PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

KLAUS VOLKERT

Wie und warum wurde Poincaré zum Topologen?

Philosophia Scientiæ, tome 2, n° 3 (1997), p. 73-102

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_3_73_0>

Wie und warum wurde Poincaré zum Topologen?

Klaus Volkert
Pädagogische Hochschule Heidelberg

Philosophia Scientiae, 2 (3), 1997, 73-102

Zusammenfassung. Im nachfolgenden Text werden einige Wurzeln der topologischen Arbeiten von Henri Poincaré in seinen vorangehenden Arbeiten, insbesondere über automorphe Funktionen und Differentialgleichungen, analysiert. Weiterhin wird versucht, den Stil des mathematischen Denkens Poincaré's zu charakterisieren.

Abstract. In the following paper we discuss some sources of the topological work of Henri Poincaré in his early research, especially on automorphic functions and on differential equations. We try to characterize Poincaré's style of doing mathematics.

Résumé. Dans le texte qui suit nous allons étudier quelques racines des travaux topologiques d'Henri poincaré dans ses recherches antérieures, en particulier sur les fonctions automorphes et sur les équations différentielles. De plus nous caractériserons le style de la pensée mathématique de Poincaré.

Ziel der nachstehenden Ausführungen[1] ist es, die folgende Aussage Poincaré's aus seiner 1901 geschriebenen, aber erst 1921 gedruckten *Analyse de ses travaux scientifiques* etwas aufzuhellen:

> Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Situs, J'avais besoin de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de 2 variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice.
> Enfin j'entrevoyais dans l'Analysis Situs un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes dicrèts ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné. [Poincaré 1921, 101][2]

Im ersten Teil werde ich einige der Punkte, welche Poincaré hier anspricht, untersuchen — ausgehend von Poncaré's Arbeiten zur

---

1 Überarbeitete Fassung eines Vortrags beim Poincaré-Tag Heidelberg, den 29.9.95. Eine französische Version trug ich im Februar 1996 im Seminaire d'Histoire de la Géométrie in Paris sowie im Mai 1996 im Kolloquium der Fakultät für Mathematik der Universität Louvain-la-Neuve vor.

2 »Was mich anbelangt, so haben mich alle Wege, auf denen ich mich nach und nach engagiert habe, zur Analysis Situs geführt. Ich brauchte diese Wissenschaft, um meine Forschungen über die von Differentialgleichungen höherer Ordnung definierten Kurven, insbesondere jene, welche aus dem Dreikörperproblem resultieren, weiterverfolgen zu können. Ich brauchte sie zum Studium der nicht-einwertigen Funktionen zweier Veränderlicher, der Residuen von Mehrfachintegralen sowie bei der Anwendung dieser Ergebnisse auf die Entwicklung der Störfunktion.

Theorie der Differentialgleichungen. Im zweiten Teil werde ich die Frage stellen, was Poincaré überhaupt unter Topologie verstanden hat und wie dieses Verständnis mit demjenigen seiner Zeitgenossen zusammenhängt. Zu diesem Zwecke werden wir auch auf die Entwicklung der Terminologie der Topologie, insbesondere bei Poincaré selbst, einzugehen haben. Schließlich möchte ich im dritten Teil zusammenfassend die These untermauern, daß Poincaré's Hinwendung zur Topologie veranlaßt wurde durch einen ebenso tiefgreifenden wie charakteristischen Zug seines mathematischen Denkens schlechthin.

1. Wege zur Topologie

Wie Poincaré mehrfach betonte, führten ihn verschiedene Wege zur Topologie, von denen wir hier insgesamt vier nachvollziehen wollen: die heute so genannte, von Poincaré begründete qualitative Theorie der Differentialgleichungen, die Theorie der automorphen Funktionen und einige Entwicklungen im Bereich der Doppelintegrale und der Funktionen zweier Variabler.

1.1. Die qualitative Theorie der Differentialgleichungen

Es ist wohlbekannt, daß Poincaré an der Ecole polytechnique (1873-1875) und danach an der Ecole des mines studiert hat, die er im Frühjahr 1879 als Ingenieur verließ. Die Mathematik an der Ecole polytechnique wurde zu jener Zeit von Charles Hermite (1822-1901) beherrscht, der — wie es C. Jordan in seinem Nachruf auf Hermite vor der Akademie formulierte — die etwas zurückgebliebene Mathematikausbildung dieser Eliteschule wieder auf den neuesten Stand gebracht hatte («A cette époque, l'enseignement supérieur était, il faut bien le dire, un peu arrière. ... M. Hermite les [les nouvelles recherches de Gauß, Abel, Jacobi, Cauchy] jeta hardiment dans le domaine public» [Jordan IV, 93])[3].

Hermite war ein durch und durch klassischer Mathematiker, der ganz in der analytischen Tradition seines Heimatlandes stand. Er arbeitete in vielen Gebieten, u.a. in der Funktionentheorie (insbesondere über elliptische Funktionen), in der Theorie der

Weiter vermutete ich in der Analysis situs ein Hilfsmittel, um ein wichtiges Problem aus der Gruppentheorie anzugehen, nämlich die Ermittlung der diskreten oder der endlichen Untergruppen einer vorgegebenen kontinuierlichen Gruppe." [Poincaré 1921, 101]

3 „Zu jener Zeit war der Hochschulunterricht, wie man zugeben muß, ein wenig zurückgeblieben ... M. Hermite brachte sie [die neuen Entdeckungen von Gauß, Abel, Jacobi, Cauchy] beherzt in die Öffentlichkeit." [Jordan IV, 93]

Differentialgleichungen, in der Theorie der Gleichungen und in der Theorie der Formen. 1873 gelang ihm sein vielleicht größter wissenschaftlicher Erfolg, der Nachweis für die Transzendenz von e. Einige der ersten (kleineren) Arbeiten Poincaré's verraten schon in ihrem Titel Hermiteschen Einfluß: *Sur quelques propriétés des formes quadratiques* (1878), *Sur les formes quadratiques* (1879), *Sur les formes cubiques ternaires* (1880), *Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire* (1880). Auch Poincaré's berühmte Dissertation *Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles* [=Poincaré I, IL-CXXIX], mit der er am 1.8.1879 mit *trois boules blanches* zum Doktor ès Sciences Mathématiques promovierte, steht in der genannten Tradition, knüpft sie doch an ein Problem an, das Briot und Bouquet bereits studiert hatten. Jedoch:

> Notons cependant que, sous l'influence du maître qui gouverna la génération précédente, j'ai nommé Hermite, le débutant [Poincaré] ne craignait pas de suivre presque au même moment une voie pour ainsi dire opposée à la première, celle de l'Arithmetique. [Hadamard 1921, 206][4]

Gemeint ist hier die qualitative Theorie der Differentialgleichungen, welche Poincaré im Anschluß an seine Dissertation in seiner Artikelserie *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles* [4 Teile; 1881-86 = Poincaré I, 3-84 [Teile 1 und 2]; 167-244; 151-217] ausführlich entwickelte. Eine erste Note zu diesem Thema *Note sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (=Poincaré I, XXXVI-XLVIII hatte Poincaré übrigens schon 1878 im Journal de l'Ecole polytechnique veröffentlicht; dies war seine erste gedruckte Arbeit überhaupt (es sollten noch gut 400 folgen). Im dritten Teil der Artikelserie kommt Poincaré erstmals auf die Himmelsmechanik, insbesondere auf das Dreikörperproblem, zu sprechen, das er dann in seiner Preisarbeit für den Preis des schwedischen Königs Oskar (1886) und später in seinem Hauptwerk *Les nouvelles méthodes de la méchanique céleste* [3 Bände; 1892-1899] mit Hilfe seiner neuen Theorie behandelte. Wir haben also hier durchaus einen roten Faden vor uns, der sich durch Poincaré's Frühwerk hindurchzieht[5].

---

4 „Bemerken wir jedoch, daß der Anfänger [Poincaré] trotz des Einflusses, den der Meister der vorangegangenen Generation — ich habe soeben Hermite erwähnt — ausübte, nicht zögerte, fast im selben Augenblick einen Weg zu verfolgen, der dem ersteren, dem der Arithmetik, gewissermaßen entgegengesetzt war.“ [Hadamard 1921, 206]

5 Darboux bemerkt zu Poincaré's Hinwendung zur Himmelmechanik:
«Pour le [Poincaré] faire arriver plus vite, pour lui ménager une place dans la Section d'Astronomie, on lui signalait les applications que les théories par lui

Ausgangspunkt für Poincaré ist eine Differentialgleichung der Form

$$dx / X(x,y) = dy / Y(x,y)$$

[heute meist geschrieben als $y'(x) = Y(x,y(x)) / X(x,y(x))$], wobei X und Y Polynome in den beiden Variablen x und y sein sollen. Betrachtet wird diese auf der Riemannschen Zahlenkugel S^2. Ein konkretes Beispiel für eine solche Gleichung, das Poincaré selbst angibt, ist das folgende:

$$dx / [-y+x(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)]$$
$$= dy / [x+y(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)]$$

Die grundsätzlich neue Idee von Poincaré war es, den globalen Verlauf der Integralkurven (er sprach von *courbes caractéristiques* oder von *trajectoires*) der vorgegebenen Differentialgleichung zu betrachten, das heißt von Parameterkurven $(x(t), y(t))$ in S^2, welche die Differentialgleichung erfüllen: Es ist also $dx / dt = X(x(t),y(t))$ und $dy / dt = Y(x(t),y(t))$. Im allgemeinen geht durch jeden Punkt der Sphäre genau eine derartige Kurve; nur in den endlich vielen Singularitäten ist dies nicht der Fall. Von diesen gibt es drei wesentliche Arten, die Poincaré *foyers, col* und *noeuds* nennt (im Deutschen spricht man von Strudel-, Sattel- und Knotenpunkten).

Welche Art von Singularität man vor sich hat, kann man mit Hilfe von Zykel untersuchen, die einmal und ohne Doppelpunkte um den fraglichen Punkt herumlaufen. Integriert man über diese, so erhält man den sogenannten Kronecker-Index der fraglichen Singularität (= 1 für Sattelpunkte, = -1 für Strudel- und Knotenpunkte, = 0, falls keine Singularität umschlossen wird) und mit dessen Hilfe schließlich die an den Eulerschen Polyedersatz erinnernde Beziehung $F + N - C = 2$ für die entsprechenden Anzahlen.

---

découvertes pouvaient avoir en Méchanique céléste. Il suivait docilement ces indications, s'occupait du problème des trois corps, des figures des corps céléstes, et trouvait tout naturel de laisser passer devant lui tous les anciens.» [Poincaré II, XXVIII]
Auf-Deutsch:
„Um sein Fortkommen zu beschleunigen und ihm einen Platz in der Sektion für Astronomie zu sichern, wies man ihn auf die Anwendungen hin, welche die von ihm entwickelte Theorie in der Himmelsmechanik finden könnte. Er befolgte bereitwillig diesen Vorschlag und beschäftigte sich mit dem Dreikörperproblem und mit der Gestalt der Himmelskörper, wobei er mit Leichtigkeit alle seine Vorgänger hinter sich ließ.“

Die letztgenannte Formel wird im weiteren Verlauf der Artikelserie 1885 auf geschlossene Flächen vom Geschlecht g erweitert[6]. Man erhält die von Poincaré zurecht als Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel gesehene Beziehung

$$F + N - C = 2 - 2g$$

[vgl. Poincaré I, 121]. Der oben studierte Sonderfall der Sphäre S^2 ist hierin enthalten, da für diese ja $g = 0$ ist.

Halten wir fest: Poincaré's wesentliche und neue Idee war es hier, ein klassisches analytisches Problem zu geometrisieren — anstatt Funktionen lokal zu betrachten, untersuchte er das globale Verhalten von Kurven. Dies führte ihn u.a. zur Betrachtung von geschlossenen Kurven auf geschlossenen Flächen, wobei sich ein überraschender Zusammenhang zwischen dem Geschlecht dieser Fläche, dem Verhalten der Kurven und den charakteristischen Anzahlen der Differentialgleichung ergab. Dabei erkannte Poincaré durchaus den topologischen Charakter seiner Betrachtungen (vgl. unten 2).

Was geschieht beim Übergang zu komplizierteren Differentialgleichungen? Betrachten wir den einfachsten Fall:

$$F(x,y,dy/dx) = 0$$

wobei F ein Polynom in drei Variablen sein soll. Aufgefaßt als Gleichung liefert $F(x,y,z) = 0$ eine algebraische Fläche im R^3. Die Lösungen der Differentialgleichung entsprechen Integralkurven auf eben dieser Fläche. Geht man von Differentialgleichungen höherer Ordnung aus, so wird man allgemeinere Gebilde (wir würden heute sagen der Codimension eins) in höherdimensionalen Räumen zu betrachten haben. Poincaré nennt diese 1886 ***multiplicité:***

---

[6] Den Begriff des topologischen Geschlechts lernte Poincaré übrigens erst von Klein in einem Brief aus dem Jahre 1881 als Antwort auf folgende Anfrage kennen: «Je n'ai pu le savoir, parce que je ne sais pas que c'est que le Geschlecht im Sinne der Analysis situs. ... Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est ce Geschlecht im Sinne der Analysis situs ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel ouvrage je pourrais la trouver ?» [Brief vom 27.6.81; zitiert bei Dugac 1989, 95f].
Auf Deutsch:
„Ich konnte das nicht verstehen, da ich nicht weiß, was das Geschlecht im Sinne der Analysis ist ... Wären Sie deshalb so freundlich, mir zu sagen, was das ist, das Geschlecht im Sinne der Analysis situs, oder, falls die entsprechende Definition zu lang ist, um in einem Brief mitgeteilt zu werden, mir zu sagen, in welchem Werk ich diese finden kann." [Dugac 1989, 95f]

> Soit en effet $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ l'équation d'une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ (Mannigfaltigkeit) qui jouera dans l'espace à n dimensions le même rôle qu'une surface dans l'espace ordinaire. [Poincaré I, 194][7]

In einem Brief an G. Eneström vom 19.11.1883 hatte sich Poincaré im Zusammenhang mit der französischen Übersetzung von Arbeiten G. Cantors dafür ausgesprochen, Mannigfaltigkeit mit *multiplicité* zu übersetzen, Menge mit *ensemble*. Er betonte, daß der letztere Terminus für die von ihm in der Theorie der automorphen Funktionen betrachteten *diskontinuierlichen* Gebilde weniger geeignet sei; er solle vielmehr für diskrete Gebilde reserviert werden; 1884 sprach Poincaré von «des surfaces situées dans l'espace plus de trois dimensions, seront des Mannigfaltigkeiten (multiplicités) à plus de trois dimensions, comme disent les Allemands» [Poincaré II, 330]. 1887 gebraucht Poincaré auch die Ausdrucksweise «hypersurface» [Poincaré III, 443]; in der Analysis-situs-Serie spricht er anfänglich (1892) von «surface fermée» [Poincaré VI, 189] später dann (1895) nur noch von «variété» [Poincaré VI, 196ff][8]. Auch in manch anderer Hinsicht mußte Poincaré bei seinen frühen Arbeiten in Ermangelung einer eingeführten französischen Terminologie auf die deutsche Sprache zurückgreifen. So schreibt er beispielsweise: «Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est régulière» [Poincaré II, 117][9]. Dies mag man als einen Hinweis darauf nehmen, wie neuartig Poincaré's Betrachtungsweise gerade in seinem Vaterland war.

Dabei sind die Fragestellungen Poincaré's aber grundverschieden von jenen, die etwa die klassische algebraische Geometrie schon vor seiner Zeit untersuchte, denn es geht ihm ja um die globalen gestaltlichen Verhältnisse der betrachteten Gebilde, etwa um das Verhalten geschlossener Kurven. Hier betrat Poincaré völliges Neuland[10]; er charakterisierte selbst diesen Schritt in der bereits zitierten *Analyse de ses travaux scientifques* folgendermaßen:

---

7 „Sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Gleichung einer (n-1)fachen Multiplizität (Mannigfaltigkeit), die im n-dimensionalen Raum dieselbe Rolle spielen wird wie eine Fläche im gewöhnlichen Raum.“ [Poincaré I, 194]

8 Vgl. auch die Bemerkung von Scholz 1980, 287 zu diesem Wechsel in der Terminologie.

9 „Um mich eines Ausdrucks zu bedienen, der auf der anderen Seite des Rheins sehr gängig ist, werde ich sagen, daß die Unterteilung der Ebene in unendlich viele Gebiete regulär ist,...“ [Poincaré II, 117].

10 Als Vorläufer Poincaré's in Frankreich kommt C. Jordan in Betracht, der in zwei Arbeiten aus dem Jahre 1866 *Sur la déformation des surfaces* und *Sur les contours tracés sur les surfaces* [Jordan IV, 85-89 bzw. 91-111] im

> Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions...
> Pour aller plus loin, il me fallait créer un instrument déstiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'Analysis Situs. [Poincaré 1921, 64][11]

Poincaré selbst hebt in diesem Zitat die Folgerichtigkeit hervor, mit der ihn seine Untersuchungen über Differentialgleichungen zur Topologie führten. Die zentralen Ideen, welche er in diesem Zusammenhang entwickelte, waren die Untersuchung geschlossener Wege um Singularitäten nebst Kronecker-Index, die Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel sowie der Begriff einer durch eine algebraische Gleichung beschriebenen Mannigfaltigkeit.

1.2. Die Theorie der automorphen Funktionen

Das zweite wichtige Arbeitsgebiet des jungen Poincaré bildeten die autormorphen Funktionen (Poincaré selbst sprach von Fuchsschen und Kleinschen Funktionen).

Hierzu angeregt hatte ihn die Abhandlung *Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coeffizienten entstehen*[12] des Heidelberger Mathematikers Lazarus Fuchs. Hermite stand übrigens mit Fuchs (wie mit vielen anderen Mathematikern seiner Zeit) in Briefwechsel; er trug auch in der Pariser Akademie eine Kurzfassung der Fuchsschen Arbeit vor[13].

---

zweidimensionalen Fall das globale Verhalten von geschlossenen Kurven auf Flächen betrachtet hatte und dabei der Idee der Fundamentalgruppe sehr nahe gekommen war.

11 „Um die vorangehenden Ergebnisse auf Gleichungen einer Ordnung größer als zwei auszudehnen, muß man auf die geometrische Darstellung, die uns so bequem gewesen ist, verzichten zugunsten der Sprache der Hypergeometrie von n Dimensionen... Um weiterzukommen, mußte ich ein Instrumentarium schaffen, welches dasjenige der Geometrie ersetzt, das ich mich im Stich ließ bei dem Versuch, in Räume mit mehr als drei Dimensionen vorzudringen. Das ist der wichtigste Grund, der mich dazu veranlaßt hat, das Studium der Analysis situs in Angriff zu nehmen.“ [Poincaré 1921, 64]

12 *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 89 (1880), 151-169.

13 *Comptes rendus* 90 (1880), 678-680.

Fuchs hatte folgendes erkannt: Ist $d^2y/dx^2 = Qy$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Polynom Q(x,y) und den Lösungen f(x) und g(x), so ist unter bestimmten Voraussetzungen die Umkehrung $x = \varphi(z)$ der Funktion $z = f(x) / g(x)$ eine meromorphe Funktion von z. Durch die Lektüre der Fuchsschen Arbeit angeregt, verfaßte Poincaré noch im gleichen Monat (will sagen Mai 1880) seine Preisabhandlung [= Poincaré I, 336-373] für die Pariser Akademie, die aufgefordert hatte: *Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante*[14]. Poincaré erhielt für seinen Beitrag den zweiten Preis (nach Halphen; vgl. das Gutachten der Kommission in [Poincaré II, 71-74]), für weitere Informationen zu diesem wissenschaftlichen Wettbewerb vergleiche man Gray 1982, die Texte der Preisschrift nebst den Nachträgen Poincaré's findet man in [Gray/Walter 1997]. Es gelang Poincaré zu zeigen, daß die von Fuchs angegebenen Voraussetzungen weder hinreichend noch notwendig sind; die bei weitem wichtigste Erkenntnis war aber eine ganz andere:

> Supposons que le théorème de M. Fuchs soit vrai; c'est-à-dire que x soit fonction monodrome de z; ce sera une fonction de z qui se reproduira quand on changera z en z', où z' = (az+b) / (a'z+b'). [Poincaré I, 346][15]

Es stellt sich genauer heraus, daß a,a',b und b' reelle Zahlen mit ab' - a'b = 1 sein sollen. Beschreibt man die fraglichen Transformationen modern durch Matrizen, so bedeutet die soeben formulierte Bedingung, daß die fraglichen Gruppen von Transformationen (Fuchssche Gruppen bei Poincaré), bezüglich deren die von Poincaré so genannten Fuchschen Funktionen invariant bleiben, Untergruppen von $PSL(2,\mathbb{R})$ sind. Als solche bilden sie die obere Halbebene H der konplexen Ebene $\mathbb{C}$ auf sich ab (oder auch den hierzu konform äquivalenten Einheitskreis in sich). Zusätzlich muß man noch, wie Poincaré ausdrücklich betont, verlangen, daß die Transformationen diskontinuierlich, das heißt ohne Häufungspunkte, auf H operieren. Somit stellt sich ein erstes Problem:

---

[14] *Man möge in einem wichtigen Punkt die Theorie der linearen Differentialgleichungen einer Variablen verbessern.* (Preisaufgabe der Akademie im Jahre 1880)

[15] „Angenommen, der Satz von Herrn Fuchs sei wahr; das heißt, daß x eine monodrome Funktion von z ist. Es handelt sich dann um eine Funktion von z, die sich selbst reproduziert, wenn man von z zu z' übergeht, wobei z' = (az+b) / (cz+d) sein soll mit ad-bc = 1." [Poincaré I, 346]

> Le premier problème à résoudre est donc de trouver tous les groupes discontinus que l'on peut former. [Poincaré 1921, 43][16]

Mit ähnlichen Fragen hatten sich zuvor schon Jordan und Klein in anderen Zusammenhängen beschäftigt, so etwa mit der Bestimmung der endlichen Untergruppen von GL(3,$\boldsymbol{R}$).

Der Schlüssel zu allem weiteren liegt in Poincaré's Einsicht, daß sich PSL(2,$\boldsymbol{R}$) als Gruppe der Isometrien (Kongruenzabbildungen, Bewegungen) der hyperbolischen Ebene auffassen läßt. Von dieser Entdeckung[17], die Gray [Gray 1986, 266] auf die Zeit vom 29. Mai bis zum 12. Juni 1880 datiert, hat Poincaré selbst eine berühmt gewordene Schilderung gegeben (allerdings mehr als 20 Jahre später [nämlich 1908]):

> Damals verließ ich Caen, wo ich zu jener Zeit lebte, um an einer geologischen Exkursion teilzunehmen, die die Ecole des mines organisiert hatte. Die Umstände der Reise ließen mich meine mathematische Arbeit vergessen; in Coutances angekommen, bestiegen wir einen Omnibus, um zu einem Ziel zu fahren, welches mir entfallen ist. In dem Augenblick, in dem ich meinen Fuß auf das Trittbrett setzte, kam mir die durch keinen meiner vorgehenden Gedanken vorbereitete Idee, daß die Transformationen, welche ich bei der Definition der Fuchsschen Funktionen verwendet hatte, identisch seien mit jenen der nichteuklidischen Geometrie. Ich habe das nicht verifiziert, weil ich nicht die Zeit dazu hatte: Kaum hatte ich im Omnibus Platz genommen, nahm ich die zuvor begonnene Unterhaltung wieder auf. Dennoch war ich mir mit einem Schlage vollkommen sicher. Nach Caen zurückgekehrt, verifizierte ich, um mein Gewissen zu beruhigen, mein Ergebnis mit Leichtigkeit. [übersetzt von K.V. nach Gray 1986, 267]

Damit war zweierlei gewonnen: Zum einen stand nun die Theorie der hyperbolischen Geometrie (Poincaré spricht von der (Pseudo-) Geometrie von Lobatschewski, Bolyai war ihm damals anscheinend noch unbekannt) zur Verfügung, zum andern war das analytische Problem geometrisiert, was sich als äußerst nützlich erweisen sollte.

Jede Fuchssche Gruppe führt zu einer Parkettierung der hyperbolischen Ebene (in diesem Zusammenhang von Poincaré meist mit Hilfe des Einheitskreismodelles beschrieben). Diese wiederum ist durch einen Fundamentalbereich (Poincaré spricht von *polygone curvilinéaire fondamental)* festgelegt, welcher vermöge

---

16 „Das erste Problem, das es zu lösen gilt, besteht darin, alle diskontunuierlichen Gruppen zu ermitteln, die man bilden kann." [Poincaré 1921, 43]

17 Vgl. hierzu auch das Buch von J. Gray und S. Walker bezüglich der verschiedenen Zusätze, welche Poincaré seinem Preisessay folgen ließ.

Vervielfältigung durch Symmetrie (wie Klein das treffend nannte [Poincaré II, 25]) die hyperbolische Ebene lückenlos und ohne Überschneidungen überdeckt. Diese *Vervielfältigung durch Symmetrie* heißt nichts anderes als die Transformationen der Fuchsschen Gruppe anwenden (euklidisch-geometrisch sind das vor allem Inversionen an Kreisen).

Solche Fundamentalbereiche sind nun recht einfach anzugeben. Es stellt sich nur die Frage, welche von ihnen tatsächlich zu Fuchsschen Gruppen führen. Poincaré konnte hierfür eine einfache Bedingung angeben [Poincaré II, 135], welche sich auf die Kantenwinkel bestimmter miteinander zu identifizierender Kanten des Polygons bezieht (deren Summe muß ein aliquoter Teil von 2π sein).

Damit hat sich das Problem verändert: Gegeben ein Polygon der hyperbolischen Ebene mit 4p Kanten, das Poincaré's Bedingungen erfüllt. Was kann man über die zugehörigen Fuchsschen Funktionen aussagen? (Deren Existenz ist natürlich noch ein andere Frage, die Poincaré erst mit Hilfe seiner berühmten Thetareihen klären konnte). Es stellte sich heraus, daß sich bei der Beantwortung dieser Frage die Idee bewährt, aus dem Fundamentalbereich vermöge Identifizierungen gemäß den Erzeugenden der Fuchsschen Gruppe eine *geschlossene Fläche* zu machen. Deren Geschlecht p liefert wichtige Aufschlüsse über die Fuchsschen Funktionen. Mit dem Geschlecht aber sind wir wieder bei der Topologie angelangt. Diese stellt das wichtige Resultat bereit:

«On sait, schreibt Poincaré 1882 ganz selbstverständlich und ohne jeglichen weiteren Kommentar, que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante:» [Es folgt Riemanns Definition des Zusammenhangs vermöge der Maximalanzahl nicht zerstückender Zykel, welche Klein Poincaré in dem bereits erwähnten Brief von 1881 mitgeteilt hatte] [Poincaré II, 148][18]. Dem Fall der Flächen hat Poincaré auch späterhin in seinen topologischen Arbeiten kein großes Interesse entgegengebracht; der war wohl in seinen Augen schlichtweg erledigt.

Poincaré hatte die Arbeit von Fuchs Anfang Mai 1880 bekommen, Ende Mai reichte er seine Preisschrift bei der Akademie ein, welche im wesentlichen eine immanente Kritik an Fuchs darstellt. Seine neuartigen Ideen begann Poincaré ab dem 13. Februar 1881 der Akademie in einer Reihe von Noten vorzustellen [=Poincaré III, 1-62]. Deren ausführliche Ausarbeitung blieb zwei langen Artikeln

[18] „Man weiß, daß sich die geschlossenen Flächen gemäß ihres Geschlechtes folgendermaßen klassifizieren lassen: ..." [Poincaré II, 148].

im ersten Jahrgang der *Acta mathematica* vorbehalten, der 1882 erschien [=Poincaré III, 108-168 und 169-257].

Poincaré ging jedoch noch einen Schritt weiter — nämlich zu den von ihm als Kleinsche Funktionen benannten automorphen Funktionen (diese Bezeichnung wählte Poincaré, um Klein zu versöhnen, der ihm die Bezeichnung Fuchssche Funktionen arg verübelt hatte). Das sind Funktionen, welche unter einer diskontinuierlichen Untergruppe von PSL(2,*C*), die nicht ganz in PSL(2,*R*) liegen soll, invariant sind, oder die, in Poincaréscher Terminologie, keinen Grenzkreis besitzen[19]. Es stellt sich nun heraus, daß die Gruppe PSL(2,*C*) isomorph der Gruppe der Isometrien (Kongruenzabbildungen, Bewegungen) des hyperbolischen Raumes ist. Folglich lassen sich diskontinuierliche Untergruppen über Raumteilungen (Parkettierungen des Raumes) und damit über Fundamentalbereiche gewinnen, welche jetzt aber Polyeder des hyperbolischen Raumes sind. Die Erzeugenden der zugehörigen Kleinschen Gruppe liefern Identifikationen zwischen den Randflächen des Fundamentalpolyeders; was entsteht, ist folglich eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Genau diesen Typ von Mannigfaltigkeit hat Poincaré dann in seiner Analysis-situs-Arbeit von 1895 ausführlich untersucht. Könnte man geschlossene 3-Mannigfaltigkeiten klassifizieren, so dürfte man sich hiervon Rückschlüsse auf die Kleinschen Funktionen erhoffen. Das Klassifikationsproblem der geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, dem Poincaré später so viel Aufmerksamkeit widmen sollte, hat also hier eine seiner Wurzeln.

Die geschilderten Einsichten hat Poincaré in einer Note vom 11. Juli 1881 [=Poincaré III, 23-25] skizziert, in der er die dreidimensionale Variante dessen, was wir heute Poincarésches Halbebenenmodell (das er erst 1891 in seinem Artikel *Les géométries non-euclidiennes* näher erläuterte) nennen, kurz erläutert:

> Je vais montrer comment la pseudogéométrie de Lobatschesky, qui m'a servi à trouver les groupes fuchsiens, peut me donner la solution du problème plus général que j'aborde aujourd'hui. [Poincaré II, 23][20]

Die detailliertere Ausarbeitung zur Theorie der Kleinschen Funktionen erschien dann zwei Jahre später in den Acta [=Poincaré III, 258-299].

---

[19] Diese Funktionen sind also nicht auf das Innere eines Kreises und damit auf die obere Halbebene beschränkt.

[20] „Ich werde zeigen, auf welche Weise die Pseudogeometrie von Lobatschewski, die mir dazu gedient hat, die Fuchsschen Gruppen zu finden, mir die Lösung des allgemeineren Problems, das ich heute in Abgriff nehme, liefern kann." [Poincaré II, 23]

Zusammenfassend darf man feststellen: Auch im Bereich der automorphen Funktionen spielte die Geometrisierung des ursprunglich rein analytischen Problems bei Poincaré eine ganz wichtige Rolle. Diese führte ihn gewissermaßen über den Umweg der zwei- oder dreidimensionalen hyperbolischen Geometrie wieder auf topologische Fragestellungen, genauer: auf das Klassifikationsproblem. Während dessen Lösung im zweidimensionalen Fall bekannt war, unternahm er 1882/83 noch keinerlei Anstalten, das dreidimensionale Problem in Angriff zu nehmen. Hierzu fehlten ihm schlicht die Mittel. Im mehr als zweidimensionalen Fall waren ja um 1880 herum nur die Versuche Bettis bekannt, die Definition der Zusammenhangszahlen zu verallgemeinern. Es war gerade ein wesentliches Verdienst Poincaré's in seiner Analysis-situs-Reihe, entsprechende Invarianten (insbesondere die Fundamentalgruppe, Betti-Zahlen nebst Dualität) entwickelt bzw. weiterentwickelt zu haben.

Von großer Bedeutung in Hinblick auf die späteren topologischen Arbeiten von Poincaré war weiterhin, daß er im Zusammenhang mit den automorphen Funktionen die Techniken der (modern ausgedrückt) kombinatorischen Gruppentheorie zu beherrschen lernte, vor allem den Umgang mit Erzeugenden und Relationen[21].

Eine Bemerkung noch: Es erstaunt eigentlich, daß Poincaré die hyperbolische Geometrie 1880 (also noch bevor er mit Klein in Kontakt getreten war) überhaupt kannte. Seine Quelle hierfür dürften die Abhandlungen von Beltrami gewesen sein, die ja 1869 in französischer Übersetzung publiziert worden waren. Bei Poincaré's geradezu sprichwörtlicher Unkenntnis der einschlägigen Literatur verblüfft es dennoch, daß er gerade diese Dinge rezipierte. Diese lagen weder in den Interessensgebieten seines Lehrers Hermite noch waren sie besonders populär in Frankreich. Deshalb bleibt es für mich eine offene Frage, wie Poincaré zu seiner Kenntnis von Beltrami gelangt ist.

1.3. Integrale, insbesondere Doppelintegrale

In diesem Bereich ist die Lage weniger übersichtlich als in den in 1.1 und 1.2 angesprochenen Themenkomplexen. Das liegt zum Teil daran, daß Poincaré's Angaben in seiner *Analyse* hier recht vage bleiben, zum Teil sicher auch daran, daß manches, was zu diesem Themenkreis gehört, unter Himmelsmechanik subsumiert wurde. (Der dritte Band der *Oeuvres*, in dem sich die Arbeiten Poincaré's

---

[21] Vgl. das Buch Chandler/Magnus 1982.

über Integration finden, ist nebenbei bemerkt reichlich unvollkommen; so enthält schon das Inhaltsverzeichnis massive Fehler). Ich möchte mich hier auf einen Punkt beschränken:

In der Arbeit *Sur les résidues des intégrales doubles* aus dem Jahre 1886 (Comptes-rendus-Note von 1886 [= Poincaré III, 437-439]; Artikel in den Acta mathematica von 1887 [= Poincaré III, 440-489]) befaßte sich Poincaré mit der Übertragung des Cauchyschen Integralsatzes auf Doppelintegrale $\iint f(x,y)dxdy$, wobei f(x,y) eine Funktion zweier komplexer Variabler ist (*période polaire* war damals die gängie Bezeichnung für Residuum). Dabei untersucht er ausführlich Möglichkeiten einer geometrischen Darstellung des hier zugrunde liegenden reell-vierdimensionalen Raumes (vgl unten 2) sowie die Frage nach der Abhängigkeit des Integrales von der (reell betrachtet) Integrationsfläche. Sein Hauptergebnis lautet:

> ... l'intégrale prise le long d'une surface fermée S ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de cette surface. [Poincaré III, 458][22]

Oder etwas anders gesagt: Das obige Doppelintegral erstreckt über zwei geschlossene oder auch berandete Flächen S und S' liefert dasselbe Ergebnis, wenn S in S' stetig deformierbar ist:

> Si la surface S peut, par une déformation continue, arriver à se confondre avec S', et si dans cette déformation continue il n'arrive à aucun moment que la fonction ... devienne infinie ou discontinue en un point de la surface d'intégration, à ces conditions, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'. [Poincaré III, 456][23]

Poincaré deutet also hier die Homotopierelation für zweidimensionale Gebilde an; es genügt allerdings, wie Scholz 1980. 282 bereits bemerkt, daß S und S' homolog sind. Das von Poincaré gefundene Ergebnis gilt als eines der ersten tiefliegenderen Resultate der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher.

---

[22] „Das über eine geschlossene Fläche S erstreckte Integral hängt nur von denjenigen singulären Kurven ab, die im Innern dieser Fläche liegen." [Poincaré III, 458]

[23] „Wenn es möglich ist, die Fläche S durch eine stetige Deformation mit S' zum Zusammenfallen zu bringen und wenn im Verlauf dieser stetigen Deformation die Funktion niemals in einem Punkt der Fläche, über die integriert wird, unendlich oder unstetig wird, so wird das über S erstreckte Integral gleich sein demjenigen über S'." [Poincaré III, 456]

1.4. Funktionen zweier Variabler

In der Einleitung zum *3. Complément à l'analysis situs* aus dem Jahre 1902 ([= Poincaré VI, 373-392]; der ausführliche Titel lautet: *Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs*) deutet Poincaré einen weiteren Zusammenhang an, der für seine topologischen Beispiele von Bedeutung gewesen sein dürfte. Dieser hängt mit Funktionen zweier komplexer Variabler vom Typ $z^2 = F(x,y)$ zusammen und führt schließlich auf jene Klasse von geschlossenen 3-Mannigfaltigkeiten, welche in der großen *Analysis-situs*-Arbeit als sogenanntes sechstes Beispiel eine ganz zentrale Rolle spielt (angedeutet bereits 1892 in der Note *Sur L'analysis situs* [= Poincaré VI, 189-192]) [vgl. Poincaré VI, 237-239]. Möglicherweise sind dies die *fonctions non uniformes de deux variables*, von welchen Poincaré in dem eingangs erwähnten Zitat spricht.

Genauer gesagt geht es um folgendes. Es sei (1) $z^2 = F(x,y)$ eine komplexe Funktion der komplexen Veränderlichen x und y, wobei F ein Polynom darstellt. Hält man vorerst y fest (y wird die Rolle eines Parameters spielen), so ergibt sich für $z = \sqrt{F_y(x)}$ eine (komplexe) algebraische Kurve. Dann lassen sich z und x als automorphe Funktionen einer neuen Variablen u darstellen: $z = \varphi(u)$ und $x = \psi(u)$; ist die algebraische Kurve vom Geschlecht p, so sind die Fundamentalbereiche von φ und von ψ 4p-Vielecke in der hyperbolischen ($p > 1$) oder der euklidischen Ebene ($p = 1$). Läßt man nun den Parameter y eine einfach-geschlossene Kurve K der komplexen Ebene durchlaufen, so bilden die Gesamtheit der Punkte $\{(x,y,z) \mid z2 = F(x,y)$ wie oben definiert und $y \in K\}$ eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. Im allgemeinen ist die entstehende Mannigfaltigkeit schwierig zu fassen. Interessant und übersichtlich ist aber der folgende Spezialfall: Ist F ein Polynom vierten Grades in x, so ist der zugehörige Fundamentalbereich ein (euklidisches) Parallelogramm, dessen Kanten die beiden Perioden ω und ω' einer elliptischen Funktion darstellen. Nach einem vollen Umlauf von y durch K geht dieses Parallelogramm in ein anderes über, dessen Seiten ω und ω' aber immer noch Perioden der fraglichen elliptischen Funktion darstellen. Folglich gilt für diese:

$$\omega = a\omega + b\omega' \text{ und } \omega' = c\omega + d\omega'$$

wobei a,b,c,d ganze Zahlen sind mit $ad - bc = 1$ (die entsprechende Matrix ist also aus $SL(2,\mathbb{Z})$).

Poincaré kommentiert nun den Stand der Dinge folgendermaßen:

> Ceci nous amène à un premier rapprochement avec l'Analysis situs. Supposons que p = 1; supposons que l'on convienne de donner à y une quelconque des valeurs situées sur un certain contour fermé K, et à x une valeur complexe quelconque, et que z soit défini par l'équation (1). L'ensemble de ces points x,y,z constituera une certaine variété fermée V à trois dimensions. Quelles sont les propriétés de cette variété au point de vue de l'Analysis situs? [Poincaré VI, 375][24]

Nun liegt es nicht gerade auf der Hand, daß hier in der Tat eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit entsteht, weshalb man hier wohl wirklich ein Beispiel für Poincaré's vielgerühmte Intuition vor sich hat. Plausibel machen kann man sich die Poincarésche Behauptung vielleicht so: Die komplex algebraische Kurve $z = \sqrt{F_y(x)}$ hat reell gesehen die Dimension zwei; für jeden Wert von y erhält man eine solche Kurve. Durchläuft y seinerseits eine geschlossene Kurve in der Ebene, also etwas reell Eindimensionales, so erhält man insgesamt etwas Dreidimensionales (man stelle sich ein Produkt vor). Man beachte, daß die entstehenden Mannigfaltigkeiten von den Koeffizienten a,b,c und d abhängen (diese sind natürlich nicht vollkommen unabhängig voneinander), weshalb man hier eine ganze Klasse von Mannigfaltigkeiten erhält.

Um diese Mannigfaltigkeiten genauer studieren zu können, konstruiert Poincaré deren universelle Überlagerung. Als Raum betrachtet ist diese einfach $\boldsymbol{R}^3$, wesentlich sind die Decktransformationen. Hierzu muß man ermitteln, wie zwei Punkte (ξ,η,ζ) und (ξ',η',ζ') des $\boldsymbol{R}^3$ miteinander zusammenhängen, welche 'über' demselben Punkt (x,y,z) der Mannigfaltigkeit liegen. Poincaré vermag diese Frage unter Rückgriff auf bekannte Eigenschaften elliptischer Integrale (die Umkehrungen $u = \varphi^{-1}(z)$ und $u = \psi^{-1}(z)$ der oben angegebenen elliptischen Funktionen sind gerade solche Integrale) zu klären, wobei es wesentlich darum geht, daß sich die verschiedenen Werte, welche ein elliptisches Integral in Abhängigkeit vom Integrationsweg annehmen kann, als ganzzahlige Linearkombination der Perioden der zugehörigen elliptischen Funktion schreiben lassen. Er findet schließlich, daß die Gruppe der Decktransformationen erzeugt wird von den folgenden drei Abbildungen (Poincaré spricht traditionell von Substitutionen):

---

[24] „Das führt uns zu einer ersten Annäherung an die Analysis situs. Angenommen es sei p = 1. Gibt man y einen beliebigen Wert auf einer bestimmten geschlossenen Kurve K, x einen beliebigen komplexen Wert und ist ferner z durch die Gleichung (1) definiert, so bildet die Menge der Punkte x,y,z eine bestimmte geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit V. Welches sind die Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit im Sinne der Analysis situs?" [Poincaré VI, 375]

$$(\xi, \eta, \zeta) \to (\xi+1, \eta, \zeta), (\xi, \eta, \zeta) \to (\xi, \eta+1, \zeta),$$
$$(\xi, \eta, \zeta) \to (a\xi+b\eta, c\xi+d\eta, \zeta+1),$$

wobei a,b,c,d wie oben beschrieben. Eine anschauliche Vorstellung hiervon kann man sich folgendermaßen verschaffen: Geht man von einem Einheitswürfel im $\mathbf{R}^3$ aus, so liefern die Identifizierungen auf dessen Seitenflächen, welche gemäß der beiden ersten Abbildungen auszuführen sind, ein von zwei Tori begrenztes Raumstück (*Schalenraum* wurde hierfür später von H. Seifert vorgeschlagen). Die dritte Identifikation schließlich identifiziert den inneren Torus mit dem äußeren (die Matrizen aus SL(2,**Z**) definieren gerade die Automorphismen des Torus, wie man seit Clebsch und Gordan 1866 wußte)[25]. Etwas anders formuliert, kann man auch sagen: Für jedes y auf der Kurve K bekommt man eine elliptische Funktion. Solche Funktionen kann man auffassen als auf Tori definiert, wobei den beiden Perioden gerade Breiten- und Meridiankreis des Torus entsprechen. Das sind die Tori, die in dem oben erwähnten Raumstück liegen. Die Tatsache nun, daß y einen geschlossenen Weg durchlaufen soll, erzwingt, daß der 'erste' (für = 0) und der 'letzte' Torus (für = 1) miteinander identifiziert werden. Aufgrund der Konstruktion ist klar, daß diese Identifikation nur gemäß eines Automorphismus des Torus geschehen kann. Natürlich hängt die entstehende Mannigfaltigkeit von dem zur Identifikation verwendeten Automorphismus ab; 1895 gelang es Poincaré, die Verhältnisse, die sich hier ergeben, genauer zu klären ([vgl. Poincaré VI, 247-258] sowie [Sarkaria 1996, 254-257]).

Diese in der Analysis-situs-Serie als sechstes Beispiel [vgl. Poincaré VI, 236-239] bezeichnete Klasse von Mannigfaltigkeiten zeigt eindrücklich, wie eng bei Poincaré klassische Ergebnisse der Funktionentheorie sowie eigene Ergebnisse über automorphe Funktionen mit seinen ganz neuen topologischen Ideen verwoben waren. Gerade diese Zusammenschau scheinbar getrennter Gebiete ist in hohem Maße charakteristisch für das mathematische Schaffen Poincaré's. Ähnlich wie in den weiter oben betrachteten Fällen haben wir es hier mit einer Geometrisierung analytischer Probleme zu tun, die dann in eine topologische Fragestellung mündet.

Nebenbei bemerkt gehörte gerade die Theorie der elliptischen Funktionen und Integrale zu den Hauptinteressengebieten von Hermite und vieler seiner Zeitgenossen, weshalb sich Poincaré hier durchaus im zu seiner Zeit gängigen Rahmen bewegte, um diesen aber in der für ihn charakteristischen Weise schließlich zu verlassen.

---

[25] Details zur Konstruktion von Poincaré's Beispiel findet man bei Sarkaria 1996, 254-257 und Volkert 1996, 242-245.

2. Einige Bemerkungen zur Entwicklung der Poincaréschen Begrifflichkeit

In folgenden gehe ich auf die Entwicklung des Begriffsfeldes, welches wir heute unter dem Oberbegriff Topologie fassen würden, bei Poincaré ein. Der heute fast ausschließlich verwendete Terminus Topologie wurde erst nach den Bemühungen von S. Lefschetz (*Topology*, 1930) Allgemeingut der Mathematiker, was Titel wie Seifert-Threlfall *Topologie* (1934), Alexandroff-Hopf *Topologie I* (1935) und Bourbaki *Topologie générale* (1939) belegen; er trat erstmals in B. Listings *Vorstudien zur Topologie* von 1847 auf.

Poincaré selbst hat den Begriff Topologie meines Wissens nach nie gebraucht, sondern meist von *Analysis situs* besprochen. Dieser Ausdruck geht letztlich auf Leibniz zurück, der einmal von der *geometria situs* gesprochen hat (worunter er sich aber eher etwas wie die analytische Geometrie vorgestellt hat), ein Terminus, den auch Gauß gelegentlich verwendete. Der hiermit eng verwandte Begriff *Analysis situs* taucht in Riemanns *Theorie der Abelschen Functionen* (1857) als Kapitelüberschrift auf: „Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen“ [Riemann 1892, 91]. Dabei meinte ‘Analysis’ lange Zeit im Unterschied zu ‘Geometrie’ eher eine Methode (entgegengesetzt der traditionellen Synthesis) denn ein Teilgebiet der Mathematik: „*Analysis, als wissenschaftliches System,* ist die allgemeine Darstellung und Entwicklung der Zusammensetzung der Größen nach Rechnung“, heißt es noch in Klügels *Mathematischen Wörterbuch* [Klügel 1803, 77]. ‘Situs’ bedeutet soviel wie ‘Lage’, die Analysis situs wäre somit eine ‘Lagenrechnung’. In diesem Sinne taucht sie bei Klügel im Stichwort ‘Lage’ auch auf [Klügel 1809, 133], wo dieser auf Leibniz zu sprechen kommt, der nach Chr. Wolff einen *calculum situs* [Klügel 1809, 133] gewünscht habe. Weiter erwähnt Klügel J. H. Lambert und L. N. Carnot in diesem Zusammenhang. Er spricht an einer Stelle wörtlich von der *Analysis der Lage* [Klügel 1809, 133]. Man vergleiche hierzu auch den von Klügel zitierten Artikel *Situation* von d'Alembert in der *Encyclopédie méthodique*, wo sich ebenfalls die Ausdrucksweise «analyse de situation» findet [Encyclopédie III, 53] sowie den Eintrag *Situs* in Huttons *Dictionary*.

Kommen wir auf einige Quellen zu sprechen, aus denen Poincaré diesen Terminus sowie Kenntnisse der Topologie entnommen hat.

Da ist zuerst einmal F. Klein zu nennen, der den Terminus Analysis situs häufig verwendete, z.B. schon in seinem Erlanger Programm von 1872 (vgl. unten Anmerkung 29). Wie weiterhin

Zitate belegen (vgl. unten Anmerkung 34), kannte Poincaré die *Gesammelten Werke* Riemanns (erstmals erschienen 1876); auch im Briefwechsel mit Klein taucht der Begriff *Analysis situs* wie oben bemerkt auf, so daß insgesamt anzunehmen ist, daß Poincaré ihn aus der Riemann-Kleinschen Tradition entnommen hat. In Frankreich selbst gab es vor 1880 eigentlich nur einen Mathematiker, der sich mit Topologie beschäftigte, nämlich C. Jordan. Mit ihm stand Poincaré schon früh in brieflichem Kontakt; in den erhaltenen Briefen spielt die Polyedertheorie eine gewisse Rolle, welche ihrerseits möglicherweise für Jordans Topologie wichtig gewesen ist. In einem Brief vom 5.11.1880 teilt Jordan Poincaré mit, daß seines Wissens nach die Anzahl regulärer Polyeder im vierdimensionalen Hyperraum noch nicht bestimmt worden sei; bewiesen sei lediglich (nämlich von Jordan), daß diese endlich sei. Vielleicht gibt es hier einen Zusammenhang zu den Raumteilungen des hyperbolischen Raumes; vgl. 1.2. Der entsprechende Beweis (es gibt [euklidisch] sechs derartige Polyeder) wurde erst von Stringham 1880 erbracht. Es gibt hier auch noch eine enge Beziehung zur Gruppentheorie, auf deren Hintergrund man möglicherweise Poincaré's Frage sehen muß [vgl. Dugac 1986, 84f]. Ob Poincaré Jordans bereits erwähnten topologischen Arbeiten aus dem Jahr 1866 gekannt hat, läßt sich schwer sagen, da entsprechende Zitate bei ihm nicht zu finden sind. Möglicherweise stieß er auf sie über den Umweg Klein, da dieser öfter Jordan als denjenigen zitiert, der das Klassifikationsproblem für geschlossene orientierbare Flächen gelöst habe [etwa in Klein 1874, 572 Anm. *]. Anzumerken ist noch, daß Jordan einer der ersten französischen Mathematiker war (nach Cauchy), welcher sich zur Möglichkeit einer Hypergeometrie (d.h. eine Geometrie des vier- oder höherdimensionalen Raumes) in einer Abhandlung 1875 äußerte[26]. In der Analysis-situs-Reihe spielt später dann noch Betti mit seiner Arbeit über die Verallgemeinerung der Riemannschen Zusammenhangszahlen auf höhere Dimensionen von 1871 eine gewisse Rolle; Poincaré führt dort u.a. die heute noch gängige Bezeichnung Betti-Zahlen ein. Die erste Erwähnung dieser Arbeit findet sich bei Poincaré 1886 [Poincaré I, 196], wo er Betti aber noch mit Brioschi verwechselt und zudem eine falsche Quellenangabe (Band 5 anstatt richtig Band 4 der *Annali di matematica*) macht; vgl. 2.4 unten.

Weiter müssen noch die Arbeiten Kroneckers im Umkreis von *Über Systeme von Functionen mehrerer Variabler* von 1869 erwähnt werden, die Poincaré in seinen Artikeln zur qualitativen Theorie der Differentialgleichungen mehrfach verwendete, wobei er es auch war,

[26] Vgl. Jordan 1875.

der den topologischen Gehalt der Kroneckerschen Beiträge erkannte. Hier ist im übrigen eine Vermittlung durch Hermite wahrscheinlich. Der Kronecker-Index wurde, wie J. Mawhin in verschiedenen Vorträgen betont hat, zu einem bevorzugten topologischen Werkzeug Poincaré's. Schließlich sei noch E. Picard genannt, der sich vor allem in der bekannten Arbeit über algebraische Funktionen von zwei (komplexen) Veränderlichen aus dem Jahre 1889 mit topologischen Problemen, unter anderem mit dem Dualitätssatz, beschäftigte. Diese Arbeit wird von Poncaré des öfteren zitiert.

Soviel zum Hintergrund Poincaré's in Sachen Topologie.

Kommen wir nun zu Poincaré selbst. Es gibt mindestens drei Begriffsfelder, welche bei diesem mit der Topologie zusammenhängen: die Pseudogeometrie oder nichteuklidische Geometrie Lobatschewskis, die Hypergeometrie und eben die Analysis situs selbst.

2.1. Nichteuklidische Geometrie

Auf die Art und Weise, wie Poincaré diese kennengelernt hat, bin ich schon weiter oben eingegangen. Der Begriff *géométrie non-euclidienne* taucht bei ihm erstmals im Druck im Titel eines am 16.4.1881 zu Algier gehaltenen Vortrages auf: *Sur les applications de la géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques* [= Poincaré V, 267-274], in dem Poincaré in algebraischer Sprache auf die Zusammenhänge hinweist, welche er dann mehr geometrisch in seiner schon mehrfach erwähnten *Comptes-rendus*-Note vom 11.7.1881 [= Poincaré II, 23-25] formulierte. Insbesondere wird an beiden Stellen das dreidimensionale Poincaré-Modell vorgestellt. Die nichteuklidische Geometrie hat später in Poincaré's Philosophie der Geometrie eine ganz wichtige Rolle gespielt; ihre erkenntnistheoretische Verarbeitung führte schließlich zu Poincaré's Konventionalismus, wie er dann in dem schon erwähnten Aufsatz über die nichteuklidische Geometrie von 1891 formuliert wurde. Sicherlich hat die Erkenntnis, daß die nichteuklidische Geometrie innermathematisch (z.B. bei den automorphen Funktionen) von großem Nutzen sein kann, dazu beigetragen, Poincaré's Auffassung von Geometrie zu erweitern.

2.2. Hypergeometrie

Mit diesem Terminus bezeichnet Poincaré geometrische Betrachtungen in Räumen von höherer Dimension als drei. Der Terminus selbst findet sich in verschiedenen Variationen bei vielen Autoren seiner Zeit. Man sollte sich dabei klarmachen, daß solche Betrachtungen selbst um 1880 herum noch nicht allgemein akzeptiert waren. Die Strategie der Anhänger derselben bestand zunächst darin, hypergeometrische Überlegungen als eine Art von bequemer Sprache darzustellen, welche nützlich ist aber keine weitergehenden, etwa ontologischen, Ansprüche stellt. Genau dies tat auch Poincaré in seiner bereits erwähnten Arbeit *Sur les résidus des intégrales doubles* [1887 = Poincaré III, 440-539]. Dort heißt es im Zusammenhang mit komplexen Doppelintegralen:

> On se trouve donc en présence du dilemme suivant: il faut, ou renoncer à toute représentation ou employer l'hypergéométrie; mais, dans ce dernier cas, on est exposé à rebuter la plupart des lecteurs, et de plus on ne possède que l'avantage d'un langage commode, mais incapable de parler aux sens.
> Comme cette langue hypergéométrique répugne encore à beaucoup de bons esprits, j'en ferai qu'un usage peu fréquent;... [Poincaré III, 443][27]

Das Thema *Hypergeometrie* wird von Poincaré selbst noch in der Note *Sur l'analysis situs* (1892) [=Poincaré VI, 189-192] und dann in der großen Arbeit *Analysis situs* (1895) [=Poincaré VI, 193-288] angesprochen, ein Zeichen dafür, wie eng in seinem Denken die Analysis situs und die Hypergeometrie zusammengehörten. Aber es ist ein bemerkenswerter Wandel eingetreten, insofern nun Poincaré wesentlich mehr für die Hypergeometrie fordert, als nur eine bequeme Sprache oder bloßes Hirngespinst zu sein. 1892 betont er vor allem, daß diese Anwendungen außerhalb der Geometrie finden könne, also nützlich sei. Sein Beleg hierfür sind die Betti-Zahlen, die von Picard im Rahmen der *reinen Analysis* und in der *gewöhnlichen Geometrie* angewendet worden seien [vgl. Picard 1889]. Drei Jahre später heißt es dann:

> La géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire; et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Méchanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de son objet, il n'en est plus de même de l'Hypergéométrie.

[27] „Man steht also vor folgendem Dilemma: Man muß entweder auf jegliche Darstellung verzichten oder aber die Hypergeometrie verwenden. Im letzteren Fall aber läuft man Gefahr, die Mehrzahl der Leser vor den Kopf zu stoßen. Zudem hat man nur noch die Vorteile einer bequemen Sprache, die aber nicht zu den Sinne sprechen kann.
Da die hypergeometrische Sprache noch viele gute Köpfe abstößt, werde ich nur wenig Gebrauch von ihr machen." [Poincaré III, 443]

> La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens: elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux. [Poincaré VI, 192][28]

Als Vorteile der Hypergeometrie nennt dann Poincaré: Diese erlaubt präzisere Beschreibungen als eine ausschließlich analytische Behandlung; Assoziationen zur gewöhnlichen Geometrie können sich als nützlich erweisen.

Wir bemerken hier einen tiefgreifenden Wandel in Poincaré's Auffassung vom Wesen der Geometrie, in dem man unschwer gewisse Anklänge an Kleins Erlanger Programm[29] sehen kann. Ich möchte diese Frage hier nicht vertiefen, sondern nur ergänzen, daß Poincaré später noch weiter gegangen ist, insofern er auch der Hypergeometrie eine mögliche Anschaulichkeit zusprach (und damit wesentlich über Helmholtz hinausging):

«Quelqu'un qui voudrait y consacrer sa vie, arriverait à se figurer l'espace à quatre dimensions»[30] [Poincaré 1921, 128]. (Poincaré behauptet, dieses Zitat stamme aus seinem Aufsatz *Sur la géométrie non-euclidienne*, wo ich es allerdings nicht finden konnte).

Eine schwierige Frage bleibt, ob Poincaré einen Unterschied zwischen der Analysis situs und der Hypergeometrie, etwa hinsichtlich der zugrunde liegenden Gruppe, gesehen hat. Ein denkbares Unterscheidungskriterium wäre, daß die Geometrie metrisch ist während es die Topologie nicht ist. Aber auch dieses hat natürlich seine Probleme[31].

---

28 „Die n-dimensionale Geometrie besitzt einen realen Gegenstand; das wird heute von niemanden bezweifelt. Die Objekte des Hyperraumes sind ebenso präziser Definitionen fähig wie diejenigen des gewöhnlichen Raumes und wenn wir sie uns auch nicht vorstellig machen können, so vermögen wir dennoch, sie zu verstehen und sie zu studieren. Wenn also beispielsweise die mehr als dreidimensionale Mechanik in Ermangelung eines Gegenstandes verworfen werden muß, so trifft das auf die Hypergeometrie nicht mehr zu.
In der Tat ist es nicht die einzige Existenzberechtigung der Geometrie, unmittelbare Beschreibungen jener Körper zu geben, die in unsere Sinne fallen; vielmehr verkörpert sie in erster Linie das analytische Studium einer Gruppe. Folglich hindert uns nichts daran, andere analoge und allgemeinere Gruppen in Angriff zu nehmen." [Poincaré VI, 192]

29 Vergleiche etwa das folgende Zitat: „In der sog. Analysis situs sucht man das Bleibende gegenüber solchen Umformungen, die aus unendlich kleinen Verzerrungen durch Zusammensetzung entstehen." [Klein 1893, 84]

30 „Jemand, der sein Leben darauf verwenden würde, könnte soweit kommen, daß er sich den vierdimensionalen Raum vorstellen könnte." [Poincaré 1921, 128]

31 Vgl. im übrigen Scholz 1980, 268-287.

2.3. Geometrie der Lage (= géométrie de situation)

Der Terminus *géométrie de situation*, der zuerst einmal an die *géométrie de position*, also an die projektive Geometrie, sowie an L. N. Carnots *Geometrie der Stellung*, erinnert, taucht bei Poincaré Mitte der 80er Jahre auf. Die Bezeichnung selbst war geläufig, u.a. durch den Titel von Eulers Abhandlung (1736) über das Königsberger Brückenproblem *Solutio ad problematis ad geometriam situs pertinentis*. Auch Gauß verwandte gelegentlich die Ausdrucksweise *geometria situs*, zum Beispiel in der Einleitung zu seinem vierten Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra (1849). Im vierten Teil von *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (1886) heißt es:

> Il est une notion qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui va suivre, c'est le genre de la nappe S, au point de vue de la géométrie de situation. [Poincaré I, 178][32]

Etwas später heißt es im Zusammenhang mit dem Eulerschen Polyedersatz:

> Mais, en géométrie de situation, on n'a pas à s'inquiéter de la forme des faces et des arêtes; nous n'avons donc pas besoin de supposer que les faces du polyèdre sont planes, et ses arêtes rectilignes. Il en résulte que la figure, formée par la nappe S, divisée en régions simplement connexes, est un véritable polyèdre curviligne auquel s'applique le théorème d'Euler. [Poincaré I, 124f][33]

Aus moderner Sicht würde man sagen, daß Poincaré hier den topologischen Charakter des Satzes von Euler betont in dem Sinne, daß dieser gilt modulo Homöomorphismen.

In der Note *Sur l'analysis situs* taucht der Begriff *géométrie de situation* noch einmal kurz als Synonym zu Analysis situs auf [Poincaré VI, 189], um dann aber völlig zu verschwinden. Hadamard hat ihn später noch gelegentlich verwendet, z. B. im Titel seiner Antrittsvorlesung (1909) am Collège de France: *La géométrie de situation et son rôle en mathématiques*. Poincaré

---

[32] „Es gibt einen Begriff, der im folgenden eine zentrale Rolle spielen wird, das ist der Begriff des Geschlechtes des Blattes S im Sinne der Geometrie der Lage.“ [Poincaré I, 178]

[33] „In der Geometrie der Lage aber muß man sich weder um die Form der Flächen noch um jene der Kanten Gedanken machen; folglich müssen wir nicht voraussetzen, daß die Flächen des Polyeders eben und seine Kanten geradlinig sind. Hieraus folgt, daß die Figur, die entsteht, wenn man das Blatt S in einfach zusammenhängende Gebiete unterteilt, ein richtiges gekrümmtes Polyeder ist, auf das der Satz von Euler Anwendung finden kann.“ [Poincaré I, 124f]

selbst war es, der durch seine nach 1892 konstante Verwendung von Analysis situs den Terminus *géométrie de situation* verdrängte. Er stellt bei ihm letztlich nur ein Intermezzo dar, wie wir gleich sehen werden.

2.4. Analysis situs

Wie bereits oben bemerkt war der Terminus Analysis situs in der Riemann-Kleinschen Tradition gängig; Poincaré begegnete ihm im Briefwechsel mit Klein. Wir finden ihn (erstmals?) bei Poincaré im vierten Teil von *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (1886), also erst nach *géométrie de situation*:

> Cela posé, je vais montrer que l'indice d'une suface sans contact ne dépend que de son espèce et de son genre (au point de vue de L'Anaylysis Situs, cf. III^e Partie, Chap. XII). [Poincaré I, 191][34]

Hier geht es also wieder um den topologischen Charakter gewisser Invarianten. Etwas weiter heißt es dann:

> Une multiplicité (n-1)ième sera caractérisée au point de vue d'Analysis Situs par ses n-2 ordres de connexion tels qu'ils sont définis par Riemann (Gesammelte Werke; Leipzig, Teubner, 1876, p. 448), et par Brioschi (Annali di Matematica, t. V). [Poincaré I, 196][35]

In diesem Zitat kann man den Keim des später so wichtigen Klassifikatiosproblem sehen.

Ab 1886 begann wie bereits bemerkt der Terminus Analysis situs die *géométrie de situation* zu verdrängen. In der großen Abhandlung von 1895 finden wir schon eine genauere Begriffsbestimmung für Analysis situs, ein Zeichen dafür, daß das neue Gebiet Konturen anzunehmen beginnt:

> L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nous études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on appelle Analysis situs, et qui décrit la situation relative des

---

[34] „Dies vorausgesetzt werde ich zeigen, daß der Index einer Fläche ohne Kontakt nur von ihrer Art und ihrem Geschlecht abhängt (im Sinne der Analysis situs, vgl. III. Teil, Kap. XII)." [Poincaré I, 191]

[35] „Eine (n-1)-dimensionale Mannigfaltigkeit wird vom Standpunkt der Analysis situs aus durch ihre n-2 Zusammenhangszahlen charakterisiert, wie sie von Riemann (*Gesammelte Werke*; Leipzig, Teubner, 1876, S. 448) und von Brioschi (*Annali di Matematica*, Band 5) definiert worden sind." [Poincaré I, 196]

> points, des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur. [Poincaré VI, 194][36]

Und etwa sechs Jahre später heißt es in der *Analyse des ses travaux scientifiques:*

> L'Analysis Situs est la science qui nous fait connaître les propriétés qualitatives des figures géométriques non seulement dans l'espace ordinaire, mais dans l'espace à plus de trois dimensions. [Poincaré 1921, 100][37]

Poincaré ergänzt dann diese Hinweise durch nähere Ausführungen zu seinem bekannten Diktum (aus der Einleitung zur *Analysis Situs*; vgl. [Poincaré VI, 194]), daß die Geometrie die Kunst sei, richtig über schlecht gezeichnete Figuren nachzudenken, dahingehend, daß man hierbei aber die topologischen Eigenschaften, insbesondere die relative Lage von Teilen, nicht verändern darf. Die erstere Charakterisierung von Geometrie ist übrigens eine Spitze gegen Pascal, der verfügt hatte:

> La géométrie est l'art de faire des figures justes et de trouver les proportions qu'elles ont entre elles [zitiert bei Hadamard, II 812][38].

Es geht also um Form und relative Lage; die Form aber ist das, was unter Homoömorphismen unverändert bleibt. Einfangen muß man diesen Aspekt durch Invarianten (Paradigma: Geschlecht einer orientierbaren geschlossenen Fläche). 1892 war Poincaré vielleicht noch so optimistisch, zu meinen, daß er in der Fundamentalgruppe die Invariante gefunden habe, welche die Form ausdrücke (vgl. «Le groupe G peut donc servir à définir la forme de la surface et s'appeler le groupe de la surface.» [Poincaré VI, 190])[39]. Seine weiteren Untersuchungen kreisten genau um dieses Problem, ohne es wirklich lösen zu können.

---

36 „Die Verwendung von Figuren hat also vor allem den Zweck, uns Einsichten in gewisse Beziehungen zwischen den von uns studierten Objekte zu vermitteln. Diese Beziehungen sind jene, mit denen sich ein Teilgebiet der Geometrie, Analysis situs genannt, beschäftigt. Dieses beschreibt die relative Lage von Punkten, Linien und Flächen ohne in irgendeiner Weise deren Größe in die Betrachtung einzubeziehen." [Poincaré VI, 194]

37 „Die Analysis situs ist diejenige Wissenschaft, die uns die Kenntnis der qualitativen Eigenschaften geometrischer Figuren verschafft — und das nicht nur im gewöhnlichen Raum sondern auch in jenem von mehr als drei Dimensionen." [Poincaré VI, 100]

38 „Die Geometrie ist die Kunst, Figuren korrekt anzufertigen und die Verhältnisse zwischen ihnen zu ermitteln." [Pascal, zitiert nach Hadamard II, 812]

39 „Die Gruppe G kann also dazu dienen, die Form der Fläche zu definieren; sie heißt deshalb die Gruppe der Fläche." [Poincaré VI, 190]

Fassen wir zusammen: Die Topologie ist für Poincaré dadurch gekennzeichnet, daß sie nicht-metrisch ist, daß sie die qualitativen oder Formaspekte erfaßt sowie die relative Lage. Wirklich interessant ist erst die drei- und mehrdimensionale Topologie, da die Topologie des gewöhnlichen Raumes fast eine intuitive Kenntnis darstellt. Gegenstand der Topologie bei Poincaré sind die Mannigfaltigkeiten; anders gesagt: Seine Topologie ist Theorie der Mannigfaltigkeiten. Folglich ist deren Zentralproblem, die Erfassung der qualitativen oder Formaspekte von Mannigfaltigkeiten vermöge von Invarianten. Die Invarianten sind invariant unter Homöomorphismen — dieser Begriff von entscheidender Bedeutung wird von Poincaré erst 1895 einigermaßen exakt gefaßt. Das gilt auch für den Mannigfaltigkeitsbegriff, weshalb man sagen kann, daß erst 1895 wirklich von einer selbständigen Disziplin Topologie bei Poincaré die Rede sein kann. Diese hat ein Programm, ein Ziel: Löse das Homöomorphieproblem; sie hat eine Methode: Definiere Homöomorphieinvarianten; eine Terminologie und einen Gegenstandsbereich: die Mannigfaltigkeiten (bei Poincaré sind sie fast immer dreidimensional)[40].

All dies hat aber bei ihm, wie wir gesehen haben, seine Vorgeschichte. Auf das Verhältnis von Vorgeschichte und Endergebnis möchte ich im abschließenden Teil noch kurz eingehen, um die im Titel formulierten Fragen zu beantworten.

3. Abschließende Betrachtungen

Wenden wir uns zum Abschluß nochmals unseren Ausgangsfragen zu: Wie und warum wurde Poincaré zum Topologen? Wie wir gesehen haben und wie Poincaré selbst betont, gab es für ihn verschiedene Anstöße, zum Topologen zu werden. Dies waren Probleme unterschiedlicher Natur, bei denen sich Begriffe wie Geschlecht, Kronecker-Index und Mannigfaltigkeiten als nützlich erwiesen. Um zu einer Disziplin Topologie zu kommen, war es erforderlich, diese Probleme aus ihrem ursprünglichen Kontext (Theorie der Differentialgleichungen, der automorphen Funktionen, Doppelintegrale, ...) zu lösen, sie zu dekontextualisieren, und ihnen gemeinsame Wesenszüge zu erkennen. Dies schlägt sich bei Poincaré auch terminologisch nieder, insofern er es war, der nach anfänglichen Anleihen bei Riemann-Klein ab 1892 begann, große Teile der heute noch gängigen Terminologie der Topologie einzuführen (Homöomorphismus, Betti-

---

[40] Vgl. hierzu Volkert 1996a.

Zahlen, Fundamentalgruppe, Homologie,...). Nach und nach kristallisierte sich das 1904 in die berühmte Pooincaré-Vermutung [vgl. Poincaré VI, 498] mündende Homöomorphieproblem als leitende Fragestellung für die neue Disziplin heraus, wobei es sich zeigte, daß dieses in den verschiedensten Zusammenhängen wichtig war. Was Poincaré in den 80er Jahren noch fehlte, waren vor allem ausgearbeitete Methoden, um das Homöomorphieproblem anzugehen (insbesondere ist hier die Fundamentalgruppe zu nennen), eine brauchbare Fassung des Manngifaltigkeitsbegriffes sowie ein hinreichend reiches Beispielmaterial. All das finden wir erst 1895, wobei allerdings die Wurzeln oft weiter zurückreichen. Daneben mußte Poincaré, wie wir gesehen haben, für sich gewisse Hürden überwinden, um mehr als dreidimensionale Betrachtungsweisen überhaupt als mathematisch vollwertig anzuerkennen. Dies könnte man als Ablösung vom anschaulichen Existenzkriterium[41] (nur das existiert in der Mathematik, für das sich ein anschauliches Modell angeben läßt) und als Hinwendung zum logischen (darin durchaus mit Hilbert einig: «Un être mathématique existe, pourvue que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises.» [Poincaré 1968, 70][42]) beschreiben, wie es im Aufsatz über die nichteuklidische Geometrie von 1891 deutlich zum Ausdruck kommt. Ein Desiderat auch nach Poincaré blieb eine lehrbuchhafte Darstellung der neuen Disziplin Topologie. Diese Aufgabe nahmen Dehn und Heegard mit ihrem Enzyklopädieartikel von 1907 in Angriff; das erste Lehrbuch der Theorie der Mannigfaltigkeiten war O. Veblens *Analysis situs* von 1920.

Warum wurde Poincaré zum Topologen? Ich denke, diese Entwicklung lag in dem für Poincaré's mathematisches Schaffen so typischen Zug der Geometrisierung, der globalen und qualitativen Betrachtungsweise, begründet. Er selbst hat ja immer wieder betont, daß die Topologie eine Art von Ersatz für die Anschauung sei; diese aber wußte Poncaré, wie wir gesehen haben, meisterhaft einzusetzen. Die Topologie faßt das anschaulich Gegebene mit ihren Invarianten, die Methode der Invarianten aber läßt sich auch dann noch einsetzen, wenn die Anschauung uns im Stich läßt, etwa bei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Letztlich war es die Art und Weise, wie Poincaré seine Fragen stellte, die ihn auf die Topologie führte. Diese war originell und für ihn im hohen Maße charakteristisch, was wiederum die zögerliche Aufnahme seiner neuen Ideen erklären könnte. Bemerkenswert ist auch hier ein

---

41 Zum Problem der mathematischen Existenz vgl. man Volkert 1986, 193-203.

42 Ein mathematischer Gegenstand existiert, vorausgesetzt seine Definition führt zu keinem Widerspruch mit sich selbst noch mit den zuvor bewiesenen Sätzen.

Vergleich mit F. Klein, der Poincaré anfänglich, auch was topologisches Wissen anbelangte, beträchtlich voraus war, der sich mit ähnlichen Problemen wie jener beschäftigte und den man gemeinhin einen intuitiven Mathematiker nennt. Dennoch hat Klein wenig zur Topologie (und dann nur zur zweidimensionalen) beigetragen. Hierfür mögen verschiedene Gründe maßgeblich gewesen sein: Kleins Krankheit, die Tatsache auch, daß sein Schüler W. Dyck topologische Studien betrieb (sozusagen im Sinne einer Arbeitsteilung), ... ; letztlich aber auch eine ganz andere Sicht der Mathematik, womit wir wieder bei jenem Punkt angelangt sind, der so charakteristisch für Poincaré ist.

Literatur

Beltrami, E.

1869a Essai d'interprétation de la géométrie non-Euclidienne, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieur* 6, 252-288.

1869b Théorie fondamentale des espaces de courbure constante, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieur* 6, 347-375.

Chandler, B. & Magnus, W.

1982 *The History of Combinatorical Group Theory*, New York u.a.

Clebsch, A. & Gordan, P.

1866 *Theorie der Abelschen Functionen*, Leipzig.

Dugac, P.

1986 La correspondance de Henri Poincaré avec mathématiciens. A-H, *Cahiers du Seminaire d'histoire des mathématiques* 7.

1990 La correspondance de Henri Poincaré avec mathématiciens. K-Z, *Cahiers du Seminaire d'histoire des mathématiques* 10.

Encyclopédie méthodique. Mathématiques. Par une Société de Gens de Lettres, de Savants et d'autres. Drei Bände. Nachddruck Paris, 1987.

Gray, J.

1986 *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Boston/Basel/Stuttgart : Birkhäuser.

Gray, J. & Walter, S.

1997 *Henri Poincaré. Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, Berlin/Paris : Akademie Verlag/A. Blanchard.

Hadamard, J.

1921 L'oeuvre mathématique de Poincaré, *Acta mathemtica* 38, 203-287.

1968 *Oeuvres de Jacques Hadamard*, Tome 2, Paris.

Hutton, Ch.

1973 *Mathematical and philosophical Dictionary*. Zwei Bände, Nachdruck Hildesheim.

Jordan, C.

1875 *Essai sur la géométrie à n dimension, Bulletin de la Société mathématique de France* 3, 103-174.

1877 *Essai sur la géométrie à n dimension, Bulletin de la Société mathématique de France* 4, 9.

1964 *Oeuvres*, Vier Bände, Paris.

Klein, F.

1874 Bemerkungen über den Zusammenhang von Flächen, *Mathematische Annalen* 7, 549-557.

1893 Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrie, *Mathematische Annalen* 43, 63-100.

Klügel, G. S.

1803 *Mathematisches Wörterbuch*, Erste Abtheilung, erster Theil: A-D, Leipzig.

1809 *Mathematisches Wörterbuch*, Erste Abtheilung, dritter Theil: K-P, Leipzig.

Picard, E.

1889 Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (4) 5, 135-319.

Poincaré, H.

1916-56 *Œuvres*, 11 Bände, Paris : Gauthier-Villars.

1921 Analyse de ses travaux scientifiques, *Acta mathematica* 38, 3-131.

1968 *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

Riemann, B.

1892 *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß*, Hg. unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Nachträge. Hg. von M. Noether und W. Wirtinger, Leipzig : Teubner, 1892; Nachdruck New York : Dover, 1953.

Sarkaria, K.

1996 *A Look Back at Poincaré's Analysis Situs*, in: *Henri Poincaré. Science et philosophie*, ed. par J. L. Greffe, G. Heinzmann et K. Lorenz, Berlin/Paris : Akademie Verlag/Albert Blanchard, 251-258.

Scholz, E.

1980 *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston/Basel/Stuttgart : Birkhäuser.

Stringham, W. I.

1880 *Regular figures in n-dimensional space*, American Journal of Mathematics 3, 1-14.

Volkert, K.

1986 *Die Krise der Anschauung*, Göttingen.

1996a *The Early History of Poincaré's Conjecture*, in: *Henri Poincaré. Science et philosophie*, ed. par J. L. Greffe, G. Heinzmann et K. Lorenz, Berlin/Paris : Akademie Verlag/Albert Blanchard, 241-250.

1996b *Das Homöomorphieproblem, insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*, Habilitationsschrift Heidelberg — erscheint demnächst im Akademie Verlag Berlin.

Die *Oeuvres* von Poincaré wurden mit den entsprechenden Bandzahlen zitiert. Die genannten Briefe finden sich in Dugacs Ausgabe der Korrespondenz von Poincaré mit Mathematikern. Die einzige Ausnahme hiervon ist der Brief von Poincaré an Eneström (19.11.1883), den mir das Poincaré-Archiv Nancy freundlicherweise zur Verfügung stellte.