendant l'algorithme de Théon et qui rangent cet algorithme dans l'arithmétique populaire que le *Philèbe* (56) oppose à l'arithmétique philosophique, en précisant que la première compte des unités inégales — deux armées, deux bœufs —, la seconde des unités égales quelque grande que soit la somme.

Tout rentre évidemment dans l'ordre dès qu'on restitue la subordination logique de l'algorithme de Théon à l'algorithme d'Euclide, restitution dont le *Politique* indique que Théodore la pratiquait puisque sa logistique est dite porter sur les différences dans les nombres. Tout s'éclaire alors. Les conditions

---

[37]Les deux suites vérifient deux lois de succession, mais bien sûr sans alternance, différentes : la différence $p_nq_{n+1} - q_np_{n+1}$ est égale à +1 pour les excès (rangs impairs) et -2 pour les défauts. Chacune des suites vérifie les lois de succession à deux indices : $p_{n+2} = 4p_n - p_{n-1}$, $q_{n+1} = 4q_n - q_{n-1}$.

[38]L'image, développée à partir de *Pol.* 280b, se retrouve jusqu'à la fin du dialogue 310e - 311c.

initiales résultent des opérations mêmes de l'algorithme euclidien. Ces dernières tissent ainsi les unes avec les autres les suites d'approximations monotones qui viennent se composer dans une alternance unique et régulière de défauts et d'excès obéissant aux deux lois des fractions continues[39]. La différence $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}$ devient alternativement égale à $\pm$ 1. Quant à la seconde loi[40], elle se dédouble, pour $\sqrt{3}$, selon l'indice de la réduite :

$$p_{2n+1} = 2\,p_{2n} + p_{2n-1}, \quad q_{2n+1} = 2\,q_{2n} + q_{2n-1}\,;$$
$$p_{2n} = p_{2n-1} + p_{2n-2}, \quad q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-2}\,.$$

Tandis que le logos cesse d'être seulement une analyse d'éléments pour en devenir la synthèse, la métrétique relative, désormais rapportée à la juste mesure, fait place à la métrétique absolue.

On le voit, la véritable synthèse que réclame Platon n'est autre, en matière d'approximation alternée, que la théorie des fractions continues, seule apte à expliciter complètement les rapports entre éléments des logos et réduites. Quelle portion de la théorie les Grecs ont-ils maîtrisée ? Nous l'ignorons. De ce que, logiquement, l'algorithme théonien suppose l'algorithme d'Euclide, avons-

---

[39]Voir p. 28. Dans tout ce texte on entend par 'fraction continue' une fraction continue de quantième [Itard 1984, 40).

[40]On aperçoit aisément la signification de la seconde loi sur les quatre premières opérations de l'algorithme euclidien appliqué à : $\sqrt{3}$

(1) $y=1x+(y-x)$ $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1}$ (premier défaut)	$a_1=1$ (partie entière) ; $x<y<2x$, puisque : $x<y$ car $x^2<y^2$; $y<2x$ car $y^2<4x^2 (y^2=3x^2)$
(2) $x = 1\,(y-x)+(2x-y)$ $\frac{p_2}{q_2}=\frac{2}{1}$ (premier excès)	$a_2=1$; $y-x<x<2(y-x)$, puisque : $y<2x$, car $y^2<4x^2$; $x<2y-2x$, car $9x^2<4y^2$
(3) $y-x = 2\,(2x-y)+(3y-5x)$ $\frac{p_3}{q_3}=\frac{5}{3}$ (second défaut)	$a_3=2$; $2(2x-y)<(y-x)<3(2x-y)$, puisque : $5x<3y$, car $25x^2<9y^2$; $4y<7x$, car $16y^2<49x^2$
(4) $2x-y = 1(3y-5x)+(7x-4y)$ $\frac{p_4}{q_4}=\frac{7}{4}$ (second excès) .	$a_4=1$; $3y-5x<2x-y<2(3y-5x)$, puisque : $4y<7x$, car $16y^2<49x^2$; $12x<7y$, car $144x^2<49y^2$

Ce développement suffit à montrer pourquoi la seconde loi des fractions continues : $p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n+1}$ prend ici la forme particulière : $p_{2n+1} = 2p_{2n} + p_{2n-1}$, $p_{2n} = 1p_{2n-1} + p_{2n-2}$, avec la loi analogue pour les q_{2n+1} et q_{2n}.

nous le droit de conclure que la connaissance du premier suppose la connaissance du second ? L'algorithme de Théon définit, par exemple, une réduite en fonction de la seule réduite qui la précède immédiatement. L'algorithme euclidien, dans la seconde loi des fractions continues, définit le numérateur d'une réduite de rang n en fonction des numérateurs des réduites de rang n-1 et n-2, et de même pour les dénominateurs. Cette différence est remarquable. Les textes semblent muets à son propos[41].

Conclusion

On concluera par trois remarques.

1. La première porte sur l'histoire des mathématiques. Des deux modèles auxquels Platon se réfère dans le *Sophiste* et le *Politique*, seul le second est attesté par Euclide dans les livres dont on peut attribuer la paternité à Théétète (Livre VII, Propositions 1 et 2 ; Livre X, Proposition 1 et 2) ou, plus exactement en cette matière, à Théodore. Théodore lui-même a subordonné l'algorithme rapporté par Théon à l'algorithme euclidien et il n'était pas sans savoir que la construction de la section d'or n'entrait pas dans les algorithmes de Théon[42]. Quant à Théétète, il étendit aux surfaces et aux volumes

---

[41]Voir la **Note 1** en fin de texte.

[42]Car ceux-ci sont limités au cas des 'puissances rationnelles' au sens de Théétète, c'est-à dire des racines (irrationnelles ou non) dont le carré est rationnel. En effet, c'est seulement à leur propos qu'il est légitime et censé de parler de nombres 'latéraux' et 'diagonaux'. Or la section d'or a la même antiquité que $\sqrt{2}$ et n'appartient pas aux puissances. Mais la Proposition d'Euclide II 11 qui fournit la construction pythagoricienne d'algébro-géométrie correspondante fait appel à l'approximation alternée tout en illustrant cette dernière. Seul, dans ce cas, l'algorithme d'approximation alternée est donc formellement adéquat.

La construction d'Euclide II, 11 fournit les rapports

$$\text{(A)} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \text{ et } \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}, \text{ soit } a^2 = b^2 + ab,$$

équation de la section d'or [Vuillemin 1990, 431], qui fait voir immédiatement que si a est incommensurable avec b, a/b n'est pas une puissance. En utilisant la Proposition d'Euclide VII 12, qui repose sur la Définition d'Euclide VII 20, laquelle renvoie implicitement à l'approximation alternée, on dérive :

$$\text{(B)} \qquad \frac{b}{a-b} = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{3a+2b}{2a+b} = \dots$$

l'approximation alternée, et les constructions géométriques qui correspondent à sa classification des irrationnelles ont une tout autre portée que l'algébro-géométrie pythagoricienne dans le cadre de laquelle s'inscrivent les travaux de Théodore [Vuillemin 1962, 533-542]. Platon, dans le style antiquisant qui lui est propre, emprunte ici à ces mathématiciens des modèles particuliers visant à définir explicitement une notion de rapport unique, applicable aux entiers comme aux 'puissances rationnelles'. Il est probable que ces modèles étaient déjà abandonnés par les mathématiciens : les complications liées à l'algébro-géométrie et à son interprétation arithmétique s'ajoutaient à la difficulté fondamentale suscitée par la convertibilité dans l'analogie[43], sans parler des obstacles formidables que réservent le maniement des fractions continues et l'indécidabilité quant à leur nature lorsque fait défaut un critère de périodicité propre à garantir l'irrationalité. La définition formaliste d'Eudoxe (Livre V, Définition 5) assure immédiatement la convertibilité. Les mathématiciens l'adoptèrent.

On s'aventurerait toutefois en opposant le réalisme de Théétète et de Platon au formalisme d'Eudoxe, car ce formalisme n'est pas existentiel ; Eudoxe n'est pas Dedekind. Comme le fait Platon, il fonde les preuves d'existence des irrationnelles sur l'exhibition d'un objet géométrique, mais il recourt à une construction par la règle et le compas, tandis que Platon fait appel aux idées algébro-géométriques, exclusives du mouvement [Vuillemin 1962, 527-532, 540-546].

Incomparablement plus commode que sa rivale, la théorie eudoxéenne des proportions a occulté l'acquis de Théétète. La notion de puissance rationnelle équivaut, en effet, à une première extension de la notion de nombre, les racines carrées et cubiques prenant place à côté des rapports entre entiers. Les expressions indéfinies requises par cette première irruption des nombres

---

Sur (B), on lit la loi génératrice des rapports partiels :

$$p_i = 1 p_{i-1} + p_{i-2},\ q_i = 1\ q_{i-1} + q_{i-2},$$

l'élément partiel du logos étant identique à 1, et la trace de l'approximation alternée :

$$a = 1b + (a - b)$$
$$b = 1\ (a - b) + (2b - a), \ldots..$$

C'est par abus de langage qu'on regarderait les a_i et b_i comme des nombres diagonaux et latéraux et, comme le fait remarquer Heller [1965, 347] : «tandis que, pour le carré, les considérations géométriques avaient depuis longtemps prouvé que pour son côté et sa diagonale, on avait $2c^2 - d^2 = 0$, la situation était toute différente pour le pentagone régulier. *Ici, il fallait d'abord trouver la liaison entre côté et diagonale*».

[43]Aristote, *Anal. post.* I 5 74a17-22. [Vuillemin 1962, 544].

réels révèlent, de plus, que la timitidé des penseurs grecs devant l'infini fut acquise plutôt qu'innée. Les anciens Pythagoriciens ont opéré sans vergogne sur les ensembles des entiers naturels ou des nombres polygonaux, et Nicomaque rapporte un procédé d'énumération des nombres carrés au moyen de la diagonale construite sur un tableau doublement infini d'entiers[44].

2. La seconde remarque a trait aux relations des mathématiques avec la logique. Comme le fera à sa suite Aristote, Platon a défini la διάνοια ou pensée discursive par la division : comprendre logiquement, c'est classer. Platon précise : classer ou diviser, c'est mettre en rapport, et un rapport admet une définition finie ou infinie. La définition est finie quand on est assuré que l'objet de la classification est *a priori* subsumé sous les universaux de départ. Les démonstrations d'irrationalité et l'étonnement dont elles sont l'occasion attestent que cette subsomption n'est pas toujours l'objet d'une idée claire et distincte, et c'est ce qui apparente la définition philosophique du sophiste et du politique aux preuves d'irrationalité, l'objet de la classification pouvant échapper à la subsomption de départ soit parce que l'arbre de la classification ne le contient pas (réduction à l'absurde), soit parce qu'il le contient à l'infini (approximation alternée). Platon laisse ainsi indécise la frontière entre logique et mathématique. Aristote la trace avec netteté. Il rejette hors de la logique la théorie des proportions, objet propre des mathématiques ou plutôt leur quasi-objet, puisque physique et expérience sensible sont censées fonder l'abstraction constitutive de cet objet. En contrepartie, réduite à la syllogistique des prédicats monadiques, la logique trouve son modèle dans la classification naturelle.

3. La troisième remarque est relative à l'inadéquation de principe des modèles platoniciens. C'est cette inadéquation intentionnelle qui fait porter à faux la critique d'Aristote. Platon l'avait affirmée, avec quelle vigueur, dans la *République* (VII 531d-e). On ne le voit pas s'en départir dans le *Sophiste* ou dans le *Politique*, quand bien même il emprunte aux mathématiques des images propres à mieux préciser sa méthode et même à refléter l'inflexion de sa philosophie. C'est que le mathématicien connaît du vrai, du faux, de l'indécidable, non de l'apparence, parce que l'apparence ne relève pas de la pensée dianoétique qu'épuise la relation d'une hypothèse à ses conséquences (*République* VII 533b-c), l'hypothèse se réduisant, dans le cas de l'arithmétique, à postuler les multiplicités d'unités. Cette même pensée n'abrite pas non plus le bien ou le mal, parce que le bien qui est au delà de l'essence (*République* VI 509b) est donc également au delà de la définition et du rapport.

---

[44]Nicomaque, *Introduction à l'Arithmétique*, L. I, ch. XIX [8], [19].

Note 1

On démontre aisément, dans le cas de $\sqrt{2}$, qu'il y a équivalence entre l'algorithme de Théon, l'algorithme d'Euclide et l'algorithme des fractions continues. On passe de l'algorithme de Théon :

(1) $D_{n+1} = D_n + 2C_n$ (2) $C_{n+1} = D_n + C_n$

à l'algorithme d'Euclide :

(3) $D_{n+1} - C_{n+1} = C_n$ (4) $C_{n+1} - C_n = D_n$

en soustrayant (2) de (1), puis en soustrayant C_n des deux membres de (2). On passe de l'algorithme d'Euclide à l'algorithme de Théon en ajoutant (4) à (3), puis en ajoutant C_n aux deux membres de (4) [Van der Waerden 1966b, 421-422]. De l'algorithme de Théon on passe à celui des fractions continues par les opérations suivantes :

1 $d_n = d_{n-1} + 2\,c_{n-1}$ (1), changement d'indices

2 $c_n = d_{n-1} + c_{n-1}$ (2), changement d'indices

(5) $d_{n+1} = d_n + 2c_n = d_n + 2d_{n-1} + 2c_{n-1}$ (1), 2

$= d_n + 2d_{n-1} + d_n - d_{n-1}$ 1

$= 2d_n + d_{n-1}$

(6) $c_{n+1} = d_n + c_n = c_n + d_{n-1} + 2c_{n-1}$ (2), 1

$= c_n + c_n - c_{n-1} + 2c_{n-1}$ 1

$= 2c_n + c_{n-1}$.

Mais on démontre aussi qu'on passe sans peine de l'algorithme de Parménide dont on a reconnu l'inadéquation platonicienne à l'algorithme des fractions continues. L'algorithme de Parménide peut, en effet, s'écrire :

(7) $d_{2n+1} = d_{2n} + d_{2n-1}$ (8) $c_{2n+1} = c_{2n} + c_{2n-1}$

(9) $d_{2n} = d_{2n-1} + d_{2n-3}$ (10) $c_{2n} = c_{2n-1} + c_{2n-3}$

On remplace en (7) d_{2n} par sa valeur en (9) :

3 $d_{2n+1} = 2d_{2n-1} + d_{2n-3}$

On remplace en (8) c_{2n} par sa valeur en (10) :

4 $\quad c_{2n+1} = 2c_{2n-1} + c_{2n-3}$.

En supprimant les réduites parménidennes d'indice pair et en nommant D'_n et C'_n les nouveaux nombres diagonaux et latéraux, il vient :

$$d'_n = d_{2n-1},\ d'_{n-1} = d_{2n-2-1} = d_{2n-3},\ d'_{n+1} = d_{2n+2-1} = d_{2n+1}.$$

Donc :

(5) $\quad d'_{n+1} = 2d'_n + d'_{n-1}$.

Par un calcul semblable, on obtiendrait de même

(6) $\quad c'_{n+1} = 2c'_n + c'_{n-1}$.

Van der Waerden [1966b, 422-423] propose une reconstitution historique : calcul du p.g.c.d et algorithme euclidien → validité de cet algorithme appliqué à des paires de longueurs commensurables ou non → infinité du procès dans ce dernier cas → application au rapport de la diagonale au côté du carré et renversement du procédé de soustraction en procédé d'agrandissement → retour au nombre et construction de Théon au moyen d'Euclide II 10. C'est là, assurément, le procédé logique de démonstration. Reflète-t-il le procès historique de la découverte ? Nous n'en avons pas la preuve.

On n'a pas réfuté, par exemple, et l'on ne voit guère comment on pourrait la réfuter, l'hypothèse de Paul Tannery faisant remonter la recette théonienne à la considération de l'harmonie pythagoricienne (*Mémoires scientifiques* III, 87-88; Michel 1950, 428-430). Cette hypothèse qui n'est pas exclusive, donne vie à un état de choses où l'algorithme de Théon aurait précédé l'algorithme anthuphairétique ou aurait du moins été appliqué sans qu'on ait reconnu sa subordination logique. Le cheminement d'une pensée dont l'objet est éminemment rationnel n'est pas forcément rationnel.

Note 2: De la division platonicienne à la décomposition des nombres en puissances de facteurs premiers.

On a opposé à la présente reconstruction de l'analyse platonicienne deux objections, la première, d'ordre mathématique, portant sur l'exhaustivité de cette analyse, la seconde, d'ordre historique, touchant à la question de savoir si une démonstration exhaustive ne suppose pas des théorèmes euclidiens postérieurs à Platon. La présente note a pour objet de répondre simultanément à ces deux objections.

Partons, en la faisant nôtre, de la réflexion du mathématicien Dieudonné :

> «A ma connaissance, dit-il, dans aucune civilisation antique autre que la civilisation grecque, on n'avait songé avant le v^{e} siècle avant J.-C. à la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Cette décomposition, que nous écrivons maintenant
>
> $$n = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$
>
> où $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers et les k_i des exposants au moins égaux à 1, n'apparaît pas explicitement chez Euclide faute de notations adéquates. Mais il démontre les trois propriétés suivantes (exprimées en langage moderne) :
>
> a) Tout entier est premier ou divisible par un nombre premier (Livre VII, 32).
>
> b) Si p est un nombre premier, une puissance p^m ne peut être divisible que par les nombres p^r avec $r<m$ (Livre IX, 13).
>
> c) Si un nombre premier divise un produit ab de deux entiers et ne divise pas a, il divise b (Livre VII, 30)». [Dieudonné 1987, 99].

On aura donc à démontrer que Platon ou les platoniciens pythagorisants de son temps possédaient l'équivalent des propositions a), b) et c).

On se servira, à cet effet, d'un tableau dû à Nicomaque (voir p.45, note 44) mais qui remonte probablement au pythagorisme ancien, ainsi que d'une classification due également à Nicomaque, unanimement critiquée mais interprétable en restaurant la division platonicienne qui l'a directement inspirée. On démontrera d'abord, sur le tableau de Nicomaque, la proposition platonicienne : tout nombre admet une décomposition unique en une puissance de 2 et un facteur impair. On analysera ensuite dans sa généralité le théorème de la décomposition unique en facteurs premiers.

Une remarque préliminaire permettra toutefois de limiter la seconde enquête aux propositions a) et b) en montrant que Platon était en possession de la proposition c) et des concepts fondamentaux de nombre premier et de nombres relativement premiers. L'algorithme d'Euclide, dû à Théétète et à Théodore et connu par Platon sous le nom d'excès et de défaut (voir II, 2.3.2, p. 29 sq.), permet de calculer le p.g.c.d. de deux nombres a et b. Lorsque ce p.g.c.d. est égal à 1, on dit que a et b sont *relativement premiers*. Exemple 9 et 25. La relation binaire «être relativement premiers» s'étend immédiatement à plus de deux nombres. Exemple : 2, 9 et 25 sont relativement premiers. Il est possible que le concept n-adique et, en tout cas, dyadique «être relativement premiers» ait précédé le concept monadique «être premier». Dans ce cas, on aurait aperçu que 3 est relativement premier par rapport à 5 ou à 25 avant d'apercevoir que 3 est premier, absolument parlant. La définition du concept monadique :

$$p \text{ est premier } =_{Df} p \text{ est divisible uniquement par } p \text{ et par } 1,$$

où

$$p = (p,1) = (1,p)$$

est, en effet, caractéristique des définitions par extension de concept.

Quoi qu'il en soit, l'algorithme a pour conséquence directe la *proposition de division* [p. ex. Oystein Ore 1988, 44] : si un nombre c relativement premier par rapport à a divise un produit ab, il divise b. La proposition c) résulte *a fortiori* de cette conséquence ; car, si c est un nombre premier et ne divise pas a, il est premier par rapport à a.

I

1. Le tableau de Nicomaque s'obtient, à partir de l'énumération de l'ensemble des nombres entiers strictement positifs (ligne 1), en multipliant sucessivement cet ensemble par chacun de ses éléments pris dans l'ordre : 2 (ligne 2), 3 (ligne 3), ... n (ligne n). Tous les éléments du tableau sont symétriques par rapport à la diagonale, occupée par les carrés. Ils sont représentés par deux facteurs i, j, i renvoyant à la ligne, j à la colonne ; (3,4) est l'élément situé à l'intersection de la troisième ligne et de la quatrième colonne. Il est distinct de l'élément (4,3), et lui est égal[45] : (i,j) = i.j = (j,i). Tout élément

[45] Preuve de la commutativité de la multiplication qui aura pu précéder Euclide :

qui ne figure que dans la première ligne ou la première colonne est premier : il admet, en effet, comme décomposition unique (1,q) = (q,1). Tout nombre qui figure aussi à l'intérieur du tableau (i et j > 1), est, en revanche, composé. De plus, les nombres composés se répartissent en deux classes selon que j est égal à i ou à une puissance de i, ou que j possède un facteur irréductible à i (par symétrie on échange les rôles respectifs de j et de i).

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
L_1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)	(1,10)
L_2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)	(2,9)	(2,10)
L_3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)	(3,10)
L_4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)	(4,10)
L_5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,10)
L_6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,10)
L_7	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,10)
L_8	(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(8,10)
L_9	(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)	(9,10)
L_{10}	(10,1)	(10,2)	(10,3)	(10,4)	(10,5)	(10,6)	(10,7)	(10,8)	(10,9)	(10,10)

Tableau de Nicomaque
(*Introduction à l'arithmétique*, L. I, c. XIX [9])

Appliquons ces distinctions aux éléments de la ligne L_2. Le premier d'entre eux, (2,1), est premier. On tranche ainsi la question de savoir s'il faut

---

1^o) la commutativité des identiques est évidente par indiscernabilité des facteurs des carrés sur la diagonale ; 2^o) la commutativité de facteurs non identiques résulte de la symétrie par rapport à la diagonale : i.j = j.i ≡ (i,j) = (j,i).

compter le premier pair parmi les premiers. Il le faut puisqu'il est linéaire et euthymétrique [Heath 1956, II, 285] : il n'appartient qu'à la première colonne. Le second élément de la ligne admet la seule décomposition propre : (2,2) = 2^2, si l'on convient de noter par l'exposant le nombre de fois que le nombre qu'il affecte est multiplié par lui-même. Il appartient à la première classe des composés ($j = i$ ou $j = i^n$, $n > 1$), classe des puissances de 2 qu'on notera Γ. Le troisième élément (2,3) appartient à la seconde classe des composés ($j \neq i$ et $j \neq i^n$, $n > 1$), classe des nombres de forme (2,q), $q \neq 2^n$, notée Θ.

Démontrons que tout nombre au sens strict — (1,1) étant donc exclu — est ou bien impair, ou bien égal à 2, ou bien divisible par une puissance de 2 sans l'être par un impair, ou bien composé de ces deux facteurs :

$$(n)\ n = (2m+1) \vee n = 2 \vee n = 2^g \vee n = 2^k.(2m+1),$$
$$m, k \geq 1,\ g \geq 2,$$

qu'on lira : tous les nombres sont ou indivisibles par 2, ou divisibles une ou plusieurs fois par 2, et dans les deux cas seulement par 2, ou il le sont une ou plusieurs fois par 2 et aussi par un impair.

1. Tout nombre est impair ou pair et il figure dans L_1 par construction.

2. Dans L_1, tous les nombres d'indice impair sont impairs. Avec l'«exception» de (1,1), ils admettent la décomposition $n = (1,(2m+1)) = 2m+1$. Premier membre de la disjonction.

3. Tout nombre est premier ou composé.

4. S'il est pair, n figure dans L_2, complément des impairs dans L_1. Il admet la décomposition (2, q), q 1. Seul le premier élément de L_2 est premier : $n = (2,1) = 2$. Deuxième membre de la disjonction.

5. Tous les éléments de L_2 autres que (2,1) sont composés :

$n = (2, q), q>1.$ [3,4]

Ils se répartissent en deux classes exhaustives et exclusives, suivant que q est identique à 2 ou à une puissance de 2, ou qu'il ne l'est pas.

[tiers exclu]

6. $q = 2^h$ [h=1,2,3, ...] : $n = (2, 2^h) = 2^k$ [k=h+1]. Troisième membre de la disjonction.

7. $n = (2, q)$ avec $q \neq 1$ et $q \neq 2^h$.

a. q est impair, alors $n = (2, 2m+1) = 2^k. (2m+1)$. Quatrième membre de la disjonction : $k = 1$

b. q est pair, alors $n = (2.2p) = 2^2.p$.

Si p est impair, $p = 2m+1$: $n = 2^2.(2m+1)$.

Si p est pair, on recommence à diviser par 2. Après un nombre fini de dichotomies, soit k-2, il vient :

$$n = 2^2.2^{k-2}.(2m+1) = (2^k, (2m+1)) = 2^k. (2m+1)$$

(analogue d'Euclide VII 32). Les complications de la démonstration proviennent de l'absence de zéro. Les trois premiers membres de la disjonction se réduisent au quatrième avec k ou $m = 0$.

À la notation près, tout nombre n se décompose donc dans le produit général :

$$n = 2^k . (2m+1),$$

le premier ou le second facteur se réduisant, le cas échéant, à l'unité. Cette décomposition est unique. Sinon il faudrait qu'on eût également :

$$n = 2^h.(2m+1) \text{ ou } n = 2^k.(2r+1) \text{ ou } n = 2^h.(2r+1),$$

$$\text{avec } h \neq k,\ r \neq m.$$

Dans le premier cas, on divise le produit général et le premier membre par la puissance ayant le plus petit exposant, soit h. Il reste, après division qu'un pair est égal à un impair. Dans le second cas, la division du produit général et du second membre par 2^k donne : $2m+1 = 2r+1$, $m = r$ ce qui contredit $r \neq m$. Dans le troisième cas, la division par h reconduit à l'égalité entre un pair et un impair.

La démonstration de l'unicité de k et de m dans la décomposition de n en un facteur pair 2^k et un facteur impair $(2m+1)$ ne suppose pas le théorème de la décomposition unique d'un nombre en facteurs premiers.

2. Platon construit la dyade, c'est-à-dire l'ensemble des termes de la progression géométrique de raison 2, par une suite compliquée d'opérations de complémentation, de division et de collection, qui aparaissent sur le schéma suivant[46] :

$L_2 = \alpha_1 \qquad C(\alpha_1, N) = 1\beta_1$

$L_4 = \alpha_2 \qquad C(\alpha_2, \alpha_1) = 2\beta_1 = \beta_2$

$L_8 = \alpha_3 \qquad C(\alpha_3, \alpha_2) = 2^2\beta_1 = \beta_3$

$L_2{}^n = \alpha_n \qquad C(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = 2^{n-1}\beta_1 = \beta_n$

Dyade = $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{n-1}, 2^n, \ldots)$.

Sur le tableau de Nicomaque, on trouve, sur la ligne L_2, 2 comme premier élément et Γ, c'est-à-dire l'ensemble des nombres 2^g avec g 2 à l'intersection avec les colonnes d'indice 2^g. L'ensemble Θ n'est décidément pas platonicien, puisqu'il n'est pas ordonné[47] suivant les puissances croissantes de 2. On induit cet ordre en distribuant les éléments de Θ sur les lignes impaires, où ils apparaîtront avec les exposants voulus. Ainsi (2,3), (2,5), (2,7), (2,9) seront respectivement envoyés sur la deuxième colonne en (3,2), (5,2), (7,2) et (9,2) : $C_2 = \beta_2$. De même, (2,6) et (2,10) prendront place sur la colonne C_4, respectivement en (3,4) et (5,4) : $C_4 = \beta_3$. Généralement : $C_2{}^n = \beta_{n+1}$. On rétablit de la sorte une correspondance bi-univoque entre l'interprétation du tableau (platonicien) de Nicomaque et l'arbre dichotomique de Platon.

Nicomaque a pris soin d'établir lui-même cette correspondance dans le contexte de sa classification des nombres (*Intr. Arithm.*, L. I, chap. X [8]). Il construit l'ensemble Θ des produits de 2 par un impair et l'ordonne en faisant le produit de l'ensemble des nombres impairs, β, et de l'ensemble Γ (nombres pairement pairs).

		Longueur			
	2	4	8	16	32...
	3	12	24	48	96
Largeur	5	20	40	80	160
	7	28	56	112	224
	9	36	72	144	288

46 Lire $C(\alpha_1,N)$ = complément de α_1 dans N.

47 Ainsi: $(2,6) = 2^2.3$ précède $(2,7) = 2^1.7$.

Sur les colonnes successives, chaque élément de Γ vient à son tour multiplier les éléments de β : la première colonne correspond au β_3 platonicien, la seconde au β_4, ... la n-ième au β_{n+2}-ième. Manquent β_1 et β_2, puisque les deux premiers éléments de la dyade font défaut à Γ. Cette décomposition nous fait cependant avancer d'un pas décisif. L'ancienne ligne L_2 est à présent réduite à 2 et à l'ensemble de ses puissances, Γ. Soit le nombre : $144 = (2,72) = 16.9 = (2,2^2).9 = (2,2)^2.(9,1)$. Il est décomposé en deux facteurs dont le premier, pairement pair, seul appartient à L_2, et le second appartient à l'ancienne ligne impaire, L_9. D'une part L_2 est réduite aux nombres pairement pairs. De l'autre, le facteur impair, envoyé sur la colonne des impairs, pourra, le cas échéant, être décomposé à son tour en facteurs toujours impairs sur la coordonnée de la colonne des impairs et l'analyse cesse d'être limitée, par principe, à deux facteurs seulement.

II

La dichotomie est une division incomplète, puisqu'elle ne dissocie pas les facteurs impairs du facteur impair. Platon appelle explicitement l'extension de cette analyse (*Politique*, 287c). Ne distingue-t-il pas trois ou cinq formes de gouvernement dans la *République*, cinq ou six degrés du bien dans la hiérarchie du *Philèbe* ? L'un des rares textes aristotéliciens qui évoque le couple premier / composé, absent de la table pythagoricienne, le refère à Platon en le rattachant à la dyade. Platon, dit Aristote (*Métaph.* A 6, 987b33-988a1) croyait «que les nombres, *sauf ceux qui sont premiers*, pouvaient être naturellement engendrés à partir de la dyade comme à partir d'un matériau plastique». En disant que la dyade produit tous les nombres sauf les premiers, on ne peut se référer à la dichotomie du *Sophiste* et *Politique*, puisque tous les nombres premiers y sont contenus : 2 comme base de la dyade, et les autres au fur à mesure de leur occurrence dans l'ensemble des impairs β. La glose aristotélicienne ne fait sens que pour qui décompose le bloc des impairs, oppose, dans leur ensemble, les premiers et les composés, etse pose la question de la décomposition complète d'un nombre en facteurs irréductibles.

Demander de continuer la décomposition $2^k.(2m+1)$ en sorte de dissocier les facteurs premiers qui composent éventuellement $(2m+1)$, tout en conservant à la dyade son rôle de paradigme, c'est suggérer que les impairs premiers successifs prennent la place de 2, le facteur opaque $(2m+1)$ devant être, par là, ou réduit à un facteur premier, ou brisé en un produit de facteurs premiers. La ligne L_2 étant déjà réduite à 2 et à Γ, examinons l'effet de l'analyse suggérée sur les éléments de L_3, ligne maintenue puisque 3 est premier. On sait que $(2, q) = (2, 2^n).(r, 1)$. De même

$$(3,1), (3,3) \text{ et } (3,9) = (3,3^2)$$

constituent le nombre premier et les 2 premiers éléments de l'ensemble des puissances, Γ'. Ils appartiennent à L_3. Ils lui appartiennent seuls. En effet, en utilisant la commutativité, les nombres

$$(3,2) = (2,1).(3,1),\ \ (3,4) = (2,2).(3,1),\ \ (3,6) = (2,1).(3,3),$$
$$(3,8) = (2,2^2).(3,1),$$

sont composés de deux facteurs appartenant respectivement à L_2 et L_3. De même, les nombres :

$$(3,5) = (3,1).(5,1),\ \ (3,7) = (3,1).(7,1)$$

sont composés de deux facteurs appartenant respectivement, le premier à L_3, le second à L_5 et à L_7. Enfin, le nombre :

$$(3,10) = (3,1).(10,1) = (3,1).((2,1).(5,1)) = (2,1).(3,1).(5,1)$$

est le produit de trois facteurs appartenant respectivement à L_2, L_3 et L_5. Ainsi, les nombres appartenant à Θ' sont évacués de la ligne L_3 et analysés en produits de facteurs, dont, pour les nombres examinés 30, un seul appartient à L_3, (3,1), et dont les autres sont tous des nombres premiers appartenant à C_1.

Ayant en vue cette analogie platonicienne, on va démontrer a) et b), qui conduiront respectivement à ne retenir que les lignes L_n d'indice premier et à isoler, dans ces lignes, les ensembles de puissances de premiers, analogues à Γ. L'addition de c) permettra ensuite de ne retenir dans le tableau de Nicomaque que ces éléments (tableau réduit). C'est alors qu'on sera en mesure d'exposer la classification contestée des nombres par Nicomaque et de l'interpréter au moyen de l'analogie platonicienne.

1. a) Tout nombre est premier ou est mesuré par quelque nombre premier.

1. Le tableau de Nicomaque contient, par construction ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), tous les nombres.

2. Un nombre admet, dans ce tableau, une unique représentation propre (on choisira (2,1) = 2 sur C_1, en comptant le symétrique (1,2) comme impropre) ou bien une ou plusieurs représentations propres en dehors de celle-ci.

3. Tout nombre est premier ou composé. [1,2]

4. S'il est premier, il est trivialement mesuré par un premier : 7=(7,1).

5. S'il est composé, il admet au moins les représentations $n = (n,1) = (q,r)$, $r > 1$; sinon n serait premier.

— Si q (ou r, par symétrie) est premier, n est mesuré par un premier : $20 = (5,4) = 5.4$ ou $(4,5) = 4.5. = 5.4$

— Sinon, q, étant composé, est lui-même produit de deux facteurs : $q = (s,t)$. Deux cas se présentent encore.

—Dans le premier cas, s=t : $q = (s,s) = s^2$.

> a) Si s est premier, $n = (s^2,r) = (s, s).(1,r) \in L_s$ et n est mesuré par s : $36 = (9,4) = (3,3).(1,4) \in L_3$.
>
> b) Si s n'est pas premier, il se décompose en produit de facteurs distincts dont les plus petits possibles sont premiers ; sinon, $q = (u^{k_u}.v^{k_v}... w^{k_w})^2$ et, par exemple $u = y^{k_y}$, $k_y \;\; 2$ ou $u = (y...z)$, avec, dans les deux cas, $y < u$: $n = 129600 = (8,45)^2$ n'est pas mesuré par un premier, mais $8=2^3$ et $(2^3,45)^2 = 2^6.45^2 = (2,2^5).(1,45)^2 \in L_2$.

— Dans le second cas, $s \neq t$: $n = (q,r) = (s,t).(1,r)$. Parmi toutes les décompositions de q, il en existe une, (u,v) dont le facteur u est le plus petit possible et telle que $(u,v) = (s,t)$; u est alors premier ; sinon, on aurait $q = (u,v)$, $u < v$ et $u = (y,z)$ avec $y \neq 1$ et $z \neq 1$ et au moins l'un des deux $< u$: $840 = (210,4)$ et $210 = (14,15)$ et $14 < 15$, mais $14 = (2,7)$; $840 = (2, 7.15.4) = (2^2,7.15) = (2,2).(1,105) \in L_2$.

— Dans les deux cas, n est encore mesuré par un premier.

La preuve fait appel au plus petit facteur possible, exemple de régression à l'infini impossible puisque tout nombre est fini (preuve caractéristique de l'arithmétique).

b) Dans le tableau de Nicomaque, considérons une ligne quelconque d'indice premier, L_p. On y distingue (a) le nombre premier p, (b) l'ensemble Γ_p des puissances de p, p^r, $r > 1$, (c) l'ensemble restant Θ_p des multiples de p qui ne divisent pas les puissances de p. Donc le plus grand nombre considéré de Γ_p, soit p^m, sera divisible exclusivement par les nombres p^r avec $r < m$.

Puisqu'en vertu de a) tout nombre se décompose en un produit de facteurs appartenant à des lignes d'indice premier, on peut raturer, dans le tableau, toutes les lignes d'indice composé. On ne retient donc que les lignes correspondant aux nombres premiers, soit, dans le tableau, outre L_2 : L_3, L_5 et L_7. Anticipation d'Eratosthène : on barre les autres lignes. C'est que L_8 est partie de L_4 qui est partie de L_2, L_9 est partie de L_3, L_6 partie de L_2 et partie de L_3.

2. Pour donner une idée respective des rôles de a), b) et c) dans la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, toujours en vue de préciser l'analogie platonicienne, voyons cette décomposition à l'œuvre sur un exemple construit à dessein. Soit n = 13230 = (13230,1). On trouverait cette décomposition en tête de la 13230-ième ligne du tableau de Nicomaque. L'indice de ligne est composé. On rature la ligne. Sans se soucier d'élégance et d'économie, on trouvera le premier diviseur premier de n en essayant les premiers successifs :

$$13230 = (2{,}6615), \qquad \text{a)}$$

décomposition parfaitement recevable puisqu'elle envoie n sur la ligne

L_2 et que 2 est premier, mais d'évidence incomplète. On continue mécaniquement la décomposition :

$$\begin{aligned} 13230 &= (2{,}1).(3{,}2205) && \text{a)}\\ &= (2{,}1).(3{,}1).(5{,}144) && \text{a)}\\ &= (2{,}1).(3{,}1).(5{,}1).(7{,}63). && \text{a)} \end{aligned}$$

Jusqu'ici, la décomposition a progressé en augmentant, à chaque pas, d'une unité le nombre des facteurs premiers distincts et donc le nombre de lignes du tableau raturé auxquelles ces facteurs appartiennent. Mais poursuivons.

$$\begin{aligned} 13230 &= (2{,}1).(3{,}1).(5{,}1).(7{,}1).(3{,}21) && \text{a)}\\ &= (2{,}1).(\underline{3{,}1}).(5{,}1).(7{,}1).(\underline{3{,}1}).(3{,}7) && \text{a)}\\ &= (2{,}1).(3{,}3).(5{,}1).(7{,}1).(3{,}7) && \text{b)}\\ &= (2{,}1).(\underline{3{,}3}).(5{,}1).(\underline{7{,}1}).\ (\underline{3{,}1}).(\underline{7{,}1}) && \text{a)}\\ &= (2{,}1).(3{,}3^2).(5{,}1).(7{,}7). && \text{b)} \end{aligned}$$

La répétition de a) décompose les facteurs mesurés par un nombre premier en un produit de facteurs premiers de longueur croissante, mais assignée. La répétition de b) n'augmente pas la longueur de la factorisation, mais rassemble tous les facteurs d'une même ligne sur un facteur puissance unique. En vertu de c) les facteurs finalement retenus — les quatre facteurs de n = 13230 — sont relativement premiers, en sorte que l'expression de n est irréductible : la décomposition est complète. De même que nous n'avons retenu que les lignes d'indice premier, nous pouvons, dans chaque ligne, ne retenir que les puissances des nombres premiers disposées selon l'ordre croissant. Reste alors du tableau de Nicomaque le tableau réduit, chaque nombre étant analysé selon les deux «coordonnées» premier / puissance :

	C_1	C_2	C_3	...	C_n
L_2	(2,1)	$(2^2,1)$	$(2^3,1)$		$(2^{n,1})$
L_3	(3,1)	$(3^2,1)$	$(3^3,1)$		$(3^n,1)$
L_5	(5,1)	$(5^2,1)$	$(5^3,1)$		$(5^n,1)$
...					
L_n	(q,1)	$(q^2,1)$	$(q^3,1)$		$q^n,1)$

Tableau réduit

La décomposition en facteurs premiers affirme que le tableau réduit contient tout ce que contient le tableau de Nicomaque.

3. En se donnant la dyade, la tripartition platonicienne de la ligne L_2 dans le tableau de Nicomaque fournissait l'image de l'arbre dichotomique platonicien, en faisant l'économie des formations ensemblistes compliquées qui sont propres à ce dernier[48]. Le tableau réduit conserve cet avantage. Mais imaginons un platonicien prêt à l'interpréter en termes d'idées-ensembles. «Quand on répète a), dira-t-il, et qu'on énumère tous les facteurs premiers d'un nombre, on forme par multiplication un ensemble analogue au nombre premier individuel platonicien, 2. Quant on répète b), au lieu d'augmenter le nombre des facteurs, on assigne, pour chacun d'eux, sa puissance, en effectuant une suite

[48] L'arbre dichotomique pour la démonstration d'irrationalité de montre $\sqrt{2}$ que :
$A = \{4,36,100, ...\} \cup \{16,144,225,...\cdot, \cup \{64,576, ...) \cup ... = \bigcup_{i=1}^{i=\infty} B_i$, définition ensembliste infinie et formellement imprédicative puisque B_1 est défini au moyen de A.

finie de sélections d'un élément unique dans chaque ensemble infini bien ordonné des puissances de premiers, la suite finie — tout nombre est fini — d'ensembles Γ_{p_1}, Γ_{p_2}, ... Γ_{p_i} formant, cette fois, l'analogue de Γ. Ce faisant, on épuise progressivement l'ensemble constitué par la suite des ensembles infinis Θ_{p_1}, Θ_{p_2}, ..., Θ_{p_i}, suite analogue à l'ensemble Θ».

Il est temps de passer à la classification des nombres par Nicomaque (*Introd. arithm.*, L. I, c. XI [1], [2], c. XII [2] et c. XIII [1]). Nicomaque s'inspire visiblement de Platon en appliquant aux impairs une division analogue à celle de L_2 — cette extension expliquant peut-être la querelle terminologique sur le caractère premier de 2 —. La division est «entre (a) les premiers et non composés ..., (b) les secondaires et composés dont les facteurs doivent être des nombres non seulement impairs, mais premiers, (c) ceux qui sont 'secondaires et composés en eux-mêmes, mais premiers et incomposés relativement à un autre nombre', par exemple 9 et 25 qui sont à la fois secondaires et composés, mais sans commune mesure excepté 1» [Heath 1956, II, 287]. Ces trois classes sont respectivement, p_n désignant un nombre premier : (a) l'ensemble des p_n excepté $p_1 = 2$, (b) l'ensemble des produits $p_i.p_j$ ..., (c) l'ensembles des puissances $(p_i,p_i^{k-1}) = p_i^k$, $(p_j^{l-1}) = p_j^l$, ..., avec $i \neq j \neq$ .., $k, l > 1$.

On voit aisément, sur les exemples donnés par Nicomaque :

A = (3, 5, 7, 11, 13, ...)

B = (3.3, 3.5, 3.7, 3.11, 7.5, 3.13, ...)

C = (3.3, 5.5),

l'inanité de cette classification, relevée par tous les interprètes ; en particulier C est partie de B. Mais au lieu de la rejeter simplement en denonçant «l'anxiété perverse du désir de symétrie» manifesté par Nicomaque selon Heath, tentons de restaurer l'analyse platonicienne, qu'aura fait perdre de vue le passage immédiat de la tripartition platonicienne :

2, β = impairs, Γ = puissance de 2,

à la tripartition des classes :

(nombres premiers), (produits de premiers), (puissances de premiers distincts).

Introduisons une correction unique dans les exemples de Nicomaque, en supprimant en B l'élément (3,3) : B devra contenir tous les produits deux à deux des éléments *distincts* de A, deux facteurs d'un élément de B devant être distincts comme le sont deux éléments-facteurs dans C. Le nombre des facteurs n'intervenant pas dans la classification, on comptera également dans B les produits de plus de deux éléments de A, toujours à condition qu'ils soient distincts les uns des autres. Les éléments de C ont pour propriété, relève Nicomaque, d'être relativement premiers. Comme le note un commentateur[49], on pourra considérer non seulement des carrés, mais des puissances quelconques de premiers, et on pourra prendre ces puissances dans tous les éléments de C. On voit alors que $A = C_1$ (dans le tableau réduit), B est l'ensemble des produits de facteurs premiers distincts de A qui mesurent la longueur de la décomposition, C est l'ensemble $(\Gamma_{p_2}, \Gamma_{p_3}, ..., \Gamma_{p_i}, ...)$ des ensembles de puissances, qui couvre le tableau réduit amputé de la première colonne. Le caractère relativement premier des éléments des différentes lignes, destiné à assurer l'éliminabilité de l'ensemble $(\Theta_{p_2}, \Theta_{p_3}, ..., \Theta_{p_i}, ...)$ évoque irrésistiblement le tableau réduit, auquel manque L_2 par suite d'une convention terminologique propre à Nicomaque.

[49] Asclepius of Tralles, *Commentary to Nichomachus' Introduction to Arithmetic*, ed. by L. Tarán, Transactions of the American Philosophical Society, Philadelphia 1969, 41-42.

Bibliographie

Borel, Émile

1949 *Éléments de la théorie des ensembles*, Paris : Albin Michel.

1950[4] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier-Villars, 1898.

Bourbaki,

1984 Éléments d'Histoire des Mathématiques, Paris : Masson.

Burnett, J.

1911 *Plato's Phaedo*, Oxford : Clarendon Press [repr. 1939]

Diels, H. & Kranz, W.

1960 *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin : Weidmannsche Verlagsbuchhandlung, 9. Aufl.

Dieudonné, J.

1987 *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourdhui*, Paris : Hachette.

Fowler, D. H.

1987 *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford : Clarendon Press.

Heath, Th. L.

1956 *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New-York : Dover, 2. ed.

Heller, S.

1965 Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, hg. von O. Becker, Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Itard, J.

1984 *Essais d'Histoire des mathématiques*, réunis et introduits par R. Rashed, Paris : Blanchard.

Michel, P.-H.

1950 *De Pythagore à Euclide*, Paris : Les Belles Lettres.

Oystein, O.

1988 *Number Theory and its History*, New-York : Dover, 1948.

Robin, L.

1908 *La théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote*, Paris : Alcan.

Ross, W. D.

1924 *Aristotle's Metaphysics.* A Revised Text with Introduction and Commentary, Oxford : Clarendon Press [repr. 1948].

1936 *Aristotle's Physics.* A Revised Text with Introduction and Commentary, Oxford : Clarendon Press [repr. 1970].

Tannery, Paul

1915 Mémoires scientifiques III, Sciences exactes dans l'Antiquité, Teulin, Paris.

Taylor, A. E.

1960 *Plato*, London : Methuen, 2. ed.

Thomas, Ivor

1951 *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, Cambridge : Harvard Univ. Press – London : Heinemann.

Van der Waerden, B.L.

1966a *Erwachende Wissenschaft*, Basel–Stuttgart : Birckhäuser, 2. Aufl.

1966b *Die Pythagoreer*, Zürich-München : Artemis.

Vuillemin, J.

1962 *Introduction à la philosophie de l'algèbre*, I, Paris : PUF.

1990 Mathématiques platoniciennes, *Annuaire du Collège de France*, 1989-1990, Paris, 417-437.

Zeuthen, H. Gæ.

1886 *Die Lehre von den Kegelschnitten im Althertum.*

On a donné pour les auteurs anciens les références coutumières.