PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

JULES VUILLEMIN

La question de savoir s'il existe des réalités mathématiques a-t-elle un sens ?

Philosophia Scientiæ, tome 2, nº 2 (1997), p. 275-312
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_2_275_0>

© Éditions Kimé, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Philosophia Scientiæ » (http://poincare.univ-nancy2.fr/PhilosophiaScientiae/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

La question de savoir s'il existe des réalités mathématiques a-t-elle un sens ?

Jules Vuillemin
Collège de France

*à Monsieur Jean Ladrière, l'initiateur**

*[1957 (par ex. p. 442) ; 1960]

Philosophia Scientiae, 2 (2), 1997, 275-312

Résumé. Les théorèmes négatifs de Gödel n'entraînent pas logiquement l'existence d'un monde intelligible d'objets mathématiques. Carnap les traduit en termes de syntaxe existentiellement neutres. Mais cette traduction néglige le théorème gödelien de complétude, ordinairement entendu comme une critique du logicisme. Le positivisme est philosophiquement sophistique et c'est à lui qu'incombe le poids de la preuve lorsqu'il soutient que sont compatibles ces trois affirmations : 1) la syntaxe sauve l'intégralité des mathématiques, 2) elle réduit les mathématiques à la logique, 3) elle élimine les contenus au profit de conventions cohérentes. Qu'on rende au mot *logique* le sens restreint et naturel que lui donne le théorème de complétude, tout en refusant d'amputer les mathématiques : la croyance au monde intelligible paraît alors requise.

Abstract. Gödel's negative theorems do not entail that an intelligible world of mathematical objects exists. Carnap has translated these theorems into syntactical terms which are ontological neutral. But his translation neglects Gödel's theorem of completude that is ordinarily understood as dismissing logicism. Positivists are philosophically sophistical and the burden of truth lies with them when they uphold the compatibility between these three assertions: 1) syntax saves the integrality of mathematics, 2) it reduces mathematics to logic, 3) it replaces without a loss contents by coherent conventions. Let us however give back the word *logic* the restricted and natural meaning which was its own in the theorem of completude, while maintaining the whole of mathematics. Then it seems required to believe that the intelligible world does exist.

Les questions philosophiques traditionnelles expriment-elles la maladie de l'esprit ou, plus simplement, du verbe ? La croyance qu'il en est ainsi est aussi répandue que diffuse en philosophie analytique. Je l'examinerai sous la forme précise qu'elle reçoit quand elle porte sur l'existence des objets mathématiques.

Dans un essai inachevé, non publié de son vivant, «Les mathématiques sont-elles une syntaxe du langage ?» [Gödel 1995, cité M], Gödel défend contre Carnap la légitimité de la question qui nous occupe. Elle avait été posée et précisée par la théorie hilbertienne de la démonstration : on éliminerait les suppositions existentielles si l'on parvenait à prouver que les mathématiques formalisées sont non contradictoires. Hilbert avait conjecturé que cette démonstration était possible. Je rappellerai d'abord comment, en réfutant la conjecture, les théorèmes négatifs de Gödel paraissent fonder définitivement l'existence de réalités mathématiques. Carnap, cependant, a interprété en un sens opposé les mêmes théorèmes, selon lui dépourvus de portée existentielle. J'analyserai en second lieu la réaction surprise, sans doute irritée et, à l'examen, peu convaincante de Gödel : syntaxe carnapienne et platonisme gödelien sont mathématiquement indiscernables. C'est seulement après s'être reporté au théorème gödelien de complétude de la logique afin de reconnaître la spécificité philosophique de la syntaxe, expression moderne de la sophistique, et après avoir tenu compte de ce qui, pour quelque objet que ce soit, distingue réfutation philosophique et démonstration scientifique, qu'on sera en mesure de séparer platonisme et syntaxe et d'accorder au premier une préférence à la fois libre et rationnelle.

I. La conjecture hilbertienne et sa réfutation par Gödel

L'existence est une instance de la quantité d'un concept. Cette remarque a des conséquences numériques : si deux prédicats, P et Q, sont équivalents, c'est-à-dire si l'extension de l'un comprend sous elle celle de l'autre et réciproquement, le nombre des P est égal au nombre des Q. La tradition logique, outre qu'elle se limitait aux prédicats monadiques, assujettissait cependant la comparaison entre extensions de concepts à des conditions très particulières, en admettant au fondement de tous les concepts un domaine d'individus universel ou univers du discours, comprenant un nombre d'individus définitivement fixé [Hilbert/Bernays 1934, note p. 165]. Mais renonçons à cette supposition[1]. Associons à la détermination d'un prédicat son domaine d'individus comme variable cachée. Pour savoir si une formule est satisfiable, n'accordons désormais de pertinence qu'à la structure des domaines, deux domaines ayant même structure ou même nombre cardinal, lorsqu'on peut établir une correspondance bi-univoque entre leurs individus. Les "k-identités" qu'on obtient ainsi pour un prédicat P indiquent qu'il y a au plus k P-objets ou au moins k non-P-objets[2] [Hilbert/Bernays 1934, I, 65]. L'existence déterminée

---

1 Comme nous invite à le faire ce qu'il y a de spécifique dans la complétude du calcul des prédicats monadiques. Le calcul des énoncés est complet en ce qu'il suffit d'ajouter une formule non dérivable aux formules de départ (axiomes) pour qu'on puisse dériver n'importe quelle formule. Au contraire, si aux formules de départ du calcul des prédicats monadiques on ajoute une formule non dérivable, mais vérifiée pour un domaine déterminé de n individus, on ne peut alors dériver que des formules qui certes sont dépourvues de validité universelle, mais qui sont cependant valables pour le même domaine et pour les domaines plus petits, à l'exclusion de formules quelconques (c'est-à-dire qui seraient valables pour un domaine de plus de n individus).

2 Pour $k = 1$:

$(x)\ Px \vee \sim Pa$

est un-identique ($Pa \vee \sim Pa$ est une tautologie). Quant à sa négation :

$(\exists x) \sim Px \cdot Pa$,

elle ne peut être satisfaite dans le même domaine, puisque

$(\sim Pa \cdot Pa)$ est une contradiction.

d'un concept relativement à un domaine (sa satisfiabilité), qui relève de la théorie des modèles, correspond par dualité à la contradiction qu'entraîne sa négation relativement à ce même domaine, contradiction qui relève de la théorie de la démonstration. On lève enfin l'imprécision qui affecte ces énoncés numériques, en ajoutant au calcul des prédicats monadiques les axiomes de l'égalité exprimés dans les limites de ce calcul[3]. On peut dire alors, sans sortir de la logique des prédicats monadiques et *n* étant fini, qu'il y a *n* et seulement *n* individus et qu'ils satisfont tel prédicat. Qu'on étende à présent les prédicat monadiques aux relations du premier ordre. Des énoncés valables pour tout domaine fini et contradictoires pour tout domaine infini deviendront accessibles. On pourra surtout former un énoncé qui n'est satisfiable que sur un domaine infini[4].

Dans un domaine fini on peut nommer chaque individu et éliminer les mots *tous* et *quelques* en réduisant les énoncés universels et particuliers à des conjonctions et à des disjonctions d'énoncés singuliers[5]. L'usage des quantificateurs et de l'appareil logique de la référence n'est qu'une convention d'abréviation des écritures, quelque différence qu'il induise d'ailleurs sur le mode subjectif selon lequel nous nous représentons la quantité. L'existence des universaux n'est pas en question. Il est impossible, en revanche, de montrer tous les individus d'un domaine infini. Comparé à ses prédécesseurs, l'énoncé qui associe alors un tel domaine à son concept a quelque chose d'idéal. De même qu'en théorie des nombres les éléments idéaux généralisent les théorèmes de factorisation, les énoncés idéaux prolongent au delà du fini la portée existentielle du concept.

À trois conditions ce prolongement resterait anodin, autrement dit strictement contenu dans les exigences finitistes.

1°) Décréter variable l'univers du discours, c'était renoncer aux rapports matériels de subsomption entre concepts pour s'en

---

3 $(x)\ x = x$ et $(x)\ (y)\ x = y \supset P(x) \equiv P(y)$. On ne peut exprimer l'identité des indiscernables :
$(P)\ (x)\ (y)\ [P(x) \equiv P(y)] \supset x = y$.

4 C'est le cas pour la célèbre formule de Hilbert :
$(x) \sim R(x,x) \cdot (x)(y)(z)\ [R(x,y) \cdot R(y,z) \supset R(x,z)] \cdot (x)\ (\exists y)\ R(x,y)$.

5 Contrairement à ce qu'ont pensé Wittgenstein et Ramsay, une conjonction infinie d'énoncés singuliers équivaut à une quantification universelle essentielle, spécifiquement existentielle pour un domaine infini [Ramsay 1926, 74 et 77 ; Wittgenstein, 5.524].

tenir aux invariants numériques liés à leurs rapports formels. Dans le fini, cependant, la formalisation s'arrêtait à mi-chemin lorsqu'on exhibait le domaine d'individus. L'infini interdit cette exhibition et demande une formalisation complète. Mais nous pouvons encore tirer parti de la correspondance par dualité entre identités et contradictions numériques. Puisque la négation de l'identité dans son domaine de validité entraîne contradiction, la simple démonstration de non contradiction de l'identité ne justifie-t-elle pas, au point de vue fini, l'existence du domaine et n'élimine-t-elle pas, en cette matière, toute hypostase des universaux ?

2°) En effet, une fois démontrée non contradictoire la formule qui l'exprime, on tiendra pour réduit à un énoncé fini tout énoncé idéal — donc valide dans un domaine infini — construit dans la logique des prédicats du premier ordre avec égalité. La condition est nécessaire, puisqu'un domaine non vide ferait défaut à un énoncé idéal qui se révélerait contradictoire. Elle est suffisante. Traditionnellement, la non contradiction prouve la possibilité, non l'existence d'un concept, et l'on a reproché à Hilbert et à Poincaré d'avoir abusivement subordonné l'usage des formalismes à une démonstration préalable de non contradiction [Bourbaki 1984, 57]. Le reproche est injustifié, puisque, une fois posés des domaines d'individus variables, toute formule non contradictoire est réalisable dans quelque domaine.

3°) Cette démonstration de non contradiction dissimulerait d'évidence une pétition de principe si elle recourait soit à des concepts abstraits dont on ne pourrait pas exhiber effectivement la formule dans l'intuition empirique comme il arrive avec les énoncés de longueur infinie [Gödel, M, §8 p. 9], soit à des règles non finitistes [Gödel, M, §9 p. 9] que les mathématiciens appliquent depuis toujours dans les preuves non formalisées[6] [Gödel, M, note 19 p. 26]. Un secteur de connaissance ainsi restreint ne devra donc contenir que des énoncés décidables et, s'il en contient, des expressions numériques calculables, calcul et décision devant pouvoir être menés à bien en vertu d'une méthode définie. À quelle classe de fonctions arithmétiques exactement définies correspondent ces notions intuitives de décidabilité et de calculabilité ? Celle des fonctions récursives générales, proposée par Gödel, remplit les conditions requises[7].

---

[6] Par exemple quand ils associent à chaque entier naturel son carré.

[7] En 1934, date de la parution de *Die logische Syntax der Sprache*, Hilbert –

Supposons alors qu'un système formel donné formalise adéquatement[8] l'arithmétique élémentaire. Tel est, entre autres, le système N qui ajoute les axiomes de Peano au calcul des prédicats du premier ordre avec égalité [Kleene 1971, § 38 pp. 210-223]. On résoudrait par élimination la question de l'existence des objets arithmétiques en démontrant sans sortir des fonctions récursives générales la non contradiction de la formule correspondant à la conjonction des axiomes de N, formule idéale puisqu'elle est valide dans le domaine infini des nombres naturels. Le recours aux modèles de validation des formules se trouvant exclu, on séparera strictement la langue-objet des formules et la métalangue ou syntaxe dans laquelle on exprimera et démontrera la non contradiction des ces formules en utilisant de façon informelle, mais exclusive la théorie des fonctions récursives. Les difficultés croissantes [Kleene 1971, 222][9] qu'on rencontre pour agrandir les portions de N démontrées non contradictoires firent bientôt pressentir qu'on se heurtait à une impossibilité de principe. Une double innovation fut nécessaire à sa démonstration.

Premièrement, il fallait préciser l'énonce syntaxique disant qu'une démonstration de non contradiction fait défaut pour une formule. On ne saurait ici se contenter d'un procédé empirique

---

Bernays [1934, I, 20-34 et 307-346 ; cité par Gödel, M, note 18 p. 26] définissent la théorie récursive ou finitiste des nombres [Gödel, M, § 28 p. 15] et Gödel [1931] identifie la classe des fonctions récursives générales. Des travaux convergents aboutirent à diverses classes équivalentes, telle celle des fonctions calculables au sens de Turing. La démonstration de leur équivalence incita Church et Turing à les identifier avec la classe définissante requise. En identifiant un *definiendum* intuitif et imprécis avec un *definiens* exact, ces "thèses" reposent sur une convention [Gödel, M, § 24 p. 14]. Mais la convention, dans ce cas, enregistre l'accord des mathématiciens sur la délimitation d'un domaine. Elle n'est donc pas arbitraire. Il faudrait l'abandonner si l'on venait à fournir un exemple de fonction calculable ne rentrant pas dans la classe. En somme, cette convention précise ce que la théorie entend par "raisonnement fini" : «Ce qui caractérise ce point de vue méthodique, c'est que les réflexions auxquelles on procède prennent la forme d'*expérience de pensée* sur des objets, qui sont admis comme déjà présents concrètement» [Hilbert – Bernays 1934, I, 20].

8 Sur cette notion de formalisation adéquate (en rapport à N), cf. [Kleene 1971, 222 et 256].

9 Pressburger a démontré la non contradiction du système N amputé de la définition récursive de la multiplication. Mais le système ainsi obtenu ne serait plus adéquat à l'arithmétique élémentaire.

qui ferait constater que tel procédé de construction échoue, puisqu' «*aucune démonstration* ne doit être possible»[Bourbaki 1984, 61][10]. La célèbre arithmétisation gödelienne de la syntaxe résout la difficulté [Carnap 1937, cité LSL, § 19 pp. 57-58 ; Gödel 1931 ; Ladrière 1957, 93-157] en établissant une correspondance bi-univoque entre expressions et preuves informelles de la syntaxe d'une part, arithmétique formelle d'autre part. Deuxièmement, à un énoncé syntaxique réfléchissant sa propre structure et affirmant sa propre indémontrabilité, l'image de la syntaxe dans la théorie récursive des nombres assigne une relation numérique bien définie [Bourbaki 1984, 60-61]. Cette image, par ailleurs, contient une opération de quantification qui fait sortir de la classe des fonctions récursives [Grzegorczyk 1961, 31, 36 et 41 ; Kleene 1971, 238, 251-253 et 255-261]. Le procédé diagonal auquel on doit l'énoncé syntaxique apparente ce dernier aussi bien à la construction par laquelle Cantor, donné un ensemble dénombrable, démontre l'existence d'un ensemble de puissance supérieure, qu'au Menteur et, plus généralement aux antinomies qui définissent l'appartenance à une classe par la négation de l'appartenance des éléments de cette classe à eux-mêmes [Vuillemin 1964, 77 ; 1967, § 2 pp. 6-8]. S'il prouve un théorème au lieu d'exprimer une contradiction, c'est qu'à la différence du Vrai et du Faux, démonstration et réfutation ne forment pas une disjonction complète. Soit donc G l'énoncé affirmant sa propre indémontrabilité. Si G était démontrable, il y aurait contradiction de la syntaxe de N. Donc si N ne contient pas de formule en même temps que sa propre négation, il n'y a aucune démonstration de G. Si, maintenant, non G est démontrable, il existe un nombre de la démonstration de G (puisque non G affirmerait sa propre démontrabilité), ce qui entraînerait contradiction[11]. Ainsi, si la syntaxe de N est non contradictoire, elle est incomplète. Gödel démontre, de même, que si la syntaxe de N est non contradictoire, cette non contradiction ne peut être démontrée dans N.

II. Equivalence mathématique entre syntaxe et platonisme

Nul philosophe n'a mis autant de soin que Carnap à suivre Gödel dans la leçon et dans la méthode de ses théorèmes négatifs. Nul autre que lui n'a contesté aussi radicalement la philosophie implicite que Gödel en avait tirée.

---

[10] Bourbaki souligne par deux fois les mots : *aucune démonstration.*

[11] Le théorème gödelien, plus faible, fait intervenir la condition plus forte de ω-non-contradiction [Bourbaki, 1984, note * p. 61].

Gödel avait montré d'abord comment construire dans la langue objet l'image mathématique définie de la méta-langue ou syntaxe. C'était la condition pour poser en termes mathématiques le problème philosophique de l'existence mathématique. La syntaxe de Carnap généralise le procédé. Elle applique à la philosophie tout entière le programme de Hilbert et elle étend la langue objet à l'ensemble des sciences tout en bornant la langue philosophique à la syntaxe de la science. Le moment décisif de la méthode consiste à construire l'image de la syntaxe dans le langage formalisé de la science. Pour qu'on puisse traduire un énoncé syntaxique en énoncé scientifique, il faudra que l'image arithmétique de la syntaxe fasse place à l'image de la syntaxe générale dans la syntaxe de la science. Cette dernière image exige qu'on transforme profondément les énoncés ordinaires de la philosophie des sciences, et, en particulier, de la philosophie des mathématiques. Spontanément exprimés dans le mode matériel du discours, ils sont demeurés jusqu'ici indissociables de la métaphysique, du non-sens et des pseudo-questions. Ils ne seront susceptibles d'une réponse par *oui* ou par *non*, qu'une fois reconstruits dans le mode formel, à la façon de la question hilbertienne traduite par Gödel dans le langage de l'arithmétique. La syntaxe de la science étant elle-même formalisée, l'image qu'on y peut former des énoncés syntaxiques exclut donc toute relation aux "contenus" et ne porte que sur les rapports de structure entre les signes. La substitution du mode formel au mode matériel est la première innovation de la syntaxe, d'autant plus urgente que les expressions de départ sont générales et, par là, invitent plus facilement à la confusion.

Certes les théorèmes de limitation suivront inévitablement la formalisation. C'est le prix que les philosophes doivent payer pour se rendre à l'invitation leibnizienne : *Calculemus* ! Ils constatent alors qu'ils sont en mesure de résoudre leurs conflits, que ces derniers, par exemple lorsque réalistes et intuitionnistes s'opposent, dépendent de la latitude des moyens autorisés dans la syntaxe logique du langage, et que le choix d'un langage est affaire de convention et de tolérance. Somme toute, ce que le théorème de Gödel est à la théorie de la démonstration de Hilbert, *La Syntaxe logique du langage* de Carnap (1937) l'est au *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein (1922). Hilbert a conjecturé en philosophe et dans le mode matériel du discours la démontrabilité de la non contradiction et de la complétude de l'Arithmétique formelle. Gödel a exprimé en mathématicien, dans le mode formel, cette conjecture et l'a réfutée. De même, Wittgenstein ayant conjecturé que la logique fixait ses limites à la possibilité de la connaissance et du sens, Carnap a traduit formellement cette conjecture et l'a confirmée.

Aboutissement conséquent et réfléchi du formalisme contemporain, la syntaxe recueille le suffrage de la majorité des mathématiciens. S'il avait systématisé et justifié ses démarches, Bourbaki l'aurait fait sienne, et, comme en font foi les *Éléments d'histoire des mathématiques*, entre Hadamard et lui il y a sensiblement le même rapport qu'entre Gödel et Carnap. 1°) La syntaxe éradique les conflits philosophiques en les faisant dépendre d'un mode du discours, et le mathématicien, en tant que tel, n'a pas à s'inquiéter de décisions philosophiques ou psychologiques qui, pour autant qu'elles sauvent l'intégralité des mathématiques et qu'elles préservent la liberté des mathématiciens «se rejoignent sur le terrain proprement mathématique» [Bourbaki 1984, note p. 47][12]. 2°) L'accord des mathématiciens sur l'intégralité de leur science est lui-même un fait objectif, généralement accepté et qu'il faut préserver, en particulier contre ceux qui, tels les intuitionnistes, le contestent en prétendant le fonder [Bourbaki 1984, 48 et 52], mais aussi contre ceux qui, dans l'école réaliste, l'associent aux incertitudes de l'intuition [Bourbaki 1984, 48]. Ce qui rend possible l'accord, c'est son caractère syntaxique. Il se fait sur un système de signes [Bourbaki 1984, 50][13]. 3°) Un tel formalisme ne saurait demeurer prisonnier de la théorie de la démonstration, et il est aussi déraisonnable d'exiger une démonstration de non contradiction au delà des limites de cette théorie que de convoquer en ces matières l'intuition psychologique [Bourbaki 1984, 63]. Au principe est le signe. Oui, mais cette maxime n'est pas un début d'évangile : le signe reste une création humaine quand bien même il a pour objet l'infini. 4°) Les géométries non euclidiennes, au moyen desquelles le formalisme s'est introduit en mathématiques, ont généralisé le nominalisme et réduit la vérité à un fait de langage. Choix des signes, jeux et conventions d'emploi [Bourbaki 1984, 47 ; Carnap, LSL, § 38a p. 142] prenant la place des contenus [Bourbaki 1984, 48][14], tout, dans la syntaxe, manifeste ce qu'il y a de verbal dans les universaux.

---

[12] Bourbaki range Hadamard parmi les "idéalistes", ou partisans des idées au sens platonicien, c'est-à-dire parmi les "réalistes". Hadamard avait, sur ce point, répondu à Poincaré, dans la Note IV d'E. Borel [1950, 173].

[13] Il y a là une sorte d'"objectivité faible" qui rapproche les formalistes en mathématiques des "opérationalistes" en physique.

[14] Sur les avantages et les limites de ce type de nominalisme, cf. [Beth 1959, 476-477].

Deux antinomies apparentes[15] opposent dès lors le réalisme d'un Hadamard ou d'un Gödel au formalisme d'un Bourbaki ou d'un Carnap :

(1) «Les mathématiques ne peuvent pas être interprétées comme une syntaxe du langage» [Gödel, M, § 5, p. 8].	(1)' «Les mathématiques peuvent être entièrement réduites à une syntaxe du langage»[16].
(2) «Les énoncés mathématiques ont un contenu» [Gödel, M, § 5, p. 8].	(2)' «Les mathématiques sont un système d'énoncés auxiliaires sans contenu ni objet»[17].

On ne saurait, dit la preuve gödelienne, démontrer intrinsèquement la non contradiction d'un système formel contenant l'arithmétique et, par implication [Cf. Heinzmann/Proust 1988, 267], une sémantique formalisée dans le langage S ne saurait définir : "analytique dans S". Articulons donc ces résultats, mais en les traduisant du mode matériel dans le mode formel. À chaque proposition spécifiant matériellement la première antinomie et dénonçant la syntaxe, la syntaxe fait correspondre un énoncé formel qui légitime et annule cette proposition.

---

[15] Elles articulent les deux critiques gödeliennes de la syntaxe [Gödel, M, § 5 pp. 7-8]. La première est négative : le nominalisme conventionnaliste qui définit le programme de la syntaxe [§§ 1-4 p. 7] ne peut qu'échouer parce que ses exigences contredisent ses ambitions [§§ 6-29 pp. 8-16]. La seconde est positive : les mathématiques ont pour objet des contenus et l'on ne saurait éliminer l'intuition mathématique ou l'induction empirique dont ces contenus relèvent [§§ 29-46 pp. 16-22].

[16] Gödel résume en ces mots le programme du positivisme logique. «Un langage formalisé, écrit Bourbaki [1984, 49-50] a rempli sa tâche lorsqu'il peut transcrire les raisonnements mathématiques sous une forme dépourvue d'ambiguïté, et servir ainsi de véhicule à la pensée mathématique».

[17] Carnap cité par Gödel [M, § 1 p. 7]. Bourbaki précise ainsi son interprétation de la "pensée" mathématique : «Libre à chacun ... de penser ce qu'il voudra sur la "nature" des êtres mathématiques ou la "vérité" des théorèmes qu'il utilise, pourvu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun» [Bourbaki 1984, 50].

Mode matériel	Mode formel
(1a) Ayant pour objet la théorie de la démonstration, la syntaxe est inadéquate dès que le vrai est en excès sur le démontrable dans un système formel.	(1a)' Même le langage défini L I (à quantificateurs bornés) est incomplet [Carnap, LSL, § 36, p. 134].
(1b) La syntaxe ne peut contenir l'analyse [Gödel, M, § 7, pp. 8-9].	(1b)' La syntaxe exige l'appareil expressif et démonstratif de la langue indéfinie L II.
(1c) On ne peut définir dans L II *analytique* et *contradictoire dans L II* [Gödel, M, § 11, pp. 9-10].	(1c)' *Analytique* et *contradictoire dans L II* sont définissables sans être définissables dans L II [Carnap, LSL, § 34, p. 111 et p. 113][18] (même théorème pour G, syntaxe générale) [Carnap, LSL, § 60c, Théorème 60 c.1, p. 219].
(1d) Le programme syntaxique ne peut qu'échouer [Gödel, M, §§ 23-29, pp. 13-16].	(1d)' On peut construire dans L II un énoncé analytique et irrésoluble dans L II, comme on pouvait construire dans L I un énoncé analytique et irrésoluble dans L I.

La première antinomie se résout à rien, à des différences près en matière de classification. Mais il y a plus. Sans que nous soyons en mesure de traduire les mots "contenu intuitif" en termes syntaxiques, la comparaison entre les deux énoncés suivants en propose une traduction contextuelle :

---

[18] La difficulté tient à la divergence entre *analytique et démontrable* (§ 34a et la critique de l'erreur commune à Wittgenstein et à Schlick pp. 101-102).

«Le contenu des mathématiques est illimité dans le sens suivant : En dehors de tout système axiomatique formalisant une vérité mathématique, il existe des propositions exprimant des faits mathématiques nouveaux et indépendants en ceci qu'ils ne peuvent être réduits à des conventions symboliques fondées sur les axiomes du système» [Gödel, M, note 36, p. 30].	«Tout ce qui est mathématique peut être formalisé, mais les mathématiques ne peuvent être épuisées par un seul système ; elles requièrent une série infinie de langues toujours plus riches» [Carnap, LSL, § 60d, p. 222].

La distinction entre isomorphisme et isomorphisme-syntaxique [Carnap, LSL, §§ 71a-71d pp. 260-270][19] viendrait ici, à point nommé, illustrer comment la formalisation même rend compte de ses propres limites en dissipant le paradoxe créé par le théorème de Löwenheim - Skolem.

Pas plus que les mathématiques pures, les mathématiques appliquées ne font de différence entre réalisme et formalisme. Gödel [Gödel, M, § 7 pp. 8-9] n'évoque les secondes que parce qu'elles mettent à contribution l'intégralité de l'analyse et des mathématiques classiques. Carnap, en revanche, les utilise dans l'intention de résoudre dans toute sa généralité le conflit entre formalisme et logicisme. Interprété d'abord au sens restreint et ancien de l'opposition entre théorie finitiste de la démonstration hilbertienne et réduction russellienne des mathématiques à la logique, le conflit confrontait deux définitions irréconciliables du nombre, là l'appartenance à un genre spécifique et irréductible d'objets, ici une classe de classes de choses ; il suffirait de traduire ces définitions du mode matériel dans le mode formel [Carnap, LSL, § 78 p. 300], ici expressions classificatoires de second niveau, là expressions de niveau zéro pour résoudre la prétendue question philosophique. Carnap donne ensuite au mot *formalisme* son acception générale. Il identifie cette fois le formalisme avec les mathématiques pures (langue II), le logicisme recouvrant l'ensemble des mathématiques pures et appliquées. La solution du conflit dépend de la construction

[19] Sur ce théorème, voir plus bas p. 289.

d'une syntaxe générale : le logicisme exige plus que la seule syntaxe mathématique et requiert «une syntaxe du langage total qui contient à la fois les énoncés logico-mathématiques et des énoncés synthétiques» [Carnap, LSL, § 84 pp. 326-327]. Cette extension hors du domaine analytique conduit au point culminant de la *Syntaxe logique du langage*, qui résout le problème des fondements des mathématiques [Carnap, LSL, § 84 pp. 325-328] en le déplaçant des mathématiques pures aux mathématiques appliquées. Mais *synthétique* traduit-il réellement dans le mode formel et, cette fois, sans recourir au contexte, la propriété des énoncés que le mode matériel appelle *pourvus de contenu* ? Aux prises avec un dénombrement, le calculateur a d'évidence besoin d'un concept descriptif, qu'il conçoive par ailleurs le nombre comme une suite de bâtonnets ou comme une classe de classes. Or la suite de bâtonnets résout en termes de données sensibles et donc élimine la question du contenu que la classe de classes pose, à tort ou à raison, relativement à l'existence d'un contenu non sensible, irréductible à la multiplicité finie des objets et des signes. Définir le contenu mathématique par le rapport de la syntaxe à la physique, c'est alors commettre simplement «une pétition de principe, en ceci que "fait" est identifié dès le départ à "fait empirique", c'est-à-dire à "fait synthétique en rapport avec des sensations"» [Gödel, M, § 37 p. 18 et note 37 p. 30].

Sauf à déplacer la question des fondements, nous voici donc en présence de jumeaux mathématiques indiscernables. Hors du fini, dit Gödel, il est circulaire de fonder l'existence sur une preuve de non contradiction. La non contradiction d'un formalisme, répond Carnap, n'est démontrable que dans un formalisme plus puissant que lui et la hiérarchie des langues fournit l'image syntaxique du cercle dans la preuve. Hadamard oppose à Hilbert et à Poincaré que l'existence se constate [Bourbaki 1984, 57]. Bourbaki approuve et renchérit. Ce qu'on constate, c'est l'existence des signes [*ibid.*, note]. Le différend ne relève ni de la psychologie, ni du style du mathématicien. Les «propriétés de nos cerveaux» [Bourbaki 1984, 52] n'intéressent pas plus Bourbaki que Hadamard. Héritiers communs de Frege, Gödel [M, note 37 p. 30] et Carnap [LSL, § 14 p. 42 et § 72 p. 278] s'accordent sur l'irrecevabilité du psychologisme. C'est bien une question de philosophie [Bourbaki 1984, note ** p. 47] qui sépare formalistes et réalistes. Mais qu'est-ce qu'une question de philosophie ?

III. Syntaxe et sophistique

Entre celui qui affirme et celui qui nie que la question de savoir s'il existe des réalités mathématiques a un sens, le seul désaccord objectif identifié relève de la classification. On montrera d'abord qu'il porte sur le théorème gödelien positif de complétude de la logique.

L'examen des critères classificatoires auxquels obéissent réalisme et syntaxe fera ensuite apparaître la singularité classificatoire de la syntaxe. On retrouvera troisièmement dans cette singularité la marque de la sophistique et l'on précisera quatrièmement qu'une réfutation de la sophistique obéit au critère spécifique de la réfutation philosophique en l'affaiblissant encore pour l'occasion.

1. Désaccord sur la question de savoir jusqu'où s'étend la logique

Le théorème de complétude des prédicats du premier ordre s'oppose au théorème d'incomplétude du système de l'arithmétique formelle d'une façon, pour ainsi dire, duale. Tandis que la preuve d'incomplétude appartient à la théorie de la démonstration, la preuve de la complétude fait coïncider démontrabilité et vérité, deux notions qui relèvent la première du finitisme, la seconde de la théorie non constructive des modèles, en utilisant le principe abstrait du tiers exclu, duquel résulte l'indécidabilité du calcul des prédicats [Church 1956, I, note 412 p. 235 ; Kleene 1967, 328 ; Gödel 1930][20].

---

[20] L'utilisation du tiers fournit un exemple caractéristique de ce que Gödel appelle un concept abstrait. À la formule *F* dont on se propose de démontrer que, si elle est universellement valide, elle est démontrable, on fait correspondre une formule dépendant d'un indice numérique et telle que, quelle que soit la valeur de cet indice, elle est ou n'est pas une thèse de la logique des énoncés ; si elle l'est pour une valeur de l'indice alors *F* est démontrable, tandis que, si *F* n'est pas démontrable, la formule indiciée n'est une thèse pour aucune valeur de l'indice. Quant à la question de savoir, pour une formule *F* donnée, lequel des deux cas est réalisé, la méthode de preuve ne fournit aucune solution du problème de la décision. C'est ici que la démonstration du théorème de complétude fait inévitablement appel au concept abstrait et indécidable du tiers exclu : ou bien il existe un nombre *n* tel que l'énoncé indicié est une thèse de la logique des énoncés, ou bien cela n'est vrai pour aucun nombre. Les intuitionnistes refusent de reconnaître la légitimité d'un tel concept. Le surplus que la preuve emprunte à la théorie des modèles pour démontrer l'équivalence entre ce qui est valide et ce qui est démontrable a précisément pour conséquence l'indécidabilité du calcul des prédicats, puisque la complétude n'implique nullement que nous soyons en mesure de décider si telle formule est ou n'est pas valide, une fois que l'infinité du domaine des individus prive d'un procédé mécanique pour calculer les tables de vérité. Beth [1959, 253] remarque qu'un second argument non finitiste est requis si, à partir du fait qu'aucune des formules indiciées n'est une thèse de la logique des énoncés (et non de la logique élémentaire comme l'écrit par inadvertance Beth), nous désirons conclure que, quel que soit *n*, il y a une valuation invalidant cette formule (d'où l'on voit qu'il y a un contre-exemple prouvant que *F* n'est pas une thèse de la logique élémentaire).

Aux limites dans lesquelles le premier ordre contraint la théorie des modèles font pendant les théorèmes de Löwenheim – Skolem. Un énoncé satisfiable est satisfiable dans un ensemble dénombrable[21]. Ce résultat entre en conflit apparent avec le théorème de Cantor, en vertu duquel l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable. Le paradoxe s'évanouit quand on note que l'ensemble énumérant les paires ordonnées qui mettent le domaine dans lequel l'énoncé est satisfait en correspondance bi-univoque avec les entiers naturels «n'est pas lui-même un ensemble admis dans la théorie axiomatique» [Kleene 1971, 329]. Il reste qu'en formalisant dans le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité une théorie axiomatique on laisse nécessairement échapper une partie du contenu des axiomes. L'"anomalie" [Kleene 1971, 329] affecte aussi bien les concepts abstraits de l'arithmétique que les concepts transcendants de la théorie des ensembles ; à la satisfiabilité dans le dénombrable de toute formule universellement valide fait donc écho l'existence des modèles non standard de l'arithmétique formelle [Kleene 1971, § 53 pp. 326-336]. Mais on a vu les interprétations de ces théorèmes restituer le conflit entre réalisme et syntaxe : ces modèles non standard de l'arithmétique aussi bien que de la théorie des ensembles indiquent pour les uns l'inadéquation de tout langage à la pensée des contenus, pour les autres la relativité des notions arithmétiques ou ensemblistes qu'induit la régression à l'infini propre au langage de la science.

Puisque, dit l'interprétation réaliste, l'arithmétique formelle qui ajoute le calcul des prédicats au système d'axiomes de l'arithmétique est incomplète et que le calcul des prédicats est complet, le système des axiomes de l'arithmétique est incomplet [Gödel, M, note 26 p. 27 ; Kleene 1971, § 53 p. 333]. Poincaré avait donc raison, lorsqu'il affirmait que les vérités mathématiques et, particulièrement, le principe d'induction complète ne se réduisent pas aux vérités logiques : les axiomes arithmétiques sont bien synthétiques *a priori* relativement aux identités logiques, sans qu'il faille pour autant exclure qu'on puisse et qu'on doive les déduire des vérités analytiques propres à la théorie des ensembles. Quoiqu'étendu aux relations, le domaine de la logique se trouve ainsi naturellement délimité par la complétude et la neutralité existentielle, cette dernière résultant de la pauvreté bien venue des moyens d'expression. Aussi le théorème d'incomplétude de 1931 vise explicitement les *Principia Mathematica* et, dans les *Principia*

---

21 Sur le lien entre le théorème de complétude de Gödel et ces théorèmes, cf. [Kleene 1971, Théorème 35b pp. 316-317 ; Ladrière 1957, 353-378].

Mathematica, la thèse logiciste qui tient abusivement pour logiques des contenus mathématiques strictement inaccessibles à la logique des prédicats du premier ordre et à ce titre, existentiellement engagés.

Bien au contraire, l'interprétation formaliste fait l'économie de cette existence en maintenant le logicisme russellien. Certes, «tandis que les *concepts fondamentaux* du système sont visiblement de nature purement logique, la nature des *principes fondamentaux* est en partie problématique» [Carnap 1930-31, 310], et l'on ne pourra fonder les axiomes remplaçant ces principes sur une preuve de non contradiction, impossible à administrer dans la langue même où l'on a formalisé les axiomes. Cela étant et la détermination des concepts ne dépendant que des axiomes qui les formalisent, rien n'empêche de construire un langage plus riche que celui qui servait de cadre à la formulation de départ. Une fois distingué dérivation et conséquence logiques [Carnap, LSL, § 34a p. 101 ; Heinzmann/Proust 1988, 259 et 261] et donc démontrable et analytique, pourquoi continuer d'imposer à la syntaxe les bornes de la combinatoire qui contraignaient la théorie de la démonstration et qui, seules, empêchent d'identifier vérités mathématiques et vérités logiques ? La syntaxe ne sera plus strictement finitiste, ni même strictement syntaxique, en vertu de l'indéfinissabilité de certaines propriétés dans un système[22]. Du moins restera-t-elle authentiquement formaliste, à condition d'entendre le formalisme en son sens le plus étendu. Le théorème de complétude n'isole plus la logique au sein d'une théorie analytique plus vaste qu'elle. Il isole au sein des énoncés logiquement vrais ou mathématiques ceux qui ne contiennent ou bien aucune variable ou bien aucune variable autre qu'individuelle [Carnap 1960, § 26a p. 102][23]. Quant aux démonstrations de non contradiction, elles ne doivent pas faire illusion. Leur portée, seulement rétrograde[24], s'accorde avec la hiérarchie infinie des langages qui définit la logique de la science.

---

[22] Sur les difficultés rencontrées par Carnap pour définir "analytique dans L II", les critiques gödeliennes et l'adoption d'un point de vue en réalité sémantique, cf. [Heinzmann/Proust 1988, 265].

[23] La *Logische Syntax der Sprache* mentionne dans la bibliographie le théorème de complétude ; elle n'en fait aucun usage.

[24] Lorsqu'il utilise des moyens non finitistes de preuve, Carnap, en toute rigueur, ne commet pas le cercle dénoncé par Gödel [M, § 19 p. 12]. Il n'attache pas, en effet, aux démonstrations ainsi obtenues d'importance décisive et conserve, à leur égard, la circonspection de l'école hilbertienne quand elle les emploie. Hilbert lui-même et Ackermann ont démontré la non contradiction du calcul des prédicats du premier ordre en interprétant arithmétiquement ses axiomes et ils

2. Instabilité classificatoire des *Principia Mathematica* et paradoxe classificatoire de la syntaxe.

Tirer du théorème de complétude de la logique ses conséquences classificatoires, c'est expliciter les questions sous-jacentes à la classification en philosophie des mathématiques. Ces questions sont malaisées à débrouiller, en particulier parce que, contre l'intention de ceux qui les posent, rien n'assure que les réponses qu'elles appellent soient logiquement indépendantes.

Faut-il, demande-t-on en premier lieu, accepter ou rejeter l'existence des objets mathématiques abstraits ou transcendants postulés dans les théories axiomatiques des ensembles (telles que la théorie gödelienne), et dont la non contradiction intrinsèquement indémontrable ne peut être que présumée ?

Répondre *oui* à cette première question, c'est refuser de limiter la pratique du mathématicien en l'amputant, en la compliquant ou en

---

on étendu cette démonstration au calcul des prédicats d'ordre ω [Hilbert/Ackermann 1950, 87-88 et 158-163]. Mais il ne faut pas, précisent-ils, surestimer la signification de cette démonstration. «Elle revient à dire que nous supposons que le domaine des individus attaché aux axiomes ne contient qu'un seul élément et donc est fini. Nous n'avons absolument aucune assurance que l'introduction formelle de postulats irréprochables quant à leur contenu conserve la non contradiction du système des théorèmes. Par exemple, demeure sans réponse la question de savoir si l'addition d'axiomes mathématiques ne rendrait pas, dans notre calcul, démontrable une formule arbitraire. Ce problème, dont la solution a une importance mathématique fondamentale, est incomparablement plus difficile que la question dont il est ici traité. Les axiomes mathématiques assurent en fait un domaine d'individus infini, et c'est au concept d'infini que se trouvent liés les difficultés et les paradoxes qui jouent un rôle dans la discussion des fondements des mathématiques» [p. 88]. Or Carnap ne dit rien d'autre. Rappelant le théorème gödelien d'incomplétude, il prouve la non contradiction du langage II (le langage indéfini) «qui contient les mathématiques classiques», en précisant aussitôt «qu'elle ne représente en aucune façon une solution du problème hilbertien. Notre preuve dépend essentiellement de l'usage de termes syntaxiques tels qu'*analytique*, qui sont fortement indéfinis et qui, de plus, dépassent les ressources dont le langage II dispose. C'est pourquoi la portée de la preuve de non contradiction qu'on vient de présenter ne doit pas être surestimée. Même si elle ne contient aucune erreur formelle, elle ne nous donne aucune certitude absolue que des contradictions ne peuvent pas se produire dans le langage objet II. En effet, puisque la preuve est obtenue dans un langage syntaxique plus riche que le langage II, rien ne nous garantit contre l'apparition de contradictions dans ce langage-syntaxique, et donc dans notre preuve» [Carnap, LSL, § 34i p. 129].

la gauchissant. Pour peser le *pour* et le *contre*, et quelqu'argument qu'il avance en faveur de sa décision conservatoire, l'axiomaticien devra être en mesure de comparer l'extension des mathématiques classiques et cantoriennes qu'il est à même de sauvegarder avec les portions laissées intactes par ses adversaires. La comparaison est aisée quand celles-ci forment une partie propre, plus ou moins étendue, de celle-là. Il en va de la sorte pour le nominalisme dans la mesure où l'on entend par ce terme une extension conservatrice de la théorie de la démonstration, ainsi qu'il arrive lorsque, placé devant un théorème négatif ayant pour objet la décidabilité ou la catégoricité, on s'intéresse à telle classe particulière de formules ou à telle relations dont les règles ne relèvent pas directement de la logique et définissent un calcul spécifique. La syntaxe s'accorde et avec le réalisme et avec les *Principia Mathematica* pour revendiquer l'intégralité des mathématiques ensemblistes.

On se demande, en second lieu, si l'existence mathématique est spécifique ou si rien ne distingue vérité mathématique et vérité logique. La réponse, ici, dépend des conséquences qu'on tire du théorème de complétude de la logique. De concert avec les *Principia Mathematica*, la syntaxe s'oppose au réalisme en réduisant les mathématiques à la logique. Puisqu'enfin son rapport cavalier aux axiomes non logiques des *Principia Mathematica* distingue encore la syntaxe et la philosophie implicite de cet ouvrage, il faut poser une troisième question pour rendre possible une classification complète. C'est cette dernière question qui fait difficulté. Elle ne départagera Russell de Carnap qu'au prix d'une double anomalie classificatoire, en révélant l'instabilité de la philosophie de Russell et en rejetant la philosophie de Carnap hors classification.

Quelle est donc cette question et quelle philosophie implicite supposent les *Principia mathematica* en lui répondant ? Puisque ce qui a mis les mathématiciens en demeure de formaliser la théorie des ensembles, ce sont les antinomies qui affectent la théorie naïve des ensembles, interrogeons-nous sur la nature de ces antinomies. L'accord n'existe pas en cette matière, mais il est assez remarquable que des adversaires tels que Poincaré et Russell se soient rencontrés pour les expliquer par une même raison. Elles transgressent le principe du cercle vicieux : les expressions antinomiques violent les règles de la grammaire logique. Distribuons, comme le veut cette dernière, concepts et expressions selon les types et les niveaux hors desquels il sont dépourvus de sens. Les contradictions disparaissent et la logique, ainsi naturellement organisée, se trouve dotée de tous les moyens d'expression et de déduction requis par les mathématiques. Une telle classification naturelle est caractéristique du conceptualisme. C'est elle, par contraste avec les classifications artificielles, qui loge l'universel à sa vraie place, non pas dans les idées avant la chose, non plus qu'après elle dans les mots, mais dans la chose même.

Aristote, le premier, avait identifié classification naturelle et logique. Pour qu'un universel soit authentiquement dans la chose sans qu'il soit possible soit de l'hypostasier avant elle soit de le réduire, après elle, à la trace verbale que laisse l'abstraction, il faut, précisait-il, que cet universel soit prédiqué synonymement d'elle, c'est-à-dire qu'il la qualifie comme une substance, comme fait l'humanité de Socrate ; en revanche il relève d'une abstraction de la pensée et tend à rejoindre les pseudo-universaux nominalistes quand il n'est dit de la chose que parce que l'une de ses instances est dans cette chose, accidentellement donc, comme la blancheur est dite de Socrate et est en elle. La classification naturelle expose les liaisons logiques, c'est-à-dire nécessaires entre concepts, laissant aux classifications artificielles le soin de regrouper leurs liaisons empiriques, c'est-à-dire contingentes. L'évolution des sciences physiques et biologiques a rendu problématique l'opposition ainsi formulée. Mais faisons un pas de plus dans la voie ouverte par Aristote. Annexons à la logique la province des mathématiques. Le logicisme ne rassemble-t-il pas de la sorte tout ce qui est formel ou analytique dans le monde, et qui s'oppose, légitimement à présent qu'on l'a épuré de tout contenu, aux données matérielles ou synthétiques ? Par leur réponse positive, Wittgenstein et les positivistes logiques reconduisent l'hylémorphisme aristotélicien. Ils le réforment aussi en identifiant la classification naturelle avec la logique entendue au sens des *Principia Mathematica.*

Que dit cependant la nature ? Une classification est naturelle — la cohérence étant le signe de cette nature —, quand elle donne toute sa force au principe du cercle vicieux. C'est pourquoi le conceptualisme doit éliminer les définitions imprédicatives[25], qui supposent déjà donnée par une quantification objective la classe dont toute l'extension est précisément requise pour déterminer l'individu[26]. De telles définitions sont courantes en mathématiques.

---

[25] Là est la question, dit Gödel s'interrogeant sur la logique russellienne [Russell 1944, 205 et 213].

[26] Carnap [LSL, § 44] exprime clairement cette supposition, lorsqu'à partir de l'abréviation

(1) $M(F,x) \equiv \{(F(7) \cdot (y)\,[F(y) \supset F(y')]) \supset F(x)\}$,

il forme la définition imprédicative :

(2) $P(x) = (F)\,[M\,(F,x)]$

qu'on lira : x possède toutes les propriétés héréditaire de 7. Carnap [163], réfute le prétendu non-sens d'une telle définition, ce qui n'est pas la question ici posée.

Telle est, par exemple, celle de la plus petite borne supérieure d'un ensemble de nombres réels[27]. C'est l'interdiction des définitions imprédicatives qui entraîne dans les *Principia mathematica* la ramification de chaque type de la hiérarchie logique simple en une hiérarchie nouvelle de niveaux. Les complications créent des difficultés insurmontables, en particulier en analyse[28]. Ce n'est pas accidentellement, car, en contestant le principe qui subordonne la définition des ensembles à une hiérarchie de niveaux, c'est le principe même du conceptualisme qu'on contesterait. On légitimerait alors des universaux préexistant à notre capacité d'accéder aux choses dans lesquelles ils sont, et l'on ne serait jamais assuré que les universaux sont dans les choses, puisque le concept de l'une de ces choses peut supposer les concepts d'universaux. Voici donc déterminée la troisième question classificatrice : les concepts mathématiques doivent-ils obéir à une norme constructive ? Mais la réponse positive à cette question est-elle compatible avec le réquisit d'intégralité ? Pour qu'elle le fût, il faudrait que l'analyse employât uniquement des définitions prédicatives ou que l'axiome de réductibilité qui permet de se passer de celles qui ne le sont pas pût être introduit sans pétition de principe. Au conceptualisme incombe la preuve. On se payerait de mots, d'ailleurs, si, dans les définitions incriminées, on remplaçait les classes par les concepts qui en déterminent l'extension : ce faisant, on obscurcirait l'imprédicativité, on ne l'éliminerait pas. Si, dans les définitions imprédicatives, les variables de quantification admettent des classes irréductibles pour valeurs, et si exister mathématiquement, c'est être la valeur d'une variable, c'est donc bien au conceptualisme, prédicativiste par nature, de relever le défi de l'intégralité[29].

---

27 Pour fixer les idées, considérons la fonction $y = \frac{1}{x^2+1}$. Aux valeurs de x voisines de zéro correspondent les valeurs de y voisines de 1 et aux valeurs de x croissant indéfiniment vers $\pm\infty$ correspondent des valeurs de y diminuant indéfiniment vers zéro. L'ensemble des valeurs de y est l'intervalle $Y = \{]0,1]\}$; 1 est la plus petite borne supérieure de Y. On peut la définir :

y est la plus petite borne supérieure de l'ensemble Y de nombres réels $=_{Df}$ pour tout nombre réel z, il y a en Y un nombre réel u plus grand que z si et seulement si z est plus petit que y :

$(z)\ [(\exists u)\ \{u \in Y \cdot u > z \equiv z < y\}$.

La définition est imprédicative. En effet l'ensemble Y (fermé à droite) contient l'élément y, qui ne peut être défini, comme le dit explicitement le membre gauche de l'équivalence, qu'au moyen de cet ensemble.

28 Un nombre réel est un ensemble de nombres rationnels, par exemple une borne supérieure d'un tel ensemble. Une borne supérieure de réels sera donc d'un niveau supérieur et ne pourra être identifiée avec la précédente, et ainsi de suite [cf. Fraenkel 1928, 260].

29 Le conceptualisme ainsi entendu conservera les parties des mathématiques

La question, il est vrai, serait résolue, ou plutôt elle cesserait de se poser si l'on se trouvait dispensé d'attribuer l'être aux valeurs de la variable. L'exigence de prédicativité ne se traduirait plus alors en termes de restrictions constructivistes, puisque classes et concepts indéfinis demeureraient sans portée réelle. Et comme le seul matériau qui soit indiscernable de l'être et ontologiquement neutre est l'apparence, c'est au scepticisme qu'il reviendrait de vérifier simultanément les postulats de l'intégralité et du logicisme, tout en assignant aux normes constructives un statut subjectif qui les rend compatibles avec les concepts indéfinis. L'analyse de la description définie débusquait un défaut d'indication, la fonction d'expression prenant en charge tout ce qui paraissait relever de la fonction de dénotation. Il ne s'agit que d'étendre l'analyse aux universaux, en faisant voir comment, quand on parle d'ensembles imprédicatifs ou simplement d'ensembles, on se laisse prendre au mots, l'appareil logico-mathématique ne dissociant jamais l'objectif du subjectif, l'indication de la croyance. Mais si les instruments analytiques mettent le locuteur en demeure de comprendre un énoncé et d'exprimer une croyance, sans que ces opérations subjectives de la connaissance prétendent refléter la nature des choses, pourquoi le philosophe analytique irait-il extraire les variables de l'ordre commun des signes ? Pourquoi demanderait-il aux classes et aux concepts imprédicatifs de dénoter des universaux tenus pour réels, quand le conceptualisme après tout et l'analyse en tout cas le pressent de les réduire à des façons indirectes de dénoter les individus à travers des apparences d'universaux ?

Est-ce sur ce mol oreiller du scepticisme qu'a reposé Russell, gagné à l'indifférence en matière de fondement des mathématiques[30] ? L'instabilité classificatoire du conceptualisme

---

conformes aux normes du prédicativisme. Par exemple, il utilisera intuitivement l'induction transfinie jusqu'à tel ou tel ordinal dénombrable pour démontrer la non contradiction de l'arithmétique formalisée ou pour tourner les obstacles auxquels expose le refus des définitions imprédicatives.

30 Ainsi peut-on caractériser l'*Inquiry into Meaning and Truth* [Russell 1940]. Hors les tautologies, il a fallu introduire l'axiome de l'infini, l'axiome de réductibilité, l'axiome du choix. Que disent-ils, eux ou leurs substituts ? Le premier garantit qu'aucun nombre ne se confondra avec son prédécesseur. À la place du second, Russell introduit dans le langage du premier ordre des conjonctions et des disjonctions infinies d'énoncés élémentaires. Le troisième requiert enfin, pour tout ensemble de classes mutuellement exclusives et existantes, l'existence d'une classe comprenant un représentant de chacune des classes en question. Apparemment, et par trois fois, nous postulons l'existence d'individus, d'états de choses, et même de classes. Mais regardons-y de plus près et nous verrons s'évanouir cette ontologie chimérique. Rien n'existe, en effet, que les faits

s'explique assez par son lien avec le logicisme. Expression de la classification naturelle[31], ce dernier n'entreprend en effet de réduire

singuliers, objets des énoncés singuliers. Les plus simples parmi ces derniers indiquent ce qu'ils expriment ; plutôt que des énoncés proprement dits, ce sont des termes-objets dépourvus de toute variable, tels : "J'ai chaud" ; leur indubitabilité les soustrait à la possibilité d'une infirmation. Dès qu'on passe aux autres énoncés de base : "Tu as chaud", et *a fortiori* "Le soleil est chaud", un élément variable s'introduit dans la fonction propositionnelle et une quantification est requise pour fermer l'énoncé singulier, qui cesse de renvoyer nécessairement au vrai ; indication et expression ont respectivement pour objet l'état de choses et l'état du locuteur, c'est-à-dire une croyance. Étant donné que les états de choses singuliers qui nous sont accessibles ne constituent qu'une infime partie de la totalité des états de choses singuliers, objet idéal de la physique, l'appareil logico-mathématique avec les hiérarchies nécessaires pour lier les variables prend le relais de l'indication directe défaillante. Suites infinies d'individus, opérations infinies, ensembles postulés en l'absence de tout moyen d'en exhiber les éléments, tout ceci est sans doute exigé pour combler les lacunes de l'indication. Mais ces moyens relèvent de ce qui est subjectif pour la connaissance, c'est-à-dire de la seule expression, et restent sans correspondant dans l'être. Un esprit qui serait assez puissant pour se représenter simultanément tous les états de choses singuliers connaîtrait tout ce qui est sans s'embarrasser de logique ou de mathématiques. À supposer qu'il exprime sa connaissance dans des énoncés singuliers, ces derniers seraient dépourvus de variables ou, en tout cas, de variables autres qu'individuelles. Bref, pour revenir à l'ontologie conceptualiste, les universaux sont dans les choses au sens suivant : les choses sont toutes singulières et le seul universel qui soit en elles est la relation de ressemblance requise lorsqu'on répète le terme-objet "J'ai chaud" et qu'on l'oppose aux autres termes-objets. Quant aux universaux logico-mathématiques, naguère en charge de l'essence et de la nécessité, devenus de simples artifices produits par notre impuissance à énumérer les énoncés de base irréductibles aux termes-objets, ils relèvent, avec leurs hiérarchies et leurs horizons, de l'expression et, finalement, de la subjectivité humaine.

31 Au départ [Russell 1903] le logicisme de Russell s'accordait avec celui de Frege pour identifier l'idée de monde intelligible avec l'existence logico-mathématique. Tous deux — mais particulièrement Frege — l'avaient noté : les classes dans lesquelles s'incarne cette existence se distinguent des concepts qui les définissent en ce qu'elles éliminent en la nivelant la hiérarchie des niveaux conceptuels. Vient l'antinomie. Son propos de maintenir le monde des classes oriente Frege vers les solutions axiomatiques de la théorie des ensembles [Quine 1966, 148, 155 et 157]. Tout au contraire, suivant d'instinct la tendance constructive du conceptualisme, Russell adopte la théorie "pas de classe" dans laquelle prévaut la hiérarchie conceptuelle. Car ce qui spécifie l'affinité du conceptualisme avec le logicisme, c'est, dans ce dernier, la théorie des types. La théorie des types est caractéristique d'une constructionnisme plutôt que de

les mathématiques à la logique que pour retirer à l'existence non empirique toute raison d'être, mais l'esprit constructif de la théorie des types se heurtait aux difficultés de l'imprédicativité. Au delà du premier ordre, l'appareil de la quantification a une portée non plus analytique, mais existentielle : l'existence d'ensembles inéliminables répond aux instances de la quantité[32]. On ne maintiendra donc le logicisme en conservant le postulat d'intégralité que si l'on met en doute l'objectivité des instruments analytiques et en question les échecs provisoires de la construction. Les vérités mathématiques se réduiront toujours aux tautologies logiques, mais en principe seulement. Le scepticisme est la contrepartie de cette restriction.

Nous voici cependant acculés à un dilemme classificatoire. Si, comme le réalisme l'affirme, l'intégralité de la théorie des ensembles exige des concepts indéfinis incompatibles avec les normes constructives du logicisme, alors de deux choses l'une : ou bien le logicisme impose ces normes et il faut, avec le prédicativisme, renoncer au postulat d'intégralité, ou bien, avec le scepticisme, on force l'accord du logicisme avec ce dernier postulat en sacrifiant l'objectivité des normes. Où donc loger la syntaxe ? On va la voir, elle aussi, mettre en question la présomption d'incompatibilité entre logicisme et usage des concepts indéfinis. Mais la place, étroite et inconfortable, est déjà prise par le sceptique.

3. La syntaxe comme sophistique.

Quoiqu'il en soit, l'analyse d'un énoncé en termes d'apparence entraîne une conviction proportionnée à la sorte d'évidence qui s'attache à sa traduction en termes de signe, comme en fait foi l'analyse des descriptions définies, et puisque cette évidence fait défaut en matière de définitions imprédicatives, le scepticisme laisse, dans l'explication des apparences, une obscurité qu'un esprit positif souhaitera dissiper en apparence de problème.

C'est ce souhait que la syntaxe exauce. Il ne suffit pas de mimer fidèlement les concepts indéfinis du vrai et du bien dans un

---

l'intuitionnisme (comme le prétend Quine [1961, 125]) : les mathématiques prédicativistes forment une partie propre de la théorie des ensembles, ce qui n'est pas le cas pour les mathématiques intuitionnistes.

32 C'est à Quine, auteur de l'adage : «être, c'est être la valeur d'une variable» [en particulier Quine 1961], que revient le mérite d'avoir assigné à la quantification le critère de l'ontologie. On retrouve chez [Bernays 1935, 52-69] une conception semblable [cf. Vidal-Rosset (à paraître dans *Philosophia Scientiæ*), chap. 1, § 1.1 et 1.2] qui paraît donner précisément la mesure de la partie des mathématiques qu'une théorie prétend conserver.

système d'apparences sans répondant ontologique. Il faut encore que ces images d'artifice, indiscernables de la nature et de la vie si ce n'est par la modalité, se matérialisent dans un système de signes universellement communicable, et quel système serait à cet effet plus adéquat que les mathématiques mêmes ? Carnap accomplit le rêve des sophistes grecs : construire la mimétique de l'apparence dans une rhétorique exactement définie et en enseigner les leçons.

Irrité par tant d'intrusions philosophiques, le mathématicien au travail ne recouvre son autonomie que s'il se trouve affranchi non seulement de tout interdit qui entraverait ses démarches, mais encore de toute interprétation obligée qui viendrait à les croiser sous prétexte de les légitimer. La philosophie de l'indifférence restait une philosophie. "Pas de philosophie du tout", telle est sa seule convenance. La recherche insouciante que le doute ne minerait plus aurait alors accès à l'ensemble des mathématiques, spontanément organisé et articulé. À ce jeu, on gagnerait la même liberté de manœuvre dont jouit le réaliste dans son monde intelligible, mais sans acquitter l'impôt prétendument dû à l'existence. À toute assertion théorique, il faudrait donc faire correspondre une démarche pratique qui la mime sans frais, mais si parfaitement qu'on ne puisse distinguer l'apparence de l'original. L'artiste, en particulier, ne parviendrait à se fins qu'en fabriquant des images indiscernables de la nature et de la vie, en sorte que la classification résultante, tout artificielle qu'elle soit dans son origine et dans ses procédés, ne manquerait pas de prendre en charge toutes les fonctions réputées naturelles. Ainsi et ainsi seulement, lois et conventions feraient l'office de la chose même et les problèmes d'existence se résoudraient en apparence de problèmes[33].

4. Nature proprement philosophique de la question d'existence : à qui, du philosophe réaliste et du sophiste, incombe le poids de la preuve ?

Irréductibles aux tautologies logiques, les vérités mathématiques portent, selon le réalisme, sur l'existence d'objets spécifiques. On appelle *intuition intellectuelle* la connaissance qui la révèle. C'est là, répliquait le sceptique, une apparence que suscite l'objectivation irrecevable de l'appareil analytique. Mais remplaçons cette apparence par la formule qui la traduit publiquement dans la langue de la syntaxe. Nous voici enfin en mesure d'assigner les termes de la comparaison entre réalisme et syntaxe.

---

[33] *Scheinprobleme.*

D'un côté le monde intelligible produit une image partielle de lui-même dans la connaissance : c'est l'intuition intellectuelle. De l'autre, la syntaxe produit une image de soi dans une partie de la langue objet. La réduction sophistique de la première de ces images à la seconde suppose une correspondance préalable adéquate, constitutive de la formalisation, cette fois entre monde intelligible et langue objet.

La comparaison est du ressort du philosophe, car le mathématicien ne s'inquiète pas de savoir s'il est légitime d'étendre les valeurs des variables à tel domaine et quelle ontologie lui convient. Et, puisque la syntaxe mime adéquatement la lettre des mathématiques réalistes, une seule question se posera : est-ce l'affirmation de réalité ou l'affirmation syntaxique qui va avec le plus de naturel et de conviction à rendre compte des mathématiques telles qu'elles sont et telles qu'elles furent. Bref, à qui incombe le poids de la preuve ?

La question de savoir si la mimétique de l'apparence a valeur de réalité se précise alors dans les termes suivants :

1. Est-ce selon la vue réaliste ou selon la vue syntaxique que la corrélation préalable entre monde intelligible et langue objet s'accorde le plus naturellement avec le postulat d'intégralité ?

2. Cette même corrélation recommande-t-elle d'abandonner le logicisme ou de le maintenir ?

3. Et, puisqu'elle autorise décidément l'usage de concepts et de langages indéfinis, plaide-t-elle en faveur de l'intuition des contenus ou de leur élimination ?

Si la syntaxe l'emportait, la mimétique de l'apparence serait indiscernable de la chose et la question de l'existence mathématique devrait être regardée comme dépourvue de sens. On va montrer que, dans les trois cas, c'est au sophiste qu'incombe le poids de la preuve.

IV. Conclusion : le poids de la preuve incombe au sophiste

1. Il lui incombe pour le postulat d'intégralité.

Supposons qu'on s'en tienne à une langue objet restreinte et "définie" — telle que L I —, ainsi que font tous les philosophes qui, pour s'assurer des fondements certains, amputent les mathématiques classiques ou la théorie des ensembles. On priverait alors la langue objet de certains des signes ou des énoncés qui sont requis lorsqu'on veut «ne renoncer à aucune part de l'héritage du passé» [Bourbaki

1984, 51]. Le choix d'une langue suffisamment riche s'entend naturellement lorsque il est dicté par la richesse des contenus. En revanche, la mimétique formaliste qui n'obéit qu'à des conventions arbitraires, ne satisfait à la condition d'intégralité qu'en violant constamment le principe de tolérance requis par le conventionnalisme de la syntaxe et en choisissant systématiquement les langages les plus riches. Or rien dans la seule forme du langage ne condamne le choix de la parcimonie ou de la pauvreté.

Que le poids de la preuve incombe à la syntaxe devient particulièrement clair quand réalisme et syntaxe disputent à l'intuitionnisme ses décisions singulières en matière d'intégralité. Gödel et Carnap se sont également opposés aux mathématiques déviantes. Ils ont également cherché à apprivoiser leurs collègues intuitionnistes en traduisant leur idiome exotique dans le langage commun. Ils ont également échoué dans leur recherche. Leur entreprise, cependant n'est pas également justifiable.

Gödel a constaté l'instabilité des traductions qu'il propose[34]. Il y a plus, puisqu'on peut étendre la théorie intuitionniste des nombres, traitée comme un sous-système de la théorie classique, en sorte de faire diverger les deux théories : les mathématiciens intuitionnistes ne se contentent pas de refuser une partie des théorèmes classiques , ils "ramifient" les notions classiques, et le changement de portée des principes autorise des développements divergents [Kleene 1952, 314 ;

---

[34] On démontre que, pour le calcul propositionnel, entre le système avoué par les intuitionnistes [cf. Heyting 1930] et le calcul ordinaire il y a une infinité de systèmes, c'est-à-dire une suite monotone décroissante de systèmes qui contiennent tous le premier et sont tous contenus dans le second [Gödel, 1931-32, 40]. D'autre part, «si on fait correspondre aux concepts fondamentaux du calcul propositionnel [intuitionniste] ceux qui sont désignés de la même façon [c'est-à-dire l'implication, la conjonction et la disjonction] dans le calcul propositionnel classique et à l'absurdité (intuitionniste) la négation (classique), le calcul propositionnel intuitionniste se présente comme un système partiel propre du calcul ordinaire». Mais pour une autre traduction des concepts, c'est inversement le calcul classique qui devient un système partiel du calcul intuitionniste [Gödel 1931-32, 34-38]. Il y a plus, car ces traductions s'étendent au calcul des prédicats, en sorte que «*l'arithmétique et la théorie intuitionniste des nombres ne sont qu'en apparence plus étroites que leurs correspondants classiques : mais en réalité elles les contiennent tout entières, simplement avec une interprétation déviante.* La raison de ceci tient à ce que l'interdiction intuitionniste de nier des propositions universelles et d'asserter des propositions purement existentielles (la loi (x) P(x) → (∃x) P(x) n'est pas valide, à la différence de sa converse ; il en va de même pour la loi $\overline{(\exists x)\overline{Px}} \rightarrow (x)Px$ est annulée dans ses effets par la possibilité d'appliquer le prédicat d'absurdité aux propositions universelles, ce qui conduit formellement exactement aux mêmes propositions qui sont assertées par la mathématique classique» [Gödel 1931-32, 37].

Bourbaki 1984, 55].Mais ce double échec est ce qui justifie précisément le réaliste dans son essai infructueux pour comprendre et dans son refus d'accepter un essai qui détruirait l'unité et la vérité des mathématiques. Identifier vrai et démontré pour conclure au statut logique différent des énoncés particuliers et des énoncés généraux, dit de son côté Carnap, c'est ignorer les ressources de la syntaxe arithmétisée [Carnap, LSL, § 43 p. 162][35]. Pour conclure, ce n'est pas une question théorique entraînant le choix entre le vrai et le faux, qui oppose partisans et adversaires du tiers exclu. Faut-il s'en tenir à un langage défini et refuser le tiers, ou faut-il admettre, avec le tiers, un langage indéfini, là est la question. Il s'agit d'un choix de langage et d'un différend pratique et les chamailleries de syntaxe sont du ressort du principe de tolérance [Carnap, LSL, § 45 pp. 164-167]. Mais pourquoi la tolérance recommanderait-elle l'acceptation du tiers exclu ?

2. Il lui incombe pour l'hypothèse logiciste.

Nous dénions spontanément toute portée ontologique aux tautologies et aux contradictions logiques. Valables pour tous les individus ou pour aucun d'eux, les concepts ne trouvent ici d'occurrence que formelle. Qu'un système complet corresponde à la logique ainsi entendue est dans l'ordre des choses : là où vrai et démontrable coïncident, nulle surprise en effet n'attend la pensée, quelque patience qu'exige l'analyse d'une identité logique compliquée, en l'absence d'un procédé de décision.

Les propositions de l'arithmétique ne sont pas universellement valides ou contradictoires. Cette différence entre axiomes

[35] Le texte visé est probablement celui de [Weyl 1925, 21] : «Le "il existe" (à savoir : une suite ayant la propriété E) nous fixe dans l'être et la loi ; le "chacun" (à savoir : une suite ayant la propriété non-E) nous place dans le devenir et la liberté». Weyl distingue 1) *le jugement* véritable ou énoncé numérique déterminé (17+1 = 1+17), 2) l'*abstrait de jugement* ou énoncé particulier $((\exists x)(17+x = x+17))$, 3) l'indication de jugement ou énoncé universel $((x)(17+x = x+17))$. Supposer la validité du tiers exclu, c'est poser :

$(\exists x)(17+x = x+17) \vee \sim(\exists x)(17+x = x+17)$.

Dans le cas présent, l'affirmation est fondée. Elle ne l'est pas en général, car ce serait affirmer que, pour tout problème, on sait remplacer un abstrait de jugement par un jugement. En même temps, tandis qu'on passe de l'énoncé particulier au jugement en exhibant un nombre unique, démontrer un énoncé universel exige une infinité dénombrable d'exhibitions [Weyl 1921, 54-57]. Dans les deux cas, répond Carnap [Carnap, LSL, 162], il faut découvrir un élément ayant une propriété définie donnée dans une classe dénombrable. La démonstration d'existence d'un tel élément définit en syntaxe une classe unique de questions.

arithmétiques et vérités logiques pose précisément la question de savoir s'il existe une interprétation qui vérifie ces axiomes et si elle est unique. On a vu le réalisme suivre ici l'articulation naturelle que fournit l'opposition entre une logique complète et des mathématiques incomplètes. Soucieuse de neutralité existentielle, la syntaxe minimise l'opposition. Ainsi elle écarte la difficulté majeure, d'ordre arithmétique, qu'exprime l'axiome de l'infini [Carnap, LSL, § 33 p. 97 (5, (a))] en construisant la langue objet de la science comme une langue de coordonnées [Carnap, LSL, § 3 pp. 12-13 (L I) et p. 45 (L I et L II)]. Les coordonnées distinguent clairement d'une part la détermination des situations, dépourvue de conséquence ontologique et qui relève de la logique *et* de l'arithmétique, c'est-à-dire des mathématiques, d'autre part les relations qualitatives empiriques dont la détermination pour telle situation décrit l'état de l'univers. L'infinité des positions relève des vérités analytiques, les déterminations des relations qualitatives ressortissent aux vérités synthétiques [Carnap, LSL, § 12 p. 32].

La cause est-elle entendue ? On peut en douter pour deux raisons. Parmi les quatre règles [Carnap, LSL, § 38a p. 141 et § 79 pp. 306-307] d'inférence que Carnap énumère pour le langage L I, les deux premières portent sur les connecteurs propositionnels et le *modus ponens*, les deux autres sur la substitution d'expressions numériques aux variables numériques et sur l'induction complète. Mais leur réunion dans une même rubrique ne fait-elle pas violence au sentiment qui nous porte à regarder les premières comme logiques, les secondes comme arithmétiques, et qu'étayent ou sanctionnent les arguments de Poincaré et les théorèmes gödeliens ? En second lieu, Hilbert avait déjà noté qu'il était nécessaire d'interpréter par leur contenu intuitif certains signes d'une expression formelle sous peine d'ambiguïté (par exemple le signe d'identité pour déterminer la cardinalité du domaine d'un prédicat) [Vuillemin 1972, 295]. La même contrainte s'applique aux signes du calcul des prédicats du premier ordre au regard de la formalisation mathématique. Et cette interprétation matérielle obligée ne marque-t-elle pas qu'on n'a pas encore quitté le domaine de la logique ?

On s'est étonné de constater le triomphe du formalisme et de la formalisation en philosophie après les théorèmes négatifs de Gödel. Cet étonnement indique à qui il incombe de relever le défi.

3. Il lui incombe encore pour le mythe formaliste de la connaissance.

Reste à savoir si la formalisation conserve ou élimine les contenus du monde intelligible. Dans le premier cas, ces contenus appellent une connaissance *sui generis* sinon dépourvue de données matérielles, du moins irréductible à celles ci et en même temps transcendante à une simple construction intellectuelle. Dans le second cas, la formalisation se suffit à elle-même. Le formaliste s'assurerait donc tout d'abord l'avantage sur le réaliste. Occupé de l'image que le monde intelligible imprime dans son esprit et qu'il nomme *intuition intellectuelle*, le second se trouverait inexorablement engagé à sonder les arcanes de la connaissance, tandis que l'image sémiotiquement déterminée de la syntaxe dans le langage mathématique objet affranchirait son adversaire de toute obligation spéculative. Et qu'est-ce au juste que l'intuition ? L'enquête de Hadamard [Hadamard 1945] l'a compromise avec la psychologie. En quête de «fondement rationnel» pour les contenus mathématiques, Gödel invoque une «perception directe de la vérité», en vertu «de la signification des termes» ou «de l'intuition des objets qui tombent sous ces derniers» [Gödel, M, § 31 p. 16]. Il conclut sa défense des contenus [Gödel, M, § 46 (?) p. 22] sur une analogie malheureuse entre monde sensible et monde intelligible. Ainsi suggérée, la métaphore des «yeux de l'esprit» [Bourbaki 1984, 52] lie presque inévitablement l'intuition à des organes inconnus mais définis, qui enferment les fonctions de la connaissance dans des limites assignées *a priori*. Or cette métaphore, caractéristique de l'intuitionnisme, contredit d'emblée le principe philosophique du réalisme. Définir *a priori* les formes d'une intuition non empirique, n'est-ce-pas, en effet, revenir aux chimères d'un sensible immatériel, mais domestiqué puisqu'il est à présent subjectif comme sont explicitement présentés le temps et l'espace kantiens ou le temps brouwerien ? N'est-ce-pas imposer des bornes assignées de toute éternité par la constitution de notre esprit à la connaissance, et débouter cette dernière de sa prétention à se représenter des contenus qu'elle ne constitue pas, mais qu'elle reçoit ?

Sous peine de borner la liberté intellectuelle que requiert le postulat d'intégralité, il faut donc, tout en fixant à l'intuition intellectuelle son objet de départ, faute de quoi son concept serait dépourvu de précision, l'ouvrir à l'évolution des mathématiques et la ressaisir dans son adaptabilité. Et puisque la marque distinctive des mathématiques est l'infini, on aura assigné les deux conditions que doit remplir l'intuition intellectuelle en lui attribuant comme objets possibles deux sortes de concepts, les concepts abstraits et les concepts transcendants, selon que leur extension relève de l'infini potentiel ou de l'infini actuel [Gödel, M, note 19 p. 26]. Les concepts abstraits fixent sans ambiguïté le point de départ de l'intuition. «*Preuve* et *fonction* sont des exemples de concepts abstraits, si l'on comprend ces termes dans leur signification originelle qui les dote d'un contenu, c'est-à-dire si *preuve* signifie non pas une suite d'expressions satisfaisant à certaines conditions formelles, mais une suite de pensées convainquant un esprit sain, et si *fonction* signifie non pas une expression du formalisme, mais une règle intelligible et précise associant des objets mathématiques à des objets mathématiques (dans le cas le plus simple, des entiers à des entiers)». Le concept s'explique par lui-même. Il devient transcendant lorsqu'on lève les conditions qui restreignent son emploi. «Comme exemple de concept transfini (c'est-à-dire non constructif), citons, dit Gödel, "il existe", si cette expression signifie l'existence objective sans qu'on tienne compte de la possibilité de produire effectivement ce dont l'existence est affirmée» [Gödel, M, note 19 p. 26].

À quoi Bourbaki répond qu'«en pure doctrine formaliste, les mots "il existe" dans un texte formalisé n'ont pas plus de "signification" que les autres, et (qu')il n'y a pas à considérer d'autre type d'"existence" dans les démonstrations formalisées» [Bourbaki 1984, 57*]. Cette réplique le fait bien voir : devant le réaliste encombré d'épistémologie et de théorie, le sophiste n'a pour vaincre qu'à veiller à l'efficacité pragmatique des formules. Observons leur combat. Comme il convient, il s'engage d'abord sur les hauteurs pour s'assurer de l'induction complète. Descendu dans la plaine, il aura pour prix la règle élémentaire du *modus ponens*.

1. La démonstration de l'induction complète

Pour illustrer ce qu'est l'intuition intellectuelle d'un concept transcendant, Gödel choisit la définition logiciste ou plutôt ensembliste des nombres naturels à partir des notions d'hérédité dans une série ou de chaîne, telles que les ont introduites Frege et Dedekind, et dont l'induction complète est conséquence [Gödel, M, § 31 p. 16 et note 32 p. 29]. Il ne s'agit plus ici de rappeler que les preuves de non contradiction en arithmétique formelle sont moins convaincantes que les certitudes immédiates de l'arithmétique matérielle [Gödel, M, § 44 pp. 20-21], non plus que d'adopter le point de vue de Poincaré en évoquant l'expérience mathématique des concepts abstraits. Car de quelle intuition peut-on parler, lorsqu'on démontre le principe d'induction complète à partir d'une théorie des ensembles ? Non plus de l'intuition sensible qui va des parties au tout et qui manifeste précisément la puissance de l'esprit dans l'acte d'une construction que sa répétition n'épuise jamais. L'intuition désormais requise est, en effet, intellectuelle ; à la différence de l'infini potentiel, elle fonde la réitérabilité de l'action sur l'existence préalable et actuelle du dénombrable, seule apte à se monnayer dans la potentialité, et elle va donc du tout aux parties. Qu'on parte alors du concept de nombre inductif ou de l'identité entre nombre fini et nombre d'une classe non réflexive, l'intuition, immobile et existentielle, a maintenant pour objet le concept abstrait de l'infini dénombrable. C'est sur cette assise objective et sur elle seule que reposent les actes de connaissance partiels et subjectifs, objets de l'intuition sensible et que prennent comme principes ceux qui assimilent la possibilité de l'expérience à la possibilité de son objet.

En subordonnant les concepts finis aux concepts abstraits et transcendants et les concepts abstraits aux concepts transcendants, contrepartie de la hiérarchie des infinis cantoriens, l'intuition intellectuelle, qui porte moins sur l'acte de la connaissance que sur sa justification ontologique, prend la mesure de ce qu'il reste de problématique dans la perception directe de la vérité. L'intuition intellectuelle est sûre en tant qu'elle dépend d'une démonstration : l'objet d'évidence est conséquence d'axiomes spécifiquement théoriques. Mais ces axiomes appartiennent à une théorie qu'on a dû formaliser pour éviter les antinomies. Ils ne sont donc pas généralement eux-mêmes objets d'intuition : c'est l'intuition intellectuelle de leurs conséquences qui les rend plausibles. Non seulement l'intuition n'a pas prise sur l'unité du monde intelligible, mais il ne lui est donné d'en ressaisir les fragments qu'au moyen de la formalisation. La pensée prend, pour ainsi dire, possession d'elle-même à travers l'inadéquation du langage, et non plus en laissant cette inadéquation de côté. Penser un concept abstrait ou transcendant, c'est-à-dire existant, c'est alors se représenter simultanément la distinction rigoureuse de la syntaxe et de la langue-objet et le rapport nécessaire, mais indéterminé de la langue objet avec une axiomatique matérielle, contradictoire en sa totalité, mais à une partie de laquelle l'inadéquation propre à la langue objet témoigne qu'il faut recourir. Le *Je pense*, sans lequel cette représentation simultanée ne serait pas possible, ne saurait la produire ni comme idée claire et distincte, ni comme construction contrôlée d'un divers intuitif. Même quand il se borne au nombre, le pouvoir de connaître rencontre un objet qui le transcende et exclut une détermination complète. Comme l'écrit Bernays, en songeant à la preuve cantorienne de la non dénombrabilité du continu fondée sur l'insuffisance de toute suite dénombrable de points [Bernays 1960, 327-328], «par la méthode axiomatique il est possible de donner des définitions de structures ; on peut, par exemple, caractériser les ensembles bien ordonnés ; de même, on peut définir ce qu'est le continu, ce qu'est un ensemble fini, ce qu'est la structure topologique de l'espace euclidien, etc. Mais ces définitions n'ont pas d'équivalents suffisants quand il s'agit d'opérer avec des systèmes formels. La raison en est qu'elles s'appuient sur un concept illimité de prédicat, ou d'ensemble, ou de suite» [Bernays 1960, 327]. L'intuition porte directement sur les conséquences, indirectement sur les principes, et l'expression des définitions est inévitablement inadéquate. Dans l'exposé de ces difficultés tient le plaidoyer réaliste en faveur des contenus et d'une connaissance en retard sur l'être.

Qu'à la place du mouvement de la connaissance et de l'être s'instaure maintenant le jeu de la syntaxe et de la langue objet ! Les difficultés se dissipent, simples conséquences de la hiérarchie des langages. Mais n'a-t-on pas trop beau jeu à ne rien risquer ? La syntaxe, à vrai dire, n'a pas à déduire l'induction complète, puisqu'elle l'introduit comme règle dans la langue L I en termes de substitution [Carnap, LSL, § 30, PS II 20 p. 92] ou comme énoncé primitif dans la langue L II en termes de quantification [Carnap, LSL, § 12, R I 4 p. 32]. La difficulté pourtant surgit au moment où l'on démontre l'analyticité de l'énoncé primitif. D'une expression objet qui limite la quantification au premier ordre, on passe subrepticement [Carnap, LSL, § 34 h. 1 p. 121], pour construire le critère d'analyticité, à une expression syntaxique où la quantification s'étend aux prédicats. Pour prouver que le critère est rempli, on se donne dans la langue-syntaxe le principe d'induction dont il s'agit de démontrer l'analyticité dans la langue objet [Carnap, LSL, § 34 h., Theorem 34 h. 1 p. 122]. On apaise sa conscience en croyant pouvoir tirer profit de la malencontreuse élimination russellienne des classes remplacées par leurs concepts [Carnap, LSL, § 38 pp. 136-140] et, pour faire bonne mesure, en invoquant à cet effet l'autorité de Gödel [Carnap, LSL, § 38 p. 139]. De même le principe de sélection (choix) doit être supposé dans la langue-syntaxe pour qu'on puisse prouver son caractère analytique dans la langue objet [Carnap, LSL, § 34 h. p. 121].

Pour justifier ces formulations et ces démonstrations, Carnap remarque «que la possibilité de prouver un certain énoncé syntaxique dépend de la richesse du langage syntaxe qu'on utilise, et particulièrement de ce qui est tenu pour valide dans ce langage... Nous pouvons développer dans notre langage syntaxe S (pour lequel nous avons pris ici un langage verbal non strictement déterminé) la preuve qu'un certain énoncé $\underline{S}_1$ du langage objet II est analytique, si, en S, nous disposons d'en certain énoncé, à savoir de cet énoncé particulier de S qui (en traduction ordinaire) est traduisible dans l'énoncé $\underline{S}_1$ de II ... On ne doit pas interpréter les preuves des théorèmes 1 et 2 comme s'il était prouvé par leur moyen que le principe d'induction et le principe de sélection seraient matériellement vrais. Ils montrent seulement que notre définition d'"analytique" produit sur ce point ce qu'elle était destinée à produire, à savoir, la caractérisation d'un énoncé comme analytique, si, lorsqu'on l'interprète matériellement, on le regarde comme logiquement valide» [Carnap, LSL, § 34 h., Theorem 34 h. 2 p. 124].

La preuve de Frege et de Dedekind ne consiste pas, 1) la validité logique du principe d'induction étant supposée informellement, et 2) l'énoncé $\underline{S}_1$ étant accepté comme sa traduction formalisée, à démontrer de façon informelle que $\underline{S}_1$ est analytique. Elle vise à démontrer le principe d'induction à partir de concepts et d'axiomes ensemblistes qui ne le supposent pas. Lorsque Poincaré s'oppose à la démonstration réaliste, il lui objecte de bouleverser l'ordre et de rejeter en conclusion ce qui est clair et distinct en prenant ce qui est problématique comme principe. Le reproche est fondé et l'on peut seulement lui opposer les droits hiérarchiques qu'une théorie générale des mathématiques s'arroge même à l'égard de l'arithmétique. Quant à la preuve d'analyticité présentée par Carnap, Poincaré l'eût rejetée comme sophistique sinon comme vicieuse, puisqu'elle suppose dans la syntaxe la validité logique de ce dont elle prouve, toujours dans la syntaxe, l'analyticité objective. La difficulté désigne pour le moins celui auquel incombe le poids de la preuve[36].

2. La règle du détachement (*modus ponens*)

Reste le recoin des règles élémentaires où le sophiste peut se tapir encore. Gödel, pour le déloger, choisit la plus simple d'entre elles, le *modus ponens*. Donné un énoncé conditionnel et sa prémisse, on est en droit de détacher le conséquent, prémisse et conséquent pouvant contenir des concepts indéfinis [Gödel, M, note 32 p. 29]. Le détachement permet à Euclide (IX 20) d'affirmer inconditionnellement l'infinité des nombres premiers sans avoir à rappeler que tout nombre composé est mesuré par quelque nombre

---

[36] On a justement remarqué que la double relativité des cardinaux infinis et finis ne fournit aucun argument décisif aux diverses philosophies des mathématiques [Fraenkel/Bar-Hillel 1958, 169]. Le formaliste, en particulier, rencontre ici la même difficulté que le réaliste. Mais l'interprétation qu'il donne peut servir de pierre de touche pour savoir si l'analyse syntaxique reste apte à mimer la découverte mathématique, une fois que la formalisation a effacé dans la langue objet toute distinction entre les rôles respectifs de l'être et de la connaissance propres à la démonstration. Carnap construit, en virtuose, dans la langue syntaxe, deux concepts d'isomorphie. Le premier recouvre l'usage du concept d'isomorphie ordinaire de la langue objet, non le second, qualifié, pour cette raison, de concept d'isomorphie syntaxique. En conséquence, si le premier concept est établi, le second l'est aussi, mais la réciproque n'est pas valable [Carnap, LSL, §71 a-d pp. 260-270, en particulier p. 266]. L'inadéquation formaliste entre les deux isomorphies dans la langue syntaxe mime l'inadéquation réaliste entre conclusion enrégimentée dans la formalisation et contenu intuitif correspondant. Cette dernière inadéquation, à son tour, dessine naturellement la frontière mouvante entre être et connaissance. Au formaliste à prouver alors, et sans faire intervenir de contenus, que les conventions reproduisent adéquatement la hiérarchie des langues syntaxiques.

premier (VII 31). Bien sûr, le conséquent ne peut être détaché qu'à partir d'une prémisse-axiome, elle-même préalablement assurée. Lorsqu' Euclide démontre (XIII 18) qu'il y a cinq polyèdres réguliers et cinq seulement, il suppose la validité du postulat des parallèles. Mettre en cause cette validité, c'est interdire ici le *modus ponens*. Ainsi certaines théories mathématiques — telle la géométrie — dépendent de principes dont on ne peut affirmer la vérité, donc d'hypothèses ou "assomptions" [Gödel, M, § 31 p. 16] dont on ne peut détacher les conséquences. L'"implicationnisme" généralise ce procédé et renonce à détacher quelque théorème que ce soit, le mathématicien se bornant à les dériver formellement à partir des axiomes [Gödel, M, note 13 p. 24 avec référence à Karl Menger].

Tant que le choix entre principes se rapporte à une partie circonscrite des mathématiques, les démonstrations de non contradiction relative ou d'indépendance qui lui sont liées reviennent simplement à classer les subdivisions d'un concept, ainsi qu'il arriva au XIX$^{\text{ième}}$ siècle avec le concept d'espace à courbure constante. Autrement sérieuse est la situation quand la pluralité des modèles engage l'ensemble des mathématiques. La question se pose alors de choisir l'hypothèse et de remanier éventuellement ou d'étendre les autres axiomes en sorte d'assurer à la théorie le maximum de richesse et de sûreté. Cette situation s'est rencontrée en théorie des ensembles, quand Gödel a démontré la non contradiction de l'hypothèse du continu [Gödel 1938 ; 1947], et elle caractérise la prise en compte des concepts indéfinis, si, comme on l'a dit, l'indéfinité est liée à la pluralité des modèles [Quine 1986, 646] : il y a une arithmétique et plusieurs théories des ensembles.

À première vue, la démonstration gödelienne de non contradiction, à laquelle s'est ajoutée celle de l'indépendance, invite à tenir pour arbitraire et conventionnel le choix entre les hypothèses possibles du continu [Fraenkel/Hillel 1958, 80]. Le réaliste ne l'entend pas de la sorte. Il regarde les axiomes de la théorie des ensembles comme vrais ou faux, l'indécidabilité de la conjecture cantorienne à partir de ces axiomes indiquant seulement que ces derniers «ne contiennent pas une description complète de la réalité» et qu'il peut exister d'autres axiomes «qu'une compréhension plus profonde des concepts sur lesquels logique et mathématiques reposent nous mettrait en état de reconnaître comme impliqués par ces concepts» [Fraenkel/Bar-Hillel 1958, 93 ; Gödel 1947, 39-40]. La décision nous échappe présentement, comme il arrive toujours dans quelques unes au moins des prémisses qui marquent la frontière actuelle de la théorie [Gödel, M, note 39 pp. 31-32].

Refuser l'implicationnisme au nom des contenus et du réalisme, c'est reconnaître que des axiomes intuitifs coexistent avec des axiomes problématiques. C'est le contenu des seconds dont le génie mathématique révèle la mesure dans une conjecture, bien avant que suive la démonstration. C'est lui qui oriente le mathématicien dans l'inconnu, car les conjectures s'expriment dans le mode matériel, et leur traduction dans le mode formel, quand vient la confirmation ou la réfutation, exige souvent des langages tant objets que syntaxiques aussi distants de l'expression de la conjecture que le sont les événements des prophéties, ou, plus exactement nos avions et nos fusées des dessins des machines volantes selon Vinci.

Le formaliste partage certes avec le réaliste la loi logique du détachement. Mais l'appliquent-ils de la même façon ? Les mêmes axiomes les conduisent sans doute aux mêmes conséquences. Mais, selon qu'on lira les axiomes comme des formules ou comme des contenus, on en détachera, dans le premier cas un lot de formules homogènes et également indépendantes, dans le second les seuls contenus dépendant d'axiomes non problématiques. Le détachement formaliste n'est qu'un jeu, la science sérieuse et objective se limitant aux relations formulaires entre hypothèses et thèses. On n'échappe pas à l'implicationnisme, dès lors qu'on s'interdit de faire appel aux contenus. Implicationnisme et tolérance ne font qu'un[37]. Ce que les contenus donnent automatiquement au réaliste, c'est un stock croissant de conséquences détachées, sur lesquelles la connaissance prend appui pour délimiter le système formel au moyen duquel elle exprimera provisoirement ce qu'elle saisit de l'unité du monde intelligible, pour y distinguer donc ce qu'elle doit postuler de ce qu'elle peut comprendre et pour déterminer cette intégralité des mathématiques qu'elle s'impose de conserver. Le formaliste a la charge d'expliquer cela, sans faire intervenir les contenus, et d'esquisser également une image plausible des mathématiques préformalistes et de leur histoire.

---

[37] Carnap fait l'éloge de la tolérance et donne précisément en exemple Menger, lorsque ce dernier réfute les prétentions intuitionnistes en distinguant un usage étroit et un usage large des constructions [Carnap, LSL, § 17 p. 52]. C'est que nous n'assertons pas vraiment la condition dans une règle de construction ; nous assertons seulement le rapport de la condition à son conditionné, et, dès lors, toutes les règles se valent, même si elles ont des portées très différentes.

Bibliographie

Bernays, P.

1934 Cf. [Hilbert 1934]

1935 Sur le Platonisme dans les mathématiques, *L'enseignement mathématique*, n° 34, 52-69.

1960 Cf. [Ladrière1960].

Beth, E. W.

1959 *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam : North-Holland Cy.

Borel, E.

1950 *Leçons sur la théorie des fonctions*[4], Paris : Gauthier-Villars.

Bourbaki, N.

1984 *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris : Masson.

Carnap, R.

1930-31 Die Mathematik als Zweig der Logik, *Blätter für deutsche Philosophie*, 4, Berlin, 298-310.

(LSL) 1937 *The Logical Syntax of Language*, London : Routledge and Kegan, désormais cité : LSL.

1960 *Symbolische Logik*[2], Wien : Springer.

Church, A.

1956 *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton : Princeton Un. Press.

Fraenkel, A.

1928 *Einleitung in die Mengenlehre*[3], Berlin : Springer.

Fraenkel, A & Bar-Hillel, Y.

1958 *Foundations of Set Theory*, Amsterdam : North Holland Cy.

Gödel, K.

1930 Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37, 349-360.

1931 Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I, *Mh. Math. Physik*, vol. 38, 173-198.

1931-32 Zum intuitionistischen Aussagenkalkül, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 1-5, Leipzig : Deutsche.

1938 The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, *Proc. Nat. Acad. of Sc.*, vol. 24.

1944 Russell's Mathematical Logic, *in* : *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. by P. A. Schilpp, V, Evanston - Chicago, 123-153.

1947 What is Cantor's Continuum Problem ?, *Amer. Math. Monthly*, vol. 54.

(M) 1995 Les mathématiques sont-elles une syntaxe du langage ?, *Dialogue* XXXIV (1995), 3-34, trad. D. Fagnot – G. Heinzmann, cité : M.

Grzegorczyk, A.

1961 *Fonctions Récursives*, Paris/Louvain : Gauthier-Villars/Nauwelaerts.

Hadamard, Jacques

1945 Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique, Trad. fr. Jacqueline Hadamard, Paris : Gauthier-Villars, 1975.

Heinzmann, G. & Proust, J.

1988 Carnap et Gödel. Échange de lettres autour de la définition de l'analyticité, Intr., trad. et notes par Gerhard Heinzmann & Joëlle Proust, *Logique et Analyse*, vol. 31 pp. 257-291.

Heyting, A.

1930 Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, II, Phys. math. Klasse, 42-56.

Hilbert, D. & Ackermann, W.

1950 *Principles of Mathematical Logic*, ed. R. E. Luce, New-York : Chelsea Cy.

Hilbert, D. & Bernays, P.

1934 *Grundlagen der Mathematik* I, 2. Aufl., Berlin - Heildeberg – New York : Springer, 1968.

Kleene, S. C.

1967 *Mathematical Logic*, New York : John Wiley and Sons.

1971 *Logique mathématique*, trad. J. Largeault , Paris : Armand Colin.

Ladrière, J.

1957 *Les limitations internes des formalismes*, Louvain/Paris : Nauwelaerts/Gauthier-Villars.

1960 Les limitations des formalismes et leur signification philosophique, *Dialectica*, 14, 4, 279-328.

Quine, W. v. O.

1961 *From a Logical Point of View* [2], Cambridge : Harward Un. Press.

1966 On Frege's Way Out, *Selected Logic Papers*, New York : Random House.

1986 Reply to Hao Wang, *The Philosophy of W. V. Quine*, The Library of Living Philosophers, Vol. XVIII, ed. Hahn and Schilpp, La Salle : Open Court.

Ramsay, F. P.

1926 *Mathematical Logic, The Foundations of Mathematics*, Paterson : Littlefield - Adams, 1960.

Russell

1903 *The Principles of Mathematics*, London : Allen & Unwin.

1940 *Inquiry into Meaning and Truth* ; trad. Ph. Devaux, *Signification et Vérité*, Flammarion, Paris, 1959.

Vidal-Rosset, J.

A paraître *Philosophie des mathématiques et systèmes philosophiques. Essai sur les classifications de W. v. O. Quine et de J. Vuillemin* (à paraître dans *Philosophia Scientiæ*).

Vuillemin, Jules

1964 L'origine et le mécanisme des antinomies dans la première philosophie de Russell (1903), *Logique et Analyse*, 7^{e} année, n^{o} 25-26, 59-95.

1967 Sur les conditions qui permettent d'utiliser les matrices russelliennes des antinomies (1905) pour exprimer les Théorèmes de limitations internes des formalismes, *Notre-Dame Journal of Symbolic Logic*, vol. VII, n. 1, janv. 1967, 1-19.

1972 Das Problem der Identität in der Beweistheorie und die Kantische Fragestellung, *Kant-Studien*, 63, n^{o}3.

Weyl, H.

1921 Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, 39-79.

1925 Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik, *Symposion*, Bd. 1, 1-32.

Wittgenstein, L.

1921 *Tractatus logico-philosophicus*.